Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Logaritmi: come insegnarne l'utilità

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
LUISA BIAZZO

Sessione unica
Anno Accademico 2015/2016

"La ricerca della verità
è più preziosa del suo possesso"

Albert Einstein

Introduzione

A chi non comprende perché studiare matematica e come questa sia legata alla vita di tutti i giorni...
Galilei afferma, nella sua opera *Il Saggiatore*, che il libro della Natura è scritto con linguaggio matematico:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

O meglio, chi sa ragionare con i concetti matematici legge tramite questi filtri originali anche la Natura, e con questi studi la analizza e riesce a trovare soluzioni utili ai problemi della vita quotidiana (medicina, biologia, fisiologia, astronomia, tecnologia, osservazione di fenomeni naturali, prevenzione di calamità).
L'idea di costruire questo lavoro secondo una struttura che sia didattica e che avvicini la matematica agli studenti, anziché allontanarla...è nata da una domanda posta in un'aula di un Liceo Scientifico e dalla risposta dell'insegnante, rimasto un po' spiazzato da quella "curiosità fuori luogo" di uno studente, che stava solo tentando di far venire fuori il filosofo che è in lui, chiedendosi un naturale *"perché?"*...
L'osservazione che ne scaturisce è che spesso anche "noi matematici" dimen-

tichiamo che un legame tra ciò che insegniamo e ciò che vediamo esiste. E che dietro alle conoscenze che spieghiamo c'è un contesto storico e un lavoro di uomini che si sono fatti domande e che hanno cercato soluzioni.
E se rimaniamo tra le definizioni e i teoremi senza guardare negli occhi di chi cerca di comprendere qualcosa di più vicino alla vita comune... rimarremo lontani oltre che dalla realtà, anche da chi in quella realtà vive facendosi domande meno astratte...
La domanda era: *"Prof., chi ha inventato i logaritmi?"*, dettata forse da un tentativo di trovare una motivazione a quella ulteriore complicazione del linguaggio utilizzato in matematica... o forse da un reale e sincero bisogno di comprendere il perché, che doveva pur esserci se si decide di far studiare anche questo argomento...
La risposta, forse troppo sbrigativa, dell'insegnante è stata "Non c'è tempo per spiegare anche questo..." Quale può esser stata la reazione, forse non palesata né rivelata, e anzi celata, di quello studente e dei compagni... se non quella di sostenere con ancora maggior convinzione la teoria secondo cui "la matematica non ha riscontro pratico nella realtà in cui ci muoviamo"?
Come scrive il prof. Christian Bonfanti, insegnante di fisica e matematica, nel suo articolo *Una geometria della visione del mondo*: *"Dietro a queste domande c'è molto di più che una semplice ribellione all'astrazione matematica."*
L'errore di molti insegnanti sta nel porre l'attenzione sulla conquista e non sulla battaglia, sul risultato e non sullo sforzo compiuto da uomini del passato per costruirlo. Dare uno sguardo a ciò che hanno vissuto, leggere ciò che hanno scritto (alcuni di loro anche con una ironia sorprendente...) li renderebbe più vicini a noi, apparirebbero più familiari a quegli studenti che si approcciano spesso tentennando a ciò che "ci hanno lasciato da studiare".
Di certo agli occhi degli studenti, se non viene spiegato ciò che ci sta dietro, apparirà tutto astratto, freddo e inutilizzabile. Solo i pochi che vorranno approfondire gli studi scientifici ci vedranno forse alcune prospettive che aprono le porte all'astronomia, alla biofisica, alla biomedicina o alla ricerca scienti-

fica in generale.

La struttura di questo lavoro è organizzata secondo cinque tappe tematiche, una per ogni capitolo:

1. nel primo capitolo si approfondisce il tema della didattica della scienza;

2. nel secondo ci si avvicina all'argomento del Logaritmo dal mondo dell'Astronomia, che da sempre ha proceduto su una strada parallela a quella della matematica: in particolare si accennerà alla misura della magnitudine delle stelle;

3. nel terzo capitolo si entra nell'ambito della Fisica, nel quale il logaritmo è un oggetto matematico utile per rappresentare in maniera più semplice ed intuitiva alcune grandezze: si è analizzato in particolare il suo utilizzo nella misura dell'intensità del suono;

4. nel quarto capitolo si espongono alcune delle motivazioni per le quali in vari campi si sceglie di utilizzare il logaritmo e quali vantaggi apporti l'uso di una scala logaritmica invece di una lineare;

5. nel quinto ed ultimo capitolo si segue il percorso che ha condotto storicamente alla nascita e allo sviluppo degli studi di questo nuovo oggetto matematico, da Archimede a Chuquet, Stifel, Napier, Briggs fino a Torricelli.

Indice

Capitolo 1

La didattica e la storia della scienza

Volendo seriamente ricercare la verità delle cose, non si deve scegliere una scienza particolare, infatti esse sono tutte connesse tra loro e dipendenti l'una dall'altra. E ben presto ci si meraviglierà di aver fatto progressi di gran lunga maggiori di coloro che si interessano alle cose particolari e di aver ottenuto non soltanto le stesse cose da altri desiderate, ma anche più profonde di quanto essi stessi possano attendersi.

René Descartes

1.1 Il binomio Scienza-Storia

L'esperienza scolastica ci ha abituato a considerare la storia come la narrazione delle vicende degne di memoria della società umana; eppure raramente nei libri di storia, la scienza rientra tra ciò che è "degno di memoria". D'altra parte i manuali di scienza ci parlano di natura e di fenomeni fisici e chimici, di tecnologia e di biologia, ma non di *chi, perché, come e dove* se n'è occupato e dell'impatto sociale delle scoperte, se non talvolta in sintetiche note a piè di pagina.
Nell'ambito matematico questo è ancor più difficile, poiché non appena si

varca la soglia dell'astratto i riferimenti reali si allontanano sempre più, e può sembrare difficile, se non privo di scopo, il cercare di mantenere i contatti con la realtà in cui viviamo.
È però sempre più diffusa l'idea secondo cui l'introduzione della storia all'interno dell'insegnamento scientifico può aggiungere valore culturale all'apprendimento, generando un atteggiamento più critico e favorendo una concezione della scienza come un'attività umana in evoluzione. Si riesce, attraverso la storia e la filosofia, ad andare oltre una conoscenza puramente algoritmica, dando un significato più profondo alle teorie e ai concetti scientifici.
In genere la trasposizione didattica richiede di isolare gli argomenti e adattarli al contesto scolastico, ma questo può condurre a una presentazione che nasconde i riferimenti culturali e sociali dei problemi, in risposta ai quali le teorie scientifiche si sono formate, spesso accompagnate da un processo graduale di costruzione, correzione e riformulazione.
Il fisico e filosofo Ernst Mach al termine dell'800 elogiava la storia della scienza come il veicolo migliore per ottenere una comprensione genuina dei contenuti scientifici e riteneva che entrare in contatto con i diversi approcci con cui nel passato gli scienziati hanno trattato i problemi arricchisce le risorse di ragionamento e l'indipendenza di pensiero.
Michael Matthews scrive negli anni '90: la storia della scienza può contribuire a migliorare la comprensione della scienza nei suoi aspetti concettuali, procedurali e contestuali, può favorire un apprendimento meta-cognitivo e una migliore comprensione dei metodi scientifici, della natura della scienza, delle relazioni fra scienza, tecnica e società.
Molti problemi e modelli utilizzati nello sviluppo storico iniziale di un argomento scientifico sono in risonanza con i processi cognitivi degli studenti e con il pensiero comune, ovvero come dice Besson: "c'è una somiglianza fra il principiante e il pioniere".
La storia e l'analisi concettuale delle teorie fisico-matematiche possono aiutare a rispondere alle domande su "come sappiamo ciò che sappiamo" e "come lo abbiamo scoperto", domande che al giorno d'oggi purtroppo ben pochi si

pongono, preferendo utilizzare tutto ciò che trovano già pronto intorno a sé, senza chiedersi altro.
E allora, sarà didatticamente corretto lasciare che le rare domande che gli studenti si pongono e ci pongono rimangano senza una risposta?
Un insegnante, il prof. Gianfranco Zavalloni, in un suo articolo dal titolo *Perché si disimpara l'arte di far domande?*, parlando della "gioia di educare" si chiede:

> *È forse questo educare alla creatività? Far crescere coscienze critiche? Proviamo insieme a ripensare a quelle volte in cui per conoscere o sapere qualcosa, abbiamo domandato. La risposta di sicuro l'avremo incamerata e sarà diventata subito nostra! Motivazione, interesse, curiosità, tre molle importanti per apprendere.*

Bisognerebbe incoraggiare gli studenti a riconoscere e mostrare la loro curiosità, perché porsi domande è una naturale ed importante tendenza dell'uomo e il cercare risposte, e trovarne, ridarà fiducia a un mondo di giovani, oggi purtroppo sempre più scoraggiati e disillusi. Sarebbe ancora meglio se le risposte riuscisse a darle proprio un insegnante (piuttosto che una pagina web!) perché in questo modo anche la fiducia nell'essere umano rimarrà più stabile e duratura.

1.2 Quali domande?

Le domande che un ragazzo può porsi quando viene a conoscenza di una nuova scoperta sono domande con le quali cerca di avvicinarsi a quell'uomo o quella donna, a quel periodo storico, come viveva, cosa sognava, che uomo era…
Nel suo testo *Che cos'è la storia della scienza*, l'autrice Paola Govoni elenca una serie di domande sulle quali gli studiosi indagano:

- Come concepiva il mondo naturale uno scienziato o un gruppo di scienziati di un Paese? Che influenza ha avuto sulla scienza quell'immagine del mondo naturale?

- Quali ragioni - intellettuali, religiose, economiche, politiche o personali - hanno spinto uno scienziato a occuparsi di un particolare campo di studi o di un determinato fenomeno?

- Attraverso quali strategie cognitive, materiali e organizzative un gruppo di studiosi ha concepito un fenomeno, inventato uno strumento o una procedura di laboratorio? Quali furono gli elementi in gioco nel loro successo o fallimento?

- Come e perché la comunità scientifica ha accettato alcuni risultati e altri li ha respinti o ignorati?

- Quali percorsi segue una teoria scientifica nel passare dal laboratorio al giornale specialistico e poi a quello divulgativo? Quali cambiamenti subisce nel corso di quel tragitto in termini di contenuto e retorica?

1.3 La Storia della Scienza

Come rispondere a queste domande? A supporto degli insegnanti, degli studenti e di chiunque sia solito cedere alla propria curiosità, esiste una disciplina che si occupa proprio di approfondire da un punto di vista storico la scienza in generale e più in particolare le singole discipline specifiche.
Più volte nella storia si sono distinti alcuni personaggi che hanno voluto fermarsi a recuperare le conoscenze, raccogliere tutto ciò che fino ad allora si era studiato e scoperto, quasi a riassumere, rifare il punto di un determinato settore scientifico.

Un'attività, questa, che porta indubbiamente a un consolidamento, oltre che un conseguente rifiorire, proprio perché si riparte per procedere avanti, ma soltanto dopo aver controllato che i propri passi siano stati ben posti sul terreno.
Un esempio per tutti di tale rinnovamento si ha nel Medioevo, quando nello straordinario contesto degli studi astronomici, medici e matematici degli autori di lingua araba, fu recuperata una parte del patrimonio di studi e osservazioni sulla natura degli autori greci dell'antichità, con le prime edizioni e traduzioni, che sono poi diventati i nostri "classici" della scienza: Euclide, Apollonio, Archimede, Tolomeo...
Durante il Rinascimento europeo, l'attività di studio dei testi scientifici antichi, grazie anche alle traduzioni in volgare e all'invenzione della stampa, acquistò nuovo vigore e diede ulteriore diffusione agli scritti degli antichi rivisitati dai moderni.
Nel Seicento, con le prime accademie scientifiche, sorsero anche i primi giornali scientifici e con essi nacquero due nuovi generi: la *storia* - che in effetti era spesso una cronaca degli studi compiuti dai membri dell'accademia - e l'*elogio accademico*, in cui si raccontavano la vita e le opere degli accademici da poco scomparsi. Entrambi questi generi sono fonti preziose per gli storici di oggi. Fu poi soltanto nel Settecento che si cominciarono a pubblicare delle vere e proprie opere di storia delle scienze.
Il "padre fondatore" della disciplina nota come Storia della Scienza è considerato George Sarton, uno storico belga del secolo scorso, animato da un obiettivo: la costruzione di un ponte tra le discipline scientifiche, le discipline storiche e le scienze umane.
Altri contributi ci pervengono da Marc Bloch, per il quale il mestiere di storico è come quello di un artigiano che non può permettersi di tracciare confini invalicabili tra le discipline.
Anche James Conant riteneva che un nuovo dialogo tra scienza e storia fosse indispensabile per comprendere il presente e avrebbe giovato alla formazione di nuove generazioni piú consapevoli dei rischi e insieme delle enormi poten-

zialità della scienza e del suo ruolo nella società attuale.
Thomas Kuhn individua tre fasi attraverso cui la scienza procederebbe:

1. un primo stadio definito *"scienza normale"*, in cui i ricercatori condividono un paradigma, un insieme di valori, strumenti, istituzioni e metodi e sono impegnati nella soluzione dei problemi. Nella ricerca di soluzioni emergono spesso delle fratture che allontanano dal paradigma condiviso;

2. tale frattura porta spesso e ripetutamente ad una *"crisi del paradigma"*, per risolvere la quale è necessario ristabilire un equilibrio ed affermare un nuovo paradigma, una nuova visione del mondo;

3. si rende necessaria quindi una *"rivoluzione"* e una volta accettato il nuovo corpus, la comunità ha gli strumenti per procedere nella soluzione di una nuova serie di problemi.

Capitolo 2

Il percorso seguito in Astronomia

La sola giustificazione dei nostri concetti e dei sistemi di concetti sta nel fatto che essi servono a rappresentare il complesso delle nostre esperienze; oltre a ciò essi non hanno alcuna legittimità.
Albert Einstein

Nei calcoli astronomici è da sempre stata d'aiuto l'aritmetica, ma si trattava di un aiuto scomodo, come scrive Marie Boas nel suo testo *Il Rinascimento Scientifico*. Il calcolo astronomico è stato a lungo un compito estremamente laborioso al quale alcuni scienziati coraggiosi hanno deciso di dedicarsi.
Anche i calcoli astronomici più semplici coinvolgevano il settore dell'antica arte della trigonometria. Questa branca della matematica era stata infatti sviluppata dagli astronomi greci - in particolare da Ipparco e Tolomeo - per la necessità di misurare velocità sia lineari sia angolari.
In origine la trigonometria greca si era occupata della determinazione della lunghezza di un arco attraverso la misurazione della lunghezza della corda del cerchio in questione.

Se in figura un corpo si muove da A a B lungo l'arco della circonferenza, la distanza percorsa puó essere determinata o misurando l'angolo $A\hat{O}B$ e la lunghezza del raggio AO, oppure mediante raggio AO e misura della corda AB.

