Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

DISUGUAGLIANZA DI HARNACK

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
Annamaria Montanari

Presentata da:
Nicola Mainetti

Sessione Unica
Anno Accademico 2015/2016

Introduzione

L'oggetto di studio di questa tesi sono le funzioni armoniche, cioè le funzioni di classe C^2, definite in un aperto di $\mathbb{R}^N$, che sono soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \;\; con \;\; \Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e definito le nozioni principali, fondamentali per poter ottenere i risultati dei capitoli successivi.
In particolare dopo aver definito gli operatori differenziali di divergenza e Laplaciano e le funzioni armoniche, abbiamo determinato le soluzioni radiali dell'equazione di Laplace (a meno di costanti):

$$f(x) = u(|x|) = u(r) = \begin{cases} \log r, & N = 2 \\ r^{2-N}, & N \geq 3 \end{cases}$$

L'obiettivo del secondo capitolo è quello di determinare le formule di rappresentazione per funzioni armoniche.
Dopo aver dato la definizione di aperto regolare e di normale esterna ad esso, abbiamo enunciato e dimostrato il teorema della divergenza: dato Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ e $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ allora si ha

$$\int_{\Omega} divF \, dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma$$

dove ν è la normale esterna a Ω.
Questo risultato è alla base dello studio delle funzioni armoniche e una sua possibile conseguenza è data dalla prima e seconda identità di Green.

Sfruttando proprio quest'ultima e definendo la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace abbiamo enunciato la prima formula di rappresentazione di Green.
In particolare introducendo la funzione di Green, abbiamo ottenuto una formula più generale di rappresentazione: la seconda formula di rappresentazione di Green.
Nel terzo capitolo, dopo aver calcolato il volume e l'area di bordo di una palla euclidea, abbiamo enunciato le formule di media del Laplaciano.
Data u armonica su Ω e $B(x_0, r) \subset \Omega$ la palla euclidea di centro x_0 e raggio $r > 0$, allora vale

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial(B(x_0, r))|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) d\sigma(x)$$

$$u(x_0) = \frac{1}{|(B(x_0, r))|} \int_{B(x_0,r)} u(x) dx$$

(dove indichiamo con $|\partial(B(x_0, r))|$ la misura di Lebesgue del bordo della palla e con $|(B(x_0, r))|$ la misura di Lebesgue del volume della palla) che sono la formula di media, rispettivamente, di superficie e di volume.
Il capitolo 4 tratta la Disuguaglianza di Harnack, che rappresenta una conseguenza diretta delle formule di media.
In particolare abbiamo enunciato e dimostrato la disuguaglianza su una palla e successivamente abbiamo generalizzato a un compatto contenuto in un aperto regolare. Per poter dimostrare quest'ultima è stato utile introdurre alcuni risultati su compattezza e connessione di insiemi in $\mathbb{R}^N$.
Abbiamo poi visto un'applicazione della Disuguaglianza di Harnack: il teorema di Liouville (una funzione armonica su $\mathbb{R}^N$, inferiormente limitata, è costante).
Infine il quinto capitolo riguarda il principio di massimo (minimo) forte e debole per una funzione armonica.

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Definiamo alcune nozioni fondamentali per il proseguo di questa tesi. Innanzitutto introduciamo due importanti operatori differenziali.

Definizione 1.1 (Divergenza).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. Si definisce la divergenza *div* di F come una quantitá scalare data da

$$divF = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

In particolare la divergenza è un operatore lineare cioè

$$div(a \cdot F + b \cdot G) = a \cdot divF + b \cdot divG$$

Definizione 1.2 (Operatore di Laplace).
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Si definisce il Laplaciano Δ di u come

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Possiamo andare a definire la classe di funzioni che è alla base del nostro studio: le funzioni armoniche.

Definizione 1.3 (Funzione armonica).
Dato un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ è detta funzione armonica se è

soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \ \ in \, \Omega$$

L'insieme delle funzioni armoniche su Ω si indica con $\mathbb{H}(\Omega)$.
Per la linearità dell'operatore di Laplace si ha che la somma di due funzioni armoniche e il prodotto di uno scalare per una funzione armonica è ancora una funzione armonica.
In particolare risulterà utile una sottoclasse delle funzioni armoniche: quelle radiali.

Definizione 1.4 (Funzione radiale)**.**
Una funzione $f\colon \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta radiale se

$$f(x) = u(|x|) \ \ con \ \ u : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Vogliamo determinare le funzioni radiali armoniche.
Sia $u \in C^2((0,\infty), \mathbb{R})$ e si pone $f(x) = u(|x|)$. Allora f é di classe C^2 e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = u'(|x|)\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = u'(|x|)\frac{2|x|}{2x_j} = u'(|x|)\frac{|x|}{x_j}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u'(|x|)\frac{x_j}{|x|}\right) = u''(|x|)\frac{x_j}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + u'(|x|)\frac{|x| - x_j\frac{x_j}{|x|}}{|x|^2} =$$

$$= u''(|x|)\frac{x_j^2}{|x|^2} + u'(|x|)\frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}$$

