Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

INSEGNAMENTO E APPRENDIMENTO DELL'ANALISI MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA

Tesi di Laurea in
Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
MARILIGIA LOIZZO

Sessione Unica
Anno Accademico 2015/2016

Ai miei futuri studenti . . .

sperando di poter essere

per loro

una buona insegnante

Indice

Introduzione

Questa tesi nasce dalla mia passione per la matematica e per l'insegnamento.
È la passione per la matematica che mi ha fatto intraprendere gli studi di questa disciplina che, col tempo, si è rivelata sempre più affascinante e interessante. Tutto questo è stato alimentato dall'esperienza di tirocinio svolta presso il Liceo Scientifico "E. Fermi" di Bologna: ogni giorno era sempre più forte il desiderio di voler trasmettere agli altri i tanti aspetti di questa disciplina.
Questa tesi rappresenta da un lato il compimento di un persorso di formazione e dall'altro quello che spero sia l'inizio di un bellissimo percorso da insegnante.
L'oggetto del mio elaborato riguarda l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella scuola secondaria superiore. Nella speranza di trovarmi un giorno nelle condizioni di insegnare questi argomenti ai "miei" futuri studenti, ho esaminato alcune delle difficoltà che essi potrebbero incontrare e ho elaborato delle riflessioni di carattere didattico per cercare di operare un insegnamento efficace
Nel primo capitolo di questa tesi, di carattere introduttivo, vengono fatte alcune riflessioni sulle problematiche connesse all'insegnamento della matematica. Si cercano di individuare le motivazioni che fanno dei concetti matematici dei soggetti cognitivamente complessi, focalizzando l'attenzione sugli ultimi risultati della ricerca in Didattica della Matematica, il cui obiettivo è quello di migliorare le tecniche di insegnamento, concentrandosi sul problema

dell'apprendimento. Un insegnamento efficace dovrebbe mirare a suscitare nell'allievo l'interesse per la materia e a fargli acquisire competenze e abilità, non solo a trasmettere nozioni che verranno recepite in maniera passiva e presto dimenticate.
Nel secondo capitolo si richiamano alcuni argomenti di Analisi Matematica che si insegnano nella scuola secondaria superiore. In particolare, si riportano definizioni ed enunciati dei teoremi fondamentali, che poi saranno oggetto del questionario che è stato sottoposto ad un campione di studenti. Inoltre, si tenta di operare un confronto tra i diversi approcci all'insegnamento dell'Analisi Matematica che si presentano nelle diverse scuole secondarie di secondo grado, in particolare nei Licei Scientifici e negli Istituti Tecnici. A tale scopo si è fatta un'analisi delle diverse organizzazioni dal punto di vista istituzionale, operando un confronto tra le indicazioni nazionali relative alle due scuole.
Nel terzo capitolo si analizzano i risultati del test sottoposto agli studenti per valutare la loro padronanza degli argomenti affrontati e per appurare se effettivamente da diversi atteggiamenti di insegnamento scaturiscono diverse modalità di apprendimento. A tal proposito è stato sottoposto lo stesso questionario a due classi quinte del Liceo Scientifico "E. Fermi" di Bologna, a due classi quinte e ad una classe quarta dell'Istituto Tecnico Industriale "A. Volta" di Lodi.

Capitolo 1

Problematiche connesse all'insegnamento della matematica

Lo studio della matematica in generale risulta particolarmente ostico per uno studente della scuola secondaria, soprattutto lo studio di quelle parti di questa disciplina che gli risultano astratte e niente affatto intuitive. In questo capitolo si cerca di individuare le motivazioni che fanno di questi concetti un soggetto cognitivamente complesso, focalizzando l'attenzione sugli ultimi risultati della ricerca in Didattica della Matematica analizzando alcune delle possibili problematiche didattiche riguardanti l'analisi matematica.

1.1 Il Triangolo di Chevallard

L'obiettivo della ricerca nell'ambito della matematica è principalmente quello di analizzare e migliorare le tecniche di insegnamento, concentrandosi sul problema dell'apprendimento. È per questo che ormai da anni la ricerca in questo campo si occupa dei tre protagonisti coinvolti nell'azione didattica: l'allievo, l'insegnante e l'oggetto dell'insegnamento, cercando di comprendere quali possano essere le cause del mancato o errato apprendimento dell'allievo.

A tal proposito Yves Chevallard, uno dei massimi ricercatori francesi della didattica della matematica, propone di schematizzare l'attività didattica mediante un diagramma a forma di triangolo, che si usa chiamare: *triangolo della didattica*.

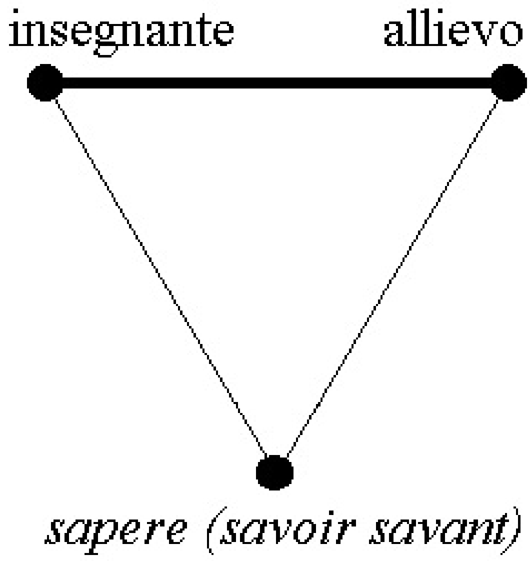


Figura 1.1: Triangolo di Chevallard

Con il termine *sapere* lo studioso francese intende ciò che egli chiama *savoir savant*, ovvero il sapere che sorge dalla ricerca, dalla storia e dalla istituzione. Questo è però un sapere estraneo ai processi di insegnamento-apprendimento; infatti, all'interno dello schema, viene collocato fuori dal rapporto tra insegnante e allievo. Allora compito dell'insegnante è quello di adattare il *savoir savant* ai propri processi di insegnamento per rendere possibile un corretto apprendimento degli allievi. Chevallard definisce questo processo *trasposizione didattica dal sapere al sapere insegnato*, ovvero quello della pratica in aula, dal punto di vista dell'insegnante. In realtà, il passaggio è molto più complesso perchè va dal *sapere matematico* al *sapere da insegnare* al *sapere insegnato*. Il concetto di *trasposizione didattica* sembra essere inteso come il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che ci si pone. Dall'altro lato, però, l'insegnante deve tener conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale, cioè della *noosfera* in cui si trova ad agire.

1.2 Il contratto didattico

Il rapporto tra l'insegnante e l'allievo, che dovrebbe avere come prodotto finale l'apprendimento, è costituito da un insieme di atteggiamenti che sembrano ripetersi con una certa regolarità. Nel 1973, Jeanine Filloux introdusse il termine di *contratto pedagogico* per definire alcuni tipi di rapporto tra docente e allievo. Nel 1986 Guy Brousseau perfezionò questa idea, inizialmente incentrata sulla dimensione sociale, e la arricchì con la considerazione degli aspetti cognitivi, dando origine al cosiddetto *contratto didattico*. In particolare, secondo Brousseau, il contratto didattico è ≪ *l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante*≫ . Tali attese non sono dovute ad accordi espliciti, ma alla concezione della scuola, della matematica e alla ripetizione delle stesse modalità nella pratica scolastica. Quindi, il rapporto tra insegnante e allievo è inconsapevolmente vincolato al rispetto delle clausule di tale tacito contratto.

Consiederiamo un esempio di clausola dovuta alla *concezione della scuola*: l'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa, ossia che il suo unico fine sia quello di valutare capacità e rendimento degli allievi. Di conseguenza, se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa su un certo concetto, l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile "rigoroso" perchè suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo.

Vi sono poi clausole legate alla *concezione della matematica*: lo studente ritiene che in matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la ri-

sposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a disagio e tende a far uso operativo dei dati numerici per dare comunque una risposta formale. Tale clausola prende il nome di *esigenza della giustificazione formale*.
Nell'immagine che lo studente ha della matematica, i calcoli e le procedure rivestono un ruolo preponderante al punto che, una volta stabilita l'operazione da compiere, lo studente cessa di ragionare e di controllare il significato delle operazioni che sta compiendo. Si instaura cioè la clausola di *delega formale* che disimpegna le facoltà razionali, critiche e di controllo: l'impegno dello studente è finito ed ora tocca all'algoritmo lavorare per lui; il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico.
Infine, altra clausola è quella legata alla *ripetizione delle modalità*: una modifica del programma atteso dallo studente genera in lui grande sorpresa e smarrimento. Un celebre esempio di tale situazione è rappresentato dall'*Effetto età del capitano*, che designa oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorchè questo problema non possiede invece una soluzione numerica. Se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Ma lo studente non ha la forza, non essendo mai stato abituato, di rompere il contratto e preferisce rispettare le supposte clausole pur di non rischiare in prima persona.
Quindi, il contratto didattico si configura come un insieme di vere e proprie clausole, che influenzano in modo implicito le relazioni tra l'insegnante, l'allievo e il sapere all'interno della classe durante le ore di matemtica.

1.3 La costruzione di un concetto

Il processo di apprendimento è un percorso molto complesso. Infatti, la costruzione di un concetto da parte dello studente avviene mediante un conflitto, che può essere sociale o cognitivo, tra le immagini che gli vengono proposte o che egli si crea durante il suo percorso di formazione: quando una immagine si rivela inadeguata, questa deve essere ampliata o sostituita da una nuova, in grado di accogliere le ulteriori informazioni. Tale processo talvolta implica la necessità di introdurre concetti destinati ad essere successivamente superati.
In tale contesto, le misconcezioni di questo tipo possono essere viste come un inevitabile momento di passaggio nell'apprendimento di un concetto matematico da parte dello studente, ovvero come insite nella natura stessa della didattica. Esse non devono necessariamente essere interpretate come un qualcosa di negativo, in quanto diventano un ostacolo solo nel caso in cui costituiscono un modello stabile per lo studente, difficile da superare. Pertanto compito dell'insegnante è di non favorire il prematuro insorgere di un modello forte e stabile, ma di lasciare immagini provvisorie, in modo tale che possano in seguito essere sostituite progressivamente da modelli sempre più adatti a descrivere il sapere matematico che si vuole raggiungere.
Se un modello si forma prematuramente rispetto alle necessità di correttezza matematica, ciò può creare problemi didattici in quanto risulta complesso distruggere o modificare un modello mentale ormai stabile. Tali modelli costituiscono allora delle misconcezioni che possono essere definite *evitabili*, in quanto spesso sono una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti e sulle quali è possibile intervenire didatticamente. Quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che viene confermata da continui esempi ed esperienze, essa si trasforma per lo studente in un modello stabile. Sono quelli che Fishbein chiama *modelli intuitivi*, in quanto vi è una rispondenza diretta tra la situazione proposta e il concetto matematico che si sta utilizzando. Proprio grazie a questa conformità tra situazione descritta e la matematica utilizzata per farlo, tali modelli diventano dominanti:

acquisiscono cioè una notevole forza di persuasione e rivestono un ruolo rilevante nelle competenze dell'allievo. Tuttavia essi possono essere inadeguati rispetto alla natura matematica del concetto che si vuole costruire. Pertanto l'azione didattica deve concentrarsi sulle misconcezioni evitabili; impedendo ad esempio la ripetizione e la riproposizione di rappresentazioni univoche e improprie, che potrebbero portare alla formazione di conoscenze parassite e indurre lo studente a identificare il simbolo con il significato. Inoltre bisogna fare attenzione all'uso del linguaggio, che talvolta può creare un malinteso con gli studenti.

1.4 Ostacoli didattici

Non è facile formarsi concetti, perchè ogni concetto è circondato da un insieme complesso di rappresentazioni associate che comportano molteplici livelli di formulazione e livelli di integrazione del concetto. Dunque il primo problema è quello di "ripulire" il concetto da questo alone che sembra nasconderne il significato intimo. E poi c'è da tener presente gli *ostacoli* che si sovrappongono all'apprendimento, proposti da Guy Brousseau negli anni 80 ispirandosi agli studi di Gaston Bachelard. Per ostacolo si intende qualsiasi cosa che si frapponga alla costruzione cognitiva di un concetto. L'ostacolo non sempre è sinonimo di mancata conoscenza; per esempio, un ostacolo può essere un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto, si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Si distinguono tre tipologie di ostacoli:

- di natura ontogenetica;
- di natura didattica;

- di natura epistemologica.

Gli *ostacoli di natura ontogenetica* sono legati alla natura psichica dell'individuo, la quale dipende per lo più dalla sua età cronologica: la costruzione di un concetto può richiedere capacità e conoscenze che un soggetto di una data età non ha ancora sviluppato. Questa mancata maturazione determina una limitazione, ovvero un ostacolo. Occorre dunque selezionare gli oggetti da insegnare in relazione all'età mentale degli apprendenti, considerando che nei soggetti con patologie neuro-cognitive l'età mentale spesso non corrisponde all'età cronologica.

Gli *ostacoli di natura didattica* riguardano le scelte di contenuto e di metodologia del docente per l'insegnamento di un dato concetto. Ogni docente, infatti, sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perchè pensa che sia efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi ultimi, la scelta di *quel progetto* si rivela un *ostacolo didattico*. Gli ostacoli didattici si manifestano poi attraverso le lacune che lo studente ha sviluppato durante il suo percorso di studi e che continuano ad influenzare il suo apprendimento. Infine, un altro aspetto legato a questo tipo di ostacolo è costituito dalla complessa relazione tra insegnante e allievo. Abbiamo visto in precedenza come lo studente sia portato a commettere degli errori per rispettare una sorta di contratto didattico che è stato tacitamente stipulato tra allievi e insegnante.

Gli *ostacoli epistemologici* riguardano la natura stessa dell'oggetto, che risulta di per sè difficile da comprendere o da concepire. Quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambiamenti radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto presenti al suo interno degli ostacoli di carattere epistemologico ad essere appreso; ciò si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

Dalle considerazioni appena fatte, si deduce che gli ostacoli didattici si manifestano a livello di classe, mentre quelli epistemologici a livello di sistema.
Nei prossimi capitoli si entrerà nello specifico di cosa è l'Analisi Matematica, analizzando i concetti principali e ravvisando i diversi tipi di ostacoli che si possono incontrare nello studio di questa disciplina.

Capitolo 2

L'insegnamento dell'Analisi Matematica nella scuola secondaria superiore

2.1 Che cos'è l'Analisi Matematica?

L'*analisi matematica*, detta anche *calcolo infinitesimale*, nasce nel XVII secolo in concomitanza con lo studio di problemi scientifici di grande rilevanza, che fecero sorgere la necessità di introdurre nuove tecniche nell'ambito del calcolo. I problemi che più stimolarono le ricerche furono sostanzialmente di tre tipi:

- la ricerca di massimi e minimi;
- la ricerca della retta tangente a una curva;
- il calcolo di aree di superfici piane a contorni curvilinei.

Molti di questi problemi erano già noti ai grandi matematici Greci, in formulazioni diverse ma sostanzialmente equivalenti; essi però non riuscirono a superarli, sia per un certo timore ad avvicinarsi al concetto di "*infinito*", sia perchè non disponevano ancora dei simboli e delle scritture adeguate, fornite dal linguaggio dell'algebra.

Le idee sviluppate dai matematici del Seicento, grazie al contributo di più scuole scientifiche (inglese, tedesca, francese, italiana), permisero il delinearsi dei concetti fondamentali dell'analisi e culminarono con le opere di Newton e Leibniz. I risultati ottenuti, pur non ancora fondati su una teoria coerente e rigorosa, erano di tale portata e sintonia con l'esperienza fisica da far intuire che si era di fronte a idee di straordinaria profondità. La fondazione rigorosa dell'analisi passò successivamente attraverso una revisione critica dei concetti di *numero reale* e di *funzione* e sfociò all'inizio del XIX secolo nella formulazione del concetto di *limite*. Possiamo infatti definire l'*analisi matematica* come quella parte della matematica che studia le proprietà delle funzioni reali di variabile reale sulla base del concetto di *limite*.

2.2 L'Analisi Matematica a scuola

L'obiettivo di questo paragrafo è affrontare l'insegnamento dell'Analisi Matematica nella Scuola Secondaria di II grado. Analizzando il libro di testo "Nuova matematica a colori" di Leonardo Sasso, illustreremo di seguito quelli che sono i concetti basilari che vengono trattati a scuola con definizioni e alcuni dei teoremi principali, di cui riporteremo solo l'enunciato, che sono stati oggetto di richiamo nel questionario a cui è stato sottoposto un campione di studenti.

2.2.1 Concetto di funzione

Definizione 2.1. (Funzione). Si chiama *funzione* di *dominio* A e *codominio* B una relazione che associa ad *ogni* elemento di A *uno e un solo* elemento di B.
Se A e B sono sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{R}$, la funzione si dice *reale* di *variabile reale*.

Definizione 2.2. (Dominio). Si dice *dominio* di una funzione $f(x)$ l'insieme dei valori possibili che la variabile indipendente x puo assumere, in modo che la funzione sia definita in tali valori.

Definizione 2.3. (Funzione pari e dispari). Sia data una funzione $y = f(x)$, avente dominio D, tale che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$.

a. Se risulta: $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$
   la funzione si dice *pari* ed il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

b. Se invece: $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$
   la funzione si dice *dispari* e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

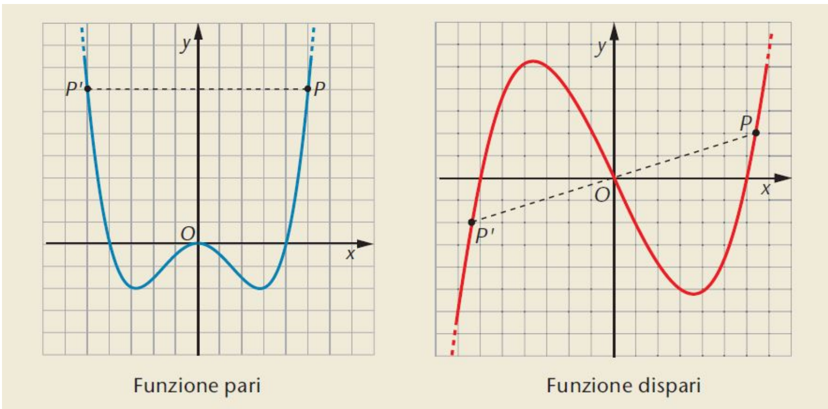


Figura 2.1: Funzione pari e funzione dispari

Definizione 2.4. (Funzione invertibile). Una funzione f si dice *invertibile* se e solo se è iniettiva: in tale caso, si chiama funzione *inversa* di f, e si indica con il simbolo f^{-1}, la funzione che associa a ciascun elemento dell'immagine di f la sua (unica) controimmagine.

La condizione di invertibilità (ossia di iniettività) equivale per una funzione reale di variabile reale alla richiesta che ogni retta orizzontale intersechi il grafico della funzione al massimo in un punto (Figura 2.2).

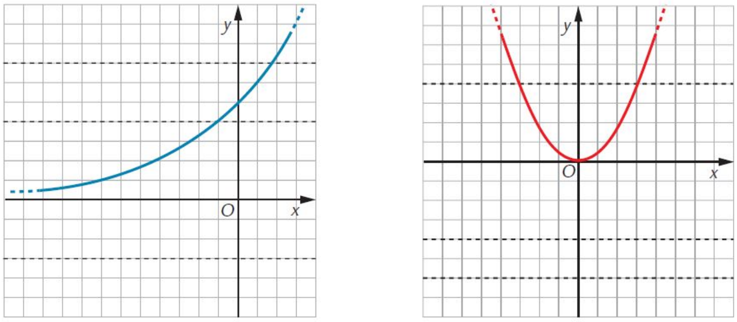


Figura 2.2: Funzione invertibile

Una condizione sufficiente perchè una funzione, definita in un intervallo, sia invertibile è che sia strettamente crescente (o strettamente decrescente): se è soddisfatta una di queste due proprietà, infatti, la funzione è certamente iniettiva.

2.2.2 Concetto di limite

In questo paragrafo vogliamo introdurre la prima fondamentale operazione del calcolo infinitesimale, ovvero quella di *limite*.

Definizione 2.5. (Limite: x_0 ed l finiti). Diciamo che una funzione $f(x)$ tende al limite $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$ e scriviamo:

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = l$$

quando si verifica che:

a. per ogni $\epsilon > 0$ (Fig. 2.3a)

b. esiste $\delta > 0$, dipendente da ϵ (Fig. 2.3b)

c. tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ (Fig. 2.3c).

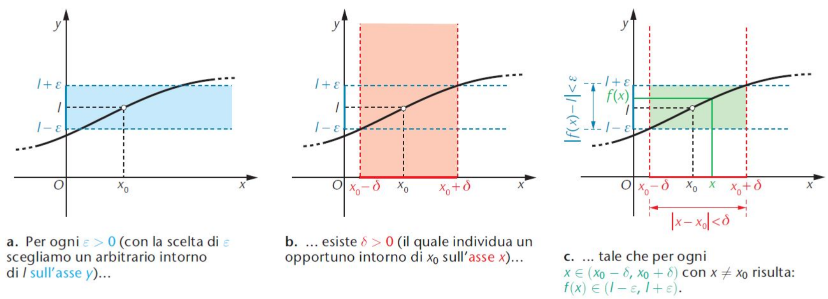


Figura 2.3:

Definizione 2.6. (Limite: x_0 finito ed l infinito). Diciamo che una funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $x_0 \in \mathbb{R}$ e scriviamo :

$$\lim_{x\to\ x_0} f(x) = +\infty$$

quando si verifica che:

a. per ogni $M > 0$ (Fig. 2.4a)

b. esiste $\delta > 0$, dipendente da M (Fig. 2.4b)

c. tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $x \neq x_0$, si ha $f(x) \in (M, +\infty)$ (Fig. 2.4c).

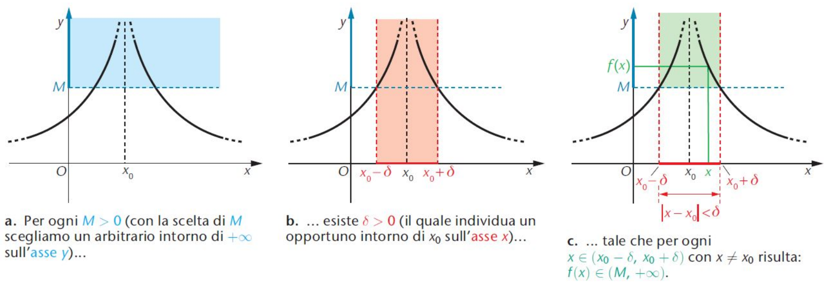


Figura 2.4:

La definizione di $\lim_{x\to\ x_0} f(x) = -\infty$ è analoga alla Definizione 2.6, ma $f(x) \in (M, +\infty)$ va sostituito con $f(x) \in (-\infty, M)$.