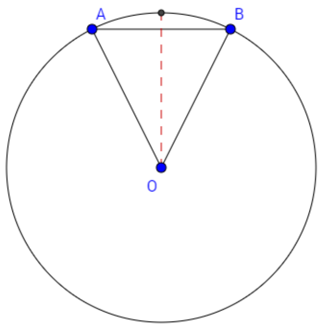

Figura 2.1: Misura delle distanze

Le tavole elaborate da Tolomeo davano la lunghezza delle corde in funzione del diametro della circonferenza, e la lunghezza dell'arco corrispondente a ciascuna corda.
Vari sviluppi successivi dovuti a studiosi indiani ed arabi condussero a una innovazione: dividere il triangolo in due metà, in modo da ottenere un triangolo rettangolo in cui si utilizzava la correlazione tra il semiangolo al centro della circonferenza ed il raggio. Si tratta del familiare seno trigonometrico della notazione moderna, che tuttavia appare nella sua forma di frazione decimale soltanto nel Settecento. Il termine *seno* è una traduzione della traslitterazione araba del vocabolo indiano per la semicorda.
Nel Quattrocento vi fu la completa sostituzione del triangolo inscritto nella circonferenza con un triangolo rettangolo e si introdusse il coseno (da *complementi sinus*, ovvero seno del complemento) come utile funzione trigonometrica. Anche secante e cosecante furono introdotte nel Quattrocento come

prodotti secondari delle tavole nautiche. Ma tutti questi oggetti matematici ricevettero il nome con cui oggi li conosciamo solo nel corso del Cinquecento. Queste tecniche condussero poi al concetto di *parallasse*, come angolo compreso tra le rette visuali condotte a un astro da due luoghi di osservazione differenti (o anche come angolo sotto il quale da un corpo celeste sarebbe visto il raggio della Terra, o quello della sua orbita), che viene adottato come artificio geometrico per calcolare la distanza del corpo stesso dalla Terra.
La trigonometria sferica, che considerava i triangoli formati dall'intersezione di circonferenze su una sfera, era ampiamente utilizzata nei calcoli astronomici, e possiamo scorgervi la radice delle moderne geodesia e cartografia.
Niccolò Copernico aggiunse nuove tavole trigonometriche al suo trattato *De rivolutionibus orbium coelestium* e le sue tavole, a loro volta, furono migliorate dall'austriaco Retico.
Verso la fine del Cinquecento si comprese che le conoscenze trigonometriche potevano essere rivelate anche ai non matematici, e i manuali per la navigazione più avanzati e aggiornati insegnavano ai marinai l'uso della trigonometria più semplice.
Un momento importante sia per la trigonometria sia per il calcolo astronomico fu l'invenzione dei logaritmi ad opera di John Napier (1550-1617). Nel Cinquecento i seni erano espressi ancora come lunghezza e, al fine di evitare le frazioni che rendevano ancor più tediose le operazioni di calcolo, si attribuiva un valore molto elevato al raggio della circonferenza in cui il seno era inscritto, in modo da poter esprimere il seno in numeri interi. Seppure in tal modo si otteneva una sufficiente precisione e si evitava l'uso delle frazioni, si aveva però a che fare con prodotti e divisioni di seni che comportavano calcoli complicatissimi. Napier, che stava cercando un metodo per la relazione di tavole che permettessero una rapida determinazione di due seni qualsiasi, prese l'avvio da una complessa analisi delle relazioni tra progressioni aritmetiche e geometriche di grandi numeri. Si accorse gradualmente che il lavoro in cui si era immerso era così complesso da richiedere l'invenzione di un qualche altro metodo. Analizzando i propri risultati scoprì di poter raggiungere il

suo fine attraverso l'uso dei rapporti, che furono da lui indicati con il nome di *logaritmi.*
I logaritmi furono non solo un trionfo della matematica pura, ma anche un prezioso regalo per chi applicava la matematica alla pratica. Le possibilità che offrivano questi nuovi oggetti matematici sono ben riassunte dall'anonimo autore dei seguenti versi, contenuti nella prefazione alla *Descriptio* di Napier, tradotta da Wright:

Grande è l'utile lor nel misurare
terreni, carte, costruzioni e forti,
nella scienza degli astri e nell'orientamento,
in geografia e in navigazione.
In questo e altro giovani studiosi
acquistar posson perizia assai presto
denaro risparmiar, tempo e fatiche.

2.1 Dimensione e distanza dei corpi celesti

Fino al tempo di Alessandro Magno vari filosofi avevano meditato sulla struttura dell'Universo pur non potendo disporre di osservazioni accurate, pertanto la spiegazione dei fenomeni rimaneva alquanto imprecisa. Al fine del perfezionamento del calendario divenne indispensabile seguire con maggiore precisione il corso del Sole e della Luna. Presso la Biblioteca di Alessandria sorse una scuola di osservatori, i quali si occuparono di determinare, con l'ausilio di strumenti graduati, la posizione delle stelle e dei pianeti. Questa preziosa raccolta di osservazioni rese possibili le grandi scoperte successive, insieme allo strumento altrettanto prezioso che proveniva dal contemporaneo e rapido sviluppo della matematica pura.
Se Epicuro (342 a.C. - 270 a.C.) alla domanda di quanto fosse grande il Sole, rispose: "è grande quanto sembra", qualcun altro ha tentato nella storia di cercare incessantemente di trovare una risposta il più possibile vicina alla realtà oggettiva.

È chiaro che grazie all'osservazione delle eclissi era già noto che il Sole fosse più lontano rispetto alla Luna. Eudosso (408 a.C. - 355 a.C.) considerava il diametro del Sole nove volte maggiore di quello della Luna, e quindi nove volte maggiore la sua distanza dalla Terra, poiché la loro grandezza apparente è uguale. Archimede (287 a.C - 212 a.C.), che menziona questa opinione, aggiunge che suo padre Fidia trovò che il rapporto è maggiore, di 12:1, mentre Archimede adottò ancor più il rapporto di 30:1. Non abbiamo possibilità di conoscere in che modo venissero compiute queste stime, ma probabilmente si devono a Eudosso i metodi usati nei secoli seguenti.
Aristarco (310 a.C. - 230 a.C.) fece un tentativo per determinare le distanze relative del Sole e della Luna, trovando che il Sole era dalle 18 alle 20 volte più lontano. In una sua opera egli indica anche il metodo usato nella determinazione della distanza del Sole: ‘'e lo stesso metodo che secondo Tolomeo sarebbe stato adottato da Ipparco (200 a.C. - 120 a.C.) e che per circa 1600 anni sarebbe stato seguito dagli astronomi. Esso si basa sull'osservazione della grandezza dell'ombra della Terra alla distanza media a cui la Luna la attraversa durante le eclissi di Luna. Questi studi fecero forse tirare un sospiro di sollievo agli studiosi dell'epoca se Posidonio (135 a.C - 50 a.C.) scrisse *"Grazie a tale distanza il Sole, nonostante la sua immensa grandezza, non brucia la Terra"*.
Per quanto concerne le stelle fisse, continuò ad essere quasi universalmente accettata l'opinione che esse fossero situate, come attaccate (*fisse* appunto), sulla superficie di una sfera, di estensione immensa ma limitata, la sfera che i Pitagorici chiamarono proprio per questo *sfera delle stelle fisse.* Il problema della determinazione della distanza del Sole, e quindi anche delle sue dimensioni reali, rimase del tutto al di là della portata dei mezzi tecnici degli astronomi fino all'invenzione del telescopio ad opera di Galilei nel 1609.
Le idee degli antichi filosofi sull'estensione della parte nota di Universo sono state così progressivamente sostituite da nozioni più esatte sulle dimensioni della Terra e sulla grandezza e distanza della Luna.

2.2 Ipparco di Nicea

Ipparco (200 a.C. - 120 a.C) nacque a Nicea ma trascorse gran parte della sua vita a Rodi, una delle realtà più fiorenti del mondo greco. Quasi tutti i suoi scritti sono andati perduti e i suoi studi ci sono giunti solo attraverso le opere di altri autori.
È noto per aver gettato le basi della trigonometria, per aver previsto eclissi di Sole e di Luna, per aver scoperto la precessione degli equinozi e per il suo catalogo stellare, che sebbene non ci sia pervenuto è stato ampiamente ripreso e rielaborato da Tolomeo (100 d.C - 175 d.C.), il suo più grande interprete e divulgatore, nell'opera *Almagesto.*
Ipparco si occupò anche della misurazione della distanza e della grandezza della Luna, determinandole con un'approssimazione notevole per l'epoca.
Ebbe anche un ruolo decisivo nell'evoluzione delle teorie astronomiche, poichè fu in gran parte per la sua influenza che gli astronomi accantonarono i precedenti tentativi eliocentrici come quello di Aristarco, per tornare a un sistema geocentrico, con la Terra come centro dell'universo e punto di riferimento per le coordinate celesti del suo catalogo. Questa sua impostazione costituì la base del più noto sistema tolemaico.

2.2.1 Il catalogo stellare e la magnitudine

Per compilare il suo catalogo di oltre mille stelle, Ipparco aveva potuto disporre, oltre che delle sue stesse osservazioni, di quelle effettuate ad Alessandria nei 150 anni precedenti, e delle molto più antiche osservazioni d'eclissi compiute dai Babilonesi. Fu proprio nel confrontare le sue coordinate stellari con le posizioni ottenute da Timocari e Aristillo di Alessandria, che Ipparco scoprì il fenomeno della precessione degli equinozi.
Introdusse la grandezza nota come *magnitudine stellare* per classificare le stelle a seconda della loro luminosità apparente e posizionarle in maniera da poterle riconoscere all'interno del suo catalogo stellare, dando di ciascuna le coordinate celesti.

Egli distinse sei classi di magnitudine: le stelle più brillanti erano classificate come stelle di prima grandezza, seguivano quelle di seconda grandezza, fino alla sesta grandezza a cui appartenevano le stelle più debolmente luminose, appena visibili a occhio nudo.
Il suo metodo consisteva nel rappresentare con cerchi più grandi le stelle più luminose e con cerchi sempre più piccoli quelle meno visibili, in maniera che consultando il catalogo si potessero distinguere visivamente e intuitivamente. Ma è da osservare che la differenza tra il diametro di una classe ed il diametro della classe successiva non aveva un andamento linearmente legato alla percezione visiva, ovvero un diametro doppio rispetto a un altro non rappresentava una luminosità doppia.

2.3 L'occhio e la percezione della luce

Oggi possiamo spiegare questo in termini scientifici, grazie anche al sistema di misurazione fotometrico della luminosità apparente, introdotto nell'Ottocento. Un altro grande contributo venne nello stesso periodo dallo studio della fisiologia dell'occhio, unico strumento a disposizione dei primi astronomi, sulla base del quale erano state fatte le prime classificazioni.
Avendo affinato tecniche e strumenti di osservazione, non furono più sufficienti le sei classi di Ipparco, ma fu necessario ampliare la scala, inserendo anche classi negative per le stelle più luminose, mantenendo l'ordinamento ideato dall'astronomo greco.
Nel 1856 la scala delle magnitudini stellari venne ridefinita in modo rigoroso da Norman Robert Pogson (1829 - 1891), astronomo inglese che distinse tra *magnitudine apparente* e *magnitudine assoluta*. La prima misura l'illuminamento prodotto da una stella, cioè la quantità di energia raccolta nell'unità di tempo dall'unità di superficie di un rivelatore disposto perpendicolarmente alla radiazione incidente, al di fuori dell'atmosfera terrestre. La seconda, invece, misura la luminositá intrinseca della stella, cioè la quantità totale di energia irradiata dalla stella nell'unità di tempo. In altri termini, la lumi-

nosità apparente di una stella dipende da due fattori: la luminosità assoluta della stella e la distanza da cui viene osservata. Attraverso i suoi studi Pogson trovò una strada per poter assegnare alla scala di magnitudini individuata da Ipparco una formulazione matematica.
Si osservò che l'occhio umano reagisce alla sensazione della luce in modo logaritmico, vediamo meglio nei dettagli cosa si intende:

Supponiamo di porre un osservatore in una stanza completamente buia e di accendere in un secondo momento una lampadina: la prima sensazione che l'osservatore proverà sarà di essere quasi abbagliato dalla luce della lampadina. Supponiamo adesso di accendere una seconda lampadina di uguale intensità: l'osservatore non percepirà questo evento alla stessa maniera del primo, ma semplicemente vedrà la stanza più luminosa. Proseguendo con l'accensione di ulteriori lampadine la sensazione di abbaglio sarà sempre meno intensa, fino ad arrivare a un livello di saturazione, in cui l'occhio non è più in grado di percepire differenze di luminosità.

Dal punto di vista matematico questo tipo di percezione può essere descritta da un diagramma che mette in relazione l'intensità della luce e la percezione che ne ha l'occhio umano, secondo la curva del tipo indicato in figura (2.2).

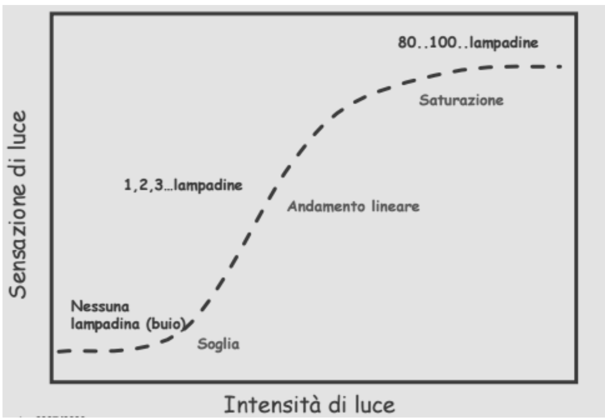

Figura 2.2: La percezione della luce

Osservando la curva e ricorrendo a un'approssimazione, si nota che essa ha un andamento logaritmico, per cui si può descrivere la Sensazione come il logaritmo dell'Intensità per una costante moltiplicativa k, più una costante che descriva la soglia.
In altri termini: la risposta dell'occhio umano ad uno stimolo luminoso può essere descritta da una funzione logaritmica, che esprime una misura della magnitudine apparente (figura(2.3).