Pertanto, posto $r = |x|$, si ha

$$\nabla f(x) = u'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

e

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_j}(x) = u''(r)\sum_{j=1}^{N}\frac{x_j^2}{|x|^2} + u'(r)\sum_{j=1}^{N}\frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} = u''(r) + u'(r)\frac{N-1}{|x|}$$

Risulta che $f(x) = u(|x|)$ è armonica se e solo se

$$u''(r) + u'(r)\frac{N-1}{|x|} = 0 \Leftrightarrow r^{N-1}\left(u''(r) + u'(r)\frac{N-1}{|x|}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r^{N-1}u'(r))' = 0 \Leftrightarrow r^{N-1}u'(r) = c \Leftrightarrow u'(r) = \frac{c}{r^{N-1}}$$

quindi

$$u(r) = \begin{cases} c\log r + c_0, & N = 2 \\ c\frac{r^{2-N}}{2-N} + c_0, & N \geq 3 \end{cases}$$

Si può concludere che le funzioni radiali armoniche sono, a meno di costanti,

$$f(x) = u(|x|) = u(r) = \begin{cases} \log r, & N = 2 \\ r^{2-N}, & N \geq 3 \end{cases}$$

Questa rappresenta la soluzione radiale dell'equazione di Laplace.

Capitolo 2

Formule di rappresentazione per funzioni armoniche

L'obiettivo di questo capitolo è definire delle particolari formule di rappresentazione per le funzioni armoniche: le formule di rappresentazione di Green. Cominciamo introducendo due concetti che risulteranno molto utili d'ora in avanti.

Definizione 2.1 (Aperto regolare)**.**
Un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ si dice regolare se:

- Ω è limitato (esiste una palla di raggio finito che lo contiene)
- $\partial\Omega$ è una $(N-1)$-varietà di classe almeno C^1
- $\mathrm{Int}(\overline{\Omega}) = \Omega$

Definizione 2.2.
Un vettore $\nu \in \mathbb{R}^N$, $|\nu| = 1$, è detto normale esterna a Ω (aperto regolare di $\mathbb{R}^N$) in $x \in \partial\Omega$ se:

- $\nu \perp \partial\Omega$ in x
- $\exists \delta > 0 : x + t\nu \notin \overline{\Omega}$, $x - t\nu \in \Omega$, $\forall t \in (0, \delta)$

2.1 Teorema della divergenza

Il teorema della divergenza è un teorema cardine per lo studio delle funzioni armoniche e presenta numerose applicazioni, alcune delle quali le vedremo in seguito.

Teorema 2.1.1 (Integrazione per parti).
Sia Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$*. Allora*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_j \, d\sigma \;\; con \;\; j = 1, ...N$$

dove $\nu = (\nu_1, ..., \nu_N)$ *è la normale esterna a* Ω*.*

Per la dimostrazione di questo teorema si veda ad esempio [3].

Teorema 2.1.2 (Teorema della divergenza).
Sia Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$*. Allora*

$$\int_\Omega divF \, dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma$$

Dimostrazione.
Sfruttando il teorema di integrazione per parti degli integrali multipli si ottiene:

$$\int_\Omega divF \, dx = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx = \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\, dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial\Omega} F_j\nu_j \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{N} F_j\nu_j \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > \, d\sigma$$

□

Osservazione 1.
Per quanto visto il teorema della divergenza segue, quindi, da quello di integrazione per parti. È vero anche il viceversa.
Si consideri $F = (0, ..., f, ...0)$, con $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ nel posto j-esimo, e si ottiene:

$$< F, \nu >= f\nu_j \;\; e \;\; divF = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Sfruttando il teorema della divergenza si ha:

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_j\,d\sigma$$

2.2 Formule di rappresentazione di Green

Fra le possibili conseguenze del teorema della divergenza ci sono le identità di Green a cui seguono, dopo aver definito la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace, le formule di rappresentazione di Green.

Proposizione 2.2.1 (Prima identità di Green).
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ e siano $u \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$ e $v \in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R})$. Allora:

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx + \int_\Omega Du\cdot Dv dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\sigma$$

Dimostrazione.
Sia $F = vDu$. Allora

$$divF = \sum_{j=1}^N \frac{\partial(v(D_j u))}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial(v\frac{\partial u}{\partial x_j})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)+\sum_{j=1}^N\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = v\Delta u + Du\cdot Dv$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_\Omega (v\Delta u + Du\cdot Dv)\,dx = \int_{\partial\Omega} < vDu,\nu > d\sigma = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma$$

□

Osservazione 2.
Se si sceglie $u = v$ nella prima identità di Green si ottiene

$$\int_\Omega \left(u\Delta u + |Du|^2\right)dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma$$

che è chiamata identità dell'energia.