Definizione 2.7. (Limite: x_0 infinito ed l finito). Diciamo che una funzione $f(x)$ tende a $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$ e scriviamo:

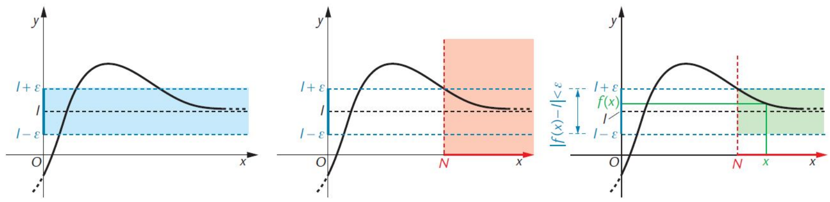
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

quando si verifica che:

a. per ogni $\epsilon > 0$ (Fig. 2.5a)

b. esiste un $N > 0$, dipendente da ϵ (Fig. 2.5b)

c. tale che per ogni $x \in (N, +\infty)$, si ha $f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ (Fig. 2.5c).



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...

b. ... esiste $N > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di $+\infty$ sull'asse x)...

c. ... tale che per ogni $x \in (N, +\infty)$ risulta: $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

Figura 2.5:

La definizione $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ è analoga alla Definizione 2.7, ma $x \in (N, +\infty)$ va sostituita con $x \in (-\infty, -N)$.

Definizione 2.8. (Limite: x_0 ed l infiniti). Diciamo che una funzione $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e scriviamo:

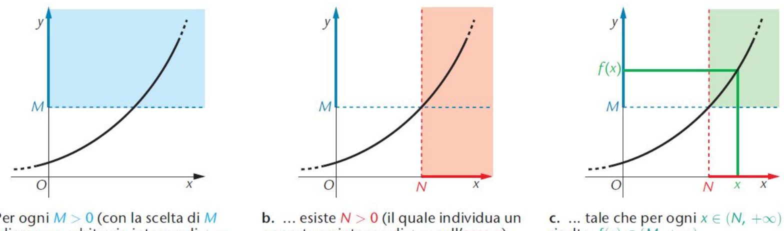
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quando si verifica che:

a. per ogni $M > 0$ (Fig. 2.6a)

b. esiste $N > 0$, dipendente da M (Fig. 2.6b)

c. tale che per ogni $x \in (N, +\infty)$ si ha $f(x) \in (M, +\infty)$ (Fig. 2.6c).



a. Per ogni $M > 0$ (con la scelta di M scegliamo un arbitrario intorno di $+\infty$ sull'asse y)...

b. ... esiste $N > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di $+\infty$ sull'asse x)...

c. ... tale che per ogni $x \in (N, +\infty)$ risulta: $f(x) \in (M, +\infty)$.

Figura 2.6:

La definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ è analoga alla Definizione 2.8., ma $f(x) \in (M, +\infty)$ va sostituita con $f(x) \in (-\infty, M)$.

È opportuno porsi il problema dell'*esistenza* di un limite e, se questo esiste, della sua *unicità*, prima di porsi il problema del suo *calcolo*. Ad esempio, un caso di *non esistenza* del limite proviene dalla funzione $f(x) = \sin x$: non esiste il limite di f per $x \to +\infty$; infatti, quando x diventa indefinitivamente grande il grafico della funzione seno continua ad *oscillare* assumendo valori compresi tra -1 e 1 senza convergere a una posizione "limite".
I teoremi che adesso presentiamo forniscono alcune risposte ai problemi di esistenza e unicità.

Teorema 2.2.1. *(Teorema del Confronto). Consideriamo tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ tali che:*
a. esiste un intorno V di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ per ogni x del quale (eccetto al più x_0) le tre le funzioni sono definite e risulta:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

b. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, *con* $l \in \mathbb{R}$.

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *e risulta* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

L'idea di base di questo teorema è che se il grafico di una funzione $f(x)$ è compreso tra quello di due funzioni $g(x)$ e $h(x)$ in un intorno di x_0 e le due funzioni hanno lo stesso limite per $x \to x_0$, allora anche la funzione $f(x)$ ammette lo stesso limite per $x \to x_0$.

Una volta accertato che il limite esiste, la sua *unicità* è garantita dal seguente teorema.

Teorema 2.2.2. *(Teorema di unicità del limite). Se una funzione $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0$ con $x \in \mathbb{R}^*$, questo limite è unico.*

Per le funzioni che ammettono limite per $x \to x_0$ sussiste poi il seguente teorema, che permette di stabilire il *segno* della funzione in un intorno di x_0.

Teorema 2.2.3. *(Teorema della permanenza del segno). Se per $x \to x_0$, con $x \in \mathbb{R}^*$, la funzione $f(x)$ ammette limite finito l, positivo (negativo), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale, eccetto al più x_0, f è positiva (negativa).*

Tale teorema si può estendere in modo naturale anche nel caso in cui il limite sia $+\infty$ o $-\infty$.
Il teorema non è invece invertibile, se non modificando leggermente l'enunciato; infatti, se una funzione è positiva in un intorno di x_0 (con $x \neq x_0$) ed esiste il suo limite per $x \to x_0$, non è detto che il suo limite sia positivo. Basta pensare alla funzione $f(x) = x^2$: risulta $f(x) > 0$ in ogni intorno dello 0 (con $x \neq 0$), ma il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ non è positivo, bensì nullo.
Quindi l'enunciato del teorema inverso va modificato nel seguente modo per renderlo valido: se una funzione è positiva (negativa) in un intorno di x_0 (con $x \neq x_0$) ed esiste il limite per $x \to x_0$, allora esso è *positivo*, (*negativo*) o *nullo*.

2.2.3 Concetto di continuità

Definizione 2.9. (Continuità in un punto). Sia f una funzione definita in un intorno (completo) di x_0; se il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, la funzione f si dice *continua* in x_0.

È importante fare alcune osservazioni.

- Mentre l'operazione di limite riguarda il comportamento di una funzione in un *intorno* di x_0, disinteressandosi di ciò che accade *nel punto* x_0, la definizione di continuità richiede invece l'analisi del comportamento della funzione sia in un intorno di x_0 sia nel punto x_0, e impone che i due comportamenti non siano diversi.

- Intuitivamente, la condizione $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ si può interpretare dicendo che "se x è vicino a x_0", allora "$f(x)$ è vicino a $f(x_0)$". Ovviamente questa condizione può non essere verificata se f *non* è continua in x_0.

Vi sono importanti applicazioni del concetto di continuità con conseguenze fondamentali per lo sviluppo dell'analisi matematica; tra questi ricordiamo i seguenti due teoremi che illustrano le proprietà di cui godono le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.
Cominciamo da un teorema che ha importanti applicazioni al problema della risoluzione di un'equazione.

Teorema 2.2.4. *(Teorema (di esistenza) degli zeri). Sia f una funzione definita e continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a; b]$*. Se $f(a)f(b) < 0$, allora la funzione ammette* almeno uno zero *in* $(a; b)$*, ossia esiste un punto $x_0 \in (a; b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Il teorema afferma un fatto intuitivo, ma niente affatto ovvio, perchè poggia sulla proprietà di *completezza* di $\mathbb{R}$: se una funzione continua f assume agli estremi dell'intervallo $[a; b]$ valori *discordi*, il suo grafico deve avere *almeno* un punto di intersezione con l'asse x. Il punto di intersezione può *non* essere unico; inoltre la condizione espressa dal teorema è *sufficiente* ma *non necessaria*, affinchè esista uno zero della funzione nell'intervallo considerato.

Un altro risultato classico dell'analisi è il Teorema di Weierstrass: esso garantisce l'esistenza di massimo e minimo per una funzione definita e continua su un intervallo chiuso e limitato.

Teorema 2.2.5. *(Teorema di Weierstrass). Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a; b]$*; allora f ammette* massimo M *e* minimo m *in* $[a; b]$*, ossia esistono $x_1, x_2 \in [a; b]$ tali che:*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in [a; b].$$

Il massimo e il minimo possono essere assunti sia all'*interno* dell'intervallo sia agli *estremi* e tutti i casi sono possibili. Inoltre la condizione espressa dal teorema è *sufficiente*, ma non *necessaria*, a garantire l'esistenza del massimo e del minimo di una funzione in un intervallo.

Dal teorema degli zeri e dal teorema di Weierstrass si ricava il seguente teorema.

Teorema 2.2.6. *(Teorema dei valori intermedi). Una funzione* f continua *in un intervallo* chiuso *e* limitato $[a, b]$ *assume tutti i valori compresi fra il suo minimo* m *e il suo massimo* M *in* $[a, b]$.
In altre parole, per ogni $k \in (m, M)$ *esiste* $x_0 \in [a, b]$ *tale che* $f(x_0) = k$.

L'interpretazione grafica del teorema dei valori intermedi è la seguente: se f è una funzione continua in $[a, b]$, detti m e M, rispettivamente, il minimo e il massimo assunto da f in quell'intervallo, ogni retta di equazione $y = k$, con $m < k < M$, interseca il grafico della funzione f almeno in un punto (Fig. 2.7).

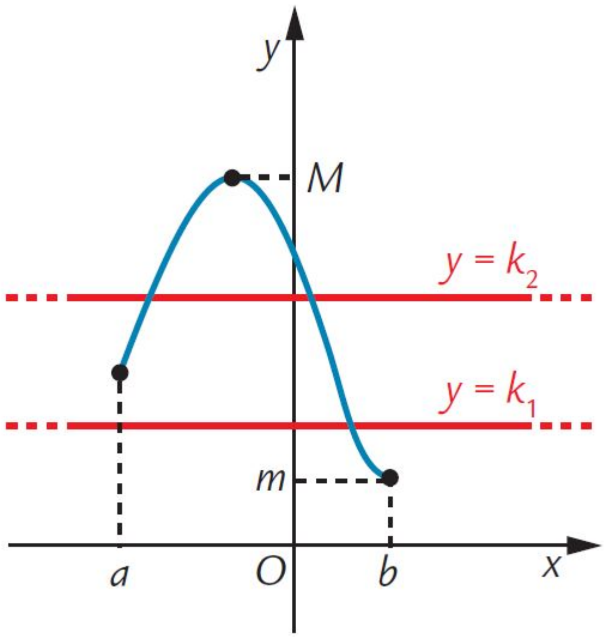


Figura 2.7: Significato grafico del Teorema dei valori intermedi

2.2.4 Concetto di derivata

Definizione 2.10. (Derivata di una funzione in un punto). Una funzione di equazione $y = f(x)$ si dice *derivabile* in un punto x_0, appartenente al suo dominio, se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

esiste ed è fnito. Questo limite prende il nome di *derivata prima* (o semplicemente *derivata*) di f in x_0 e si indica con il simbolo:

$$f'(x_0).$$

La derivata della funzione in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione in quel punto, oppure se la funzione esprime la legge oraria di un moto, la velocità in un dato istante, mentre il rapporto incrementale può rappresentare per esempio il coefficiente angolare di una retta secante o una velocità media.

In generale, possiamo dire che il rapporto incrementale rappresenta un tasso di variazione medio, mentre la derivata un tasso di variazione istantaneo.

Segue l'esposizione dei principali teoremi sulle derivate, con enunciati precisi e rigorosi. Ne ricordiamo alcuni, la cui applicazione ricorre nei quesiti che sono stati sottoposti agli studenti.

Un risultato importante è che la derivabilità implica la continuità, come espresso dal seguente teorema.

Teorema 2.2.7. *Se f è una funzione* derivabile *in x_0, allora f è* continua *in x_0.*

Tale teorema non è invertibile: non è vero che se una funzione è continua in x_0 è ivi derivabile.
Quali comportamenti, allora, può presentare una funzione continua nell'intorno di un punto in cui *non* è derivabile?

- *Esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra in x_0, ma queste sono diverse tra loro.* Si dice in tal caso che la funzione f ha in x_0 un *punto angoloso* (Fig. 2.8).

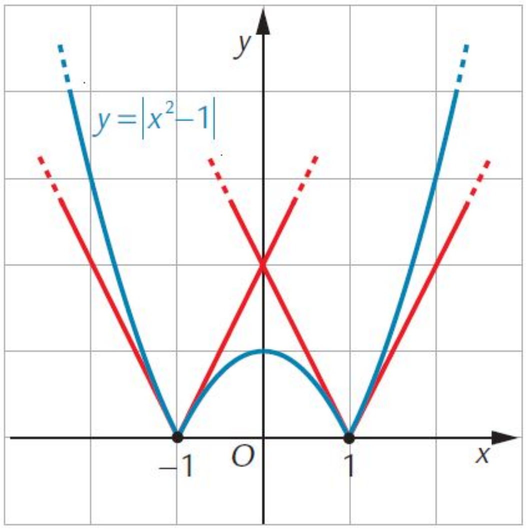


Figura 2.8: Esempio di punto angoloso

- *Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite e hanno lo stesso segno.* Si dice in tal caso che la funzione f presenta in x_0 un *punto di flesso a tangente verticale* (Fig. 2.9).

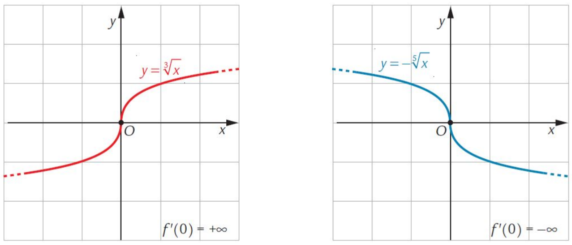


Figura 2.9: Esempio di punti di flesso a tangente vericale

- *Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite e di segno opposto.* Si dice in tal caso che la funzione f presenta in x_0 una *cuspide* (Fig. 2.10).

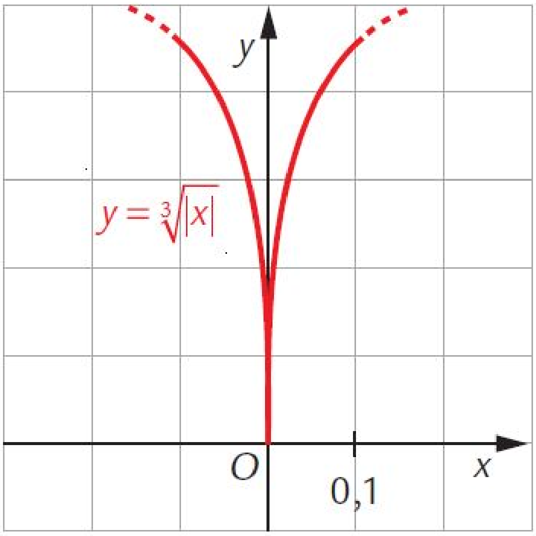


Figura 2.10: Esempio di punto di cuspide

- *Almeno una delle due derivate, da destra o da sinistra, in x_0 non esiste (nè finito nè infinito).*

  Questo è il caso che si verifica per esempio considerando la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ x & x = 0 \end{cases}.$$

Presentiamo ora il primo importante teorema sulle funzioni derivabili, il *teorema di Fermat*: esso costituisce il primo passo per la risoluzione del problema della ricerca dei massimi e dei minimi di una funzione.

Teorema 2.2.8. *(Teorema di Fermat). Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e sia c un punto interno ad $[a, b]$, in cui f è derivabile. Se f ha in c un punto di* estremo relativo, *allora $f'(c) = 0$.*

Il contenuto del teorema si può esprimere come segue: se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e c è un punto di estremo relativo diverso da a e da b in cui la funzione è derivabile, allora la tangente al grafico della funzione nel punto c *deve essere orizzontale*, quindi la *derivata deve annullarsi* (Fig. 2.11).

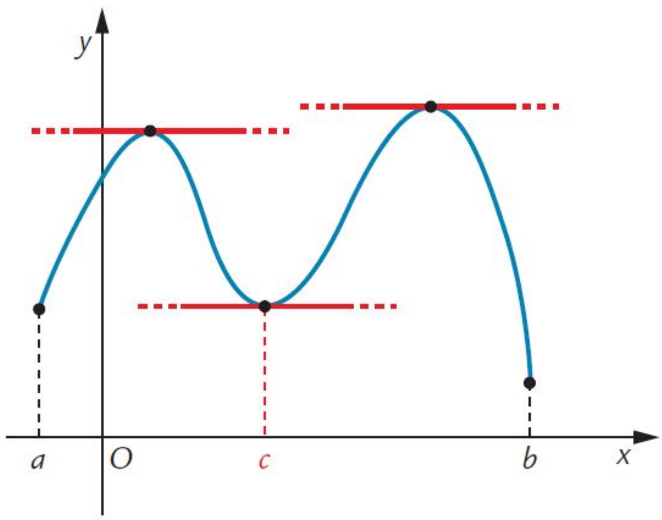


Figura 2.11: Illustrazione geometrica del Teorema di Fermat

Il teorema esprime una condizione *necessaria* ma non *sufficiente* perchè un punto c sia di estremo relativo; quindi ci dice dove cercare eventuali punti di estremo relativo, ma non ci assicura che i punti candidati a essere estremi relativi (cioè i punti stazionari) siano effettivamente tali, nè ci fornisce criteri per stabilirlo.

Teorema 2.2.9. *(Teorema di Rolle). Data una funzione f che soddisfa le seguenti ipotesi:*
a. f è continua in $[a, b]$;
b. f è derivabile in (a, b);
c. $f(a) = f(b)$
allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ per cui $f'(c) = 0$.

Il Teorema di Rolle afferma sotanzialmente che se una funzione derivabile assume lo stesso valore agli estremi di un intervallo $[a, b]$, allora deve esserci almeno un punto c compreso tra a e b in cui la retta tangente al grafico della funzione è orizzontale (Fig. 2.12).

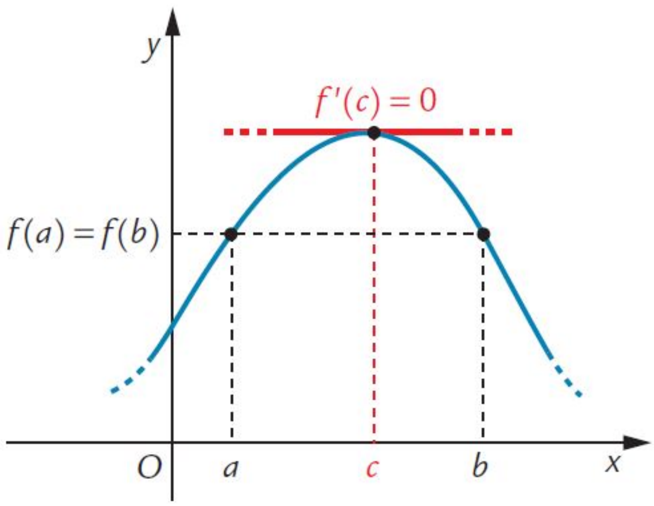


Figura 2.12: Illustrazione geometrica del teorema di Rolle

Teorema 2.2.10. *(Teorema di Lagrange). Sia f una funzione che soddisfa le seguenti condizioni:*
a. f è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$;
b. f è derivabile nell'intervallo aperto (a, b).
Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Fig. 2.13).

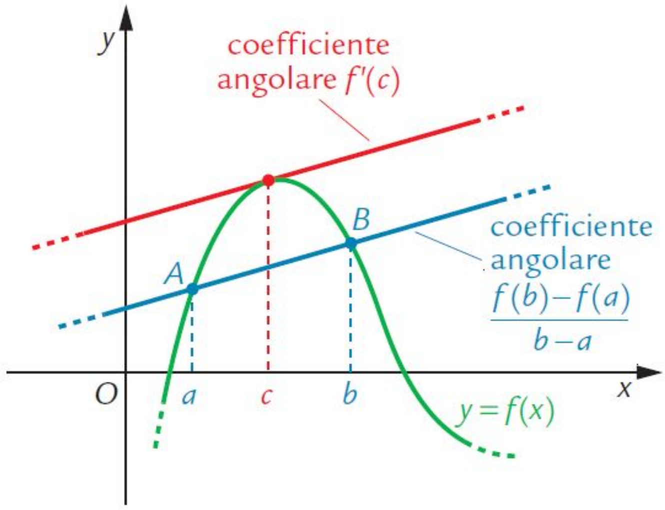


Figura 2.13: Illustrazione geometrica del teorema di Lagrange

L'importanza fondamentale del Teorema di Lagrange è legata al fatto che esso ci consente di trarre informazioni su una funzione a partire da proprietà della sua derivata. I prossimi due teoremi, corollari del teorema di Lagrange, ne sono un esempio.

Teorema 2.2.11. *(Primo corollario del teorema di Lagrange). Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante in I.*

Teorema 2.2.12. *(Secondo corollario del teorema di Lagrange). Se f e g sono due funzioni derivabili in un intervallo I e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esse differiscono per una costante $c \in \Re$, cioè*
$f(x) = g(x) + c$ per ogni $x \in I$.

2.3 Licei e Istituti Tecnici a confronto

Nei Licei e negli Iistitui Tecnici si presentano diversi approcci didattici alla matematica: nei Licei generalmente ci si sofferma sulla dimostrazione dei teoremi fondamentali e sul formalismo con cui vengono posti gli enunciati; negli istituti Tecnici, invece, le teorie matematiche vengono presentate prevalentemente in funzione delle loro applicazioni.

2.3.1 Le Indicazioni Nazionali

Per affrontare un confronto tra Licei Scientifici e Istituti Tecnici, iniziamo col presentare le prime differenze che ci sono a livello istituzionale analizzando le Indicazioni Nazionali relative alle due scuole.

Liceo Scientifico

Le Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei rappresentano la declinazione disciplinare del Profilo educativo, culturale e professionale dello studente a conclusione dei percorsi liceali. Il Profilo e le Indicazioni costituiscono, dunque, l'intelaiatura sulla quale le istituzioni scolastiche disegnano il proprio Piano dell'offerta formativa, i docenti costruiscono i propri percorsi didattici e gli studenti raggiungono gli obiettivi di apprendimento e maturano le competenze proprie dell'istruzione liceale e delle sue articolazioni.

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sè considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo

fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.
Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base.
L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.
Successivamente vengono presentati nel dettaglio gli obiettivi specifici di apprendimento, vedremo, in particolare, quelli riguardanti l'analisi matematica. Fin dal primo biennio troviamo l'introduzione del concetto di funzione in *Relazioni e funzioni* :
Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizioni, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. [...] Lo studente studierà le funzioni $f(x) = |x|$ *e* $f(x) = \frac{a}{x}$, *le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente*

matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi. [...] Lo studente sarà in grado di passare da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale) [...].
Nel secondo biennio troviamo ancora in *Relazioni e funzioni*:
[...]Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi, e in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo. [...] Infine, lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.
Al quinto anno si passa al nocciolo di quella che è l'analisi matematica; infatti, in *Relazioni e funzioni* è specificato:
Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.
Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale - in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità - anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi). Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali [...].

Istituto Tecnico

Negli Istitui Tecnici ad indirizzo Tecnologico il docente di matematica concorre a far conseguire allo studente, al termine del percorso quinquennale, risultati di apprendimento che lo mettono in grado di: *padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica; possedere gli strumenti matematici, statistici e del calcolo delle probabilità necessari per la comprensione delle discipline scientifiche e per poter operare nel cam-*

po delle scienze applicate; collocare il pensiero matematico e scientifico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle invenzioni tecnologiche.

Nelle indicazioni nazionali per gli Istitui Tecnici troviamo una divisione tra *conoscenze* e *abilità*. In particolare, nel primo biennio in *Relazioni e funzioni* nelle *conoscenze* si ha:

Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.). Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, [...]). [...] Rappresentazione grafica delle funzioni.