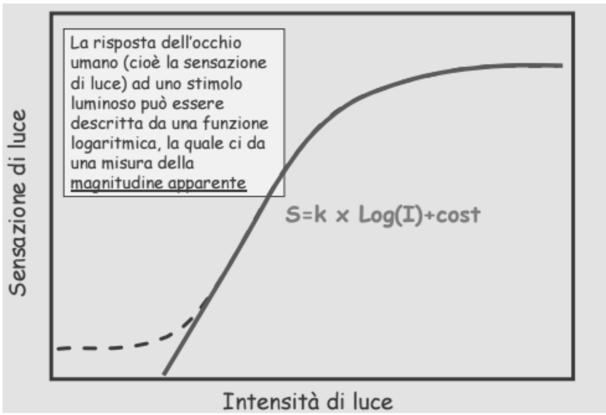

Figura 2.3: Magnitudine apparente

Considerando che il passaggio da una classe di magnitudine alla classe successiva corrisponde ad un rapporto fisso fra le intensità di luce, come si trovò effettuando le prime misurazioni dell'intensità luminosa, Pogson propose che la differenza di 5 magnitudini potesse coincidere esattamente ad un rapporto di luminosità di 100 ad 1, facilitazione che venne rapidamente introdotta. Si divise così 100 in 5 parti tra loro in proporzione geometrica, ovvero in modo che rimanesse costante il rapporto tra una parte e quella immediatamente precedente. Una magnitudine quindi, corrisponde ad una differenza di luminosità pari esattamente alla radice quinta di 100 ($\sqrt[5]{100}$), valore molto prossimo a 2,512 e noto come *rapporto di Pogson*.
Se allora m ed m' sono le magnitudini corrispondenti alle intensità I ed I' di due diverse stelle, se la differenza tra le due magnitudini (ovvero le due classi di appartenenza) è $m - m' = -5$ ed il rapporto tra le intensità luminose è

$\frac{I}{I'} = 100$, si ha:

$$m - m' = -2.5Log\left(\frac{I}{I'}\right)$$

nota come equazione di Pogson, da cui si evince che la magnitudine decresce all'aumentare della intensità luminosa delle stelle.
Scegliendo così questo numero come base di questi particolari logaritmi, detti *logaritmi stellari*, e considerando la progressione delle potenze successive, si ottiene che gli esponenti (ovvero proprio i logaritmi) corrispondono alla classe corrispondente alla luminosità della stella osservata.

$2{,}512^{0}$	1
$2{,}512^{1}$	2,511886
$2{,}512^{2}$	6,309573
$2{,}512^{3}$	15,84893
$2{,}512^{4}$	39,81072
$2{,}512^{5}$	100
$2{,}512^{6}$	251,1886
$2{,}512^{7}$	630,9573
$2{,}512^{8}$	1584,893
$2{,}512^{9}$	3981,072
$2{,}512^{10}$	10000
$2{,}512^{11}$	25118,86
$2{,}512^{12}$	63095,73

Figura 2.4: Classi di magnitudine

MAGNITUDINE	OGGETTO CELESTE
-26,8	Sole
-12,7	Luna piena
-4,6	Venere
-2,6	Giove
-2,0	Marte
-1,5	Sirio
0	Vega
0,7	Saturno
2,0	Stella polare
3,0	Nebulosa di Orione
4,4	Galassia di Andromeda
5,8	Ammasso globulare di Ercole
6,5	Limite di visibilità ad occhio nudo
12,3	Limite di osservabilità di un telescopio mak 127/1500
31,5	Oggetti più deboli osservati dal telescopio spaziale Hubble

Figura 2.5: La magnitudine di alcuni corpi celesti

Capitolo 3

Il suono in Fisica

È sbagliato pensare che lo scopo della fisica sia di scoprire com'è la natura.
La fisica riguarda ciò che possiamo dire sulla Natura.
Niels Bohr

3.1 Il suono

Il suono è un fenomeno provocato da un corpo, detto sorgente, che vibra trasmettendo le *onde* sonore all'aria o ad un altro mezzo elastico. I fenomeni acustici sono caratterizzati da due grandezze: *pressione acustica* e *frequenza*. La prima dipende dalla pressione esercitata dall'onda sonora sulle particelle del mezzo di propagazione, la seconda dal numero d'oscillazioni che avvengono al passaggio dell'onda in un secondo.

L'onda di pressione acustica che è in grado di indurre nell'uomo la sensazione sonora di più piccola intensità, ha una variazione di pressione di 20 μPa, mentre quella che induce una sensazione sonora di massima intensità (senza produrre un danno al nostro sistema uditivo), ha una variazione di pressione di 20 Pa: l'intervallo all'interno del quale ritroviamo le possibili variazioni di pressione a cui è sensibile il nostro sistema uditivo è molto ampio. Le onde rilevabili dall'orecchio umano come suono hanno una frequenza compresa tra 20 Hz e 20000 Hz, con piccole variazioni da individuo a individuo. Al di fuori di tale intervallo di frequenze, le vibrazioni non sono più percepibili, ma è consuetudine includere nello studio dell'acustica fisica anche le onde meccaniche non udibili, distinguendole tra *infrasuoni*, onde con frequenze al di sotto di 20 Hz e *ultrasuoni*, con frequenze oltre i 20000 Hz e che possono raggiungere i 10^9 Hz. Esempi di infrasuoni sono le onde sismiche. Le applicazioni degli ultrasuoni riguardano vari ambiti: dalla tecnica alla medicina, alla biologia. Un esempio è il sonar, un dispositivo che permette di effettuare misure di profondità marine o di rilevare la presenza di oggetti sommersi. In campo medico gli ultrasuoni vengono ampiamente utilizzati, ad esempio nelle ecografie.

3.1.1 L'energia del suono

Le onde sonore, come le onde meccaniche in genere, trasportano un'energia: l'*energia acustica*, o *energia sonora*. Una caratteristica distintiva della sorgente che produce il suono è la *potenza acustica*, cioé l'energia che essa trasmette nel tempo. Se indichiamo con E l'energia emessa in un intervallo di tempo Δt, la potenza acustica è:

$$P_a = \frac{E}{\Delta t}$$

La quantità di energia captata dipende dalla distanza del ricevitore dalla sorgente sonora e anche dalle dimensioni della superficie del ricevitore esposta all'onda sonora. La grandezza che ci permette di valutare la quantità di energia trasportata da un'onda sonora e di differenziare quindi un suono forte da un suono debole è l'*intensità*, data dal rapporto tra la potenza acustica che si trasmette attraverso una superficie, disposta perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda, e l'area S della superficie stessa:

$$I = \frac{P_a}{S}$$

ovvero è la quantità di energia che attraversa, per unità di tempo, l'unità di superficie. Se l'onda sonora è emessa da una sorgente puntiforme immersa in un mezzo omogeneo ed isotropo (ovvero che mantiene le stesse caratteristiche in tutte le direzioni), essa si propaga nello spazio per fronti d'onda sferici. L'intensità sonora sulla superficie sarà data allora da:

$$I = \frac{P_a}{4\pi r^2}$$

da cui si evidenzia come l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente. Poichè, inoltre, l'energia E trasportata da un'onda è data da:

$$E = \frac{1}{2} K_{el} A^2$$

con A ampiezza dell'onda e K_{el} costante elastica del mezzo che dipende quadraticamente dalla frequenza dell'onda, si ha che anche l'intensità del suono è proporzionale al quadrato della frequenza e al quadrato dell'ampiezza dell'onda.

3.1.2 Come percepiamo il suono?

La percezione del suono, diversamente da come si potrebbe pensare, non cresce proporzionalmente all'intensità sonora: Si è provato sperimentalmente che raddoppiando l'intensità sonora non si percepisce un suono di intensità doppia, mentre per ottenere suoni di intensità percepita doppia (quella che chiamiamo comunemente volume di un suono) occorre aumentare, approssimativamente, di un fattore dieci l'intensità dell'onda sonora. Nei dettagli ecco cosa avviene:

> Supponiamo di sentire un suono di intensità I_1, poi di sentirne uno di intensità I_2, che sembra essere due volte più forte del primo. Se misuriamo le due intensità, troviamo però che I_2 è circa 10 volte il valore di I_1. Analogamente un suono che sia due volte più forte del secondo ha un intensità I_3 che risulta essere circa $I_3 = 10I_2 = 100I_1$.

La nostra percezione del suono è dunque tale che un aumento uniforme di quello che comunemente chiamiamo volume di un suono, corrisponde a intensità che crescono per un fattore moltiplicativo. Per questa ragione, una scala conveniente per misurare il volume dei suoni dipende dal logaritmo dell'intensità. In altri termini, se volessimo rappresentare l'andamento della percezione del suono (asse y) al variare della sua intensitá (asse x), il grafico della funzione sarebbe crescente, ma non con andamento lineare (come ad esempio la retta $y = x$), bensì logaritmico, cioè al crescere dell'intensità cresce anche la percezione, ma al raggiungimento di intensità sonore elevate per l'orecchio umano la percezione non crescerà in maniera sensibile (ha quindi un andamento simile alla funzione $y = logx$).

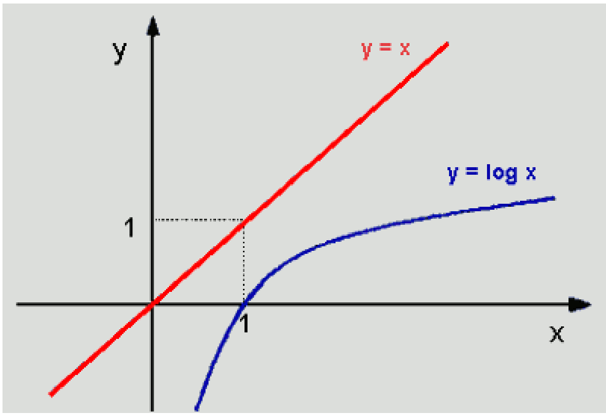

Figura 3.1: La percezione del suono

La risposta logaritmica dell'udito ci permette di ascoltare il fruscio delle foglie in una giornata di leggera brezza, ma anche di sentire senza danni il rombo di un aereo che decolla.

3.2 La misura del livello sonoro

Poiché la sensazione uditiva dipende dalla frequenza del suono, in genere si usa riferirsi ad un valore convenzionale, ottenuto mediando la soglia di udibilità di molti individui per un suono puro di frequenza di 1000 Hz. L'intensità sonora più debole che l'orecchio umano può percepire si chiama soglia di udibilità e alla frequenza di 1000 Hz vale circa:

$$I_0 = 1,0 * 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

All'aumentare dell'intensitá del suono, lo stimolo prodotto sull'orecchio aumenta fino a raggiungere un livello, detto soglia del dolore, il suono più forte che l'orecchio umano può sopportare, che alla frequenza di 1000 Hz ha intensità pari a:

$$I_D = 1\ \frac{W}{m^2}$$

In genere i suoni di intensitá inferiore a I_0 non sono percepiti, mentre quelli di intensità maggiore di I_D provocano dolori o danni per l'orecchio.
Per esprimere la misura della sensazione sonora di un suono si definisce il cosiddetto livello sonoro, che deriva dal confronto dell'intensità acustica (o della potenza acustica) con la soglia di udibilità. Nei problemi pratici di acustica, infatti, considerato l'enorme campo di variazione delle grandezze in gioco (frequenza e potenza), e poiché inoltre l'orecchio umano è sensibile alle variazioni di pressione (e non invece allo specifico valore della pressione stessa), per esprimere le grandezze acustiche quali la potenza e l'intensità si preferisce utilizzare il logaritmo del rapporto tra le stesse e determinati valori di riferimento assunti come livelli "zero". Il livello sonoro espresso in decibel (dB) é definito come il logaritmo decimale (log_{10}) del rapporto tra il valore in esame ed il valore di riferimento. Si hanno pertanto:

Livello di potenza sonora L_w:

$$L_w = 10\ log_{10}\left(\frac{P_w}{P_0}\right)\ (dB)$$

dove P_w è la potenza sonora in esame (in Watt) e P_0 la potenza sonora di riferimento ($10^{-12}W$).

Livello di intensità sonora β:

$$\beta = 10\ log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)\ (dB)$$

dove I è l'intensità sonora in esame e I_0 l'intensità sonora di riferimento ($10^{-12}\frac{W}{m^2}$).

Queste grandezze sono solitamente espresse in decibel (dB), nonostante siano in realtà grandezze adimensionali, proprio perché le dimensioni si elidono nel rapporto all'interno dell'argomento del logaritmo. Nonostante ciò il decibel è nella pratica adoperato come una vera e propria unità di misura. Osserviamo che senza il fattore 10, posto innanzi al logaritmo nella formula, avremmo ottenuto un'unità di misura dieci volte più grande del dB, il Bel (nome dato in onore di Alexander Graham Bell). La misura in Bel del livello di intensità sonora è definito come:

$$L_B = log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Ed il numero di decibel pari alla stessa grandezza è dieci volte maggiore, ovvero $\beta = 10L_B$. Il decibel rappresenta, con buona approssimazione, la minima differenza di intensità tra due suoni che l'orecchio può percepire, per cui il Bel sarebbe un'unità di misura eccessiva per rilevare valori significativi. Alla soglia di udibilità corrisponde un livello di intensità sonora dato da:

$$\beta_0 = 10\ log_{10}\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 10\ log_{10}(1) = 0\ dB$$

Alla soglia del dolore analogamente corrisponde una sensazione acustica pari a:

$$\beta_D = 10\ log_{10}\left(\frac{I_D}{I_0}\right) = 10\ log_{10}\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 120\ dB$$

3.2.1 Come varia il volume del suono

Per completezza, desideriamo mostrare in formule cosa succede nei due diversi casi in cui:

1. *il suono percepito β è il doppio*
   come accennato in precedenza, otteniamo il raddoppio del suono percepito quando l'intensità aumenta di un fattore 10; riportiamo il seguente passaggio matematico, in cui utilizziamo le proprietà dei logaritmi:
   Sia $I_1 = 10I_0$, ed $I_2 = 100I_0$, ovvero $I_2 = 10I_1$, si ha allora che:

   $$\beta_1 = 10\ log\left(\frac{10I_0}{I_0}\right) = 10\ log10 = 10\ dB$$

$$\beta_2 = 10\ log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) = 10\ log100 = 20\ dB$$

.

2. *l'intensità I è il doppio*

   Se consideriamo due intensità I_A ed I_B con $I_B = 2I_A$, ovvero una pari al doppio dell'altra. Otteniamo allora che:

   $\beta_B = 10\ log\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10\ log\left(\frac{2I_A}{I_0}\right) = 10\ log2+10\ log\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10\ log2+\beta_A$

   E poiché 10 $log2 \approx 3$, possiamo approssimare

   $$\beta_B = \beta_A + 3\,dB$$

   Ovvero per avere un'intensità doppia sarà sufficiente aumentare il livello di circa 3 dB.

Dall'ultima osservazione possiamo accennare anche come "sommare due suoni": se siamo in presenza di due segnali di intensità diversa I_1 ed I_2 (per il caso di eguale intensità si veda il punto 2) precedente), poichè l'intensità di un insieme di sorgenti sonore indipendenti è semplicemente la somma delle singole intensità, se vogliamo dedurne il corrispondente livello di intensità non è possibile (come già detto) sommare i decibel, ma si ottiene:

$$\beta_{TOT} = 10log\left(\frac{I_1 + I_2}{I_0}\right)$$

A questo punto possiamo affermare che il livello sonoro ottenuto dalla somma di due segnali è dato dal maggiore dei due livelli sonori (corrispondente alla maggiore delle due intensità), incrementato al massimo di 3 dB, proprio perché questo sarebbe il livello sonoro ottenuto da due suoni di intensità uguale e pari alla maggiore tra le due.

Per dare un'idea degli ordini di grandezza dei livelli sonori di alcuni suoni comuni, in tabella (3.1) sono riportati i corrispondenti valori in dB.