Proposizione 2.2.2 (Seconda identità di Green).
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ e siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R})$. Allora:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma$$

Dimostrazione.
Abbiamo che

$$u\Delta v - v\Delta u = \sum_{j=1}^{N}\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\left(u\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j} = div(uDv - vDu)$$

applicando il teorema della divergenza si ottiene

$$\int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u))\,dx = \int_{\Omega} div\,(uDv - vDu)\,dx = \int_{\partial\Omega} < uDv - vDu, \nu > d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega}(u < Dv, \nu > -v < Du, \nu >)\,d\sigma = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma$$

□

Osservazione 3.
Se si sceglie $v \equiv 1$ nella seconda identità di Green si ottiene

$$\int_{\Omega}\Delta u dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma$$

Partendo dalla seconda identità di Green e dalla soluzione radiale dell'equazione di Laplace ricavata nel primo capitolo, si fissa un punto x_0 in Ω, aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, e si definisce la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace:

$$\Gamma(x - x_0) = \Gamma(|x - x_0|) = \begin{cases} \frac{1}{N(2-N)\omega_N}|x - x_0|^{2-N}, & N > 2 \\ \frac{1}{2\pi}\log|x - x_0|, & N = 2 \end{cases}$$

dove ω_n è il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^N$.
Possiamo quindi andare a enunciare la prima formula di rappresentazione per una funzione armonica.

Proposizione 2.2.3 (Prima formula di rappresentazione di Green).
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, e sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Sia $x_0 \in \Omega$ e Γ la soluzione fondamentale normalizzata dell'equazione di Laplace. Allora si ha

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial \Gamma(x - x_0)}{\partial \nu} - \Gamma(x - x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} \Gamma(x - x_0) \Delta u dx$$

Dimostrazione.
Diamo la dimostrazione nel caso $N \geq 3$.
Sia $\varepsilon > 0$ tale che la palla $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subseteq \Omega$ e definiamo

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \overline{B(x_0, \varepsilon)}$$

che è un aperto regolare.
Poniamo

$$v(x) := \gamma(x - x_0) = \gamma_{x_0}(x)$$

che è una funzione di classe C^∞ in $\mathbb{R}^N \backslash \{x_0\} \supseteq \overline{\Omega}_\varepsilon$.
Applichiamo alle funzioni u, v la seconda identità di Green e otteniamo

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\partial B(x_0, \varepsilon)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma$$

Nostro obiettivo è quello di passare al limite per $\varepsilon \to 0$.
Per come è stata definita, v è armonica in Ω_ε, pertanto si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = -\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dx = -\int_{\Omega} \chi_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -\int_{\Omega} v \Delta u dx$$

dove nell'ultimo passaggio è stato applicato il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.
Questo è reso possibile grazie alle seguenti osservazioni:

- $u \in C^2(\overline{\Omega})$ quindi Δu è continua sul compatto $\overline{\Omega}$ e quindi limitata
- $|\chi_{\Omega_\varepsilon}| \leq 1 \; \forall \varepsilon > 0$

- $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$

Per poter provare quest'ultimo punto si considera un compatto$K \subset \mathbb{R}^N$. Allora esiste un $R > 0$ tale che $K \subseteq B(x_0, R)$. Si ha che

$$\int_K v(x)dx \leq \int_{B(x_0,R)} v(x)dx = \int_{|x-x_0|<R} |x-x_0|^{2-N}dx =$$

effettuando il cambio di variabile $y = x - x_0$

$$= \int_{|y|<R} |y|^{2-N}dy = \int_0^R \int_{|y|=r} (|y|^{2-N}d\sigma(y))dr = \int_0^R r^{2-N}N\omega_N r^{N-1}dr =$$

$$= N\omega_N \int_0^R rdr = N\omega_N \frac{R^2}{2} < \infty$$

che prova la locale sommabilità di v.
Pertanto è giustificato il passaggio al limite sotto al segno di integrale.
A questo punto consideriamo

$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma$$

La derivata normale di una funzione radiale è ancora una funzione radiale. Infatti considerando che la normale esterna a $B(x_0, \varepsilon)$ è $\nu = \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$ si ha

$$\frac{\partial v(x)}{\partial \nu} =< D(|x-x_0|^{2-N}), \frac{x-x_0}{|x-x_0|} >=$$

$$=< (2-N)|x-x_0|^{1-N}\left(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right), \frac{x-x_0}{|x-x_0|} >= (2-N)|x-x_0|^{1-N}$$

Su $\partial B(x_0, \varepsilon)$ si ha che $|x - x_0| = \varepsilon$, quindi

$$-\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u\frac{\partial v}{\partial \nu}d\sigma = -\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(2-N)\varepsilon^{1-N}d\sigma =$$

$$= (N-2)\varepsilon^{1-N}\left(\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} (u(x)-u(x_0))d\sigma + \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(x_0)d\sigma\right) =$$

$$= (N-2)\varepsilon^{1-N}\left(o(1)N\omega_N\varepsilon^{N-1} + u(x_0)N\omega_N\varepsilon^{N-1}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} N(N-2)\omega_N u(x_0)$$

Ora vogliamo stimare

$$\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma$$

Si ha

$$\left|\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma\right| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |Du| \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} |x-x_0|^{2-N} d\sigma(x) =$$

$$= C(u)\varepsilon^{2-N} N\omega_N \varepsilon^{N-1} = C(u)N\omega_N\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

In conclusione abbiamo quindi che

$$-\int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + N(N-2)\omega_N u(x_0) + 0$$

Da cui isolando al primo membro $u(x_0)$ e ricordando la definizione data di v si ottiene la tesi.