Nelle *abilità* si specifica:

Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, [...] anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Nel secondo biennio, nelle *conoscenze* troviamo:

Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche; funzioni periodiche. [...] Continuità e limite di una funzione. Limiti notevoli di successioni e di funzioni. [...] Concetto di derivata di una funzione. Proprietà globali e locali di una funzione. Formula di Taylor.

Nelle *abilità* si ha:

Calcolare i limiti di successioni e funzioni. Calcolare le derivate di funzioni. Analizzare esempi di funzioni discontinue o non derivabili in qualche punto. Rappresentare in un piano cartesiano e studiare le funzioni $f(x) = \frac{a}{x}$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log x$. *Descrivere le proprietà qualitative di una funzione e descriverne il grafico. Calcolare derivate di funzioni composte. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita lineare ed esponenziale e di andamenti periodici.*

Capitolo 3

Il Questionario

Con questo capitolo si vuole entrare nel dettaglio di quello che è il confronto tra i due diversi indirizzi scolastici: Liceo Scientifico e Istituto Tecnico. Da diversi atteggiamenti di insegnamento scaturiscono diverse modalità di apprendimento?
A tal proposito è stato realizzato un questionario, che adesso andremo ad analizzare, per verificare se esistono sostanziali differenze tra le risposte degli studenti provenienti dalle due diverse scuole.
Il questionario consiste di 14 quesiti che mirano a verificare la conoscenza di alcuni concetti e teoremi fondamentali dell'analisi matematica e la capacità di saper applicare alcune delle tecniche di calcolo di questa materia a problemi sia strettamente analitici sia ispirati alla fisica.
Il questionario è stato sottoposto a due classi quinte del Liceo Scientifico "E. Fermi" di Bologna, a due classi quinte e una quarta dell'Istituto Tecnico Industriale "A. Volta" di Lodi. Le classi quinte del Liceo Scientifico, a loro volta, si suddividono in corso Tradizionale, in cui vengono dedicate quattro ore settimanali alla matematica, e in corso Potenziato, in cui allo studio della matematica si dedicano cinque ore alla settimana. Nelle due classi erano presenti al momento del questionario, rispettivamente, venticinque e diciotto studenti.
Le classi quinte dell' Istituto Tecnico, a loro volta, si differenziano in indirizzo

Elettrotecnico e indirizzo Meccanico, e in entrambi i corsi vengono dedicate alla matematica quattro ore settimanali; invece la classe quarta è di indirizzo Meccanico. Al momento del questionario nelle quinte erano presenti diciotto studenti per l'indirizzo Meccanico e tredici studenti per l'indirizzo Elettrotecnico, invece nella quarta erano presenti venti alunni. Nella classe quarta, però, ai ragazzi è stato chiesto di svolgere soltanto i primi tre quesiti dell'intero questionario, in quanto si trattava di argomenti da loro già affrontati; quindi il confronto con la classe quarta non sarà fatto per tutti i quattordici quesiti.

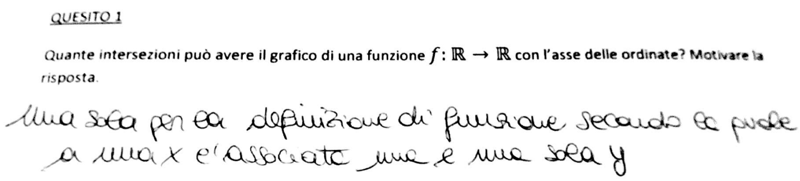
3.1 Quesito 1

Quante intersezioni può avere il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con l'asse delle ordinate? Motivare la risposta.

Soluzione. Una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ ha una e una sola intersezione con l'asse delle ordinate; infatti, secondo la definizione stessa di funzione, ad ogni elemento del dominio corrisponde uno e un solo elemento del codominio. In più, per capire da un grafico se effettivamente si tratta di una funzione basta tracciare delle rette verticali: se queste incontrano il grafico in un solo punto allora si tratta di una funzione.
Il concetto di funzione riveste un ruolo fondamentale nello studio dell'analisi matematica e, come abbiamo visto dalle indicazioni nazionali, viene introdotto già nel primo biennio, ma sicuramente è un concetto che racchiude in sè molte difficoltà. Infatti, l'obiettivo di questa domanda è proprio quello di verificare se tale concetto è stato compreso ed interiorizzato o se la maggior parte degli studenti si è limitata ad imparare a memoria la definizione senza capirne il vero significato.
In generale, le risposte sono state positive per la maggior parte degli studenti del Liceo Scientifico anche se non tutti hanno motivato la loro risposta. In

particolare, nella quinta Potenziata su diciotto studenti:

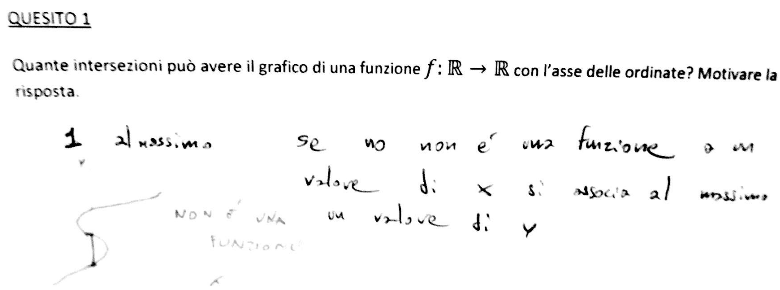
- quattordici hanno risposto che "la funzione può avere con l'asse delle ordinate una sola intersezione"; poi, tra questi, otto hanno motivato la loro affermazione dando la definizione di funzione e sei hanno scritto che "altrimenti non si tratterebbe di una funzione", mostrandolo con degli esempi grafici;
- tre studenti hanno scritto "almeno una intersezione";
- un solo studente non ha dato alcuna risposta.


QUESITO 1

Quante intersezioni può avere il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con l'asse delle ordinate? Motivare la risposta.

Una sola per la definizione di funzione secondo la quale a una x e' associata una e una sola y

Figura 3.1: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato


QUESITO 1

Quante intersezioni può avere il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con l'asse delle ordinate? Motivare la risposta.

1 al massimo se no non e' una funzione a un valore di x si associa al massimo un valore di y

NON É UNA FUNZIONE

Figura 3.2: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

Nella quinta non potenziata, invece, su venticinque ragazzi:

- diciannove hanno risposto correttamente, di cui solo sette hanno dato una motivazione riportando la definizione di funzione;

- due hanno affermato che "le intersezioni possono essere infinite";
- quattro non hanno dato alcuna risposta.

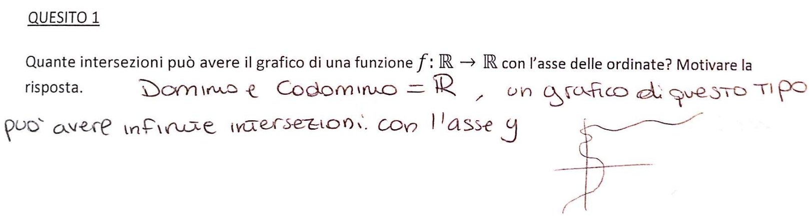


Figura 3.3: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Nella classe quarta dell'ITIS su venti alunni:

- diciassette hanno risposto correttamente motivando o con la definizione di funzione o con il metodo grafico delle rette verticali;
- uno studente ha scritto "infinite intersezioni";
- due studenti non hanno svolto il quesito.

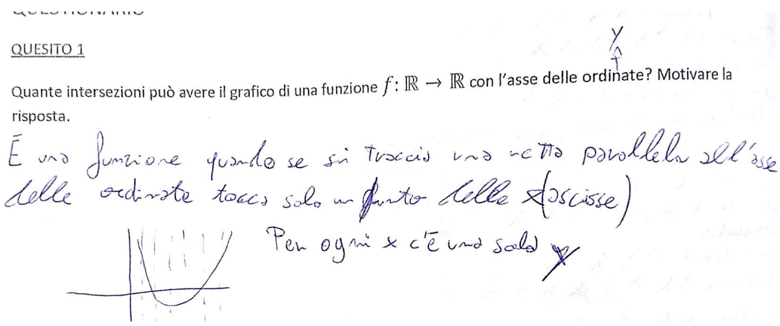


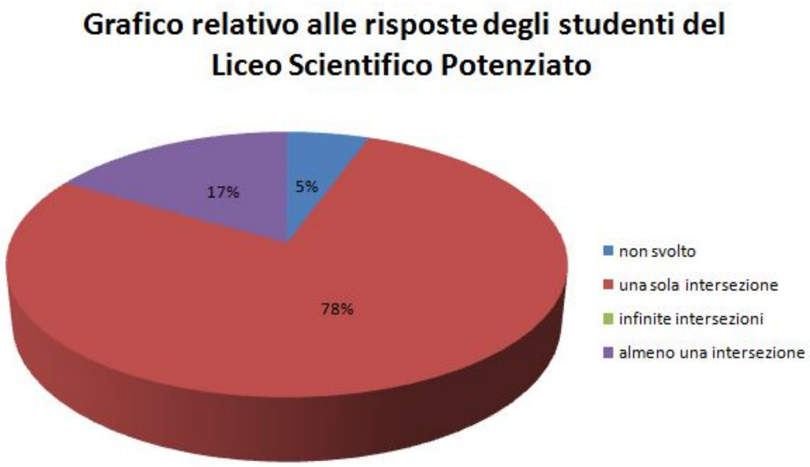
Figura 3.4: Risposta studente della quarta ITIS

Nelle classi quinte, invece, su trentuno studenti:

- tredici rispondono correttamente di cui solo otto motivano la risposta dando la definzione di funzione;
- cinque affermano che "le intersezioni sono infinite";

- due dicono che "non ci sono intersezioni";
- undici non danno alcuna risposta.

Confrontando le risposte di tutti gli studenti sottoposti al questionario si può dire che il concetto di funzione è noto a tutti e anche la definizione stessa; infatti, molti l'hanno esplicitata per motivare la risposta data: questo dimostra che la maggior parte degli insegnanti, come primo passo, nell'introduzione di nuovi concetti tende a far memorizzare definizioni ed enunciati. In particolare, sicuramente per gli studenti di quarta quello di funzione è un concetto studiato o ripreso più recentemente rispetto a quelli di quinta per il fatto che loro hanno motivato la risposta utilizzando per via grafica anche il metodo delle rette verticali; si può dedurre anche che al Liceo si dà maggiore significato all'utilizzo dei grafici; infatti, molti hanno dato la motivazione della loro risposta con degli esempi per via grafica. Dalle risposte non corrette si deduce che per molti il concetto di funzione rappresenta un ostacolo epistemologico, soprattutto per coloro che hanno affermato che una funzione può avere infinite intersezioni con l'asse delle ordinate (nonostante sappiano a memoria la definizione di funzione): è un concetto astratto che fanno fatica a comprendere anche a livello grafico.



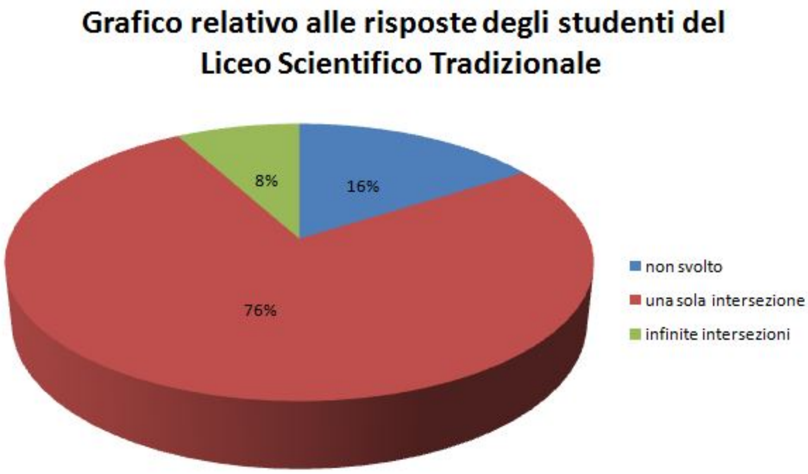


Grafico relativo alle risposte degli studenti del
Liceo Scientifico Tradizionale
8%
16%
76%
non svolto
una sola intersezione
infinite intersezioni

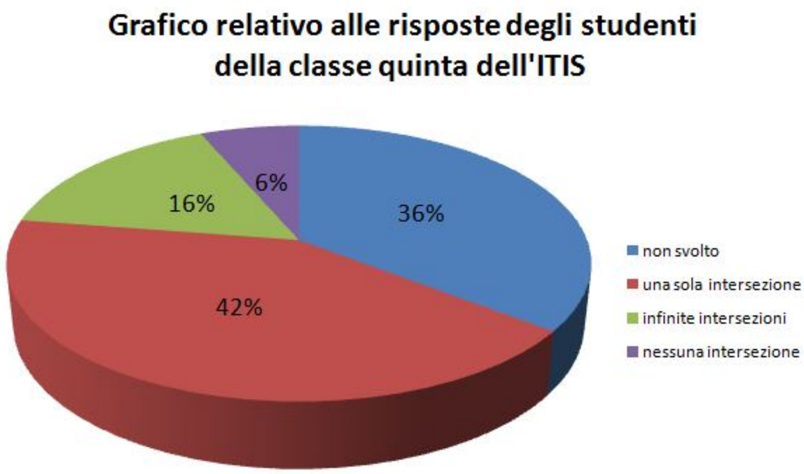
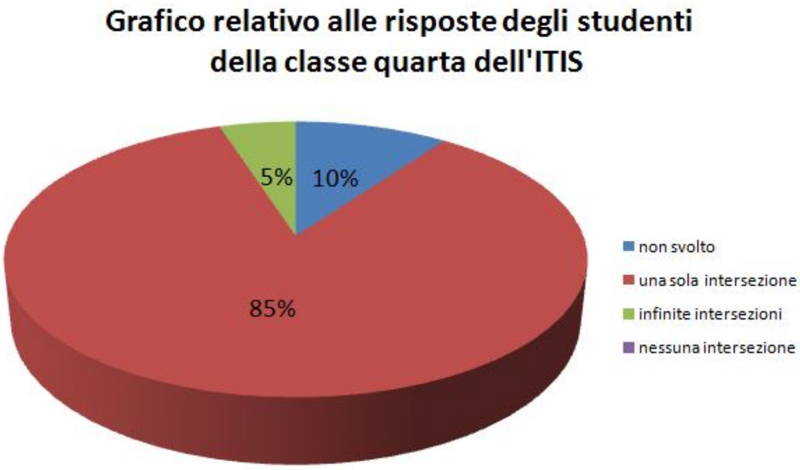


Grafico relativo alle risposte degli studenti
della classe quinta dell'ITIS
6%
16%
36%
42%
non svolto
una sola intersezione
infinite intersezioni
nessuna intersezione



3.2 Quesito 2

Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\ln(3-5x)}$. Determinarne il Dominio.

Soluzione. Si imposta il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ln(3-5x) \neq 0 \\ 3-5x > 0 \end{cases}$$

Si devono porre le condizioni di esistenza sia sull'argomento del logaritmo sia sul denominatore in quanto si tratta di una funzione fratta.
Ora la difficoltà maggiore consiste nella risoluzione di

$$\ln(3-5x) \neq 0 \Rightarrow 3-5x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{2}{5}.$$

In definitiva, si arriva al seguente sistema

$$\begin{cases} x \neq \frac{2}{5} \\ x < \frac{3}{5} \end{cases},$$

quindi il dominio della funzione data è

$$D = \{\forall x \in \mathbb{R} | x < \frac{3}{5} \bigwedge x \neq \frac{2}{5}\}$$

L'argomento principale dell'analisi matematica che si insegna nella scuola secondaria superiore è lo studio di funzione. Il primo passo è quello di calcolare proprio il dominio di una funzione, ma già da qui gli studenti incontrano i primi ostacoli sia di carattere epistemologico che didattico. I primi sono dovuti al fatto che molti ragazzi non hanno appreso il concetto di dominio e spesso lo confondono con quello di codominio; i secondi sono dovuti alle lacune di tipo algebrico che molti studenti si portano avanti sin dai primi anni delle scuole superiori.
Dai risultati ottenuti, notiamo sostanziali differenze tra i due indirizzi del Liceo Scientifico; infatti, le risposte sono state tutte corrette da parte degli studenti del corso Potenziato, mentre tra gli studenti del corso Tradizionale su venticinque ci sono state diciassette risposte corrette e ben sette errate, tra le quali una è la seguente:

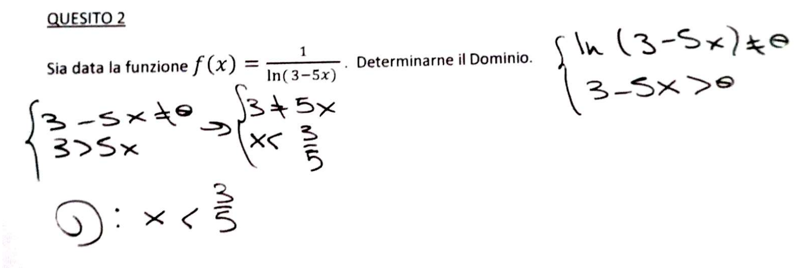


Figura 3.5: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Da questa risposta si può notare come lo studente non ricorda la risoluzione di equazioni logaritmiche: questa è sicuramente una lacuna che si porta dietro.

Per gli studenti dell'ITIS c'è stata una distinzione netta tra le due classi quinte: una classe ha risposto correttamente, mentre dall'altra sono emerse tutte risposte errate e tutti gli studenti hanno posto come condizione di esistenza della funzione data:

$$3 - 5x > 0.$$

Si potrebbe dedurre che la condizione di esistenza del logaritmo è stata trattata in classe, ma forse non si è dato molto peso al concetto di dominio per funzioni fratte e composte.
Positivi, invece, sono i risultati della classe quarta dell'ITIS: infatti, qui ben sedici studenti su venti hanno risposto correttamente e solo due non hanno dato alcuna risposta.
In generale, gli errori più frequenti sono stati i seguenti

- imporre solo la condizione di esistenza del logaritmo naturale o addirittura imporre che l'argomento del logaritmo fosse maggiore o uguale a 0;
- imporre solo la condizione di esistenza di una funzione fratta o imporre $3 - 5x \neq 0$;
- imporre la condizione di positività su tutto il logaritmo e non solo sull'argomento.

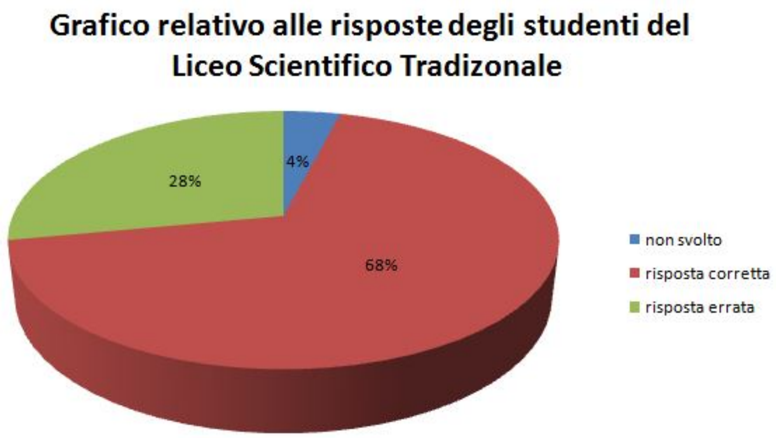


Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizonale
4%
28%
68%
non svolto
risposta corretta
risposta errata

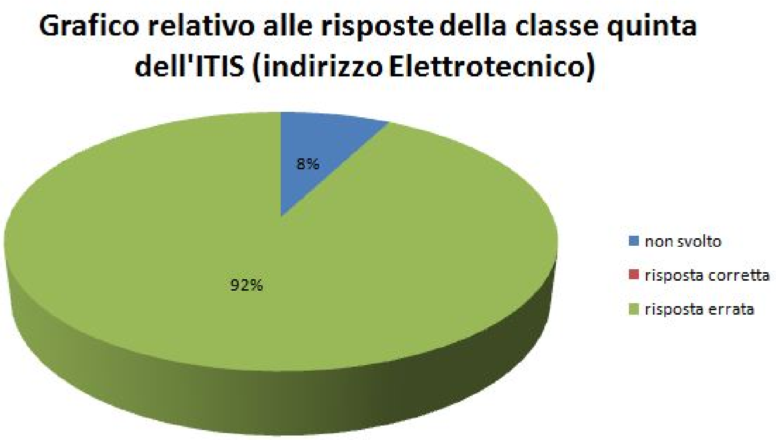
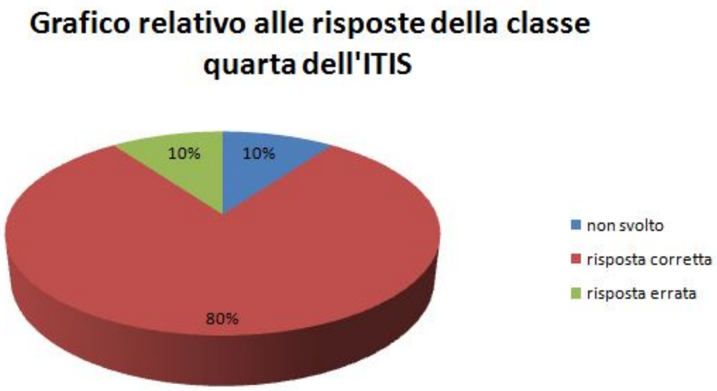


Grafico relativo alle risposte della classe quinta dell'ITIS (indirizzo Elettrotecnico)
8%
92%
non svolto
risposta corretta
risposta errata



3.3 Quesito 3

Sia $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. Scrivere l'espressione di $f(3-2x)$.

Soluzione. Il calcolo da eseguire era il seguente:

$$f(3-2x) = \frac{(3-2x)-1}{(3-2x)^2} = \frac{2-2x}{(3-2x)^2}.$$

Il concetto di composizione di funzione, come abbiamo visto nel capitolo precedente dalle indicazione nazionali delle due diverse scuole, viene introdotto a partire già dal primo biennio.

Analizzando le risposte date dagli studenti, si può notare come molti di essi hanno trovato difficoltà nel rispondere al quesito: si tratta sicuramente di un ostacolo epistemologico, in quanto molti hanno confuso l'operazione di composizione con quella di prodotto e altri hanno calcolato $3 - 2f(x)$.
Forse se si richiedeva esplicitamente di calcolare la composizione tra due funzioni date in forma analitica, molti non avrebbero trovato difficoltà, perchè abituati alle tipologie di traccia dei propri insegnanti.
In particolare, per gli studenti del Liceo Scientifico le risposte sono state tutte corrette a parte quella di uno studente del corso Tradizionale, che riportiamo di seguito:

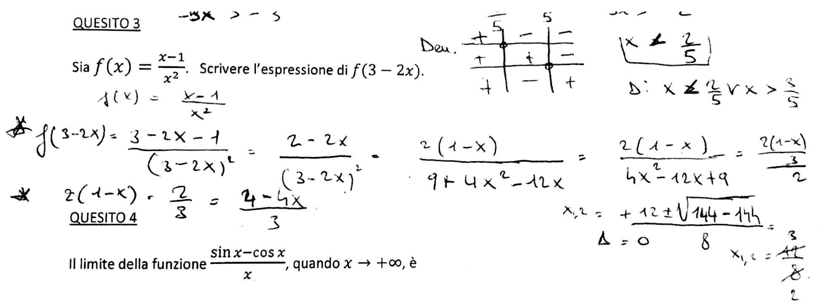


Figura 3.6: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Si può notare come lo studente ha capito cosa richiede la traccia; infatti, imposta bene l'esercizio e calcola anche correttamente la funzione richiesta; ma poi trova le radici del polinomio del denominatore senza nemmeno rendersi conto che, essendo un quadrato di binomio, avrebbe trovato due radici reali e coincidenti e senza capire il motivo di questi calcoli. Questo è sicuramente un esempio di clausola di *delega formale* che disimpegna le facoltà razionali, critiche e di controllo dello studente e che si instaura in quella specie di contratto didattico che, tacitamente, viene stipulato tra insegnante e allievo.
Gli studenti che hanno riscontrato maggiori difficoltà sono stati quelli della classe quarta dell'ITIS; infatti su venti:

- sette hanno calcolato correttamente $f(3 - 2x)$;

- otto non hanno svolto il quesito;
- cinque hanno dato una risposta sbagliata.