Tipo di suono	Livello sonoro (dB)
Soglia di udibilità	0
Bisbiglio, Stormire delle foglie	15/20
Ambiente domestico, strada tranquilla	50
Conversazione ad alta voce	60
Strada trafficata, TV o radio ad alto volume	70/80
Fabbrica rumorosa	90/100
Concerto rock, sirena, clacson	100/110
Soglia del dolore	120
Motore di un turboreattore a 30 m di distanza	130/140

Tabella 3.1: Alcuni suoni in decibel

Capitolo 4

Utilità e utilizzo del Logaritmo

4.1 Dalla legge esponenziale al Logaritmo

Allontanandoci ancora una volta dalla matematica e avvicinandoci verso altre discipline scientifiche, scopriamo che in biologia dei microrganismi succede spesso di trovare studi legati alla crescita di popolazioni batteriche, in cui entra in gioco la legge esponenziale poichè i batteri si riproducono per duplicazione. In un modello semplificato la generazione k-esima avrà numerosità $N_k = 2N_{k-1}$, ovvero, sarà:
$N_1 = 2 \qquad N_2 = 4 \qquad N_3 = 8 \qquad \ldots \qquad N_k = 2^k$
E più in generale, partendo da un N_0 generico, si ha $N_k = 2^k N_0$. Il grafico di una funzione esponenziale può essere di difficile rappresentazione, perché "esplode" velocemente. In figura (4.1) è rappresentato il caso di $y = e^{2x}$

In questo caso l'uso di scale diverse per gli assi x ed y ci consentirebbe di avere una migliore visione dell'andamento della funzione, ma si perderebbero molti dettagli: ad esempio si perdono informazioni sull'intersezione con l'asse y quando ad una unitá delle ordinate corrispondono innumerevoli ascisse. È per ovviare a questo inconveniente che si sceglie di considerare la funzione logaritmo: da $g(x) = e^{2x}$, poiché $ln(g(x)) = 2x$ ed $x = \frac{1}{2}ln(g(x))$, si avrà il grafico della funzione inversa $f(x) = \frac{1}{2}ln(x)$, che risulta essere la riflessione attorno alla bisettrice del grafico della funzione esponenziale $g(x)$ di partenza.

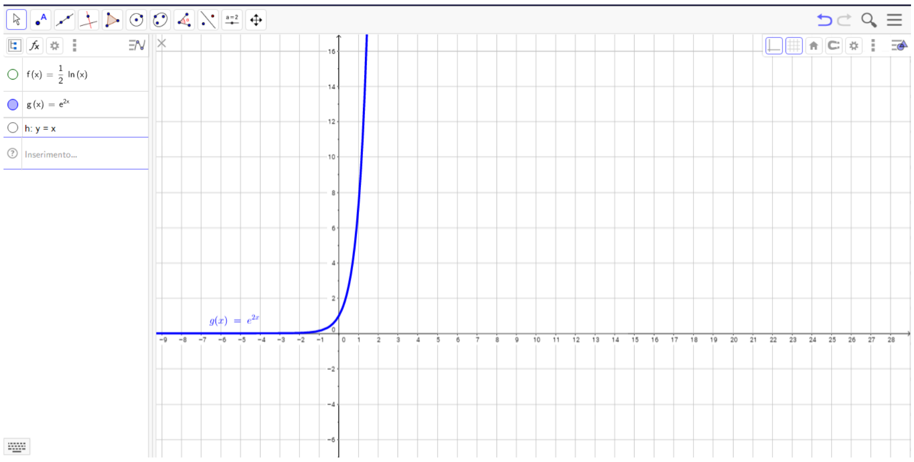

Figura 4.1: Funzione esponenziale $g(x)$

In figura (4.2) sono rappresentate le due funzioni.

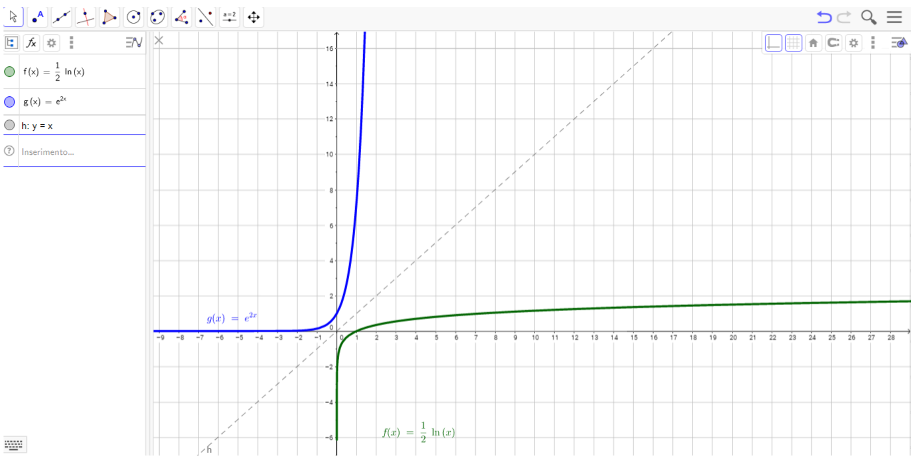

Figura 4.2: Funzione esponenziale $g(x)$ e funzione logaritmica $f(x)$

Un altro modo per rappresentare una funzione esponenziale evitando di trasformarla nella sua inversa, è rappresentarla su una scala non di tipo lineare, ma piuttosto logaritmico, come spiegheremo nel prossimo paragrafo.

4.2 La scala semilogaritmica e la scala logaritmica

Una scala logaritmica si differenzia da una normale scala lineare in quanto in essa segmenti di uguale lunghezza (ad esempio in centimetri) non rappresentano gli stessi intervalli. Se su un asse cartesiano si vuole considerare una scala che sia logaritmica, si rappresenterá su esso il punto di ascissa 1 (corrispondente alla potenza 10^0) e successivamente si rappresentano, a distanze uguali tra loro:

- nella direzione positiva i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$

- nella direzione negativa i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$

A questo punto i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva saranno posizionati in corrispondenza dei valori dei rispettivi logaritmi decimali. Ovvero, il 2 sarà posto in corrispondenza del valore di $log_{10}(2) = 0,301$, il 3 in corrispondenza di $log_{10}(3) = 0,477$, e così via, facendo le opportune proporzioni in base all'unità in cm scelta per il segmento iniziale [1,10]: se ad esempio scegliamo di porre la distanza tra una potenza di 10 e la successiva pari a 10 cm, i valori dei logaritmi vanno moltiplicati per 10 prima di essere posizionati sulla scala. Si otterrà una scala del tipo rappresentato in figura (4.3), in cui poi si riproduce la stessa suddivisione per gli altri segmenti, ripetendo per ognuno lo stesso procedimento seguito.

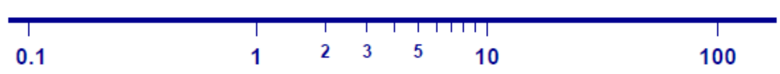

Figura 4.3: Costruzione scala logaritmica

In particolare si parla di scala:

semilogaritmica : quando la suddivisione è logaritmica solo su uno dei due assi, mentre l'altro mantiene una scala lineare;

logaritmica : quando entrambi gli assi presentano la suddivisione di tipo logaritmico.

4.2.1 Scala semilogaritmica

La scala semilogaritmica è spesso utilizzata per rendere lineari alcune funzioni esponenziali, come ad esempio nel caso della crescita di popolazioni batteriche cui si è già accennato. Partendo da una funzione esponenziale del tipo:

$$y = ka^x$$

con k costante, si effettua un cambiamento di variabili ponendo (asse delle ascisse con scala lineare ed asse delle ordinate con scala logaritmica):

$$X = x \qquad \text{ed} \qquad Y = log_{10}y$$

In questo modo, applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$Y = log_{10}y = log_{10}(ka^x) = log_{10}k + xlog_{10}a = log_{10}k + Xlog_{10}a$$

$$\text{ovvero } Y = log_{10}(a)X + log_{10}k,$$

che nel nuovo sistema di riferimento con scala semilogaritmica rappresenta l'equazione di una retta in forma esplicita $Y = mX + q$, di coefficiente angolare $m = log_{10}(a)$ e termine noto $q = log_{10}(k)$. In figura (4.4) è rappresentata su carta semilogaritmica la funzione esponenziale con $k = 10000$ ed $a = \frac{1}{2}$, la quale, procedendo con i passaggi appena esposti, dà luogo alla retta di equazione:

$$Y = -log_{10}(2)X + 4$$

Utilizzando il nuovo sistema di riferimento $X\hat{O}Y$ si è quindi potuto rendere lineare la funzione esponenziale di partenza.

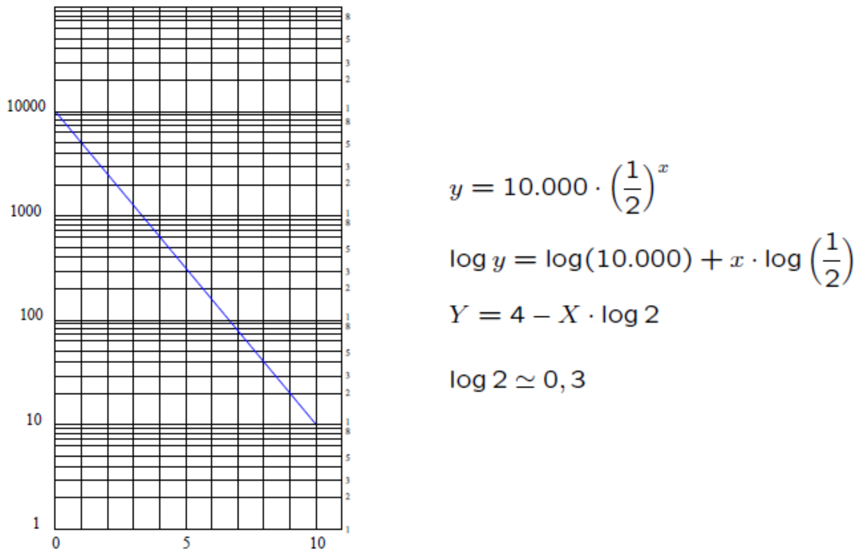

Figura 4.4: Funzione esponenziale su scala semilogaritmica

4.2.2 Scala logaritmica

La scala logaritmica si utilizza invece per rendere lineari alcune funzioni potenza del tipo $y = Ax^b$, con A costante. Anche in questo caso, come nel paragrafo precedente, si intende trasformarla in una funzione lineare con un opportuno cambiamento di variabili. Si considerino le nuove variabili:
$X = log_{10}x$ ed $Y = log_{10}y$
Applicando le proprietá dei logaritmi si ottiene:

$$Y = log_{10}y = log_{10}(Ax^b) = log_{10}(A) + b\, log_{10}(x) = log_{10}(A) + bX$$

$$\text{ovvero } Y = bX + log_{10}(A),$$

equazione che nel nuovo sistema di coordinate rappresenta una retta in forma esplicita $Y = mX + q$, di coefficiente angolare $m = b$ e termine noto $q = log_{10}(A)$. In figura (4.5) sono rappresentate su carta logaritmica le tre funzioni:

$y = x$ in verde, che risulta essere la bisettrice anche nel grafico con scala logaritmica;

$y = x^2$ in rosso, che linearizzata diventa una retta con $m = 2$, che quindi ha grafico con pendenza maggiore rispetto alla bisettrice;

$y = x^{\frac{1}{2}}$ in blu, che linearizzata risulta essere una retta con $m = \frac{1}{2}$, che quindi ha grafico con pendenza minore rispetto alla bisettrice.

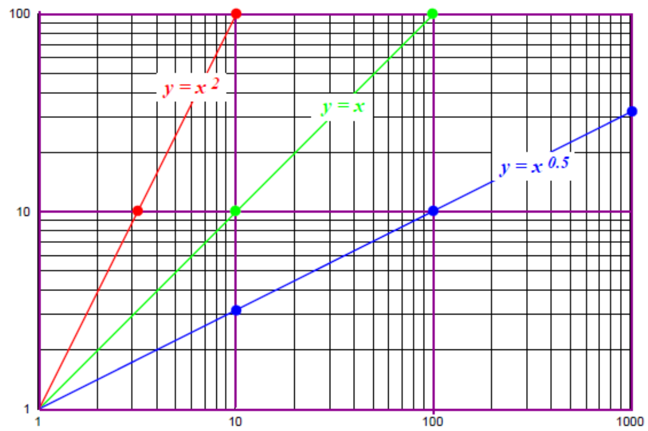

Figura 4.5: Funzione potenza su scala logaritmica

Le stesse funzioni potenza avrebbero avuto, com'è noto, un grafico ben diverso su un sistema cartesiano con la consueta scala lineare, come si osserva in figura (4.6).

4.3 Rappresentazione semplificata di alcuni diagrammi

L'utilizzo della scala logaritmica permette di rappresentare alcuni fenomeni che sarebbe difficile riprodurre su una scala lineare, poiché coinvolgono un intervallo molto ampio di ordini di grandezza. Come già osservato infatti,

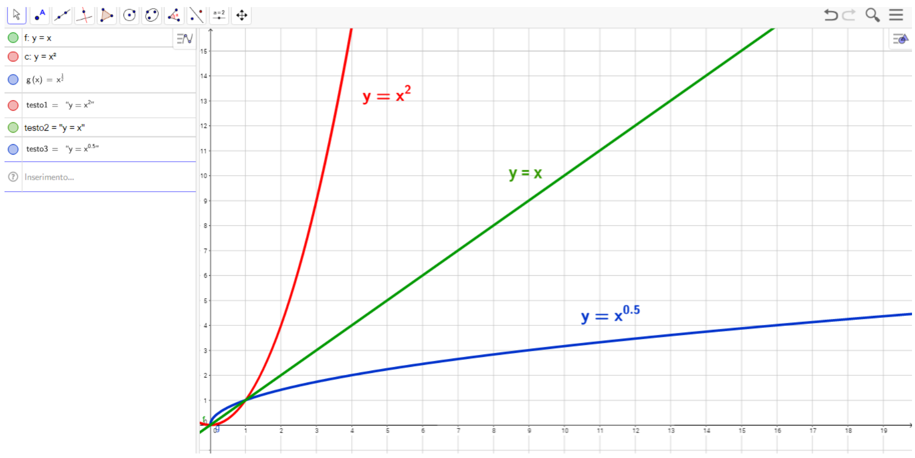

Figura 4.6: Funzione potenza su scala lineare

la scala logaritmica "comprime" le lunghezze, consentendo di rappresentare in uno spazio ridotto anche valori elevati. Supponiamo di voler rappresentare su carta quadrettata il sistema solare, per renderci conto della disposizione dei vari pianeti rispetto al Sole e delle loro rispettive distanze. Tali distanze seguono con buona approssimazione la legge di Titius-Bode, basata su una progressione geometrica. Se ci accontentassimo di una scala lineare, in cui la distanza tra due punti del diagramma è proporzionale alla distanza reale, potremmo stabilire ad esempio che un quadretto corrisponde alla distanza di Mercurio dal Sole (0,387 unità astronomiche) e avremmo di conseguenza che la Terra verrebbe posizionata a due quadretti e mezzo dal Sole (poiché distanza Terra-Sole = 1 UA), e così via in proporzione gli altri pianeti. Nascerebbe però un problema se provassimo a far rientrare sul nostro diagramma i successivi pianeti fino a Nettuno o Plutone: il foglio non sarebbe più sufficiente. Per far sì che tutti i pianeti trovino la loro collocazione all'interno del foglio occorrerà considerare, piuttosto che le distanze effettive, il logaritmo di tali distanze e sistemare i pianeti secondo questa nuova valutazione. In questo modo ci sarà possibile concentrare su un unico diagramma sia i pianeti "vicini" al Sole, sia quelli alla distanza di 39 UA (ovvero 100 volte più lontano rispetto a Mercurio). In figura (4.7) è riprodotta una rappresentazione in scala logaritmica del Sistema Solare.