□

Osservazione 4.
Se $u \in \mathbb{H}(\overline{\Omega})$ allora

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(u(x)\frac{\partial \Gamma(x-x_0)}{\partial \nu} - \Gamma(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma$$

Osservazione 5.
Sempre nel caso $N \geq 3$, se si considera come dominio $\Omega = B(x_0, r) = B$ la palla di centro x_0 e raggio $r > 0$ si ottiene

$$u(x_0) = \int_{\partial B} \left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} - \Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma + \int_B \Gamma\Delta u dx = -\Gamma(r)\int_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial \nu}d\sigma + \Gamma'(r)\int_{\partial B} u d\sigma + \int_B \Gamma\Delta u dx$$

Utilizzando l'osservazione 3 fatta precedentemente si ottiene

$$u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B} u d\sigma - \Gamma(r)\int_B \Delta u dx + \int_B \Gamma\Delta u dx =$$

$$= \int_B (\Gamma - \Gamma(r))\Delta u dx + \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial\Omega} u d\sigma$$

Introduciamo ora la funzione di Green che, definita con precise caratteristiche, ci permette di avere una formulazione più generale di rappresentazione di una funzione armonica.

Definizione 2.3 (Funzione di Green)**.**
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ e sia $h \in C^2(\overline{\Omega})$ armonica su Ω. Si definisce la funzione di Green per Ω

$$G(x,y) := \Gamma(x-y) + h(x,y) \;\; con \;\; x, y \in \Omega, x \neq y$$

tale che $G(x,y) = 0$ su $\partial\Omega$.
In particolare si dimostra che esiste la funzione di Green per una palla euclidea.

Teorema 2.2.4 (Seconda formula di rappresentazione di Green)**.**
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$, dotato di funzione di Green G, e $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora $\forall x \in \Omega$ si ha:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}G(x,y)d\sigma(y) + \int_{\Omega} G(x,y)\Delta u(y)dy$$

Dimostrazione.
Applichiamo la seconda identità di Green alla coppia di funzioni h e u:

$$\int_{\Omega}(h\Delta u - u\Delta h)dy = \int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h}{\partial\nu}\right)d\sigma$$

Essendo h una funzione armonica si ottiene:

$$\int_{\Omega} h\Delta u dy = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial h}{\partial\nu} - h\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma$$

Ricordando la definizione di funzione di Green e sommando la prima formula di rappresentazione con l'espressione ottenuta sopra si ha:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial\nu} - G\frac{\partial u}{\partial\nu})\right)d\sigma + \int_{\Omega} G\Delta u \; dy$$

Ricordando che $G = 0$ su $\partial\Omega$ si ha:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial\nu}d\sigma + \int_{\Omega} G\Delta u \; dy$$

$\square$

Capitolo 3

Formule di media del Laplaciano

Grazie alle formule di rappresentazione di Green viste nel capitolo precedente, siamo ora in grado di andare a determinare le formule di media del Laplaciano: quella di superficie e quella di volume.
Innanzitutto calcoliamo il volume e l'area della superficie di una palla euclidea, che ci serviranno poi nelle formule di media.
Sia

$$B(x_0, r) = \big\{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\big\}$$

la palla euclidea di centro x_0 e raggio $r > 0$.
Il volume di $B(x_0, r)$ è dato da

$$|B(x_0, r)| = \int_{B(x_0,r)} dx$$

ed effettuando il cambiamento di variabile $x = x_0 + ry$ si ottiene

$$|B(x_0, r)| = \int_{B(x_0,1)} r^N dy = r^N \omega_N$$

Ora, si vuole calcolare l'area sul bordo. Pertanto si pone

$$F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad F(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

ed essendo la normale esterna alla palla

$$\nu = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$$

si ha

$$< F, \nu >= 1 \quad divF = \frac{N}{r}$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene l'area sul bordo della palla euclidea

$$|\partial B(x_0, r)| = \int_{\partial B(x_0,r)} d\sigma = \int_{\partial B(x_0,r)} < F, \nu > d\sigma =$$

$$= \int_{B(x_0,r)} divF dx = \frac{N}{r} r^N \omega_N = N r^{N-1} \omega_N$$

Possiamo enunciare le formule di media per le funzioni armoniche utilizzando la prima formula di rappresentazione di Green per una palla.