Nelle classi quinte, invece, su trentuno studenti:

- ventuno hanno risposto correttamente;
- sette hanno dato una risposta errata;
- tre non hanno svolto il quesito.

Mostriamo alcune delle risposte date:

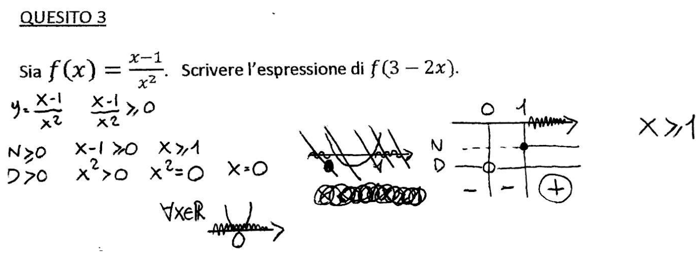


Figura 3.7: Risposta studente quarta ITIS

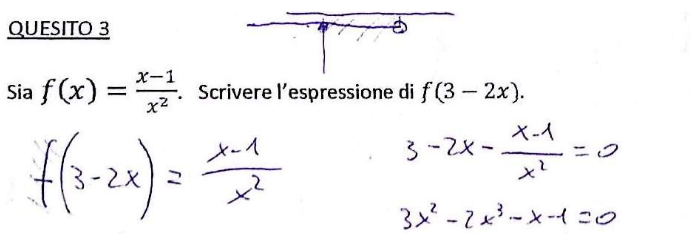
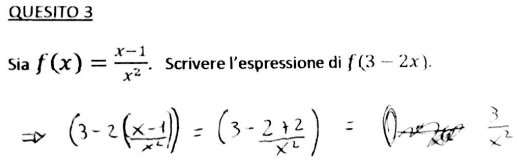


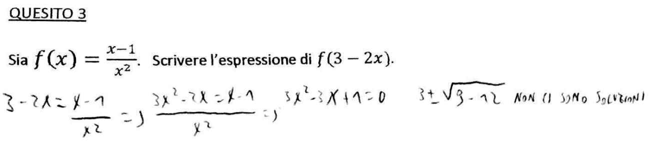
Figura 3.8: Risposta studente quarta ITIS


QUESITO 3

Sia $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Scrivere l'espressione di $f(3-2x)$.

$\Rightarrow \left(3-2\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\right) = \left(3-\frac{2+2}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$

Figura 3.9: Risposta studente quarta ITIS

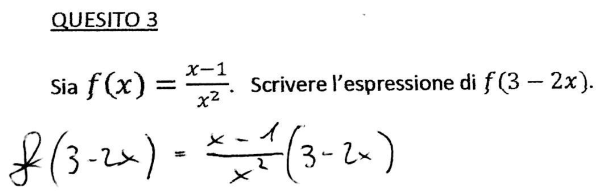

QUESITO 3

Sia $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Scrivere l'espressione di $f(3-2x)$.

$3-2x = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow \frac{3x^2-2x = x-1}{x^2} \Rightarrow 3x^2-3x+1=0 \quad 3 \pm \sqrt{3-12}$ NON CI SONO SOLUZIONI

Figura 3.10: Risposta studente quarta ITIS

Notiamo che gli studenti in questione forse non hanno ben compreso la richiesta della traccia, ma pur di scrivere qualcosa, uno studia la positività della funzione data e gli altri due studiano l'uguaglianza tra le due funzioni: è questo un esempio della clausola di *esigenza della giustificazione formale*, cioè lo studente tende a far uso dei dati numerici che ha per dare una risposta formale in quanto la maggior parte hanno la concezione che in matematica si devono fare solo dei calcoli.

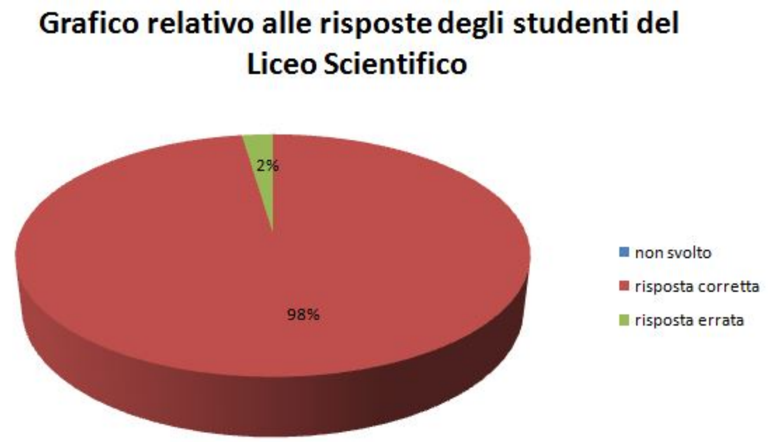

QUESITO 3

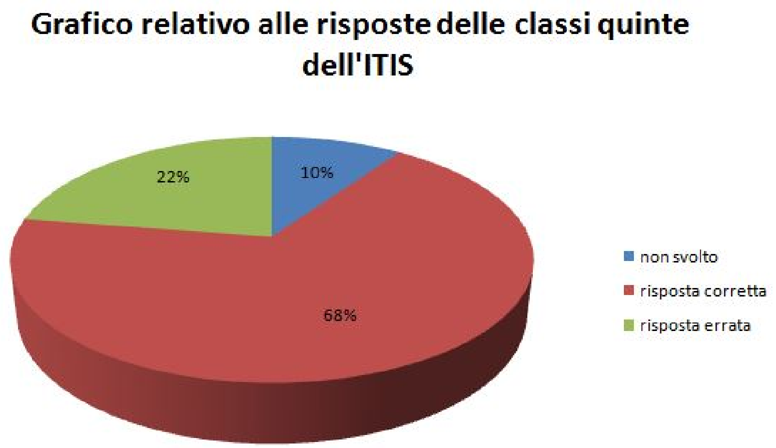
Sia $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Scrivere l'espressione di $f(3-2x)$.

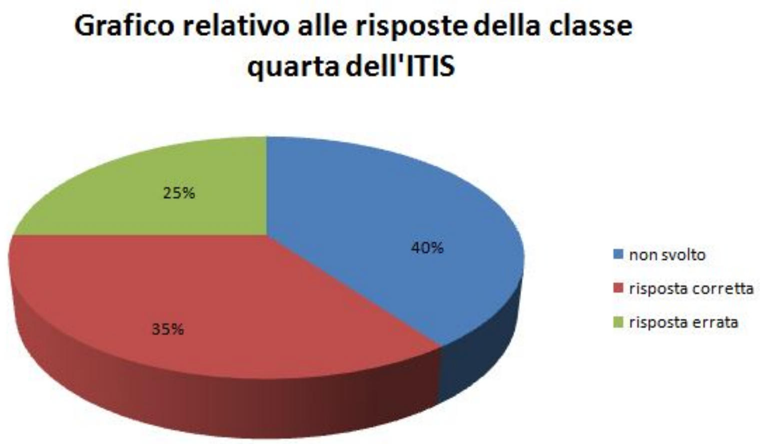
$f(3-2x) = \frac{x-1}{x^2}(3-2x)$

Figura 3.11: Risposta studente quarta ITIS

Qui lo studente confonde l'operazione di composizione con quella di prodotto, che può essere una lacuna che lui ha.







3.4 Quesito 4

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to \infty$, è

a. 0

b. 1

c. Un valore diverso dai precedenti

d. Non è determinato

Motivare la risposta.

Soluzione. La risposta corretta è la lettera "a". Infatti si ha

$$|f(x)| \leqslant \frac{|\sin x| + |\cos x|}{x} = \frac{|\sin x|}{x} + \frac{|\cos x|}{x} \leqslant \frac{2}{x},$$

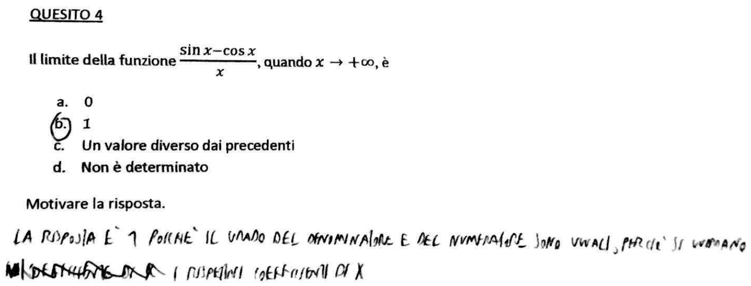
dove evidentemente $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

Si riscontra una sostanziale differenza tra le risposte degli studenti del Liceo dei due indirizzi; in particolare per l'indirizzo sperimentale ben quindici studenti su diciotto hanno risposto correttamente motivando che "le funzioni seno e coseno sono funzioni limitate tra -1 e 1, quindi una quantità limitata su ∞ va a 0"; invece, tra gli studenti dell'indirizzo Tradizionale solo in sette (su venticinque) hanno risposto correttamente e sedici hanno affermato che

"il limite non è determinato".
Per l'ITIS, su trentuno studenti le risposte sono state le seguenti:

- otto hanno risposto correttamente;
- diciannove hanno detto che "il limite non è determinato in quanto si tratta di una forma di indecisione del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$ e che, applicando il Teorema di De L'Hôpital, si ha ancora una forma indeterminata";
- alcuni hanno applicato il limite notevole "$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$" senza rendersi conto del fatto che $x \to \infty$.

Riportiamo alcune delle risposte:


QUESITO 4

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$, è

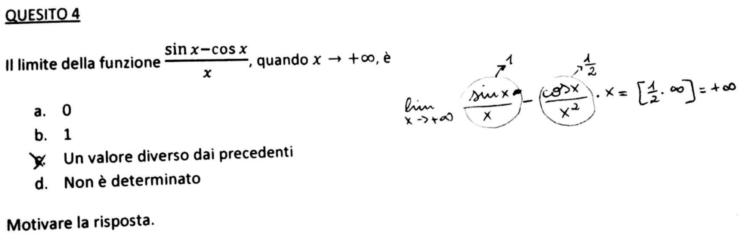
a. 0
b. 1
c. Un valore diverso dai precedenti
d. Non è determinato

Motivare la risposta.

LA RISPOSTA È 1 POICHÈ IL GRADO DEL DENOMINATORE E DEL NUMERATORE SONO UGUALI, PERCIÒ SI [illegible] I RISPETTIVI COEFFICIENTI DI X

Figura 3.12: Risposta studente dell'ITIS

Per questo studente sicuramente si tratta della forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$ perchè ha applicato la regola dei gradi tra numeratore e denominatore, ma non si è reso conto che non si tratta di un rapporto tra funzioni polinomiali: qual è il coefficiente della x al numeratore?



QUESITO 4

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$, è

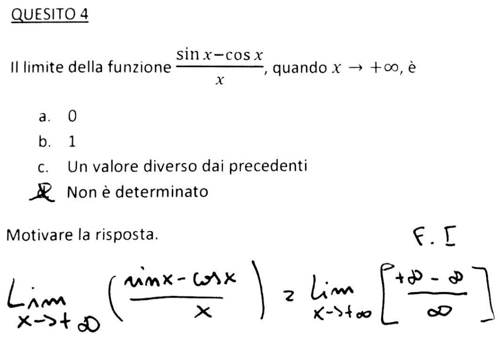
a. 0
b. 1
c. Un valore diverso dai precedenti
d. Non è determinato

Motivare la risposta.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2} \cdot x = \left[\frac{1}{2} \cdot \infty\right] = +\infty$

Figura 3.13: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Qui vediamo come spesso si utilizzano i limiti notevoli (anche sbagliati) senza fare attenzione a cosa tende la variabile; questo vuol dire che molti studenti non hanno ben capito il significato dei limiti notevoli e quando vanno utilizzati.



QUESITO 4

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$, è

a. 0
b. 1
c. Un valore diverso dai precedenti
d. Non è determinato

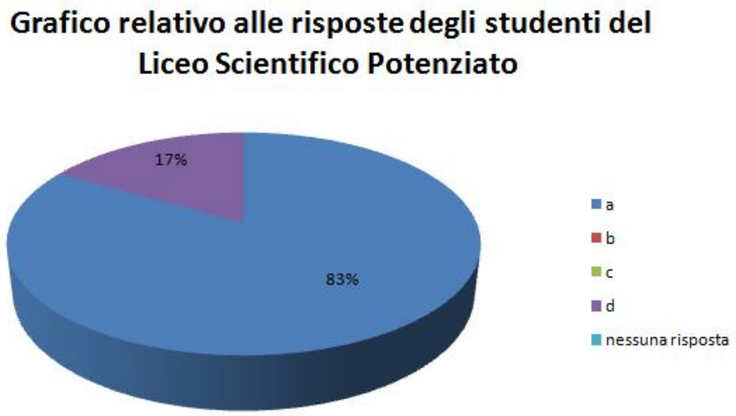
Motivare la risposta.

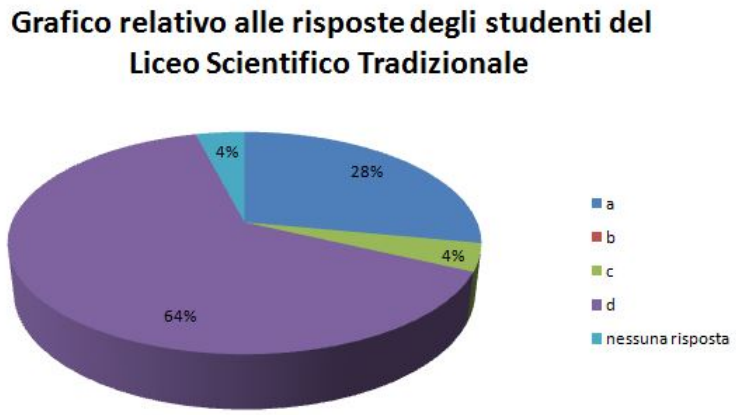
F. I

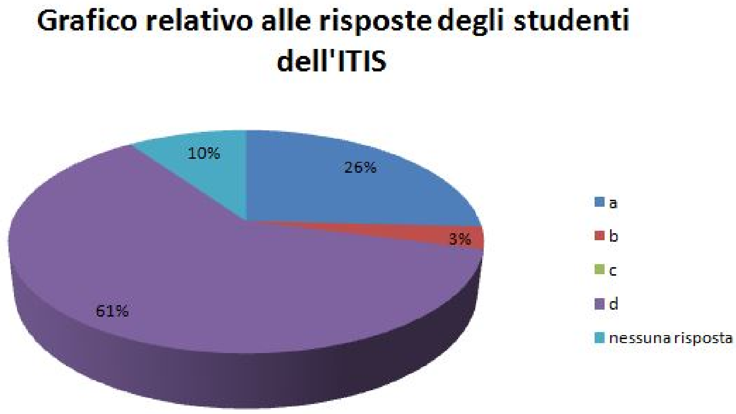
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin x - \cos x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{+\infty - \infty}{\infty}\right]$

Figura 3.14: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Si può concludere che molti studenti quando si trovano di fronte dei limiti sentono l'obbligo di applicare tutte le regole di calcolo che conoscono senza supporre dei ragionamenti che possono portare al risultato senza fare calcoli. Inoltre, per molti vale l'errata convinzione che $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \lim_{x\to+\infty} \cos x = \infty$, e ciò può essere dovuto anche al fatto che per la maggior parte di essi c'è l'*esigenza della giustificazione formale* di una risposta senza pensare che un limite può non esistere; poi, il Teorema del Confronto è stato affrontato in maniera più approfondita non solo dal punto di vista teorico ma anche applicativo solo nella classe del corso Potenziato del Liceo Scientifico, in quanto sono stati gli unici ad applicarlo.







3.5 Quesito 5

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{2x + \cos x}$. Stabilire se si può calcolare il lim per $x \to \infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

Soluzione. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x + \sin x}{2x - \cos x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2 + \dfrac{\sin x}{x}}{2 - \dfrac{\cos x}{x}} = 1.$

Il calcolo di tale limite non può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital in quanto viene meno una delle ipotesi, ossia

$$\nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \cos x}{2 + \sin x},$$

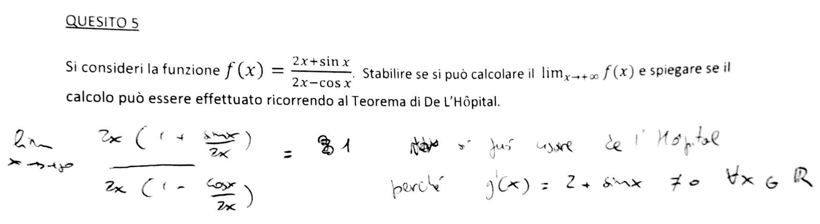
cioè non esiste il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni.
Sicuramente questo è stato un quesito in cui la maggior parte degli studenti di entrambe le scuole ha trovato difficoltà.
Tra gli studenti del corso Potenziato del Liceo Scientifico su diciotto:

- quattro rispondono correttamente motivando anche il perchè non è possibile applicare il Teorema di De L'Hôpital;

- undici affermano che è possibile utilizzare il teorema;

- uno non risponde correttamente;
- uno afferma che il limite non è calcolabile;
- uno non termina i calcoli.

Riportiamo di seguito le risposte di alcuni studenti di questa classe:

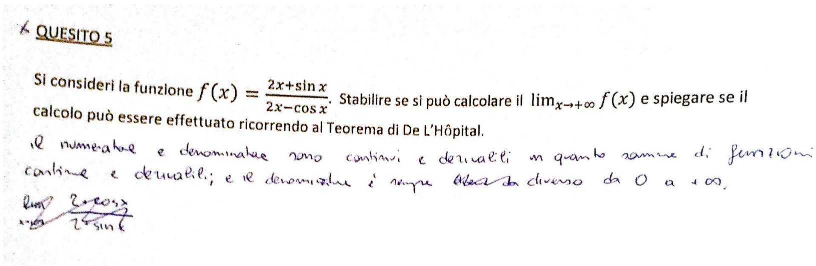


QUESITO 5

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x+\sin x}{2x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1+\frac{\sin x}{2x}\right)}{2x\left(1-\frac{\cos x}{2x}\right)} = 1$ si può usare de l'Hôpital perché $g'(x) = 2+\sin x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Figura 3.15: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato



QUESITO 5

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x+\sin x}{2x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

il numeratore e denominatore sono continui e derivabili in quanto somme di funzioni continue e derivabili; e il denominatore è sempre diverso da 0 a $+\infty$.

$\lim \frac{2+\cos x}{2+\sin x}$

Figura 3.16: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

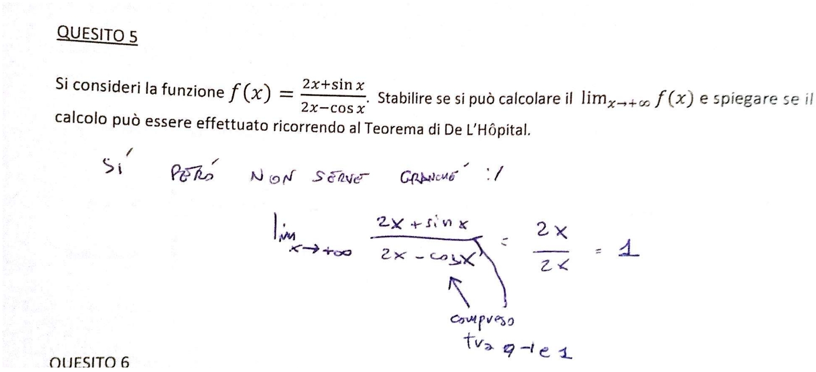


Figura 3.17: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

Per gli studenti del corso Tradizionale, invece, su venticinque:

- tre danno la risposta corretta;
- sette calcolano il limite affermando che è possibile applicare il teorema;
- dieci affermano che "non è possibile applicare il teorema" senza dare una motivazione precisa;
- cinque iniziano a svolgere i calcoli senza portarli a termine.

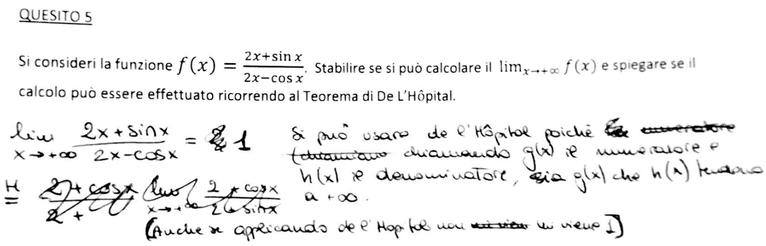
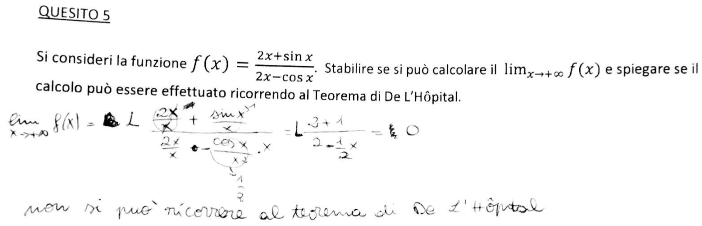


Figura 3.18: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale


QUESITO 5

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x+\sin x}{2x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

non si può ricorrere al teorema di De L'Hôpital

Figura 3.19: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Questa è la risposta dello stesso studente che nel Quesito 4 ha utilizzato i limiti notevoli ed è la conferma che non è stato un errore di calcolo o di distrazione, ma sicuramente non ricorda bene il limite notevole che coinvolge il coseno.

Analizzando le risposte degli studenti dell'ITIS su trentuno studenti

- uno risponde correttamente;
- sette non svolgono il quesito;
- undici affermano che "il limite non si può calcolare perchè applicando De L'Hôpital si ha sempre una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$";
- cinque affermano che il teorema non può essere usato;
- i restanti non danno una risposta corretta.

Facendo un attento confronto tra tutte le risposte date si evince che, come già detto, molti studenti, essendo convinti che seno e coseno vanno a infinito per $x \to \infty$, quando si trovano di fronte ad una forma indeterminata del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$ applicano il Teorema di De L'Hôpital senza verificare se tutte le ipotesi sono soddisfatte, cioè guardano solo il tipo di forma indeterminata e se $g'(x) \neq 0$ senza controllare se effettivamente il limite del rapporto delle derivate delle due funzioni esiste.