Figura 4.7: Sistema solare su scala logaritmica

Il diagramma contiene in questa maniera molte informazioni, che si infittiscono sulla parte destra del grafico, proprio perché le distanze crescono in maniera esponenziale. È opportuno ricordare che tale rappresentazione non è una fedele riproduzione della realtà, ma è utile per fornire di questa un'idea schematica che sia efficace e leggibile. Per maggiori dettagli si veda la figura (4.8).

Per ulteriore chiarezza si riporta l'immagine in figura (4.9), che riproduce in quattro successivi diagrammi - i primi tre su scala lineare e l'ultimo su scala logaritmica - le distanze in chilometri dalla città di Roma, considerata come punto di riferimento, di altre città man mano più lontane, fino a includere la Luna e i pianeti.

i) Nel primo diagramma (che comprende valori tra 100 Km e 10.000 Km) osserviamo che Napoli e Milano si trovano a una distanza inferiore ai 1.000 km, poi compaiono in ordine Parigi, Londra, New York, per finire con Tokyo.

ii) Se vogliamo posizionare correttamente anche la Luna (384.000 Km) dobbiamo passare però al secondo diagramma, ancora di tipo lineare, ma in

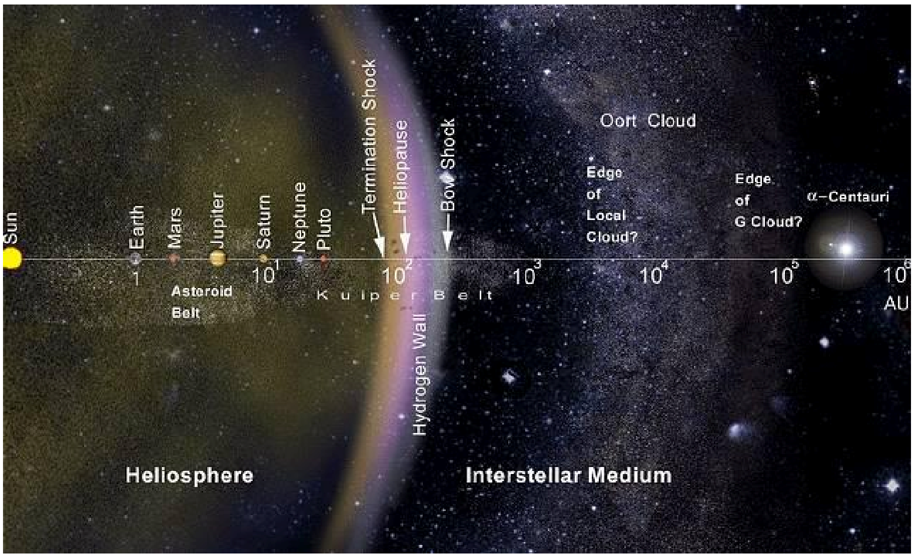

Figura 4.8: Distanze sistema solare su scala logaritmica

cui l'intervallo dei valori rappresentabili è stato modificato (da 10.000 Km a 400.000 Km). In questo secondo schema compaiono ancora New York e Tokyo, ma non si possono però indicare le città più vicine a Roma, poiché si troverebbero tutte concentrate, anzi sovrapposte, sul nostro punto di origine.

iii) Con lo stesso ragionamento, il terzo diagramma (che comprende un intervallo in chilometri tra 1 milione e 60 milioni) include anche i due pianeti più vicini alla Terra (Venere e Marte) e ci permette di mantenere ancora la visualizzazione della Luna, ma non più delle città considerate in precedenza.

iv) L'unico diagramma sul quale riusciamo a rappresentare tutte le informazioni in maniera da avere un'idea più chiara ed ampia della realtà è considerare una scala non più lineare, ma logaritmica: nonostante rispetto alla Terra, Giove sia cinque volte più distante del Sole, sul nostro schema i due appaiono molto vicini.

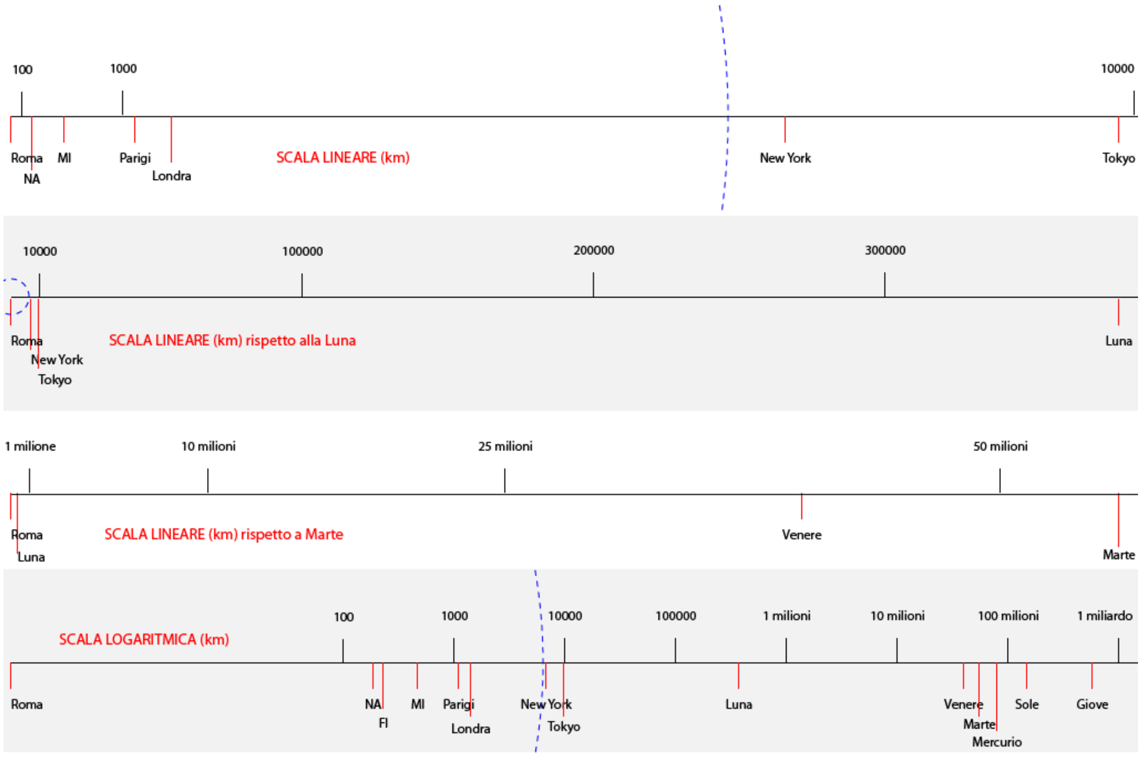

Figura 4.9: Distanze sulla Terra e nello spazio

Osservazione 1 (Proposta di lavoro). Riguardo all'utilità dei logaritmi si potrebbe chiedere ai ragazzi di provare a rappresentare su uno schema grandi distanze, ad esempio i pianeti del sistema solare, e condurli verso la ricerca di una soluzione per fare in modo che tutti i pianeti stiano sul medesimo foglio. Prima di fornire loro una soluzione, sarebbe utile far riflettere i ragazzi sui loro tentativi di risoluzione, sui ragionamenti che mettono in atto e far scaturire così da loro stessi le eventuali correzioni alle risposte date. Si potrebbe anche provare a far emergere in queste occasioni l'associazione di idee o le esperienze che li avevano portati verso le loro risposte originarie.

Capitolo 5

Il Logaritmo nella storia della Matematica

La logica vi porterà da A a B.
L'immaginazione vi porterà dappertutto

Albert Einstein

Alla base della nascita dei logaritmi si pone storicamente l'osservazione del legame esistente tra progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. Se $a_m = q^m$ ed $a_n = q^n$ sono due termini di una progressione geometrica di ragione q e termine iniziale 1, il loro prodotto sarà

$$a_m * a_n = q^{m+n}$$

ovvero il termine di posto $m + n$ della stessa progressione. Si osserva che al prodotto di due termini della progressione geometrica corrisponde la somma degli esponenti, da cui ad una progressione geometrica ne corrisponde una aritmetica. La proprietá di ridurre prodotti in somme é quella che ha decretato il grande successo dei logaritmi.

5.1 Da Archimede a Stifel, attraverso Chuquet

Archimede di Siracusa fu il primo a fare menzione di una tale corrispondenza nel III secolo a.C. e una traccia la troviamo nella sua opera, l'*Arenario*, in cui si legge:

Se dei numeri in proporzione continuata vengono moltiplicati tra loro, appartenendo alla stessa proporzione, il prodotto sarà nella stessa proporzione, e disterà dal maggiore dei numeri che vengono moltiplicati tra loro di quanto il più piccolo di detti numeri dista dall'unità della proporzione; e rispetto all'unità [avrà un certo numero d'ordine] minore di una unità [della somma] dei numeri d'ordine dei numeri che si moltiplicano tra loro.

[Archimede, Arenario]

Numeri *a, b, c, d, etc.* si dicono in proporzione continuata se accade che

$$a : b = b : c = c : d = d : \ldots$$

cioè se il rapporto tra due numeri consecutivi è costante.
Posto allora $q = b/a$ le proporzioni continuate altro non sono che progressioni geometriche di ragione q e termine iniziale a. Archimede procede con una dimostrazione in questi termini:

Siano infatti $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L$ alcuni numeri in proporzione continuata a partire dall'unità e sia A l'unità: si moltiplichi D per H e il prodotto sia W. Si prenda dunque nella proporzione [il termine] L distante da H di tanti [posti] quanti D dista dall'unità: si deve dimostrare che W è uguale ad L. Poiché dunque in numeri proporzionali D dista da A quanto L da H, si ha $D : A = L : H$. Ma D è il prodotto di D per A, quindi $L = H * D$ da cui si ha $L = W$. [Archimede, Arenario]

Quella che qui Archimede considera come successione di numeri in proporzione continuata, altro non è che una progressione geometrica di una certa ragione r con primo termine l'unità, che Archimede chiama A e che noi chiameremo 1. A questa si affianca la successione dei "posti" che Archimede utilizza parlando di distanze dall'unità: osserviamo che se la progressione geometrica parte dal termine 1, i numeri ordinali associati ai "posti" saranno di una unità superiori agli esponenti, come schematizzato in Tabella 5.1:

Archimede	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
posti (numeri ordinali)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
progressione geometrica	$1 = r^0$	r^1	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	r^9	r^{10}
esponenti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Tabella 5.1: Progressione continuata, Archimede

In generale si ha che il termine r^n occupa il posto $n+1$, potremmo pertanto scriverlo come $r^n = r^{(n+1)-1}$, rendendo così l'esponente associato al suo posto effettivo. Ed allora il posto m è occupato dal termine $r^{(m)-1}$. Archimede prosegue scrivendo:

È dunque chiaro che il prodotto è [un termine] della proporzione, e che dista, dal maggiore dei numeri che si moltiplicano, tanti [posti] quanti il minore [di quei numeri] dista dall'unità. Ed è manifesto che [il prodotto considerato] dista dall'unità per un [posto] in meno [della somma] delle distanze dall'unità di D, H; infatti i [numeri] A, B, C, D, E, F, G, H sono tanti quanti [posti] H dista dall'unità, e quelli I, K, L sono uno in meno di quanti [posti] D dista dall'unitá, poiché aggiunto H sono altrettanti.

[Archimede, Arenario]

Tornando alla nostra progressione geometrica, questo si traduce dicendo che il prodotto dei termini di posto m ed n (sia $m < n$) è

$$r^{m-1} * r^{n-1} = r^{(m+n-1)-1}$$

il quale occupa la posizione $m + n - 1$, ovvero proprio il posto precedente rispetto a quello che corrisponderebbe alla somma dei numeri d'ordine dei due fattori r^m ed r^n.

L'osservazione di Archimede sulla legge degli esponenti per un lungo periodo rimarrà al riparo e non desterà la curiosità di altri studiosi, finché nel XV e nel XVI secolo verrà trattata più volte e un chiaro enunciato della legge degli esponenti si trova nella *Triparty en la Science des Nombres* di **Nicholas Chuquet** (1445 - 1488):

È utile considerare più numeri proporzionali che, a partire da 1 formino un ordinamento continuato come 1.2.4.8.16.32 ecc. o .1.3.9.27 ecc.
È poi utile sapere che:
1 rappresenta ed è al posto dei numeri con denominazione 0
2 rappresenta ed è nel posto dei primi con denominazione .1.
4 è nel posto dei secondi che hanno denominazione .2.
Ed 8 è nel posto dei terzi. 16 in quello dei quarti.

[Chuquet, Triparty]

Qui Chuquet chiama *denominazione* quello che noi definiamo esponente.

Similmente, il prodotto di 4 che è il secondo numero per 8 che è il terzo numero dà 32 che è il quinto numero..... In questa considerazione si manifesta un segreto proprio dei numeri proporzionali. Cioè che moltiplicando per se stesso un numero della proporzione se ne ottiene un altro avente denominazione doppia. Ad esempio, moltiplicando 8 che è terzo per se stesso si ottiene 64 che è sesto. E moltiplicando per se stesso 16 che è quarto si ottiene 256 che è ottavo. E moltiplicando 128 che è settimo della proporzione per 512 che è il nono termine si ottiene 65536 che è il sedicesimo termine.

[Chuquet, Triparty]

Con **Michael Stifel** (1487 - 1567) si ritrova la legge degli esponenti enunciata in maniera analoga nella sua opera *Arithmetica Integra*:

Tutto ciò che la progressione aritmetica opera attraverso l'addizione e la sottrazione, la progressione geometrica lo opera con moltiplicazione e divisione.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tabella 5.2: Stifel - Arithmetica Integra

Così come (nella riga superiore) 3 e 5 sommati danno 8, così (nella riga inferiore) 8 e 32 moltiplicati danno 256. È poi 3 l'esponente di otto, 5 l'esponente di 32 ed 8 è l'esponente del numero 256. Allo stesso modo, come nella riga superiore per sottrazione di 3 da 7, resta 4, così nella riga inferiore dalla divisione di 128 per 8, si ottiene 16.

[Stifel, Arithmetica Integra]

Si può notare come Stifel chiami 5 l'esponente di 32, anziché parlare di esponente della base 2, come diremmo oggi. Inoltre Stifel parla per primo anche di esponenti negativi nell'esporre la legge degli esponenti (tabella 5.3):

Come sopra l'unità vengono disposti numeri interi e sotto l'unità le sue parti, e come sopra 1 vengono disposti numeri interi e sotto 1 vengono poste le sue parti o frazioni: così sopra lo 0 è posta l'unità con gli interi e sotto lo 0 sono disposti numeri con segno. Ciò che appare ben rappresentato nella progressione dei numeri naturali quando viene legata alla progressione (geometrica).