Teorema 3.0.5 (Formula di media di superficie)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Si consideri la palla $B(x_0, r) \subset \Omega$, allora vale

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial(B(x_0, r))|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) d\sigma(x)$$

Dimostrazione.
Per la formula di rappresentazione di Green per una palla si ha

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial(B(x_0, r))|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) d\sigma(x) + \int_{B(x_0,r)} (\Gamma(x-x_0) - \Gamma(r)) \Delta u(x) dx$$

Essendo u armonica in Ω si ha $\Delta u = 0$ nella $B(x_0, r)$, per cui

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial(B(x_0, r))|} \int_{\partial B(x_0,r)} u(x) d\sigma(x)$$

□

Teorema 3.0.6 (Formula di media di volume)**.**
Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$. Si consideri una palla $B(x_0, r) \subset \Omega$, allora vale

$$u(x_0) = \frac{1}{|(B(x_0, r))|} \int_{B(x_0,r)} u(x) dx$$

Dimostrazione.
Sia $\rho \in (0, r]$ e applichiamo la formula di media di superficie alla palla $B(x_0, \rho)$

$$u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,\rho)} ud\sigma$$

Si moltiplicano entrambi i membri per ρ^{N-1} e successivamente si integra rispetto a ρ su $(0, r]$, ottenendo

$$\int_0^r \rho^{N-1} u(x_0) d\rho = \frac{1}{N\omega_N} \int_0^r \left(\int_{\partial B(x_0,r)} ud\sigma \right) d\rho$$

calcolando l'integrale si ha

$$u(x_0) \frac{r^N}{N} = \frac{1}{N\omega_N} \int_{B(x_0,r)} udx$$

da cui segue il risultato

$$u(x_0) = \frac{1}{r^N \omega_N} \int_{B(x_0,r)} udx = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} udx$$

□

Dalla formula di media di volume e di superficie appena visti possiamo dedurre quindi che il valore della funzione nel centro della palla è uguale al valore medio integrale sia sulla superficie ∂B che su tutta la palla B.
Questi teoremi sono anche noti come teoremi del valor medio.

Osservazione 6.
Sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, allora u verifica la formula di media di superficie se e solo se verifica la formula di media di volume.

Dimostrazione.
Per quanto visto nella dimostrazione dell'ultimo teorema, se u verifica la formula di media di superficie allora verifica anche quella di volume.
Dimostriamo il viceversa. Supponiamo che u soddisfi la formula di media di volume. Allora per ogni palla $B(x_0, r) \subset \Omega$ si ha

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx$$

Quindi

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_0^r \left(\int_{|x-x_0|=\rho} u d\sigma \right) d\rho$$

Si moltiplicano entrambi i membri per $\omega_N r^N$ e si deriva rispetto ad r, applicando alla destra dell'uguale il teorema fondamentale del calcolo integrale. Si ha

$$N\omega_N r^{N-1} u(x_0) = \int_{|x-x_0|=r} u d\sigma - \int_{|x-x_0|=0} u d\sigma = \int_{\partial B(x_0,r)} u d\sigma$$

quindi per ogni $B(x_0, r) \subset \Omega$ si ottiene

$$u(x_0) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x_0,r)} u d\sigma$$

che è la formula di media di superficie per u.

$\square$

Capitolo 4

Disuguaglianza di Harnack

La Disuguaglianza di Harnack è una conseguenza delle formule di media per le funzioni armoniche.
Inizialmente verrà enunciata e dimostrata la Disuguaglianza su una palla e successivamente si generalizzerà a un compatto.
Concluderemo questo capitolo con un'applicazione diretta della Disuguaglianza di Harnack: il teorema di Liouville.

4.1 Disuguaglianza di Harnack su una palla

Teorema 4.1.1 (Disuguaglianza di Harnack su una palla).
Sia Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, tale che $u \geq 0$.
Sia poi $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $B(x_0, 4r) \subseteq \Omega$. Allora vale

$$\sup_{B(x_0,r)} u \leq C(N) \inf_{B(x_0,r)} u \quad \textit{con} \;\; C(N) = 3^N$$

Dimostrazione.
Si vuole provare che

$$\sup_{B(x_0,r)} u \leq C(N) \inf_{B(x_0,r)} u \quad \textit{con} \;\; C(N) = 3^N$$

questo è equivalente a dimostrare che

$$u(x_1) \leq C(N) u(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in B(x_0, r)$$

Siano quindi $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$. Essendo $B(x_1, r) \subset B(x_0, 4r) \subseteq \Omega$ allora posso applicare a $B(x_1, r)$ la formula di media di volume e si ottiene

$$u(x_1) = \frac{1}{|(B(x_1, r))|} \int_{B(x_1,r)} u(x)dx = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x_1,r)} u(x)dx$$

Essendo che $B(x_1, r) \subseteq B(x_2, 3r)$ si ha

$$\frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x_1,r)} u(x)dx \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x_2,3r)} u(x)dx =$$

$$= \frac{\omega_N (3r)^N}{\omega_N r^N} \cdot \frac{1}{|B(x_2, 3r)|} \int_{B(x_2,3r)} u(x)dx = 3^N u(x_2)$$

dove, nell'ultimo passaggio, è stata utilizzata la formula di media di volume per u in $B(x_2, 3r) \subset B(x_0, 4r) \subseteq \Omega$.
Si ha quindi che

$$u(x_1) \leq C(N)u(x_2)$$

con x_1, x_2 elementi generici in $B(x_0, r)$, che conclude la dimostrazione

□

4.2 Disuguaglianza di Harnack sui compatti

Ora, si vuole andare a determinare la Disuguaglianza di Harnack per un generico compatto contenuto in Ω. A tal proposito è importante introdurre i seguenti risultati.