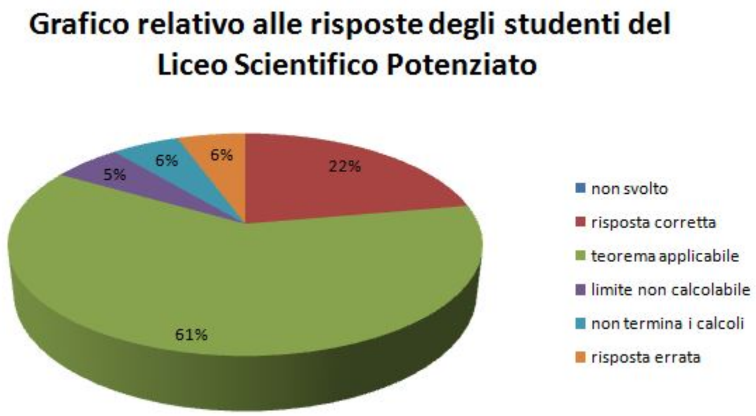


Grafico relativo alle risposte degli studenti del
Liceo Scientifico Potenziato
22%
61%
5%
6%
6%
non svolto
risposta corretta
teorema applicabile
limite non calcolabile
non termina i calcoli
risposta errata

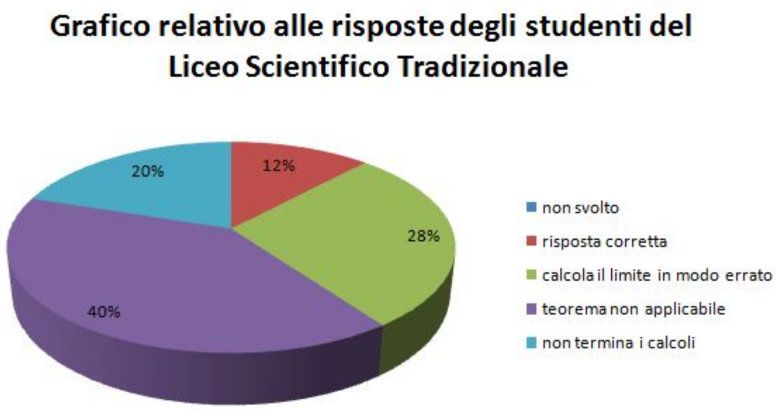
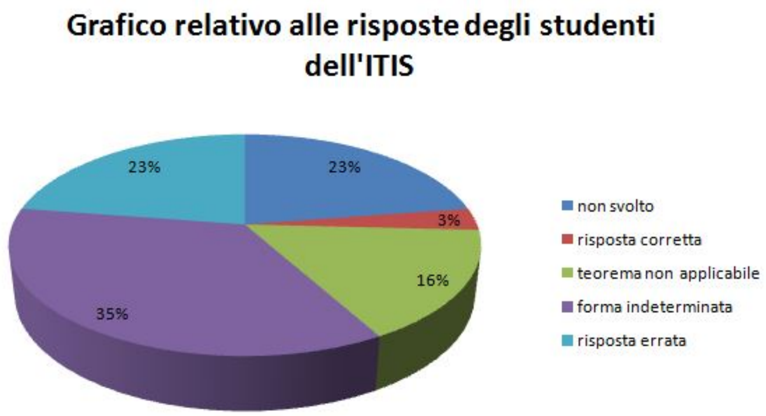
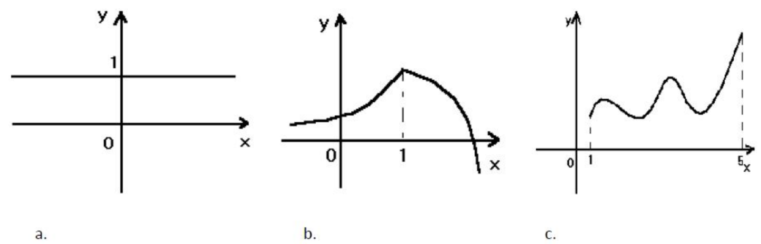


Grafico relativo alle risposte degli studenti del
Liceo Scientifico Tradizionale
12%
28%
40%
20%
non svolto
risposta corretta
calcola il limite in modo errato
teorema non applicabile
non termina i calcoli



3.6 Quesito 6

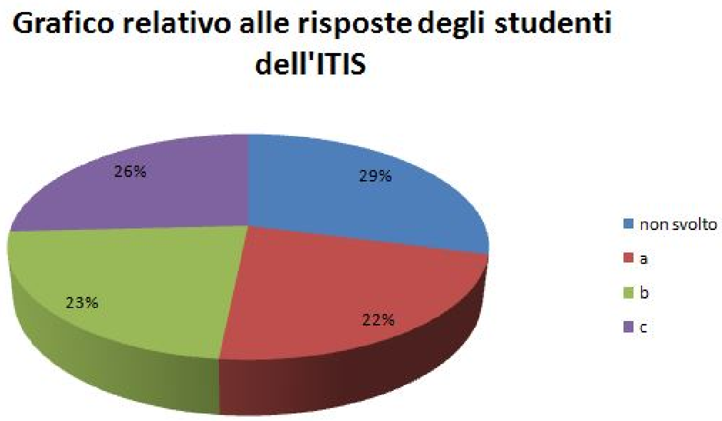
Il Teorema di Fermat afferma che:
se f è una funzione derivabile nel suo dominio, x_0 è un punto interno al dominio ed è punto di minimo o di massimo per f , allora $f'(x_0) = 0$.
È noto che non vale il "teorema inverso", cioè, da $f'(x_0) = 0$ non segue necessariamente che x_0 sia un punto di minimo o massimo per f.
Quale dei seguenti grafici illustra questo fatto?



Soluzione. Il Teorema di Fermat afferma che se f è una funzione definita in un intervallo $[a, b]$ e c è un punto di estremo relativo diverso da a e da b in cui la funzione è derivabile, allora la tangente al grafico della funzione nel punto c *deve essere orizzontale*: ciò è confermato dal grafico "c".

Riguardo al seguente quesito gli studenti che hanno trovato maggiore difficoltà sono stati quelli dell' ITIS; infatti, la maggior parte di loro non lo ha

svolto, poi su trentuno sette hanno dato risposta “a”, sette ”b” e otto “c”. Tra gli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale su venticinque ben diciassette hanno risposto correttamente, cinque risposta “b”, due risposta “a” e solo uno non ha svolto il quesito; gli studenti dell’indirizzo P.N.I. hanno risposto tutti correttamente.
Dall’andamento di questo quesito si evince che probabilmente agli studenti dell’ITIS il teorema di Fermat è stato presentato loro solo dal punto di vista teorico senza effettivamente spiegarne il vero significato, e quindi si sono limitati a imparare a memoria l’enunciato.



3.7 Quesito 7

La funzione $f(x) = \ln x - x$ soddisfa nell'intervallo $[1; e]$ le ipotesi del teorema di Lagrange. Trovare i punti che soddisfano la tesi di tale teorema.

Soluzione. Il Teorema di Lagrange, se sono soddisfatte le ipotesi, afferma che esiste almeno un punto c nell'intervallo $(a; b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Determiniamo i punti della funzione data che soddisfano tale relazione:

$f(1) = \ln 1 - 1 = -1$

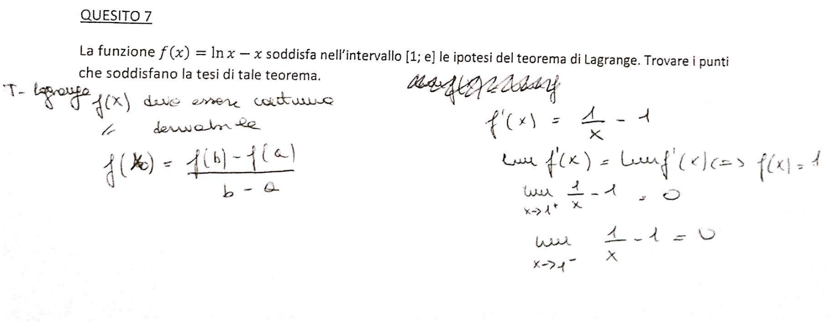
$f(e) = \ln e - e = 1 - e$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1,$

quindi $f'(c) = \dfrac{1}{c} - 1 =$ (per il teorema)$= \dfrac{1 - e - (-1)}{e - 1} = \dfrac{2 - e}{e - 1} \Rightarrow c = e - 1.$

Dalle risposte date dagli studenti, si nota che il teorema di Lagrange è stato trattato come argomento, ma sicuramente non tutti sono abituati ad ap-

plicarlo in esercizi del genere; infatti, in pochi hanno trovato il punto che soddisfa la relazione del teorema, molti hanno scritto bene la formula e si sono fermati al calcolo di $f'(c)$ senza trovare c, altri ancora hanno scritto bene la formula ma poi hanno fatto errori durante lo svolgimento dei calcoli, due studenti dell'ITIS verificano se sono soddisfatte le ipotesi del teorema limitandosi a trovare i punti solo teoricamente, nonostante la traccia affermava che le ipotesi erano soddisfatte e non bisognava verificarle. Da notare che tra gli studenti dell'ITIS di indirizzo Elettrotecnico su tredici undici non hanno svolto l'esercizio e due hanno scritto di non ricordare il teorema; quindi, sicuramente l'argomento è stato trattato, ma forse sono stati fatti pochi esempi in classe.
Mostriamo alcune risposte significative:



QUESITO 7

La funzione $f(x) = \ln x - x$ soddisfa nell'intervallo [1; e] le ipotesi del teorema di Lagrange. Trovare i punti che soddisfano la tesi di tale teorema.

T- Lagrange $f(x)$ deve essere continua
// derivabile

$f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

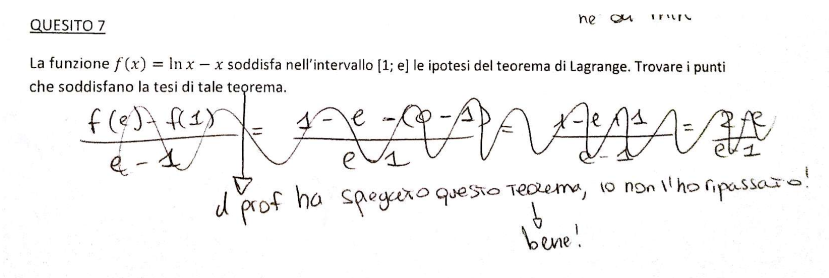
$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

$\lim f'(x) = \lim f'(x) \Leftrightarrow f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} - 1 = 0$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} - 1 = 0$

Figura 3.20: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale



QUESITO 7

La funzione $f(x) = \ln x - x$ soddisfa nell'intervallo [1; e] le ipotesi del teorema di Lagrange. Trovare i punti che soddisfano la tesi di tale teorema.

il prof ha spiegato questo teorema, io non l'ho ripassato bene!

Figura 3.21: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

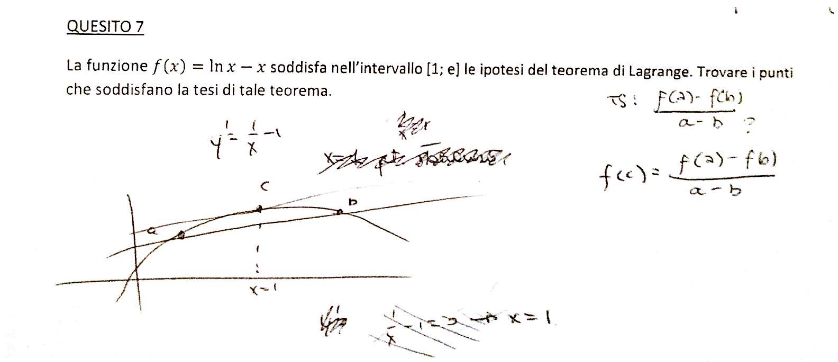
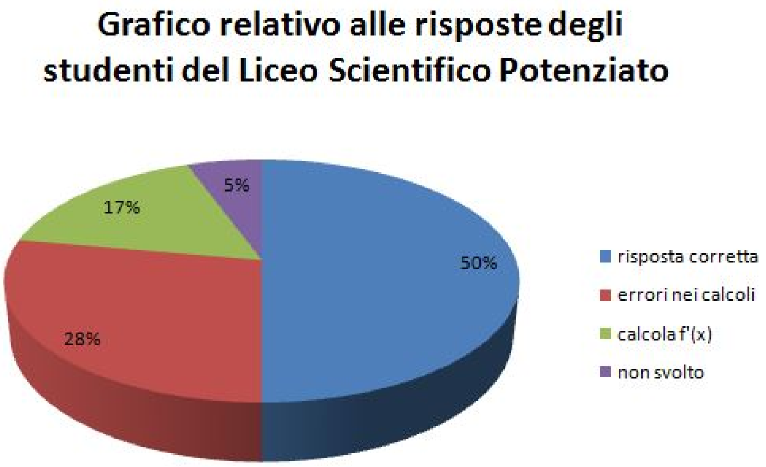


Figura 3.22: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale



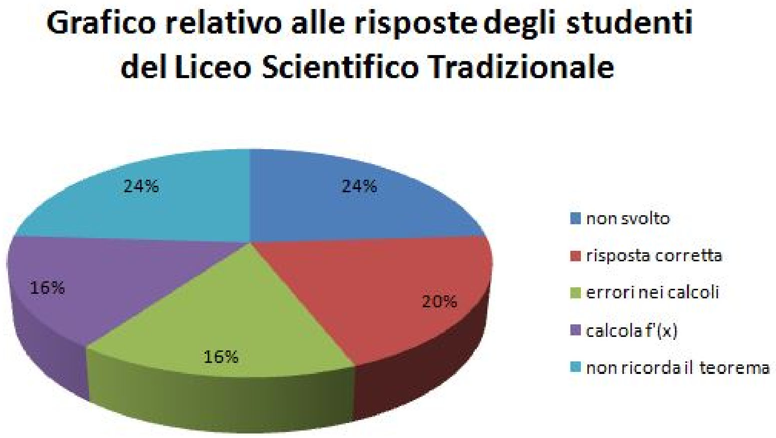


Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale
24%
24%
20%
16%
16%
non svolto
risposta corretta
errori nei calcoli
calcola f'(x)
non ricorda il teorema

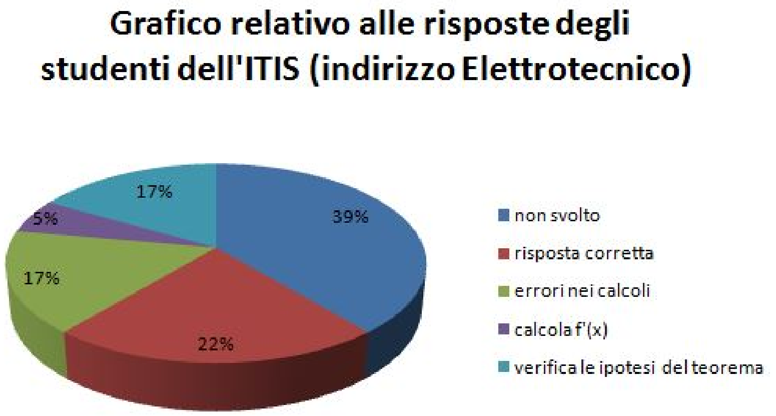
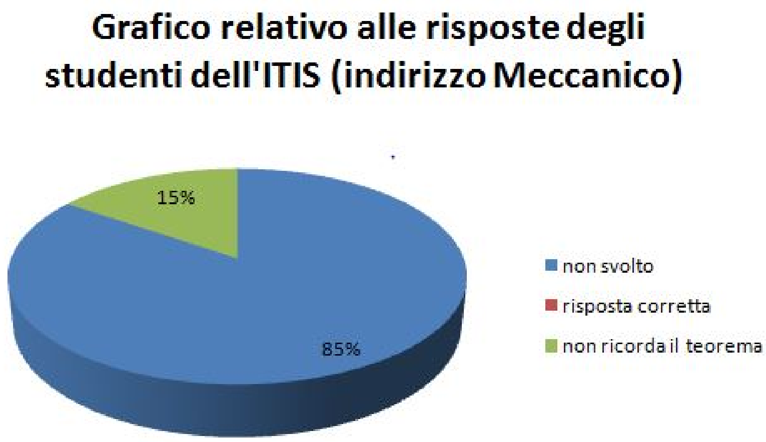


Grafico relativo alle risposte degli studenti dell'ITIS (indirizzo Elettrotecnico)
17%
5%
39%
17%
22%
non svolto
risposta corretta
errori nei calcoli
calcola f'(x)
verifica le ipotesi del teorema



3.8 Quesito 8

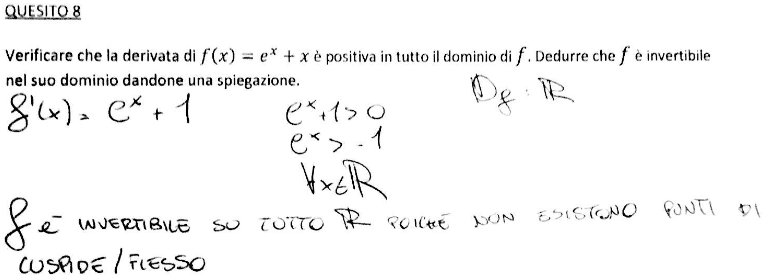
Verificare che la derivata di $f(x) = e^x + x$ è positiva in tutto il dominio di f. Dedurre che f è invertibile nel suo dominio dandone una spiegazione.

Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione f:

$$f'(x) = e^x + 1,$$

essa è sempre positiva nel suo dominio perchè somma di funzioni positive, quindi f è strettamente crescente, ovvero invertibile nell'intero dominio.
Il numero di risposte corrette è abbastanza differente tra i due indirizzi scolastici e suppongo perchè il concetto di invertibilità non viene trattato molto negli istituti tecnici se non solo come definizione di funzione invertibile. Infatti, su trentuno studenti solo uno risponde correttamente e disegna anche il grafico della funzione, e sicuramente è da lì che deduce che la funzione data è invertibile; ben dodici studenti non svolgono l'esercizio, undici si limitano a calcolare la derivata della funzione affermando che "la funzione appartiene al dominio", quindi scambiano il concetto di dominio con quello di codominio, solo in quattro verificano la positività della derivata.
Riguardo al Liceo Scientifico c'è differenza delle risposte tra i due indirizzi;

infatti, tra gli studenti del corso Potenziato ben sedici su diciotto rispondono correttamente e solo due verificano soltanto che la funzione data ha derivata positiva; tra gli studenti del corso Tradizionale su venticinque tredici rispondono correttamente, dieci verificano che la derivata è positiva, uno non svolge l'esercizio e un altro non risponde correttamente.
Seguono alcune delle risposte date:

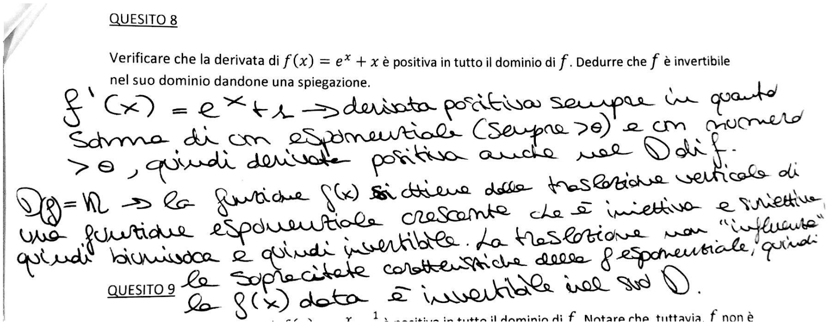

QUESITO 8

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x + x$ è positiva in tutto il dominio di f. Dedurre che f è invertibile nel suo dominio dandone una spiegazione.

$f'(x) = e^x + 1$ $\quad e^x + 1 > 0$ $\quad e^x > -1$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad D_f : \mathbb{R}$

f È INVERTIBILE SU TUTTO $\mathbb{R}$ POICHÉ NON ESISTONO PUNTI DI CUSPIDE / FLESSO

Figura 3.23: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale


QUESITO 8

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x + x$ è positiva in tutto il dominio di f. Dedurre che f è invertibile nel suo dominio dandone una spiegazione.

$f'(x) = e^x + 1 \to$ derivata positiva sempre in quanto somma di un esponenziale (sempre >0) e un numero >0, quindi derivata positiva anche nel D di f.
$D_f = \mathbb{R} \to$ la funzione $f(x)$ si ottiene dalla traslazione verticale di una funzione esponenziale crescente che è iniettiva e suriettiva, quindi biunivoca e quindi invertibile. La traslazione non "influenza" le sopracitate caratteristiche della f esponenziale, quindi la $f(x)$ data è invertibile nel suo D.

QUESITO 9

Figura 3.24: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Notiamo qui come lo studente in questione ha confuso la f con la f'.

Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Potenziato

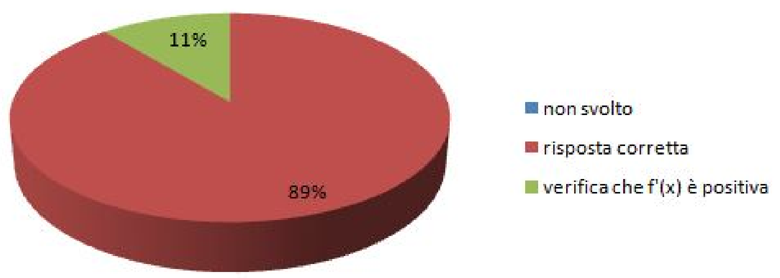
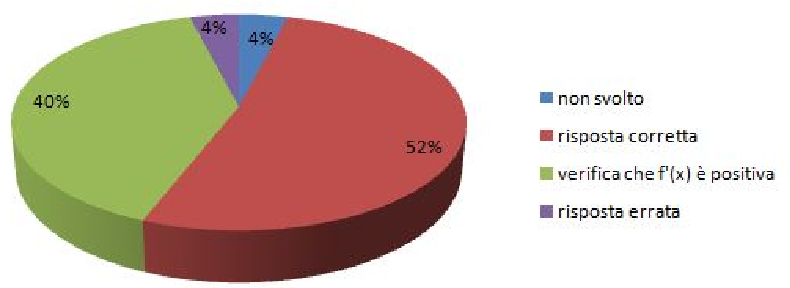
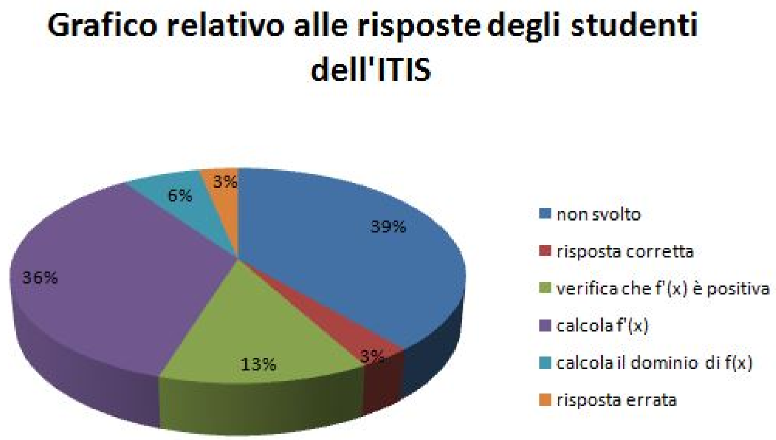


Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale





3.9 Quesito 9

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ è positiva in tutto il dominio di f. Notare che, tuttavia, f non è invertibile nell'intero dominio. Dare una motivazione, spiegando quali sono le ragioni per le quali si giunge qui a una conclusione opposta rispetto a quella del QUESITO 8.