[Stifel, Arithmetica Integra]

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Tabella 5.3: Stifel, esponenti negativi - Arithmetica Integra

Di notevole importanza sono gli enunciati di Stifel sulle relazioni tra operazioni sulle potenze ed operazioni tra gli esponenti. Scrive ancora:

1. *Nelle progressioni aritmetiche l'addizione corrisponde alla moltiplicazione in quelle geometriche. Come, in questa progressione aritmetica, 3.7.11.15 la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini medi ed entrambe danno 18. Così in questa [progressione] geometrica, 3.6.12.24 il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi ed entrambi danno 72 e così si potrebbero fare infiniti altri esempi.*

2. *La sottrazione nelle [progressioni] aritmetiche corrisponde alla divisione nelle geometriche.*

3. *La moltiplicazione semplice (cioè di un numero per un numero) quando sia eseguita in una [progressione] aritmetica, corrisponde alla moltiplicazione di un numero per se stesso nelle progressioni geometriche. Così alla moltiplicazione per due in progressioni aritmetiche corrisponde la moltiplicazione quadrata in quelle geometriche.*

4. *La divisione eseguita in progressioni aritmetiche corrisponde alle estrazioni di radici nelle progressioni geometriche.*

[Stifel, Arithmetica Integra]

5.1.1 Verso il logaritmo: i primi problemi

Lo studio di progressioni aritmetiche e geometriche e il legame esistente tra di esse, compare anche in alcuni problemi dell'antichità. Si è ritrovata una tavoletta babilonese, risalente al 2000 a.C. circa, su cui si legge il problema seguente:

Problema 1. Il capitale di una mina, posto all'interesse del 20%, dopo 5 anni raddoppia; se il capitale cosí raddoppiato si rimette a frutto e così via di seguito, quale sarà il capitale dopo 6 lustri? E dopo quanto tempo si sarà accumulata una certa somma?

Si riconoscono ancora accenni a progressioni aritmetiche e geometriche su alcuni problemi specicifi trattati nel *papiro di Rhind*, importante ritrovamento d'epoca egizia del 1650 a.C., ma per assistere a uno studio sistematico e teorico di questo genere di problemi occorre attendere, come già accennato, l'arrivo di Archimede, che tratta progressioni geometriche di ragione 10, per descrivere numeri molto grandi volendo giungere a dimostrare l'esistenza di un numero grande a piacere, più del numero dei granelli di sabbia presenti sulla Terra. Scrive Archimede:

Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero [dei granelli] della sabbia sia infinito in quantità: dico non solo quello [dei granelli di sabbia] che sono intorno a Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche quello [dei granelli di sabbia] che sono in ogni regione, sia abitata sia non abitata. Vi sono poi alcuni che ritengono che quel numero non sia infinito, ma che non si possa nominare un numero che superi la sua quantità. È chiaro che se coloro che così pensano si rappresentassero un volume di sabbia di grandezza tale quale quella della Terra, avendo riempito tutti i mari e tutte le depressioni fino a raggiungere l'altezza delle più alte montagne, molto meno comprenderebbero che si possa nominare un numero che superi tale quantità. Ma io tenterò di mostrarti, per mezzo di dimostrazioni geometriche che tu potrai seguire, che, dei numeri da noi denominati ed esposti negli scritti inviati a Zeusippo, alcuni superano non soltanto il numero [dei granelli] della sabbia aventi [nell'insieme] grandezza uguale alla Terra riempita come abbiamo detto, ma anche della grandezza uguale al cosmo [intero]. [Archimede, Arenario]

In tempi più recenti è nella *Triparty* di Chuquet che si ritrova enunciato un problema in cui ci si avvicina all'idea di *logaritmo*:

Problema 2 ("della botte" di Chuquet)*.* Una botte si svuota ogni giorno di un decimo del suo contenuto. Dopo quanto tempo si sarà svuotata per metà?

Con le nozioni e gli strumenti oggi a nostra disposizione diremmo che si tratta di risolvere l'equazione esponenziale:

$$\left(\frac{9}{10}\right)^x = \frac{1}{2}$$

Calcoleremmo quindi il contenuto presente nella botte all'inizio di ciascun giorno:

Giorno	Risoluzione	Contenuto
0	(botte piena)	1
1	$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$	0,9
2	$\frac{9}{10} - \frac{1}{10}\frac{9}{10} = (\frac{9}{10})^2$	0.81
3	$(\frac{9}{10})^2 - \frac{1}{10}(\frac{9}{10})^2 = (\frac{9}{10})^3$	0.729
4	$\cdots = (\frac{9}{10})^4$	0.6561
5	$\cdots = (\frac{9}{10})^5$	0.59549
6	$\cdots = (\frac{9}{10})^6$	0.531441
7	$\cdots = (\frac{9}{10})^7$	0.4782969

Tabella 5.4: Risoluzione "problema della botte" di Chuquet

Dai nostri calcoli osserviamo che il contenuto diviene la metà nel corso del sesto giorno. È interessante osservare come Chuquet sia giunto alla soluzione, presentandola attraverso la cosiddetta "regola del tre semplice", che possiamo definire come una sorta di interpolazione lineare della funzione esponenziale. Dopo aver calcolato che all'inizio del sesto giorno la botte contiene 0.531 del contenuto iniziale e all'inizio del settimo giorno ne contiene

0.478, e fatta l'ipotesi che la velocità di fuoriuscita sia costante, egli trova la soluzione $6 + \frac{31441}{531441}$ giorni.

Osservazione 2. Allo stesso risultato di Chuquet giungiamo se indichiamo con t il tempo incognito da sommare al sesto giorno perché il contenuto della botte raggiunga il fissato valore 0.5, ed impostiamo la proporzione:

$$(0.531441 - 0.5) : t = (0.531441 - 0.4782969) : 1$$

da cui risolvendo si trova t=0.591616, valore molto vicino al risultato ottenuto da Chuquet.
Chuquet commenta il suo risultato in questi termini:

Di questo procedimento i più saranno contenti. Tuttavia sembra verosimile che si debba cercare un numero proporzionale compreso tra 6 e 7 giorni che, per il momento, ci è sconosciuto.

[Chuquet, Triparty]

In effetti il risultato ottenuto con questa procedura è approssimato per eccesso, in quanto il valore di t riportato in ore e minuti risulta essere $t = 14^h 12'$, mentre risolvendo come oggi possiamo permetterci tramite la funzione logaritmo otteniamo il valore esatto: $t = log_{\frac{9}{10}} 0.5 = 6.578813$ che trasformato in ore e minuti diventa $t = 13^h 53'$.

In realtà Chuquet presenta due diverse varianti nella soluzione del problema della botte: in una prima versione assume unitaria la capacità della botte; nella seconda suggerisce invece di considerare che la botte abbia capacità elevata (egli utilizzerà il valore 10000000), in modo da facilitare i calcoli evitando la presenza di scomode cifre decimali. Quella di servirsi di numeri grandi per non incorrere in calcoli eccessivi fu una strada scelta ripetutamente dai matematici del tempo, in particolare nell'ambito della fiorente trigonometria: considerando cerchi goniometrici di dimensioni opportunamente estese (e non di raggio unitario come oggi è d'uso comune), ci si riconduceva a funzioni trigonometriche dipendenti dal raggio, ma che non richiedevano la notazione decimale per la parte frazionaria.

5.2 L'arrivo di Napier

Si è illustrato come alcuni matematici e studiosi hanno voluto, nel corso della storia, indagare e approfondire il legame tra progressioni aritmetiche e geometriche, individuando nella *legge degli esponenti* una proprietà, quasi misteriosa, dei numeri. Non si è però ancora mostrato il passaggio dalla legge teorica alle possibili applicazioni pratiche: ciò che condusse alla scoperta dei logaritmi e che decretò il loro successo fu proprio la volontà di disporre di strumenti di calcolo che fossero più efficienti. Gli astronomi del tempo, ad esempio per studiare il moto dei pianeti, non avevano altra strada se non quella di effettuare calcoli lunghi e complicati, quali moltiplicazioni e divisioni tra numeri con molte cifre, estrazioni di radici quadrate e cubiche.

5.2.1 Dai calcoli ai logaritmi...dalla teoria alla pratica

John Napier (1550 - 1617), noto in Italia come Nepero, fu un matematico, astronomo e teologo inglese. Nella sua opera *Rabdologia* illustra la costruzione ed il funzionamento dei *bastoncini* (anche noti come *ossa di Nepero*), che divennero presto un pratico strumento per semplificare operazioni come moltiplicazioni, divisioni ed estrazioni di radici, accelerandone alcuni passaggi intermedi.(Figura 5.1)

Napier, inoltre, introdusse l'utilizzo del punto di separazione tra parte intera e parte decimale di un numero, citando una precedente notazione adottata da Stevino:

> *In verità, qualora non piacciano queste frazioni, in cui capitano denominatori diversi, per la difficoltà di operare con loro e siano più congeniali le altre i cui denominatori sono sempre parti decime, centesime,*

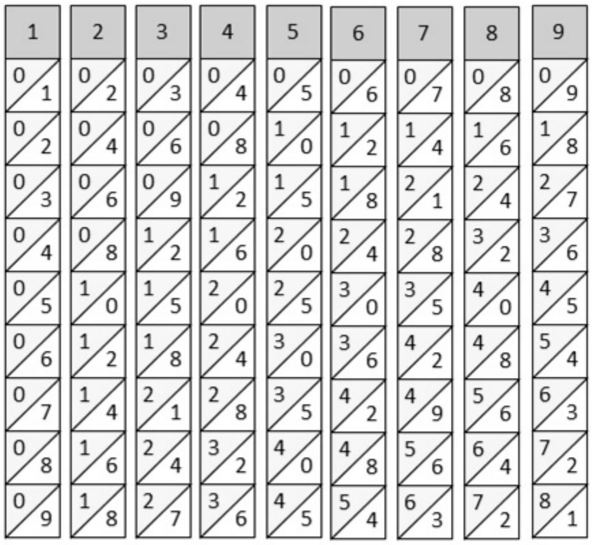

Figura 5.1: Bastoncini di Nepero

millesime, ecc. che il dottissimo matematico Simon Stevin nella sua Aritmetica Decimale indica in questo modo e chiama 1 le prime, 2 le seconde, 3 le terze: poiché queste frazioni danno la stessa facilità di operare propria dei numeri interi potrai, terminata la divisione comune e delimitato il risultato con un punto o una virgola (come qui a margine), aggiungere al dividendo, o uno zero per i decimali o due per i centesimi e tre per i millesimi, o altri ancora di seguito, a piacere: e ripetendo con essi il procedimendo di sopra, come nell'esempio di prima ripetuto qui (cui abbiamo aggiunto tre zeri) si otterrà il quoziente 1993,273 che significa: 1993 interi e 273 millesimi, o $\frac{273}{1000}$*, o (da Stevino) 1993, 2' 7"3"'.*

[Napier, Rabdologia]

La principale impronta Napier l'ha lasciata, tuttavia, attraverso le due monografie: la *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, in cui introduce i logaritmi, e la *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, in cui descrive come ha ottenuto questi nuovi oggetti matematici.

Nella *Descriptio* Napier spiega l'idea di *logaritmo*, ne illustra le proprietà e le applicazioni alla risoluzione dei triangoli sferici, fornisce le tavole dei logaritmi per il seno degli angoli da 0° a 90°, ad un intervallo di un minuto di arco e con una precisione di sette o talvolta otto cifre. In questa prima opera Napier non inserisce alcuna indicazione sul metodo seguito per costruire le tavole, ma annuncia una successiva pubblicazione in cui fornirá le opportune indicazioni *"per emendare questo canone o per costruirne daccapo uno migliore, più accurato grazie alla diligenza di più compilatori, rispetto a quanto potè scaturire dall'opera di uno solo"*, come scrive.

Qualche anno dopo nella *Constructio*, opera postuma pubblicata nel 1619, è in effetti spiegato nei dettagli il metodo seguito per la compilazione delle tavole. La stesura della *Constructio* precede in realtà la *Descriptio*, come si deduce dalle parole del figlio Robert Napier che si prodigò per la pubblicazione dell'opera:

Pertanto, o lettore benevolo, in questo libretto tu trovi spiegata in ogni dettaglio la dottrina necessaria alla costruzione dei logaritmi (che questo trattato chiama qui numeri artificiali dal momento che mio padre lo aveva scritto un certo numero di anni prima di coniare il termine logaritmo).

(Robert Napier - Constructio)

5.2.2 La nascita del Logaritmo

La parola *Logaritmo*, seppure non esplicitamente chiarito da Napier, si pensa sia etimologicamente legata alla *misura di rapporti*, come la traduce Keplero, o anche alla combinazione tra *ragione e numero, come se fosse il numero di ragioni, ciò che si accorda bene con la realtà*, come scrive Mercator. Secondo altre fonti la parola potrebbe risalire anche alla *logistica*, che giá ai tempi di Platone designava la scienza del calcolo, distinta dall'aritmetica o teoria dei numeri.

Nella *Constructio* Napier descrive due tipi di moto: uno a crescita aritmetica (o uniforme) ed uno a decrescita geometrica (o proporzionale) nel modo seguente:

Crescere in modo aritmetico significa aumentare della stessa quantità in tempi uguali. Si consideri una semiretta spiccata dal punto fisso b verso d sulla quale si muova, da b a d un punto a, con legge tale che in intervalli di tempo uguali vengano percorsi uguali spazi che sono b1, 12, 23, 34, 45, etc. Affermo che l'incremento b1, b2, b3, b4, b5, etc. è detto aritmetico. Tradotto in numeri, siano b1 10 :, b2 20 :, b3 30 :, b4 40 :, b5 50. Dico che 10, 20, 30, 40, 50, etc. crescono in modo aritmetico: perché si vede che crescono di dieci in intervalli temporali uguali.

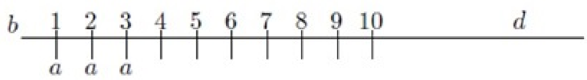

Figura 5.2: Moto aritmetico

Decrescere in modo geometrico significa diminuire in tempi uguali di una parte sempre proporzionale, dapprima a tutta la quantità e in seguito alle parti via via rimanenti. Sia dunque TS il segmento del seno totale su cui si muove il punto G, da T ad 1 verso S, e la distanza da T ad 1 sia, ad esempio, la decima parte di TS. Nello stesso tempo impiegato per spostarsi da T in 1, G si muove da 1 in 2, con (il segmento 12) che è la decima parte di 1S: e da 2 a 3, decima parte di 2S: e ad 3 a 4, decima parte di 3S, e così via. Affermo che i seni TS, 1S, 2S, 3S, 4S, etc. sono detti decrescere in modo geometrico, perché diminuiscono in tempi uguali di quantità diverse ma simili in proporzione.