Lemma 4.2.1.
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e $K \subset\subset \Omega$. Allora esiste un insieme compatto connesso K' tale che

$$K \subseteq K' \subseteq \Omega$$

Dimostrazione.
K è un insieme compatto. Per definizione da ogni suo ricoprimento costituito

da una famiglia di aperti si può estrarre una sottofamiglia finita che è ancora un ricoprimento. Sia quindi

$$\{B_j\}_{j=1,...,t} \quad con \;\; B_j \subset \Omega$$

il ricoprimento finito di K.
$\forall i, j = 1, ..., t$ tali che $i \neq j$ si considera la poligonale p_{ij} che congiunge i centri di B_i e B_j.
Essendo Ω un connesso, si può scegliere p_{ij} tale che

$$p_{ij} \subseteq \Omega \quad \forall i, j = 1, ..., t \quad i \neq j$$

Poniamo quindi

$$K' := \overline{\left(\bigcup_{j=1}^{t} B_j\right) \cup \bigcup_{i,j} p_{ij}}$$

Per come è stato definito si ha che K' è un insieme connesso e compatto, che contiene K, e che è contenuto in Ω.

□

Lemma 4.2.2.
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e K un insieme compatto e connesso contenuto in Ω.
Allora dato un ricoprimento di K $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ eistono $x_1, ..., x_t \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{t} B(x_k, r_{x_k})$$

e, posto $B_j = B(x_j, r_{x_j})$ con $j = 1, ..., t$, si ha

$$B_1 \cap B_2 \neq \varnothing \;\; (B_1 \cup B_2) \cap B_3 \neq \varnothing, ..., (B_1 \cup ... \cup B_{t-1}) \cap B_t \neq \varnothing$$

Lemma 4.2.3.
Siano A, B insiemi generici tali che $A \cap B \neq \varnothing$ e sia $u : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ con $u \geq 0$. Supponiamo esistano due costanti positive C_A e C_B tali che

$$\sup_A \; u \leq C_A \inf_A \; u \qquad \sup_B \; u \leq C_B \inf_B \; u$$

Allora vale

$$\sup_{A\cup B} u \leq C_A \cdot C_B \inf_{A\cup B} u$$

Dimostrazione.
Dimostrare che

$$\sup_{A\cup B} u \leq C_A \cdot C_B \inf_{A\cup B} u$$

è equivalente a dimostrare che

$$u(x) \leq C_A \cdot C_B u(y) \quad \forall x, y \in A \cup B$$

Si considerano $z \in A \cap B$ e $x, y \in A \cup B$ allora si ha:

- se $x, y \in A$ $u(x) \leq C_A u(y) \leq C_A \cdot C_B u(y)$
- se $x, y \in B$ $u(x) \leq C_A u(y) \leq C_A \cdot C_B u(y)$
- se $x \in A$ e $y \in B$ $u(x) \leq C_A u(z)$ e $u(z) \leq C_B u(y)$ (per definizione $z \in A$ e $z \in B$)

Quindi $\forall x, y \in A \cup B$ si ha

$$u(x) \leq C_A \cdot C_B u(y)$$

che conclude la dimostrazione.

□

Possiamo, ora, enunciare la Disuguaglianza di Harnack su un generico compatto, nella cui dimostrazione verranno utilizzati i lemmi appena visti e la Disuguaglianza di Harnack su una palla.

Teorema 4.2.4 (Disuguaglianza di Harnack sui compatti).
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e sia $K \subset\subset \Omega$. Sia poi $u \in \mathbb{H}(\Omega)$ tale che $u \geq 0$. Allora esiste una costante $C = C(K, N) > 0$ tale che

$$\sup_{K} u \leq C(K, N) \inf_{K} u$$

Dimostrazione.
Si consideri K compatto contenuto in Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$.
Per il lemma 4.2.1 esiste un insieme compatto connesso K' tale che

$$K \subseteq K' \subseteq \Omega$$

Per ogni $x \in K'$, sia r_x il raggio (numero reale positivo) tale che

$$B(x, 4r_x) \subseteq \Omega$$

$\{B(x, r_x)\}_{x \in K'}$ rappresenta un ricoprimento aperto di K'. Quindi, applicando il lemma 4.2.2 posso estrarre un sottoricoprimento finito

$$K' \subseteq \bigcup_{j=1}^{t} B_j$$

tale che

$$B_1 \cap B_2 \neq \varnothing \quad (B_1 \cup B_2) \cap B_3 \neq \varnothing, ..., (B_1 \cup ... \cup B_{t-1}) \cap B_t \neq \varnothing$$