Soluzione. Innanzitutto notiamo che il dominio della funzione data f è $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Calcoliamo la derivata della funzione f:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2},$$

quindi $D_{f'} = D_f$.
$f'(x)$ è positiva in tutto il dominio perchè somma di funzioni postive, ma a differenza del QUESITO 8, la funzione f non è invertibile in tutto il dominio perchè in esso non è iniettiva:

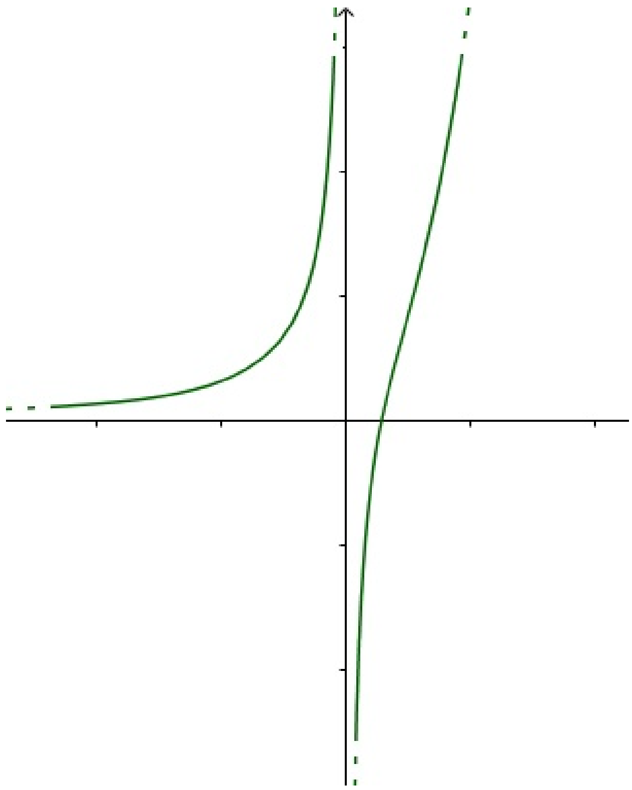
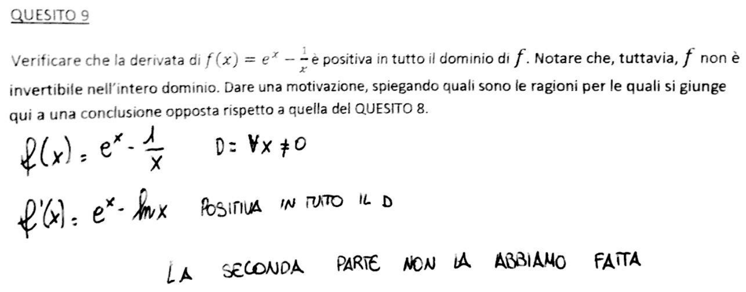


Figura 3.25: Grafico di $f(x)$

Essa è invertibile negli intervalli $(-\infty; 0)$ e $(0; +\infty)$.

Viste le risposte del quesito 8, mi aspettavo che riguardo al quesito 9 la maggior parte degli studenti dell'ITIS lasciasse l'esercizio in bianco e così è stato; in particolar modo, di un'intera classe su tredici studenti ben dodici non l'hanno svolto e uno studente ha cercato di calcolare la derivata ma in maniera sbagliata:



QUESITO 9

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ è positiva in tutto il dominio di f. Notare che, tuttavia, f non è invertibile nell'intero dominio. Dare una motivazione, spiegando quali sono le ragioni per le quali si giunge qui a una conclusione opposta rispetto a quella del QUESITO 8.

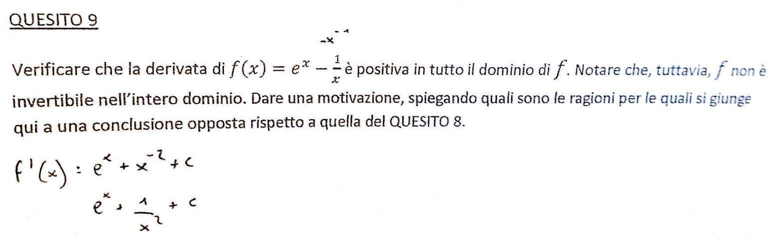
$f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ D: $\forall x \neq 0$

$f'(x) = e^x - \ln x$ POSITIVA IN TUTTO IL D

LA SECONDA PARTE NON LA ABBIAMO FATTA

Figura 3.26: Risposta studente dell'ITIS

Riguardo la classe di indirizzo Meccanico ben quattordici su diciotto non hanno svolto l'esercizio, ma almeno in quattro hanno calcolato la derivata della funzione f, tra questi uno studente ha eseguito il seguente calcolo:



QUESITO 9

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ è positiva in tutto il dominio di f. Notare che, tuttavia, f non è invertibile nell'intero dominio. Dare una motivazione, spiegando quali sono le ragioni per le quali si giunge qui a una conclusione opposta rispetto a quella del QUESITO 8.

$-x^{-1}$

$f'(x) = e^x + x^{-2} + c$

$e^x + \frac{1}{x^2} + c$

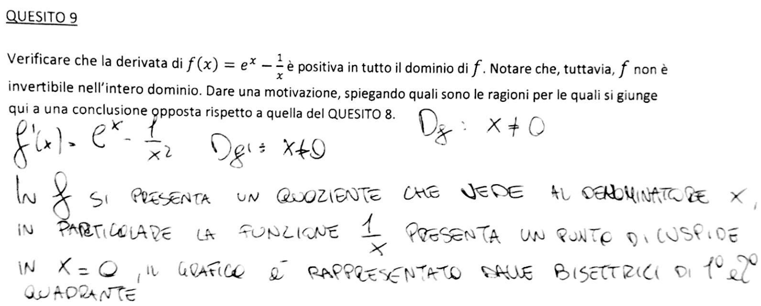
Figura 3.27: Risposta studente dell'ITIS

Dai calcoli svolti si può notare che forse gli studenti hanno iniziato a studiare le regole di integrazione e adesso fanno confusione tra il calcolo di derivate e di integrali.
Per gli studenti del Liceo Scientifico la situazione è stata diversa.
Tra quelli del corso Potenziato:

- quattordici hanno svolto correttamente il quesito;
- tre hanno verificato che la funzione avesse derivata positiva;
- uno non ha svolto l'esercizio.

Per l'indirizzo Tradizionale, invece, su venticinque studenti:

- tredici hanno verificato la positività della derivata della funzione;
- sette hanno svolto correttamente l'esecizio;
- due hanno calcolato solo la derivata;
- due non hanno svolto il quesito;
- uno ha dato la seguente risposta errata senza arrivare ad una conclusione:



QUESITO 9

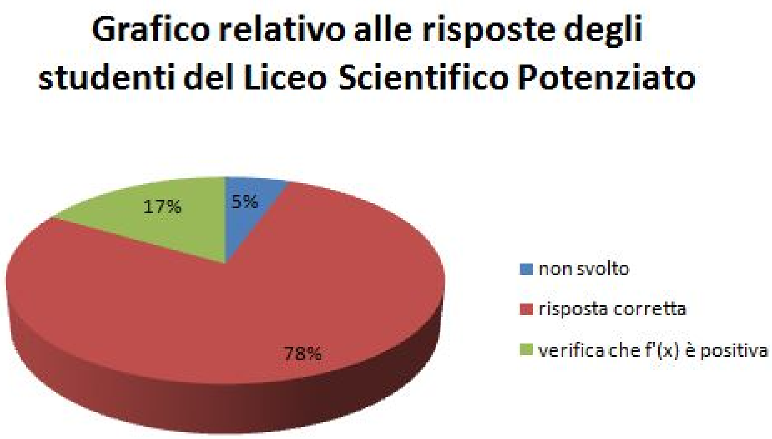
Verificare che la derivata di $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ è positiva in tutto il dominio di f. Notare che, tuttavia, f non è invertibile nell'intero dominio. Dare una motivazione, spiegando quali sono le ragioni per le quali si giunge qui a una conclusione opposta rispetto a quella del QUESITO 8.

$D_f: x \neq 0$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ $D_{f'}: x \neq 0$

IN f SI PRESENTA UN QUOZIENTE CHE VEDE AL DENOMINATORE x, IN PARTICOLARE LA FUNZIONE $\frac{1}{x}$ PRESENTA UN PUNTO DI CUSPIDE IN $x = 0$, IL GRAFICO È RAPPRESENTATO DALLE BISETTRICI DI 1° e 2° QUADRANTE

Figura 3.28: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale



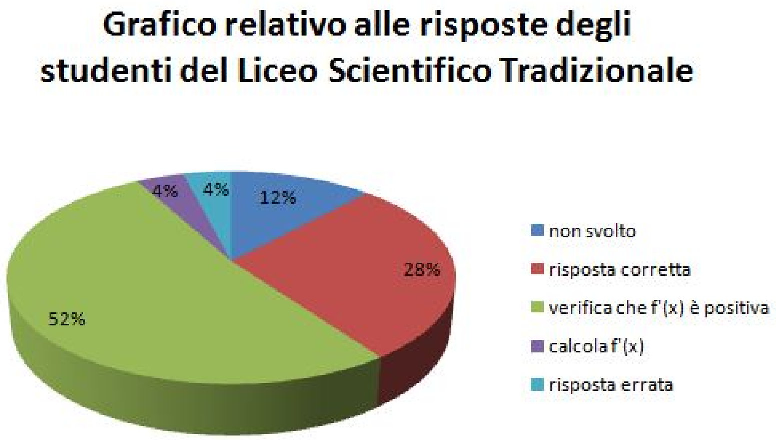


Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale
12%
28%
52%
4%
4%
non svolto
risposta corretta
verifica che f'(x) è positiva
calcola f'(x)
risposta errata

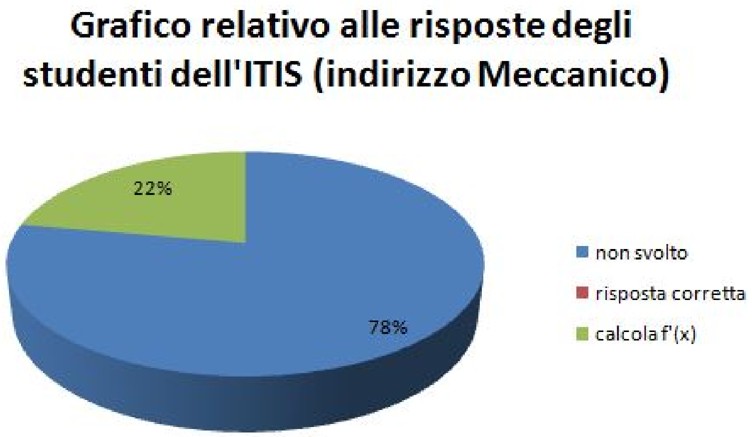
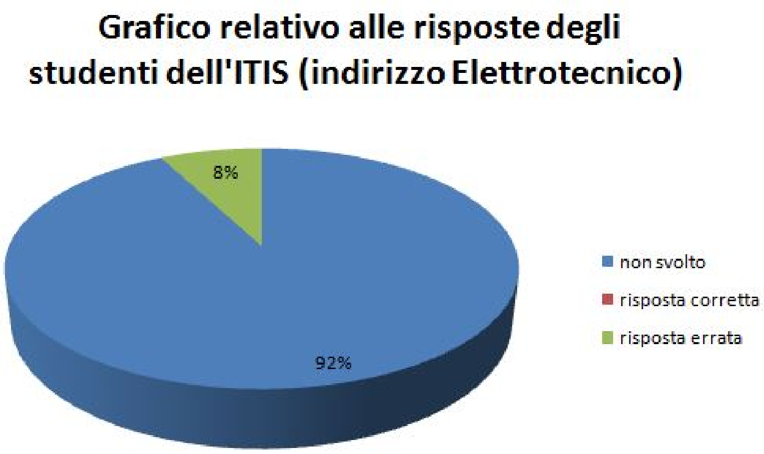


Grafico relativo alle risposte degli studenti dell'ITIS (indirizzo Meccanico)
22%
78%
non svolto
risposta corretta
calcola f'(x)



3.10 Quesito 10

Considera la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \in [0,1] \\ x & x \in [-1,0[\end{cases}$.

Dire se f ha massimo o minimo. Ciò contraddice il Teorema di Weierstrass?

Soluzione. Il grafico della funzione data è il seguente:

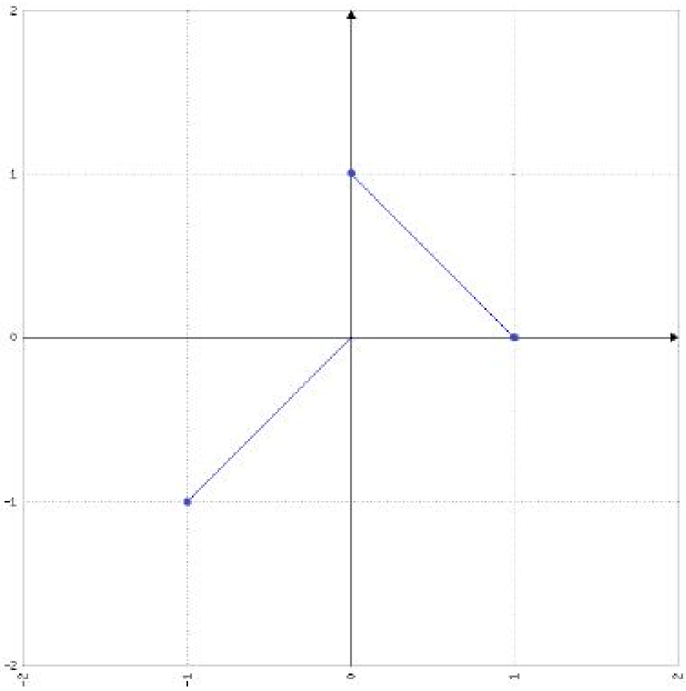
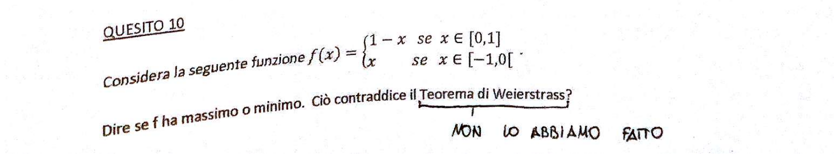


Figura 3.29: Grafico $f(x)$

pertanto, la funzione assume il massimo per $x = 0$ e il minimo per $x = -1$. Anche se la funzione non è continua in $x = 0$, essa assume comunque massimo e minimo nell'intervallo di definizione $[-1; 1]$. Ciò non contraddice il Teorema di Weierstrass perchè la condizione di continuità posta nelle ipotesi del teorema è una condizione sufficiente, ma non necessaria.
In altre parole: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ammette sicuramente massimo e minimo, viceversa il fatto che una funzione sia discontinua non implica necessariamente che essa non possa avere massimo e minimo.
Tutti gli studenti di entrambi gli indirizzi dell'ITIS non hanno svolto l'esercizio, alcuni hanno scritto esplicitamente di non aver fatto il Teorema di Weierstrass:



QUESITO 10

Considera la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} 1-x & se\ x \in [0,1] \\ x & se\ x \in [-1,0[\end{cases}$

Dire se f ha massimo o minimo. Ciò contraddice il $\underbrace{\text{Teorema di Weierstrass}}_{\text{NON LO ABBIAMO FATTO}}$?

Figura 3.30: Risposta studente ITIS

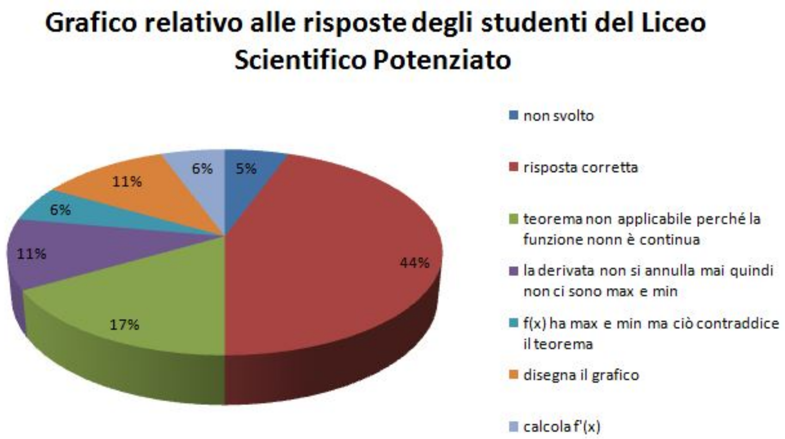
Per quanto riguarda il Liceo Scientifico, i risultati ottenuti si differenziano notevolmente a seconda dell'indirizzo e si può notare che la maggior parte non è riuscita a dare una motivazione ben precisa, infatti le risposte date sono abbastanza varie. Nello specifico tra gli studenti del corso Potenziato dieci su diciotto hanno risposto correttamente dando anche una valida e attenta motivazione, uno solo non ha svolto il quesito, uno ha soltanto calcolato la derivata senza motivare, due studenti hanno disegnato il grafico della funzione e mostrato che presenta un massimo e un minimo, invece, tra i restanti le risposte sono state le seguenti:

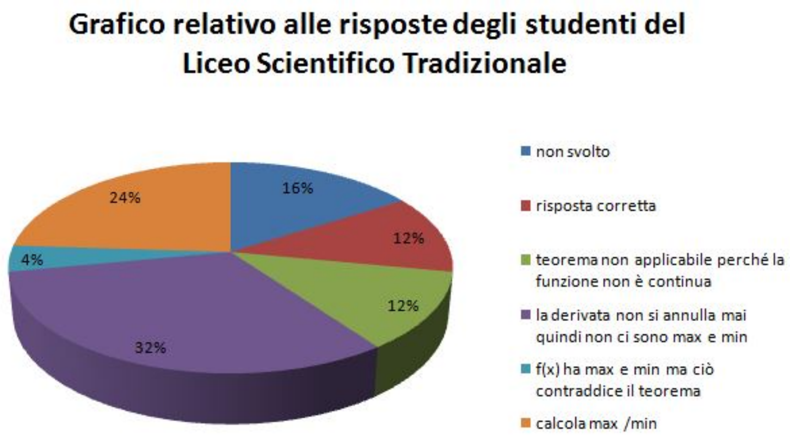
- la funzione non ammette massimi e minimi in quanto la derivata non si annulla mai e questo non contraddice il teorema;

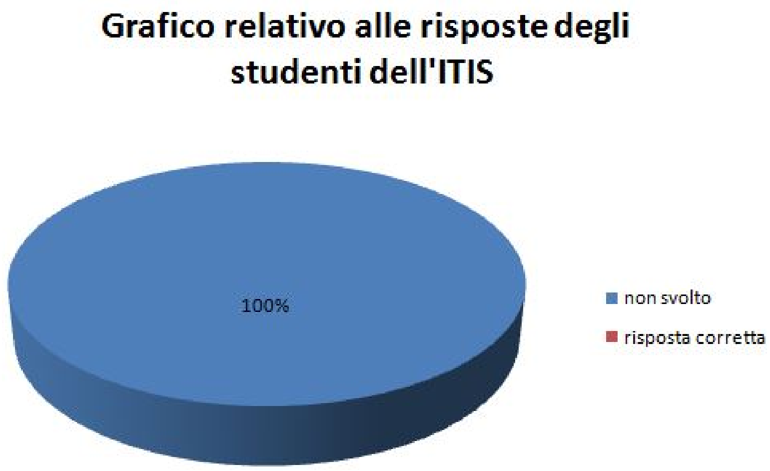
- la funzione ha massimo e minimo ma il teorema è contraddetto in quanto cade l'ipotesi di continuità della funzione in $x = 0$;

- il teorema non è applicabile perchè la funzione non è continua nell'intervallo.

Per gli studenti del corso Tradizionale su venticinque nessuno dà una risposta corretta; sono tre gli studenti che affermano che la funzione, nonostante abbia derivata costante, ha il massimo e il minimo e che il teorema non è contraddetto perchè non è applicabile; quattro non svolgono l'esercizio; poi c'è chi ha calcolato il massimo e il minimo; chi solo uno dei due, e i restanti danno le stesse motivazioni viste per gli studenti dell'indirizzo sperimentale.







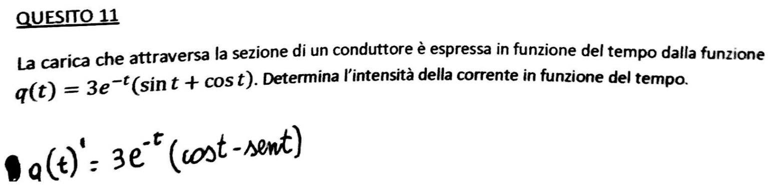
Si conclude che il teorema di Weierstrass non è stato presentato agli studenti dell'ITIS nonostante è presente sul loro libro di testo, e forse sarà stata una scelta degli insegnanti; invece, il teorema è stato studiato dagli studenti del Liceo ma per la maggior parte di loro non è ben chiara la differenza tra condizione necessaria e condizione sufficiente, lacuna che si portano avanti sicuramente dai primi anni del liceo.