(Napier, Constructio)

Osserviamo che questa spiegazione di Nepero in merito al moto geometrico si avvicina molto alla risoluzione concettuale del problema della botte di Chuquet presentato in precedenza.
Mettendo a confronto i due moti, Napier immagina di dividere il segmento

Figura 5.3: Moto geometrico

TS in m parti, con m molto grande ($m = 10^7$) e considera come tempo unitario il tempo impiegato per percorrere da T un tratto pari a $\frac{1}{m}$ della distanza totale TS. Nello stesso intervallo di tempo unitario dal punto b si raggiunge il primo punto, che se ipotizziamo $TS = bd$, sarà anch'esso a distanza $\frac{1}{m}bd = \frac{1}{m}TS$. Il primo tratto è dunque lo stesso per i due tipi di moto, ma non sarà così in seguito: sul segmento bd infatti nello stesso intervallo di tempo fissato si percorranno segmenti tutti congruenti, pari a $\frac{1}{m}bd$; sul segmento TS invece si procederà percorrendo nello stesso intervallo di tempo segmenti pari a $\frac{1}{m}$ della distanza rimanente prima di giungere dal nuovo punto fino ad S. In generale, in n unità di tempo, b avrà raggiunto un punto n tale che

$$bn = n\frac{1}{m} \tag{5.1}$$

mentre T raggiunge un punto T_n tale che

$$T_nS = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n \tag{5.2}$$

In altri termini, mentre il primo moto (bd) è di tipo uniforme, in quanto si percorrono spazi uguali in intervalli di tempo uguali, nel secondo moto (TS) le distanze percorse in uno stesso intervallo di tempo stanno invece in rapporto costante con la distanza che resta da percorrere sul segmento TS. Da questa osservazione Napier deduce che nel secondo moto è la velocità a cambiare: la velocità in TS non è costante, bensì proporzionale alla distanza rimanente per giungere ad S, ovvero la velocità diminuisce man mano che il punto avanza, e diminuisce in proporzione alla lunghezza del tratto che lo separa dalla meta S.

Definiti i due moti, Napier definisce il logaritmo, che nella *Constructio* chiama ancora *numerus artificialis* e solo successivamente nella *Descriptio* assumerà il nome definitivo; così scrive per definire il logaritmo di un seno, cioé di un segmento di lunghezza inferiore a TS, detto invece *sinus totus*:

Il numero artificiale di un dato seno è quello che cresce in modo aritmetico con velocità costante pari a quella con cui il seno totale inizia a decrescere in modo geometrico ed in un tempo pari a quello necessario affinché il seno totale decresca fino al valore assegnato.

[Napier, Constructio]

Con l'aiuto della figura 5.4 leggiamo dalle parole di Napier cosa egli intendeva inizialmente con *numero artificiale*:

Sia il segmento TS pari al seno totale e dS il seno assegnato: il punto G si muova in certi intervalli geometricamente da T verso d. Sia bi una semiretta infinita verso i su cui il punto a si muova aritmeticamente partendo da b, con la stessa velocità che G aveva inizialmente in T ; e si supponga che nel medesimo intervallo temporale a si muova dal punto fisso b verso i fino a raggiungere il punto c: il numero che misura il segmento bc è detto numero artificiale del seno assegnato dS.

[Napier, Constructio]

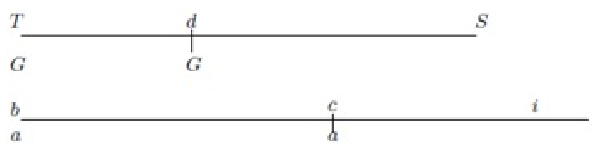

Figura 5.4: Logaritmo

Spiegando in altri termini, Napier considera due punti, G ed a, mobili su due rette parallele. G si trova all'istante iniziale ($t = 0$) sul punto T del segmento TS di lunghezza pari al raggio della circonferenza trigonometrica di riferimento, per Napier $r = 10^7$; il moto di G è geometrico, ovvero si svolge con velocitá proporzionale alla distanza di G dall'estremo S. All'istante iniziale anche il punto a parte da b con la stessa velocità di G, ma a prosegue con moto aritmetico, cioé uniforme. Detto c il punto raggiunto da a nell'istante in cui G si trova in d, Napier definisce la lunghezza bc come il *logaritmo del seno dS*. Utilizzando una nuova notazione poniamo $y := bc$ ed $x := dS$, allora:

$$y := nl(x)$$

in cui nl indica il logaritmo neperiano, che non corrisponde ancora al logaritmo come oggi lo conosciamo attribuendolo erroneamente a Napier. Da questa definizione segue che $nl(TS) = nl(r) = 0$, poiché: quando entrambi i moti devono ancora prendere il via, G si trova ancora in T e quindi $x = dS = TS = r$ e analogamente a si trova ancora in b, per cui $y = cb = 0$. Da cui, con le parole di Napier, *zero è il numero artificiale del seno totale.* In seguito Napier illustra alcune proprietà di questo nuovo oggetto appena creato:

- *I numeri artificiali crescono al diminuire del seno e il numero artificiale di un seno maggiore è più piccolo mentre è più grande quello di un seno minore;*

- *i numeri artificiali di seni proporzionali sono equidifferenti.*

[Napier, Constructio]

L'ultima proprietà appena enunciata, in simboli a noi piú familiari mostra come, se $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$ allora:

$$nl(x_1) - nl(x_2) = nl(x_3) - nl(x_4)$$

che ci ricorda una delle proprietà note dei logaritmi per come li conosciamo. Altre proprietà che utilizziamo correntemente nelle espressioni con logaritmi non valgono però per i *numeri artificiali* di Napier; mostriamo ad esempio che il logaritmo neperiano di un prodotto *non* é la somma dei logaritmi neperiani dei fattori. Poiché infatti vale $ab : a = b : 1$, segue anche che

$$nl(ab) - nl(a) = nl(b) - nl(1)$$

da cui

$$nl(ab) = nl(a) + nl(b) - nl(1)$$

e poiché $nl(1) \neq 0$, nl non verifica la proprietà del prodotto.

Ma qual è allora il legame tra il logaritmo ideato da Napier e il logaritmo naturale di un dato numero positivo x che oggi studiamo?

Ritornando alle precedenti (5.1) e (5.2), leggiamole adesso diversamente:

$$bn = \frac{n}{m},\ T_nS = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

Napier ha definito bn il *logaritmo* di T_nS, ovvero per noi:

$$\frac{n}{m} = Log\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

in cui, sia chiaro, con Log non stiamo indicando ancora alcuna particolare "base". Se adesso, per comoditá, chiamiamo $z = \frac{n}{m}$, da cui $n = mz$, si avrá:

$$z = Log\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{mz}$$

che si puó ancora scrivere piú chiaramente:

$$z = Log\left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m\right)^z \tag{5.3}$$

da cui si evince che la base ancora incognita del Log utilizzato nella pratica da Napier corrisponde al valore $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m$, poiché é proprio questo il valore da attribuire alla base di Log se vogliamo ottenere z come esponente in (5.3).
Si puó provare facilmente, sostituendo ad m valori arbitrariamente grandi (ricordiamo che m è il numero di intervalli in cui dividiamo il segmento bn iniziale), che tale numero ha un valore prossimo ad $\frac{1}{e}$, come si ricava

facilmente dal noto limite $lim_{m->\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$.
Si puó quindi affermare che la "base" del logaritmo neperiano fosse il valore $\frac{1}{e}$.

È da notare che il concetto di *base* di un logaritmo non rientra nella definizione che Napier ha introdotto, ma sarà un'aggiunta successiva ad opera di Leibniz, Johann Bernoulli ed Eulero, che all'inizio del Settecento definiranno il logaritmo come funzione inversa della funzione esponenziale.

5.3 Da Napier a Briggs

Con le seguenti parole Napier scrive commentando il lavoro svolto e illustrando come intende procedere per il futuro:

Mi sono sempre sforzato al meglio delle forze e dell'ingegno di eliminare la difficoltà e la lunghezza del calcolo, la cui noiosità riesce spesso a respingere molti dallo studio della Matematica. E a questo scopo negli scorsi anni ho curato l'edizione del canone dei Logaritmi elaborato da tanto tempo che, lasciati da parte i numeri naturali e le operazioni che per loro tramite riescono piuttosto difficili, le sostituisce con facili ed altrettanto valide addizioni, sottrazioni, divisioni per due e per tre. Di questi logaritmi abbiamo trovato un'altra specie molto più utile ed abbiamo deciso di rendere noto un metodo per ottenerli insieme a regole d'uso (se Dio ci concederà una vita abbastanza lunga e un buono stato di salute): tuttavia, a causa della salute inferma, abbiamo lasciato il calcolo di un nuovo canone ad un uomo versato in questo genere di studio: in primo luogo al dottissimo Sig. Henry Briggs, pubblico professore di Geometria a Londra e mio carissimo amico da molto tempo.

[Napier, Constructio]

Henry Briggs (1561 - 1630) incontra Napier nel 1615 in Scozia e in quella importante occasione vi fu una sorta di passaggio di consegne tra un Napier che sentiva ormai venir meno le forze e un Briggs che ereditava l'onere di perfezionare la scoperta dell'ammirato Napier. Furono entrambi favorevoli verso l'opportunità di modificare il sistema originario a vantaggio di una semplificazione. Se inizialmente l'idea di Briggs era più orientata verso la scelta di attribuire il valore 0 al logaritmo del seno totale (r) e il valore 10000000000 ($= 10^{10}$) al logaritmo della decima parte del seno totale ($\frac{r}{10}$), ovvero, se scegliamo di indicare con *bl* il nuovo logaritmo utilizzato da Briggs:

$$bl(r) = 0 \;\; e \;\; bl\left(\frac{r}{10}\right) = 10^{10}$$

che risulta essere la prima modifica operata da Briggs ai logaritmi neperiani. Ma dopo l'incontro con Napier, i due arrivano alla conclusione che la modifica da effettuare sia piuttosto un'altra. Così scrive Briggs nella sua opera *Arithmetica Logarithmica*:

Mentre stavamo discutendo del cambiamento da apportare ai logaritmi, disse che anche lui lo riteneva opportuno e che lo avrebbe desiderato operare: quelli di cui aveva curato l'edizione erano destinati ad essere sostituiti da altri più comodi cui avrebbe lavorato compatibilmente con gli impegni e lo stato di salute. Egli riteneva di dover apportare questo cambiamento: che 0 fosse il logaritmo dell'unità e 10000000000 quello del seno totale: proposta che non potei far altro che riconoscere come di gran lunga la più comoda.

[Briggs, Arithmetica Logarithmica]

La scelta operata di comune accordo dai due è dunque quella di considerare 0 come logaritmo dell'unità e 10^{10} il logaritmo del sinus totus, ovvero:

$$bl(1) = 0 \;\; e \;\; bl(r) = 10000000000$$

.

Da uno sguardo più attento all'opera di Briggs, troviamo la sua definizione di logaritmo in questi termini:

I logaritmi sono numeri che, associati a numeri proporzionali, mantengono uguali differenze. [Briggs, Arithmetica Logarithmica]

Questa definizione possiamo tradurla in linguaggio matematico moderno con la considerazione per cui i logaritmi costituiscono una progressione aritmetica posta in corrispondenza ad una geometrica. Briggs illustra il concetto di logaritmo con la tabella in Figura 5.5, in cui nella prima colonna compaiono le potenze del 2 (ovvero i numeri del tipo 2^n con $n = 0, 1, \ldots, 7$), e in corrispondenza nelle altre quattro colonne (indicate con le lettere A, B, C e D) sono riportati quattro diversi sistemi di logaritmi (ovvero progressioni aritmetiche), di cui i primi tre sono crescenti (partono da 1, 5, 5, con l'aggiunta rispettivamente di una, una e tre unità) e solo l'ultimo (colonna D) è decrescente (parte da 35 e si sottraggono tre unità ad ogni riga):

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
numeri propor-tionales	Logar.	Logar.	Logar.	Logar.

Figura 5.5: Logaritmi - Briggs

Alla definizione accompagnata dalla presente tabella, Briggs aggiunge due lemmi, validi per tutti i sistemi di logaritmi ammissibili:

Lemma 5.3.1 (Briggs 1). *Se sono assegnati numeri arbitrari ma che crescono o decrescono uniformemente, le loro differenze sono proporzionali ai loro intervalli.*

E riferendosi alla sua tabella spiega cosí il primo lemma:

Così si consideri il primo, il terzo e l'ottavo dei numeri indicati con D: 35.29.14. Tra il primo ed il terzo vi sono due intervalli, tra il terzo e l'ottavo ve ne sono cinque. Dico che la differenza tra il primo ed il terzo, cioè 6, sta alla differenza 15 tra il terzo e l'ottavo, come due sta a cinque.

[Briggs, Arithmetica Logarithmica]

Ovvero, guardando la colonna D e confrontandola con la colonna A: nel passaggio dalla prima alla terza riga abbiamo sottratto 6 in D (6=35-29) e incrementato di 2 righe in A (3=1+2), nel passaggio dalla terza all'ottava riga abbiamo sottratto ancora 15 in D (=29-14) e incrementato di 5 righe in A (3+5). E la proporzione di cui parla Briggs sarebbe:

$$6 : 15 = 2 : 5$$

come effettivamente é. Con questo esempio Briggs ha mostrato con un esempio la validità del suo primo lemma. Ed ecco il secondo lemma enunciato da Briggs:

Lemma 5.3.2 (Briggs 2)**.** *Dati quattro numeri con la proprietà che il primo supera il secondo della stessa quantità di cui il terzo supera il quarto, allora la somma del primo e del quarto è uguale alla somma del secondo e del terzo, e viceversa.*

Il secondo lemma è spiegato dicendo che:

Così nei numeri 9.5.15.11 la somma sia dei medi che degli estremi è 20.

[Briggs, Arithmetica Logarithmica]

Successivamente, nel capitolo che intitola *Logarithmus unitatis sit 0* (ovvero "Il logaritmo dell'unità sia 0"), Briggs afferma la sua decisione definitiva di scegliere tra i possibili sistemi logaritmici, quello in cui il logaritmo dell'unità sia zero. Le conseguenze principali di questa scelta riguardano le proprietà algebriche dei logaritmi, che a questo punto trasformano effettivamente prodotti in somme, cosa che con Napier non era ancora vera. Adesso, dalla proporzione:

$$xy : x = y : 1$$

segue, per la definizione di logaritmo, e poiché adesso si è imposto $bl(1) = 0$:

$$bl(xy) = bl(x) + bl(y)$$

ovvero, come evidenzia orgoglioso Briggs:

Il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori. [Briggs, Arithmetica Logarithmica]

5.3.1 Il logaritmo decimale

Il passo successivo di Briggs, decisivo per l'utilizzo più recente dei logaritmi, è stato quello di considerare una base che risultasse più comoda per gli utilizzi pratici nei calcoli. Era chiaro a Briggs che per individuare un sistema di logaritmi in modo univoco occorreva fissare il valore del logaritmo di un numero distinto dall'unità: per comodità egli sceglie il numero 10, cui attribuisce il valore 100000000000000 ($10^{14} = bl(10)$), in modo da contenere nell'intervallo [0,1] un numero molto grande di medi proporzionali e mantenere una grande precisione nei risultati. Queste le sue motivazioni:

Assegnato il valore al logaritmo dell'unità, il passo successivo è la ricerca di un altro numero di uso molto frequente e sommamente necessario, ed attribuiamogli un logaritmo comodo che sia ad un tempo molto facile da descrivere ogni volta che serve e da tenere a mente. Nessun numero sembra più indicato allo scopo che il dieci, il cui logaritmo sia 1,00000,00000,0000. I numeri principali sono così l'unità ed il dieci ed i loro logaritmi 0 e 1,00000,00000,0000. La scelta di questi quattro numeri non è guidata da alcuna necessità ma dall'arbitrio; né da essa ci si attende la certezza delle operazioni aritmetiche quanto la loro semplicità.