con $B_j = B(x_j, 4r_{x_j})$.
Essendo $B(x_j, 4r_{x_j}) \subseteq \Omega \ \forall j = 1, ..., t$ e considerando una generica $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, $u \geq 0$, possiamo applicare la Disuguaglianza di Harnack su una palla, ottenendo

$$\sup_{B_j} u \leq C(N) \inf_{B_j} u \quad con \ \ j = 1, ..., t$$

Pertanto per il lemma 4.2.3 si ha

$$\sup_{\bigcup_{j=1}^t B_j} u \leq C(N)^t \inf_{\bigcup_{j=1}^t B_j} u$$

ed essendo

$$K \subseteq K' \subseteq \bigcup_{j=1}^{t} B_j$$

si ha

$$\sup_K u \leq \sup_{K'} u \leq \sup_{\bigcup_{j=1}^t B_j} u \leq C(N)^t \inf_{\bigcup_{j=1}^t B_j} u \leq C(N)^t \inf_{K'} u \leq C(N)^t \inf_K u$$

che conclude la dimostrazione.

$\square$

4.3 Applicazioni Disuguaglianza di Harnack

Un'applicazione della disuguaglianza di Harnack è il seguente teorema, noto come Teorema di Liouville.

Teorema 4.3.1 (Teorema di Liouville)**.**
Sia $u \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^N)$, u inferiormente limitata. Allora u è costante.

Dimostrazione.
Dalle ipotesi del teorema si ha che u è inferiormente limitata.
Chiamiamo, quindi, $m := \inf_{\mathbb{R}^N} u$ e definiamo $v := u - m$.
Si ha che: $v \in \mathbb{H}(\mathbb{R}^N)$, $v \geq 0$, $\inf_{\mathbb{R}^N} v = 0$.
Sono quindi soddisfatte tutte le ipotesi della Disuguaglianza di Harnack su una palla. Scegliendo $x_0 = 0$ si ha

$$\sup_{B(0,r)} v \leq C(N) \inf_{B(0,r)} v$$

per qualsiasi raggio $r > 0$. Passando al limite per $r \to \infty$ risulta

$$\sup_{\mathbb{R}^N} v \leq C(N) \inf_{\mathbb{R}^N} v$$

ma essendo $\inf_{\mathbb{R}^N} v = 0$ si ha

$$\inf_{\mathbb{R}^N} v = \sup_{\mathbb{R}^N} v = 0$$

Quindi $v \equiv 0$, cioè $u \equiv m$

□

Capitolo 5

Principio del massimo forte e del massimo debole

5.1 Principio del massimo forte

Un altro risultato importante che riguarda le funzioni armoniche è il principio del massimo (minimo) forte. Questo ci dice che una funzione armonica non può assumere un valore di massimo (o di minimo) interno senza che essa sia costante. I massimi e i minimi stretti di una funzione armonica vengono, quindi, assunti sul bordo.

Teorema 5.1.1 (Principio del massimo forte).
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$.
Supponiamo che u assuma massimo in un punto interno di Ω, cioè

$$\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) \geq u(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

Allora u è costante in Ω, cioè $u \equiv u(x_0)$ in Ω.

Dimostrazione.
Sia $x_0 \in \Omega$ il punto in cui u assume massimo e definiamo l'insieme

$$\Omega_M = \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\}$$

Possiamo subito affermare che Ω_M è un chiuso, in quanto controimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua.
Vogliamo ora dimostrare che Ω_M è aperto, cioè che preso un generico punto in Ω_M esiste un intorno aperto contenuto in Ω_M.
Fissiamo $z \in \Omega_M$ e definiamo la funzione $\omega := u - u(z)$
Risulta che $\omega \in \mathbb{H}(\Omega)$ e $\omega \leq 0$.
Per ogni raggio $r > 0$ tale che $B(z,r) \subset\subset \Omega$, possiamo applicare la formula di media di volume

$$\omega(z) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(z,r)} \omega(s) ds = 0$$

Essendo $\omega(x) \leq 0$, allora deve necessariamente essere $\omega(x) = 0$ q.d. in $B(z,r)$ e per la continuità di u si ha che $\omega(x) = 0$ in $B(z,r)$, cioè $u \equiv u(z) \equiv u(x_0)$ in $B(z,r)$.
Quindi $B(z,r)$ è contenuto in Ω_M, da cui segue che Ω_M è aperto in Ω.
Per concludere, essendo Ω_M sia aperto che chiuso nell'insieme connesso Ω, allora si ha che $\Omega_M \equiv \Omega$ che conclude la dimostrazione.

$\square$

Teorema 5.1.2 (Principio del minimo forte)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$.
Supponiamo che u assuma minimo in un punto interno di Ω, cioè

$$\exists x_0 \in \Omega : u(x_0) \leq u(x) \ \ \forall x \in \Omega$$

Allora u è costante in Ω, cioè $u \equiv u(x_0)$ in Ω.

Dimostrazione.
Si applica il principio del massimo forte alla funzione $-u$.