3.11 Quesito 11

La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

Soluzione. L'intensità di corrente per definizione è $i(t) = q'(t)$, quindi nel seguente caso si ha che $i(t) = q'(t) = -6e^{-t} \sin t$.
Devo dire che le risposte al quesito non sono state positive per entrambe le scuole, nonostante bastava calcolare la derivata di una funzione composta. Forse potevo aspettarmi un quesito non svolto dagli studenti dell'ITIS, seppur siano di indirizzo Meccanico e Elettrotecnico, ma non da quelli del liceo che studiano le applicazioni dell'analisi matematica alla fisica, anche in vista

della seconda prova della maturità.
In particolare, per gli studenti dell'ITIS il quesito non è stato svolto dalla maggior parte, ma c'è una differenza tra i due indirizzi: nella classe di indirizzo Meccanico su diciotto solo due studenti hanno svolto correttamente il quesito, mentre i restanti l'hanno lasciato in bianco e alcuni di essi hanno anche scritto di non aver trattato l'argomento.
Nella classe di indirizzo Elettrotecnico, invece, su tredici dodici non hanno svolto l'esercizio e solo uno ha scritto che l'intensità di corrente è data dalla derivata della quantità di carica ma ha calcolato erroneamente la derivata senza osservare che si trattava di un prodotto di funzioni:

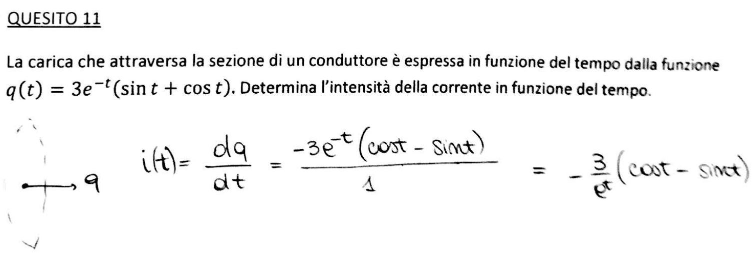

QUESITO 11

La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

$q(t)' = 3e^{-t}(\cos t - \text{sen}\, t)$

Figura 3.31: Risposta studente ITIS

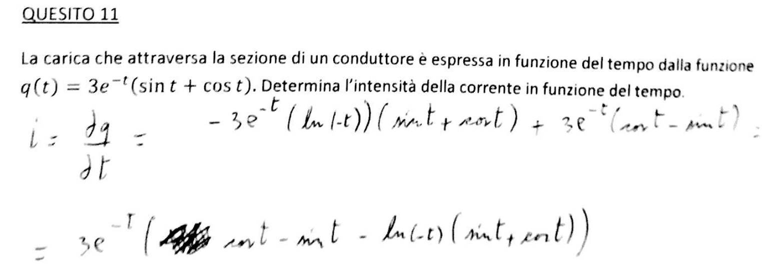
Per il Liceo Scientifico, invece, nella classe Potenziata dieci studenti su diciotto hanno svolto il quesito correttamente, quattro lo hanno lasciato in bianco e gli altri quattro hanno fatto errori nei calcoli:


QUESITO 11

La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{-3e^{-t}(\cos t - \sin t)}{1} = -\frac{3}{e^t}(\cos t - \sin t)$

Figura 3.32: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato



QUESITO 11

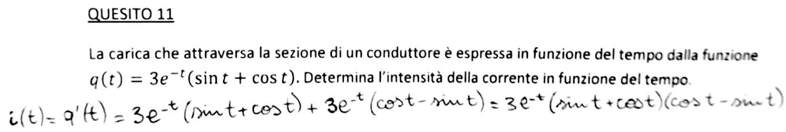
La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

$$i = \frac{dq}{dt} = -3e^{-t}(\ln(-t))(\sin t + \cos t) + 3e^{-t}(\cos t - \sin t) =$$

$$= 3e^{-t}(\cos t - \sin t - \ln(-t)(\sin t + \cos t))$$

Figura 3.33: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

Per l'indirizzo Tradizionale, su venticinque solo in nove hanno risposto correttamente, sempre in nove non lo hanno svolto, in due hanno scritto solo la formula teorica e in cinque hanno fatto errori nei calcoli:



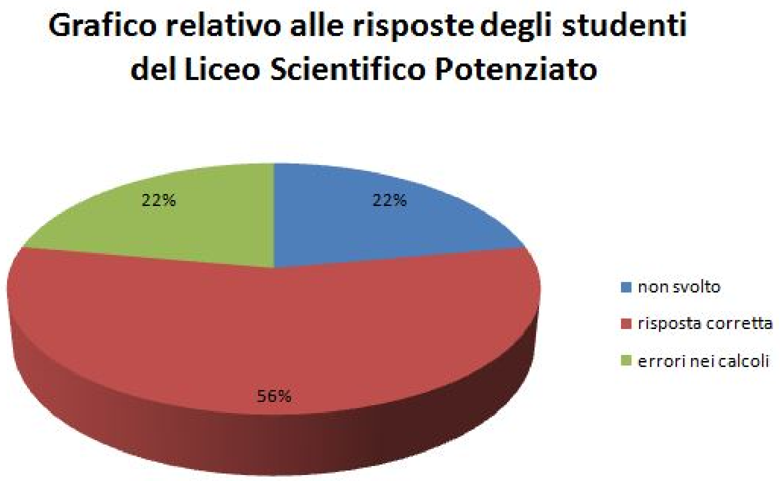
QUESITO 11

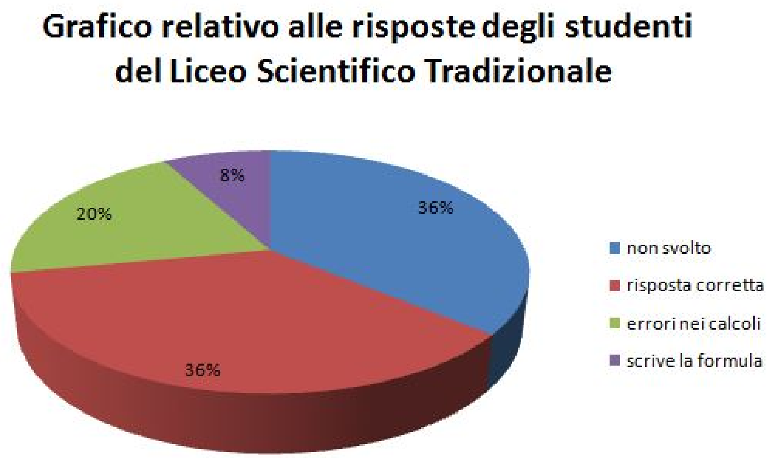
La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

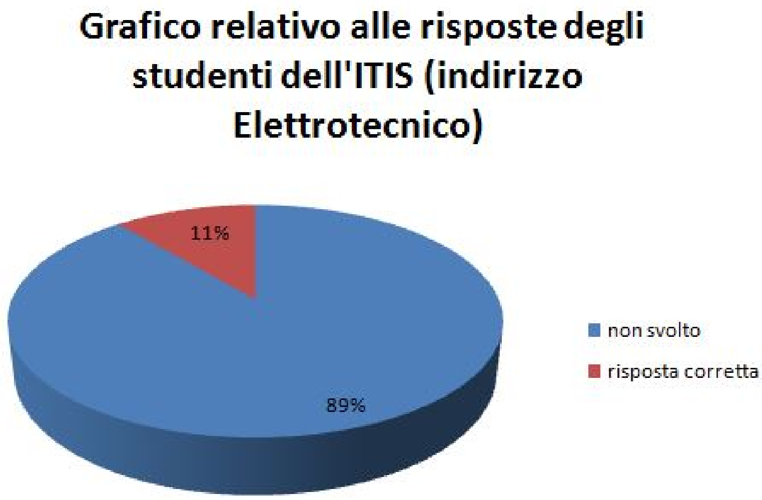
$$i(t) = q'(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t) + 3e^{-t}(\cos t - \sin t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)$$

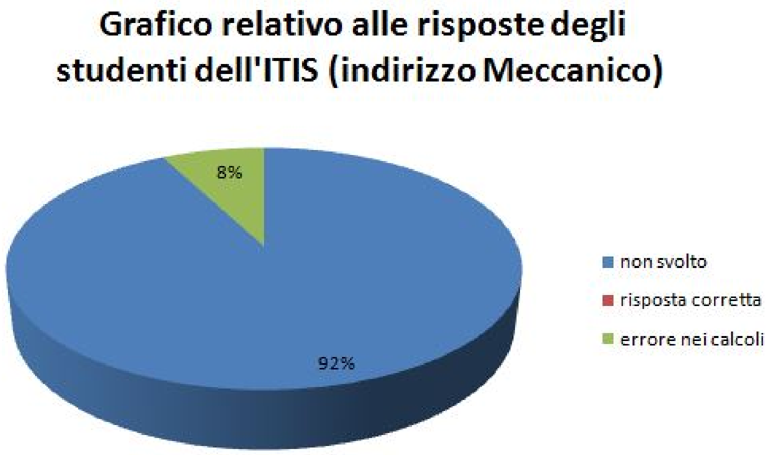
Figura 3.34: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Sicuramente all'ITIS gli insegnanti si sono soffermati poco sulle applicazioni alla fisica del concetto di derivata o spesso si mette in evidenza il legame tra derivata, velocità e accelerazione di un punto materiale piuttosto che quello tra quantità di carica e intensità di corrente; quindi, come giustamente hanno scritto in molti, l'argomento non sarà stato trattato. È bene ricordare, però, che le classi dell'istituto tecnico sono di indirizzo Meccanico ed Elettrotecnico, quindi sicuramente sanno cos'è l'intensità di corrente. Infatti, tralasciando gli errori di calcolo, tre studenti hanno affermato che l'intensità di corrente è data dalla derivata della quantità di carica. Possiamo dire che questi tre studenti hanno sviluppato una loro competenza, cioè hanno saputo cogliere il collegamento di uno stesso concetto tra due materie differenti: è questo un esempio di *transfer cognitivo*, che nella fase di apprendimento si verifica quando una determinata acquisizione precedente è in grado di influenzare un apprendimento successivo da parte del medesimo individuo. Non è per niente scontato per gli studenti fare certi collegamenti se un insegnante non aiuta a saperli cogliere; infatti gli studenti che hanno scritto di non aver svolto l'argomento non è perchè loro hanno dimenticato ciò che hanno studiato precedentemente in un'altra materia, ma è perchè l'insegnante non ha fatto cogliere loro il collegamento.









3.12 Quesito 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = [\frac{1}{4}; 1]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

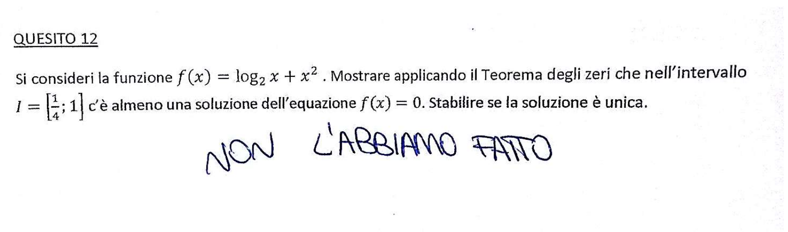
Soluzione. La funzione data è continua e definita in un intervallo chiuso e limitato; assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo:

$$f(\frac{1}{4}) = -2 + \frac{1}{16} < 0$$

$$f(1) = 1 > 0.$$

Di conseguenza, per il Teorema di esistenza degli zeri, la funzione ammette almeno uno zero nell'intervallo $I = [\frac{1}{4}; 1]$. Inoltre, la funzione è strettamente crescente; quindi, la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è unica.

Come per il quesito riguardante il teorema di Weierstrass anche per questo quesito c'è una differenza notevole tra le due scuole.
La maggior parte degli studenti dell'ITIS non ha svolto l'esercizio; in particolare, nella classe di indirizzo Meccanico su diciotto solo tre studenti hanno svolto il quesito affermando che "le ipotesi del teorema degli zeri sono soddisfatte quindi il teorema è applicabile" ma non hanno detto nulla riguardo l'unicità della soluzione; è curioso che in questa classe tra i restanti quindici studenti che non hanno svolto il quesito alcuni hanno scritto addirittura di non aver fatto il teorema: ma come mai tre studenti sono a conoscenza del teorema?



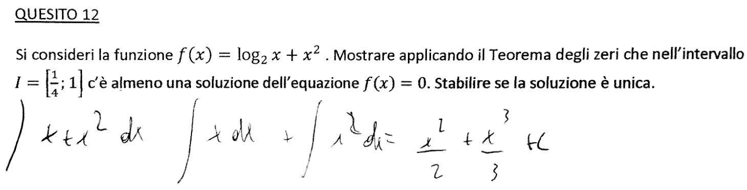
QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

NON L'ABBIAMO FATTO

Figura 3.35: Risposta studente ITIS (indirizzo Meccanico)

Invece, per la classe di indirizzo Elettrotecnico tutti e tredici gli studenti non hanno svolto il quesito, ma è stata curiosa la risposta di uno di loro che riportiamo di seguito: lo studente non ha capito la richiesta della traccia o non ricordava il teorema, ma pur di scrivere qualcosa ha fatto dei calcoli; anche qui abbiamo un esempio di *esigenza della giustificazione formale.*



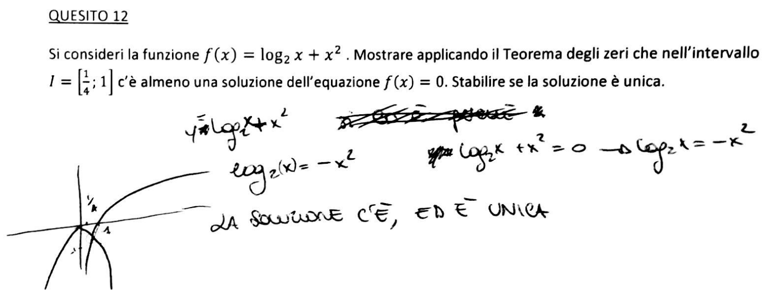
QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

$\int x + x^2\, dx \quad \int x\, dx + \int x^2\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$

Figura 3.36: Risposta studente ITIS (indirizzo Elettrotecnico)

Per gli studenti del Liceo Scientifico la situazione è diversa. Dalle risposte date si evince che il teorema è stato trattato, ma sicuramente alcuni non lo ricordavano bene. In partricolare, per gli studenti dell'indirizzo Tradizionale su venticinque nessuno ha risposto ad entrambe le domande del quesito, in sette hanno verificato l'applicabilità del teorema, in due hanno affermato che la soluzione è unica, di cui uno graficamente



QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

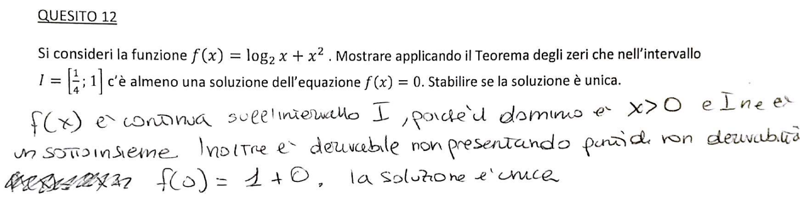
$y = \log_2 x + x^2$

$\log_2(x) = -x^2$ $\quad \log_2 x + x^2 = 0 \rightarrow \log_2 x = -x^2$

LA SOLUZIONE C'È, ED È UNICA

Figura 3.37: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

e l'altro ha dato la seguente risposta



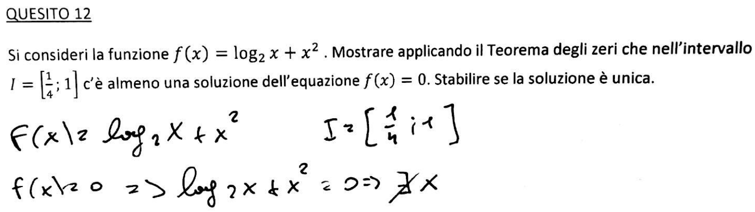
QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

$f(x)$ è continua sull'intervallo I, poiché il dominio è $x>0$ e I ne è un sottoinsieme. Inoltre è derivabile non presentando punti di non derivabilità $f(0) = 1 + 0$, la soluzione è unica

Figura 3.38: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Dei restanti, sei studenti hanno iniziato a fare calcoli, ma hanno lasciato l'esercizio incompleto, sei non hanno svolto l'esercizio, due hanno risposto in maniera errata e altri due hanno calcolato solo f(a) ed f(b) senza trarre conclusioni.


QUESITO 12

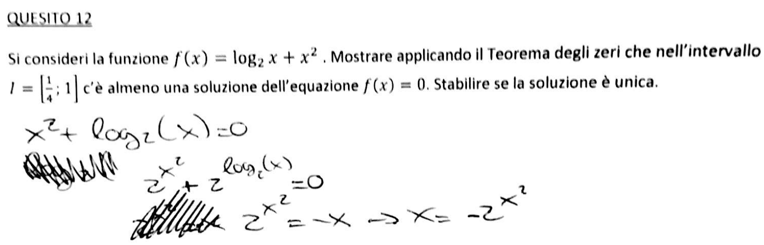
Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

$f(x) = \log_2 x + x^2 \qquad I = \left[\frac{1}{4} ; 1\right]$

$f(x) = 0 \Rightarrow \log_2 x + x^2 = 0 \Rightarrow \nexists x$

Figura 3.39: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

Per gli studenti del Potenziato invece, su diciotto sette hanno dato una risposta corretta dimostrando l'unicità della soluzione o graficamente o per la monotonia della funzione, otto studenti hanno verificato che il teorema è applicabile, uno ha lasciato il quesito incompleto e due non lo hanno svolto. Devo dire che nella media il quesito è andato meglio per gli studenti dell'indirizzo sperimentale del Liceo e sicuramente questo è dovuto al fatto che i ragazzi sono stati abituati ad applicare i teoremi e non solo a studiarli teoricamente, a disegnare i grafici per studiare particolari equazioni; infatti, a differenza loro, molti studenti dell'indirizzo Tradizionale si sono cimentati nel tentativo di risolvere algebricamente $\log_2 x = -x^2$ senza giungere ad una conclusione, spesso commettendo errori grossolani.


QUESITO 12

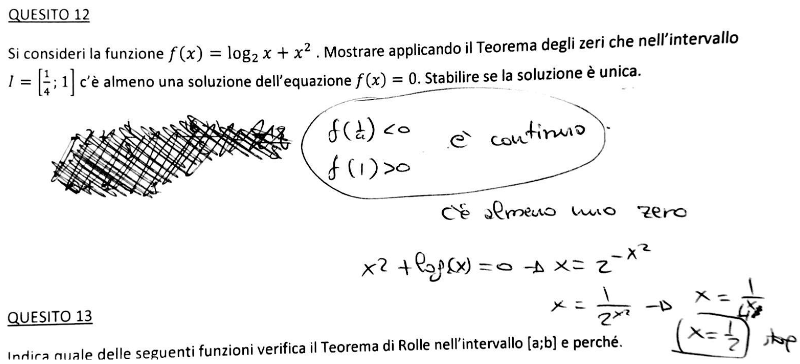
Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

$x^2 + \log_2(x) = 0$

$2^{x^2} + 2^{\log_2(x)} = 0$

$2^{x^2} = -x \rightarrow x = -2^{x^2}$

Figura 3.40: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale



QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

$f(\frac{1}{4}) < 0$ è continua

$f(1) > 0$

c'è almeno uno zero

$x^2 + \log_2(x) = 0 \to x = 2^{-x^2}$

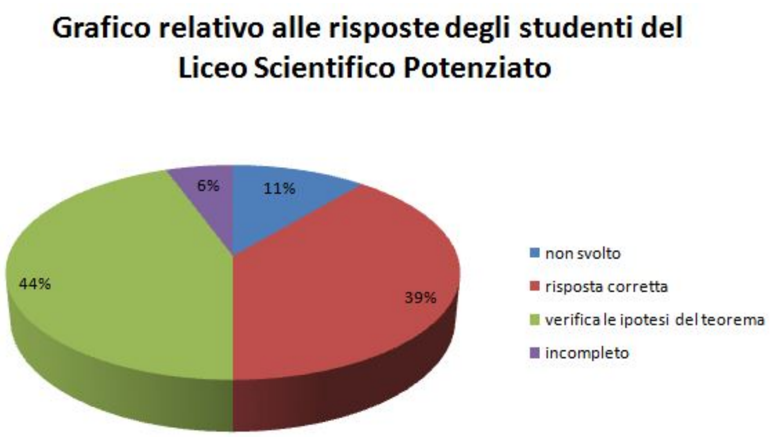
$x = \frac{1}{2^{x^2}} \to x = \frac{1}{\sqrt{x}}$

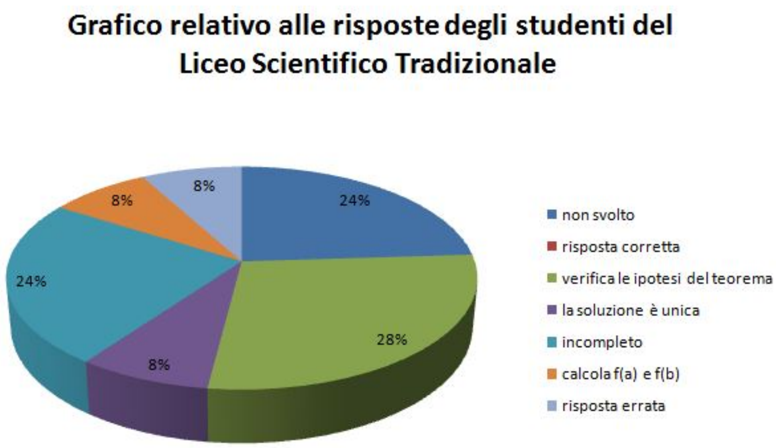
$\boxed{x = \frac{1}{2}}$ stop

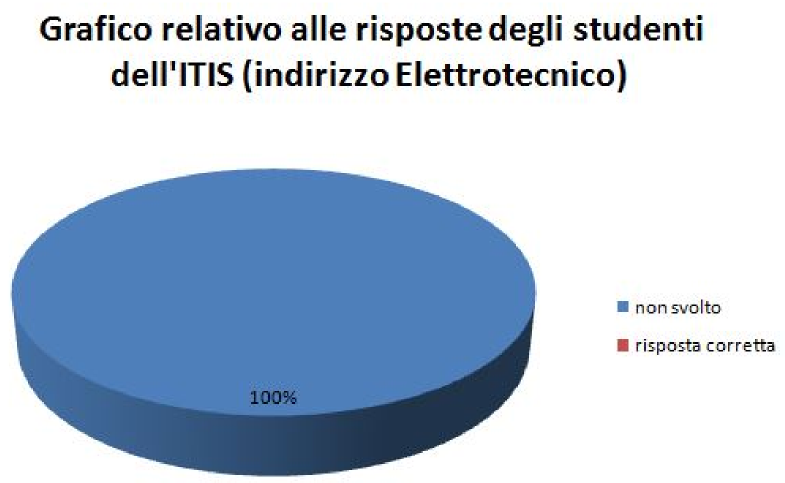
QUESITO 13

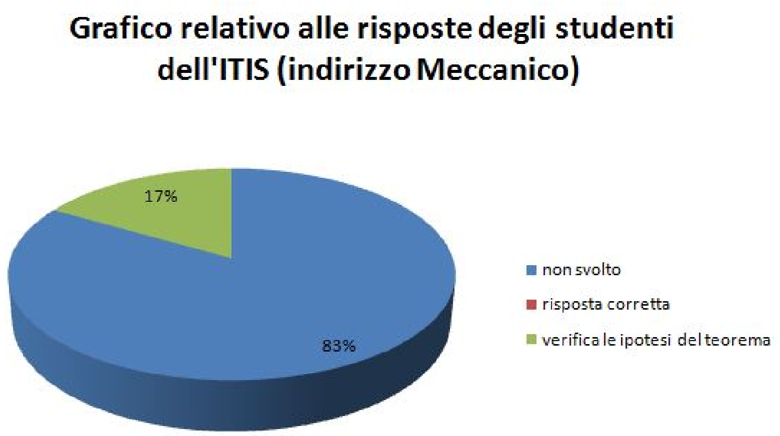
Indica quale delle seguenti funzioni verifica il Teorema di Rolle nell'intervallo [a;b] e perché.

Figura 3.41: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale









3.13 Quesito 13

Indica quale delle seguenti funzioni verifica le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[a; b]$ e perché. Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.

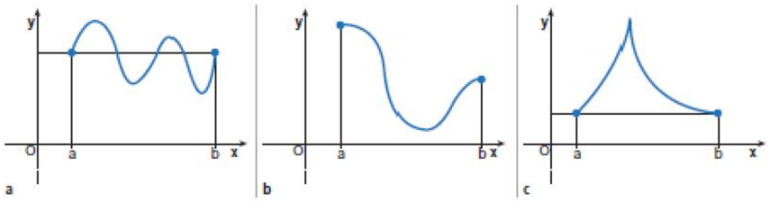


Figura 3.42:

Soluzione. La funzione che verifica le ipotesi del Teorema di Rolle è quella rappresentata in "a"; infatti la funzione è continua in $[a; b]$ ed $f(a) = f(b)$. I punti in cui si verifica la relazione del teorema sono quelli che presentano una tangente orizzontale.