[Briggs, Arithmetica Logarithmica]

5.4 Torricelli: la curva logaritmica

Il primo a trattare il logaritmo come funzione e a considerare la curva logaritmica come la conosciamo oggi è stato **Evangelista Torricelli** (1608-1647), che ha avuto il merito di aver conciliato aritmetica e geometria. Nella sua opera *De hemihyperbole Logarithmica* abbiamo una testimonianza del suo essersi ispirato a chi lo aveva preceduto:

Quella linea che io chiamavo mezza iperbola non è affatto nuova invenzione, come credo che ella avrà conosciuto subito, ma viene autorizzata dal nome di un grand'autore e da una invenzione grandissima nelle matematiche. Parlo di Nepero e de' logaritmi dell'una e dell'altra specie, la nascita de' quali con le lor proprietà e dimostrazioni si scorgono manifestamente in quella linea. In somma quei due moti, uno aritmetico e l'altro geometrico che da Nepero non furon considerati se non separatamente l'uno dall'altro, da me sono stati contemplati unitamente, e ne ho cavato una speculazione di geometria, dove che egli non andava rintracciando altro che una pratica aritmetica.

[Torricelli, De hemihyperbole Logarithmica]

Torricelli inizia enunciando le proprietà qualitative della curva, fornendo la figura (5.6), e i teoremi principali da lui mostrati per poi costruire per punti la curva, cui dà il nome di *semiperbole* spiegandone il motivo:

É una certa linea ABC che per la sua definizione possiede un grande e molto diffuso interesse in geometria, una curva che non ha termine da entrambe le parti e possiede un solo asintoto HD (da ciò le abbiamo assegnato il nome di semiperbole) verso il quale sempre tende senza mai raggiungerlo; essa ha la parte convessa rivolta sempre dalla stessa parte, cioè rivolta all'asintoto.

[Torricelli, De hemihyperbole Logarithmica]

La definizione della curva logaritmica, su cui si basa la costruzione della curva per punti, é data come segue:

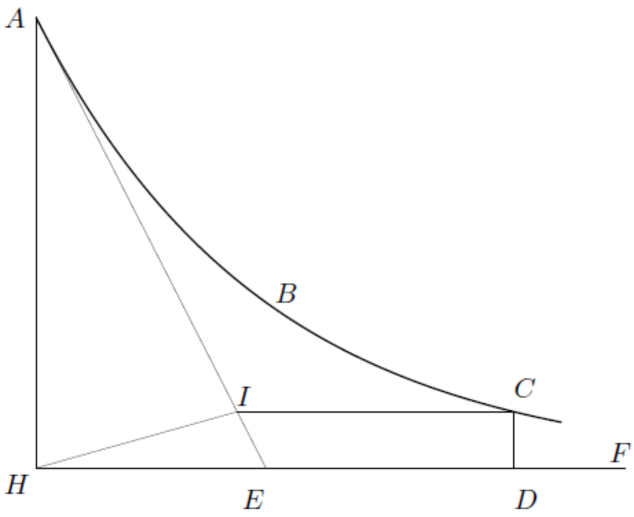

Figura 5.6: Semiperbole - Torricelli

Se c'é una linea ABC che tagli tutte le rette perpendicolari a DE ed equidistanti tra loro in segmenti che formano una progressione geometrica, chiamo quella linea ABC semiperbole, visto che ha una sola retta per asintoto.

[Torricelli, De hemihyperbole Logarithmica]

La curva di Torricelli realizza dunque la corrispondenza tra progressioni aritmetiche e geometriche, che è alla base della definizione neperiana di logaritmo. In termini moderni, Torricelli ha definito la curva $x = log_a y$, ovvero $y = a^x$.
La figura 5.7 è invece spiegata come segue:

Si consideri una retta DE illimitata da ambo le parti su cui si prendono due punti D ed E arbitrari. Si traccino due segmenti perpendicolari DA ed EC. Diviso in due parti uguali il segmento DE in F, si tracci la perpendicolare FB media (geometrica) tra DA ed EC e bisecate ancora le parti ottenute in G ed M, si traccino GH ed MN entrambi medi proporzionali tra i segmenti

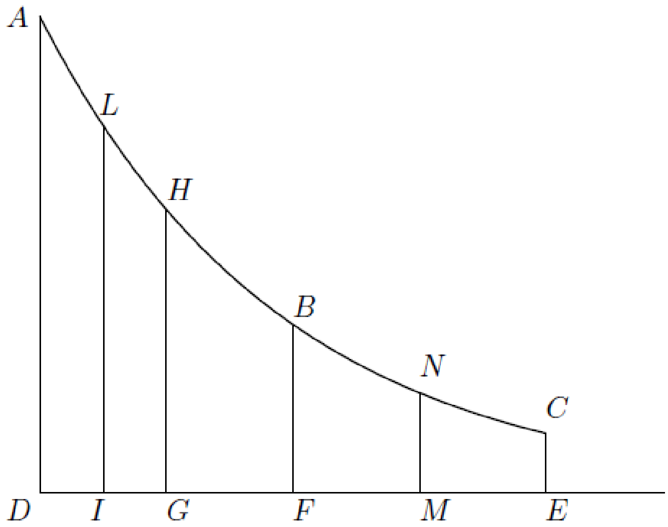

Figura 5.7: Costruzione per punti Semiperbole - Torricelli

adiacenti. E si proceda in questa suddivisione tante volte quanto si vuole; in seguito si tracci per i punti estremi trovati ALHBNC una curva che chiamiamo semiperbole per la somiglianza e perché ha un solo asintoto.

[Torricelli, De hemihyperbole Logarithmica]

Si tratta di un processo di bisezione del segmento arbitrario DE in cui ad ogni punto della suddivisione corrisponde un'ordinata che è la media geometrica delle ordinate dei punti adiacenti nella successione, ovvero:

$$FB^2 = DA * EC,$$

$$MN^2 = FB * EC,$$

e così via. Il procedimento si può iterare, considerando medie aritmetiche sull'asse orizzontale DE e medie geometriche sull'asse verticale, in modo che i segmenti orizzontali rappresentano i logaritmi di quelli verticali, ad esempio:

$$DF = log(FB).$$

Dopo aver illustrato queste proprietà generali, Torricelli mostra un risultato sui plurirettangoli circoscritti ad un arco di semiperbole, aventi basi coincidenti ed altezza in progressione geometrica (figura(5.8)), cosicché i vertici si trovano su un arco di semiperbole. Torricelli mostra come alla progressione geometrica dei punti sull'asse delle ordinate corrisponde una progressione aritmetica di aree. Le aree dei plurirettangoli esprimono la successione dei logaritmi dei punti indicati in ordinata.

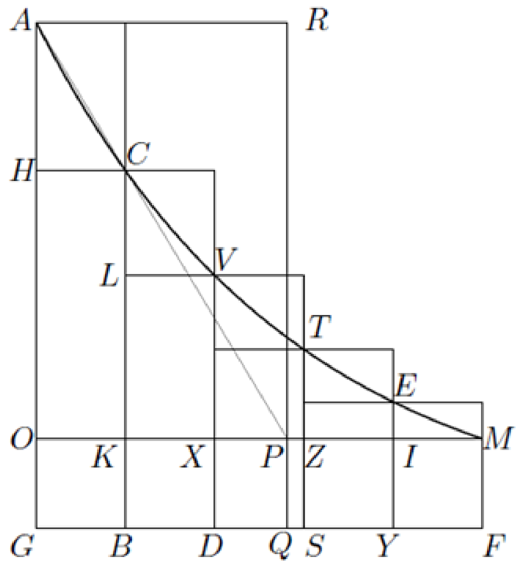

Figura 5.8: Semiperbole e plurirettangoli - Torricelli

Ad analoghe conclusioni giungiamo se consideriamo l'iperbole equilatera $f(x) = \frac{1}{x}$ e la integriamo in un certo intervallo, calcolandone l'area sottesa: sappiamo infatti che integrando la funzione $\frac{1}{x}$ si ottiene proprio la funzione logaritmo naturale. Vediamolo meglio con l'aiuto dell'immagine in figura (5.9).

Consideriamo alcuni punti appartenenti all'iperbole in modo che le loro ascisse siano in progressione geometrica: il punto A di ascissa $x_A = 1$ ha coordinate $A = (1, f(1)) = (1, 1)$, il punto B di ascissa $x_B = b$ ha coordinate $B = (x_B, \frac{1}{x_B}) = (b, b^{-1}))$, il punto C di ascissa $x_C = b^2$ sarà $C = (x_C, \frac{1}{x_C}) =$

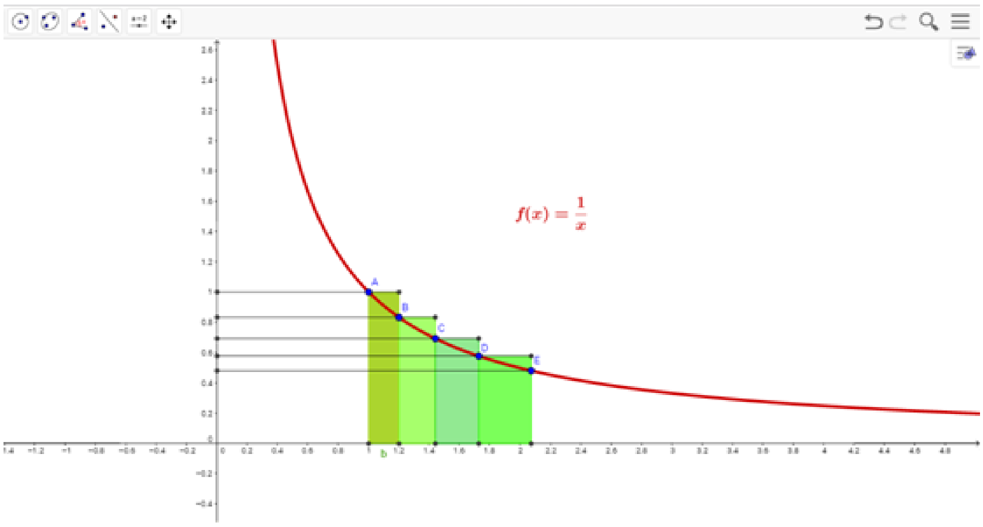

Figura 5.9: Iperbole equilatera

(b^2, b^{-2})), e cosí via $D = (b^3, b^{-3})$), $E = (b^4, b^{-4})$), etc.
I punti considerati hanno le ascisse in progressione geometrica di ragione b.
I rettangoli rappresentati in figura hanno allora area data da:
$Area_1 = (x_B - x_A) * y_A = (b - 1) * 1 = b - 1$
$Area_2 = (x_C - x_B) * y_B = (b^2 - b) * b^{-1} = b - 1$
$Area_3 = (x_D - x_C) * y_C = (b^3 - b^2) * b^{-2} = b - 1$
$Area_3 = (x_E - x_D) * y_D = (b^4 - b^3) * b^{-3} = b - 1$
e così via se continuassimo con altri punti con ascisse in progressione aritmetica.
Si osservi quindi che, poiché le aree di questi rettangoli sono uguali, l'area del plurirettangolo che ha per base l'intervallo $[1, b^n]$ è data da:

$$Area_{TOT} = \sum_{k=1}^{n} Area_k = n\,(b-1)$$

Si ha quindi che alla progressione geometrica dei punti sull'asse delle ascisse $(1, b, b^2, b^3, \dots)$ corrisponde la progressione aritmetica delle aree. Le aree dei plurirettangoli esprimono quindi la successione dei Logaritmi dei punti considerati in ascissa.

Conclusioni

Pur non essendo tra gli scopi principali di un corso di matematica trattare in modo sistematico il contesto storico in cui il concetto nasce e si sviluppa, sarebbe utile e stimolante per gli studenti inserire momenti in cui si affrontano alcuni aspetti legati agli argomenti oggetto dello studio, affacciandosi in maniera eclettica alle altre discipline che sulla matematica si fondano, pur avendo a discapito di questa un carattere di osservabilità oggettiva.
Il percorso seguito durante il periodo di creazione del presente elaborato è stato caratterizzato da una serie di domande a cui si è cercato di dare delle risposte.
Dai vari tasselli ritrovati e integrati insieme si è costruito un piccolo mosaico. Sono emersi diversi spunti che manifestano come questo argomento (logaritmi, leggi esponenziali) si presti molto bene per proporre esempi di carattere applicativo, opportunamente scelti, che rappresentino una forma di quei problemi cosiddetti "contestualizzati" presenti da alcuni anni nelle prove scritte di Matematica degli Esami di Stato.

Bibliografia

[1] P. Govoni, *Che cos'è la storia della scienza*, Roma, Carocci editore, 2015

[2] U. Besson, *Didattica della fisica*, Roma, Carocci editore, 2015

[3] M. Boas, *Il Rinascimento Scientifico 1450-1630*, Milano, Feltrinelli, 1981

[4] J.L.E. Dreyer, *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Milano, Feltrinelli, 1970

[5] E. Bellone, *Caos e Armonia*, Torino, UTET, 2004

[6] G.Ruffo, *Lezioni di Fisica*, Bologna, Zanichelli, 2006

[7] J.S. Walker, *Fisica: termologia, onde, relativitá*, Bologna, Zanichelli, 2004

[8] A.Caforio, A.Ferilli, *Le leggi della fisica*, Firenze, Le Monnier, 2005

[9] R. Rosso, *Appunti sulla storia dei logaritmi* - http://www-dimat.unipv.it/ rosso/logaritmi.pdf

[10] F. Zavalloni *Perché si disimpara l'arte di far domande*, 2009

[11] C. Bonfanti *Una geometria della visione del mondo*, 2014, https://issuu.com/scuolasteiner/docs/201405quadernone14

[12] G. Cellai, S. Secchi, *Fondamenti di acustica*, http://web.taed.unifi.it/fisicatecnica/Secchi/documenti/acustica.pdf

[13] E. Latini *Esponenziali*, 2016, http://campus.unibo.it/260024/1/esponenziali.pdf

[14] A. Torre *Scale logaritmiche*, 2013, http://www-dimat.unipv.it/atorre/farmacia2013-2014/cartelog.pdf

[15] AA.VV. *I logaritmi in astronomia*, Rivista Nuovo Orione, 1999, http://www.galassiere.it/logaritmi.htm

[16] P. Panunzi, *Come ridurre le distanze*, https://www.astronomia.com/2012/10/08/come-ridurre-le-distanze-astronomiche/e astronomiche, 2012