$\square$

Possiamo ora enunciare il seguente teorema

Teorema 5.1.3.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Allora

$$\sup_{\Omega} \ u = \sup_{\partial\Omega} \ u \qquad \inf_{\Omega} \ u = \inf_{\partial\Omega} \ u$$

In particolare si ha

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad x \in \Omega$$

5.2 Principio del massimo debole

Andiamo ora a enunciare il principio del massimo debole.

Teorema 5.2.1 (Principio del massimo debole)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$.
Supponiamo che

$$\lim_{x \to y} \sup u(x) \leq 0 \quad \forall y \in \partial\Omega$$

Allora $u \leq 0$ in Ω.

Prima di procedere alla dimostrazione del principio del massimo debole enunciamo il seguente lemma

Lemma 5.2.2.
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
Allora esiste $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che

$$\sup_{\Omega \cap B(x_0, r)} u = \sup_{\Omega} u \quad \forall r > 0$$

Dimostrazione.
Per assurdo, supponiamo che $\forall x \in \overline{\Omega}$ esiste un raggio $r_x > 0$ tale che

$$\sup_{\Omega \cap B(x_0, r_x)} u < \sup_{\Omega} u$$

Essendo $\overline{\Omega}$ un compatto, allora da un suo ricoprimento aperto

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} B(x, r_x)$$

posso estrarre un sottoricoprimento finito

$$\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, r_{x_j}) \quad con \;\; x_1, ...x_p \in \overline{\Omega}$$

Da cui segue che

$$\sup_{\Omega} u = \max_{j=1,\dots,p} \left(\sup_{\Omega \cap B(x_j, r_{x_j})} u \right)$$

che è in contraddizione con quanto supposto inizialmente.

□

Possiamo ora procedere con la dimostrazione del principio del massimo debole

Dimostrazione.

Per le ipotesi del principio del massimo debole possiamo applicare il lemma appena visto che ci garantisce l'esistenza di un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che

$$\sup_{\Omega \cap B(x_0, r)} u = \sup_{\Omega} u \quad \forall r > 0$$

Possiamo distinguere due casi.

Il primo è il caso in cui $x_0 \in \partial\Omega$. Si ha

$$\limsup_{x \to x_0} u(x) = \lim_{r \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap B(x_0, r)} u \right) = \sup_{\Omega} u \leq 0$$

e quindi $u \leq 0$ in Ω.

Il secondo caso riguarda l'ipotesi che $x_0 \in \Omega$.

Per il lemma e per la continuità di u in x_0 si ha

$$u(x_0) = \lim_{x \to x_0} u(x) = \limsup_{x \to x_0} u(x) = \lim_{r \to 0} \left(\sup_{\Omega \cap B(x_0, r)} u \right) = \sup_{\Omega} u$$

quindi x_0 è un punto di massimo interno per la funzione u.

Allora per il principio del massimo forte segue che $u = u(x_0)$ nella componente connessa Ω_{x_0} contenente x_0.

Si considerano $y \in \partial\Omega_{x_0}$ e $x \in \Omega_{x_0}$, allora

$$\limsup_{x \to y} u(x) = u(x_0)$$

Essendo $\Omega_{x_0} \subseteq \Omega$ e considerando $z \in \Omega$ si ha

$$\limsup_{x \to y} u(x) \leq \limsup_{z \to y} u(z)$$

Inoltre dato che $y \in \partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$ segue che

$$\limsup_{z \to y} u(z) \leq 0$$

Unendo le disuguaglianze appena ricavate si ottiene

$$\max_{\Omega} \; u = u(x_0) = \limsup_{x \to y} u(x) \leq \limsup_{z \to y} u(z) \leq 0$$

e quindi $u \leq 0$ in Ω che conclude la dimostrazione.

□

Teorema 5.2.3 (Principio del minimo debole)**.**
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in \mathbb{H}(\Omega)$.
Supponiamo che

$$\liminf_{x \to y} u(x) \geq 0 \quad \forall y \in \partial\Omega$$

Allora $u \geq 0$ in Ω.

Dimostrazione.
Si applica il principio del massimo debole alla funzione $-u$.

□

Bibliografia

[1] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] B. Abbondanza, *Formule di Media e Funzioni Armoniche*, Tesi di laurea specialistica in Analisi Matematica, II sessione a.a. 2009/2010, Università di Bologna

[3] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2 Seconda Parte*, Pitagora Editrice Bologna

[4] U. Kuran, *On the Mean-Value Property of Harmonic Functions*, Bulletin of the London Mathematical Society

[5] Netuka, *Harmonic functions and mean value theorems*, Casopis Pest. Mat.

[6] P. Freitas, J.P. Matos, *On the Characterization of Harmonic and Subharmonic Functions via mean-value Properties*, Springer Science+Business media B.V. 2009

[7] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic function theory*, Springer

Ringraziamenti

Ringrazio Laura per la pazienza (infinita) e per essermi sempre stata accanto.
Ringrazio i miei genitori e mio fratello per il supporto costante datomi in questi anni.
Ringrazio tutti i miei amici: da quelli 'forlivesi' ai compagni di università.
Infine ringrazio la Professoressa Montanari per la disponibilità con cui ha seguito il mio lavoro.