Indirettamente il quesito faceva due richieste: verificare quale dei tre grafici rappresentava il Teorema di Rolle e segnare poi i punti che soddisfavano la tesi del teorema.
Sono stati in pochi gli studenti che hanno risposto ad entrambe le domande, molti hanno solo indicato quale fosse il grafico in cui era applicabile il teorema e non hanno segnato i punti, altri hanno sbagliato ad individuare i punti, e tra questi c'è chi ha segnato i flessi o chi gli estremi dell'intervallo:

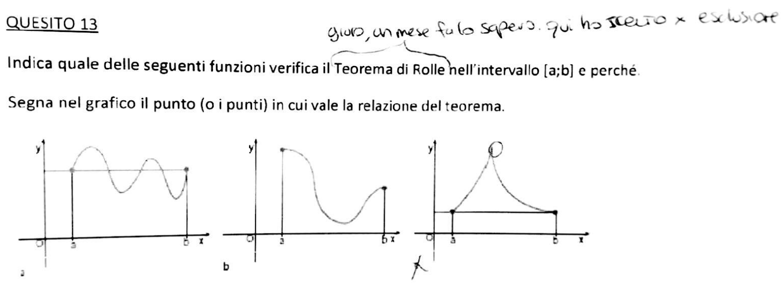
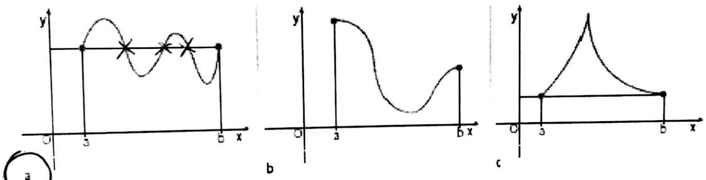


Figura 3.43: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

QUESITO 13

Indica quale delle seguenti funzioni verifica il Teorema di Rolle nell'intervallo [a;b] e perché.

Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.



a

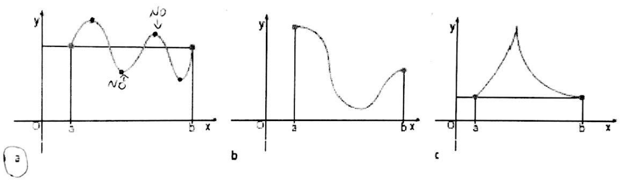
- continua su [a,b]
- derivabile puntualmente su]a,b[
$f(a) = f(b)$

Figura 3.44: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

QUESITO 13

Indica quale delle seguenti funzioni verifica il Teorema di Rolle nell'intervallo [a;b] e perché.

Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.



a

la funzione è continua/derivabile in tutti i punti dell'intervallo e ci sono punti di max e di min assoluti

Figura 3.45: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

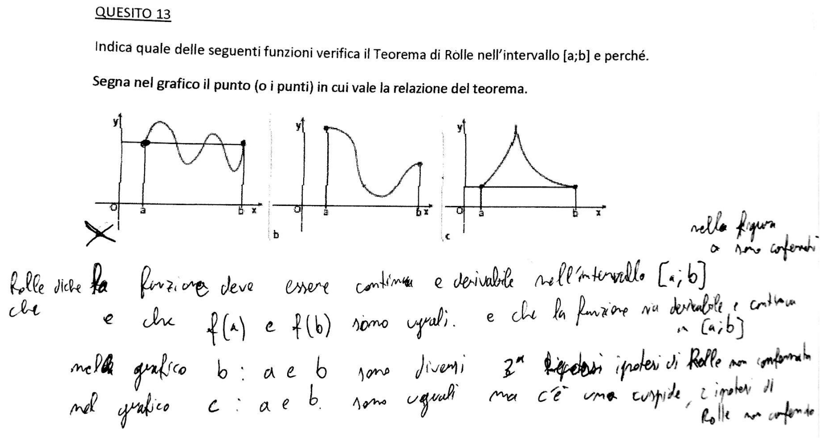


Figura 3.46: Risposta studente ITIS

Sostanziali sono le differenze tra le due scuole e, a loro volta, tra le due classi delle rispettive scuole; infatti, gli studenti della classe sperimentale del Liceo Scientifico hanno risposto tutti correttamente di cui sei però non hanno segnato i punti sul grafico; per gli studenti dell'indirizzo Tradizionale, invece, su venticinque ce ne sono stati diciassette che hanno risposto correttamente tra chi ha segnato i punti e chi no, quattro studenti non hanno svolto l'esercizio, tre hanno sbagliato ad individuare i punti e uno ha sbagliato risposta. Per le classi dell'ITIS, sono stati pochi coloro che hanno svolto l'esercizio; nella classe di indirizzo Elettrotecnico su tredici solo in tre hanno risposto correttamente di cui due non hanno segnato i punti; per la classe di indirizzo Meccanico su diciotto, invece, undici hanno risposto correttamente, e tra questi, sei non hanno individuato i punti sul grafico, poi cinque studenti non hanno svolto l'esercizio.

Si può dedurre che il Teorema di Rolle è stato studiato, molti hanno anche riportato le ipotesi del teorema, pero la maggior parte non ha ben compreso cosa volesse significare la relazione del teorema $f'(c) = 0$, ovvero che i punti che soddisfano tale relazioni sono punti a tangente orizzontale e quindi non hanno colto il significato del teorema di cui ricordano l'enunciato a memoria.

Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Potenziato

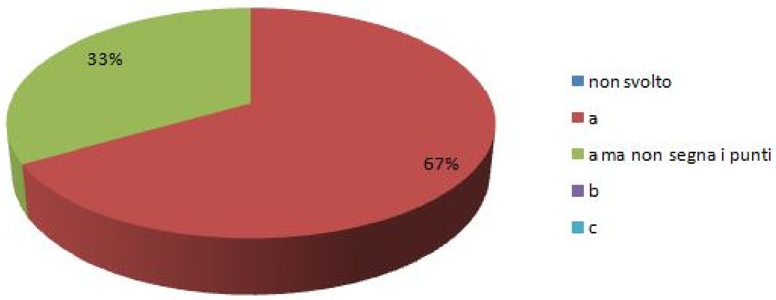
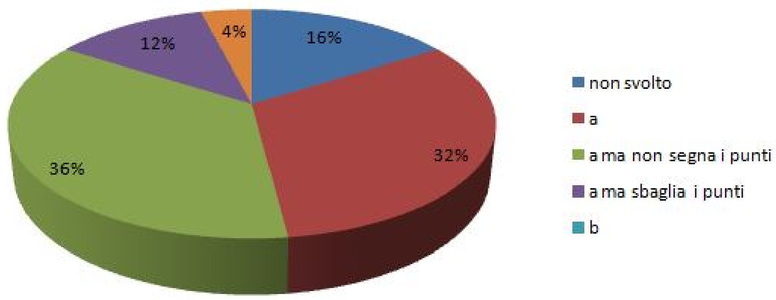
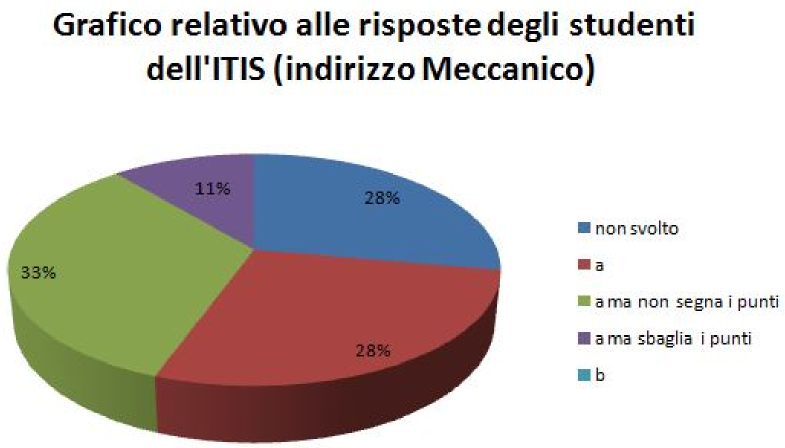
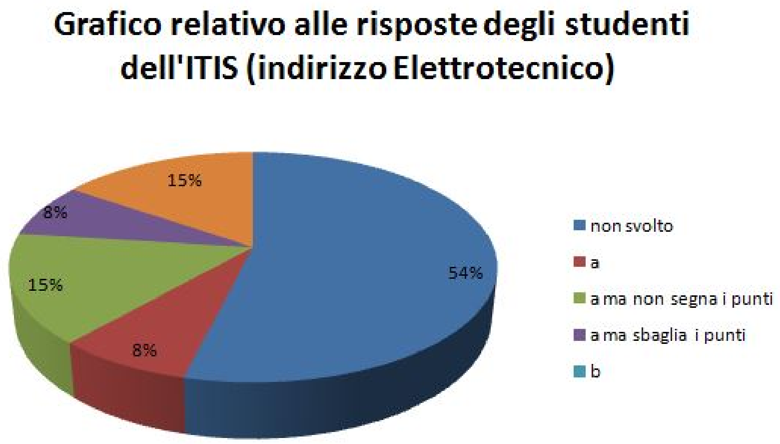


Grafico relativo alle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale







3.14 Quesito 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

Soluzione. La funzione f è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) = 0 \text{ per ogni } x \neq 0.$$

Non si può tuttavia concludere che f sia una funzione costante poichè $\mathbb{R}-\{0\}$ non è un intervallo, quindi non è applicabile il Teorema 2.2.11. Si può però affermare che f è costante in ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ in cui il teorema è applicabile. Per sapere quanto valgono le costanti basta calcolare il valore di f in un "punto comodo"; per esempio:

$$f(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$f(-1) = \arctan -1 + \arctan -1 = \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}\ .$$

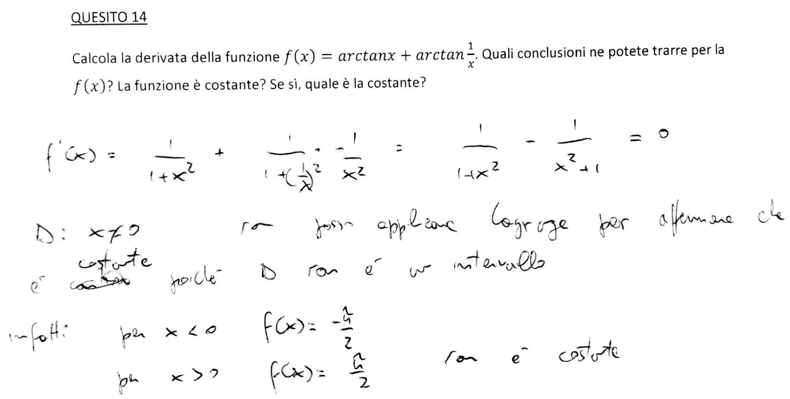
Dunque,

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & x < 0 \end{cases}.$$

Per quest'ultimo quesito le risposte degli studenti sono state abbastanza differenti; in particolar modo la differenza tra le due scuole è stata che gli studenti dell'ITIS hanno calcolato la derivata della funzione senza dedurre nulla, invece gli studenti del Liceo hanno provato a dire qualcosa in più riguardo questa funzione che ha derivata nulla. Le risposte sono state le seguenti:

- $f'(x) = 0$, quindi la funzione è costante e $k = 0$;

- non è possibile applicare il Teorema di Lagrange o la prima conseguenza di tale teorema per affermare che la funzione è costante perchè il suo dominio $D = \mathbb{R} - \ 0$ non è un intervallo (nonostante lo studente in questione calcola il valore delle costanti);



QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$

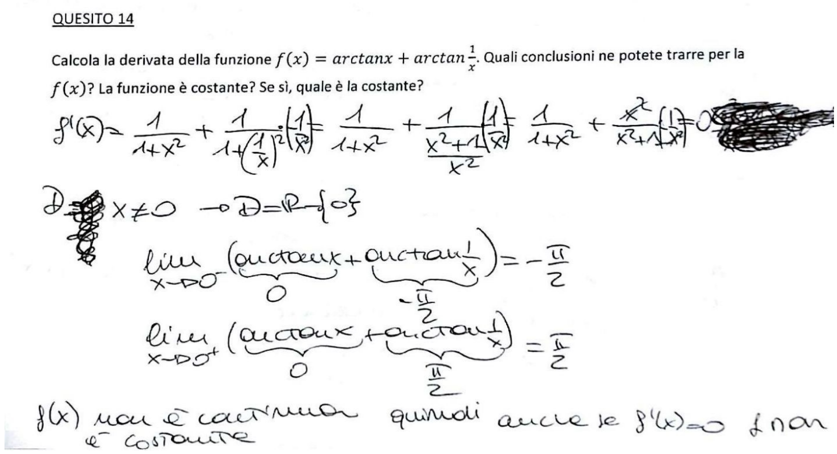
D: $x \neq 0$ non posso applicare Lagrange per affermare che è costante poiché D non è un intervallo

infatti: per $x < 0$ $f(x) = -\frac{\pi}{2}$

per $x > 0$ $f(x) = \frac{\pi}{2}$ non è costante

Figura 3.47: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

- pur se la funzione ha derivata nulla, non è costante perchè non è continua in $x = 0$.



QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

D: $x \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

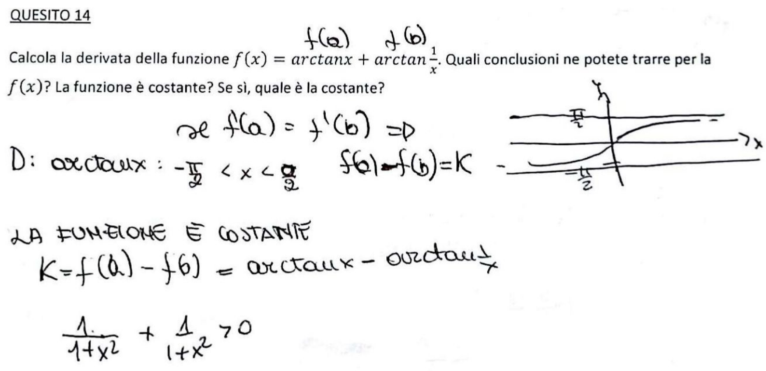
$\lim_{x \to 0^-} (\underbrace{arctan x}_{0} + \underbrace{arctan \frac{1}{x}}_{-\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 0^+} (\underbrace{arctan x}_{0} + \underbrace{arctan \frac{1}{x}}_{\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2}$

$f(x)$ non è continua quindi anche se $f'(x) = 0$ f non è costante

Figura 3.48: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato

Vediamo altre risposte significative:



QUESITO 14

$f(a)$ $f(b)$

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

se $f(a) = f'(b) \Rightarrow$

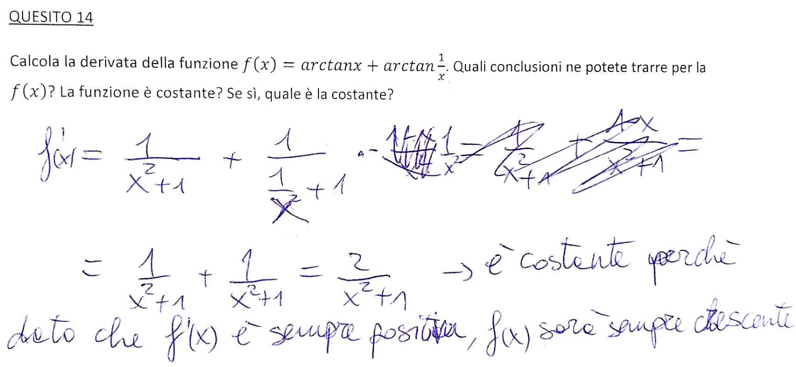
D: arctanx : $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $f(a)-f(b)=K$

LA FUNZIONE È COSTANTE

$K = f(a) - f(b) = arctanx - arctan\frac{1}{x}$

$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0$

Figura 3.49: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato



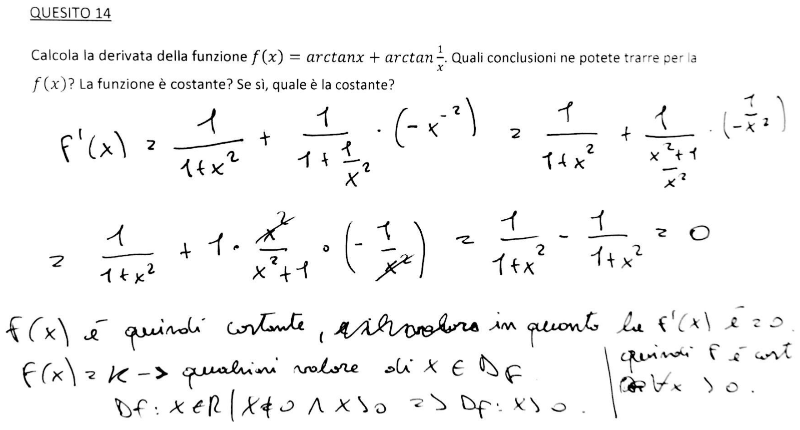
QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \cdot$

$= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1}$ → è costante perchè dato che $f'(x)$ è sempre positiva, $f(x)$ sarà sempre crescente

Figura 3.50: Risposta studente Liceo Scientifico Potenziato



QUESITO 14

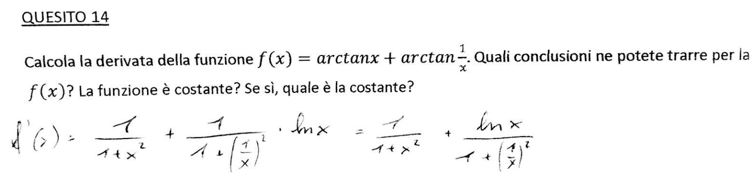
Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + 1 \cdot \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$f(x)$ è quindi costante, in quanto la $f'(x)$ è $=0$.
$f(x) = K \rightarrow$ qualsiasi valore di $x \in D_f$ | quindi f è cost
$D_f: x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \wedge x > 0 \Rightarrow D_f: x > 0$. | $\forall x > 0$.

Figura 3.51: Risposta studente Liceo Scientifico Tradizionale

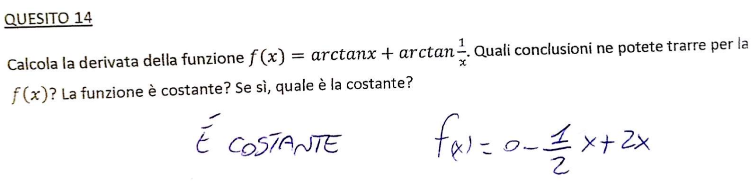


QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \ln x = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\ln x}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Figura 3.52: Risposta studente ITIS (Meccanico)



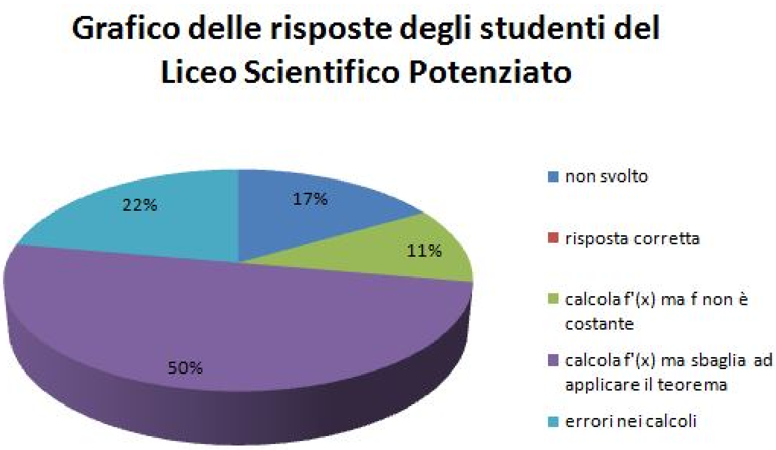
QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

É COSTANTE $f(x) = 0 - \frac{1}{2}x + 2x$

Figura 3.53: Risposta studente ITIS (Meccanico)

Sono stati sorprendenti i risultati degli studenti dell'indirizzo Potenziato: durante questo lavoro di tesi sperimentale, ho seguito le lezioni in questa classe e il quesito proposto è stato presentato loro come esempio dall'insegnante dopo aver spiegato la prima conseguenza del teorema di Lagrange; poi, un esercizio del tutto analogo gli è stato proposto nella verifica fatta pochi giorni prima del questionario e anche lì hanno trovato difficoltà; infatti, è venuto fuori che per la maggior parte di loro non era ben chiaro che il dominio $\mathbb{R} - \{0\}$, non essendo un intervallo, fosse possibile spezzarlo in intervalli in cui la funzione risulta continua e costante.
Dalle risposte degli studenti dell'ITIS, si evince come loro sono abituati alle tecniche di calcolo; infatti, hanno calolato solo la derivata della funzione.



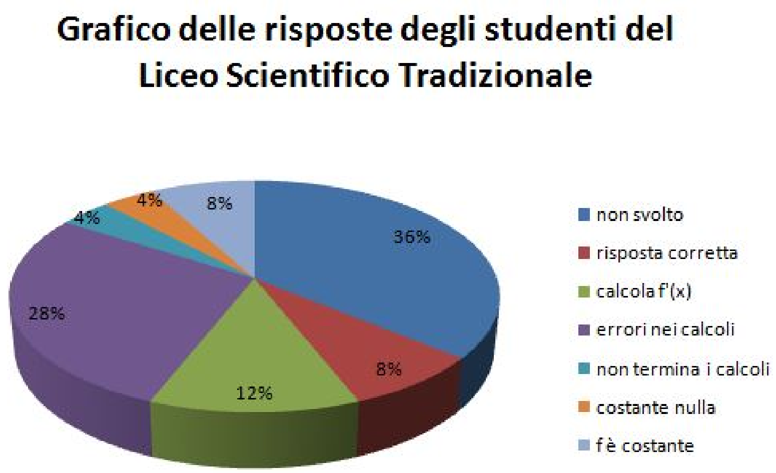


Grafico delle risposte degli studenti del Liceo Scientifico Tradizionale
36%
8%
12%
28%
4%
4%
8%
non svolto
risposta corretta
calcola f'(x)
errori nei calcoli
non termina i calcoli
costante nulla
f è costante

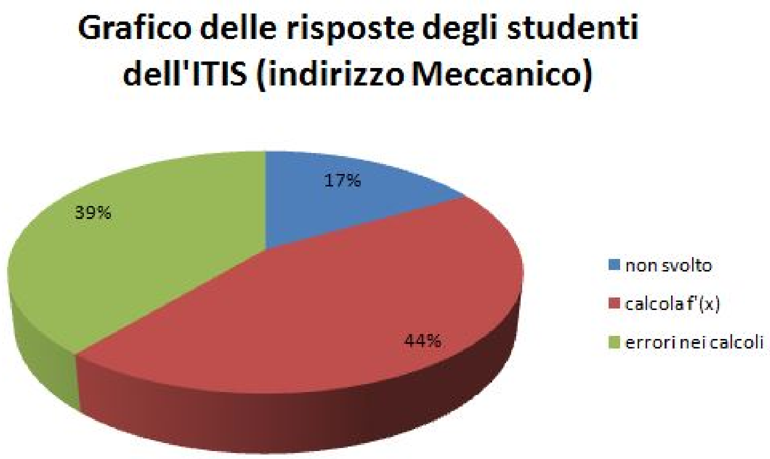


Grafico delle risposte degli studenti dell'ITIS (indirizzo Meccanico)
17%
44%
39%
non svolto
calcola f'(x)
errori nei calcoli

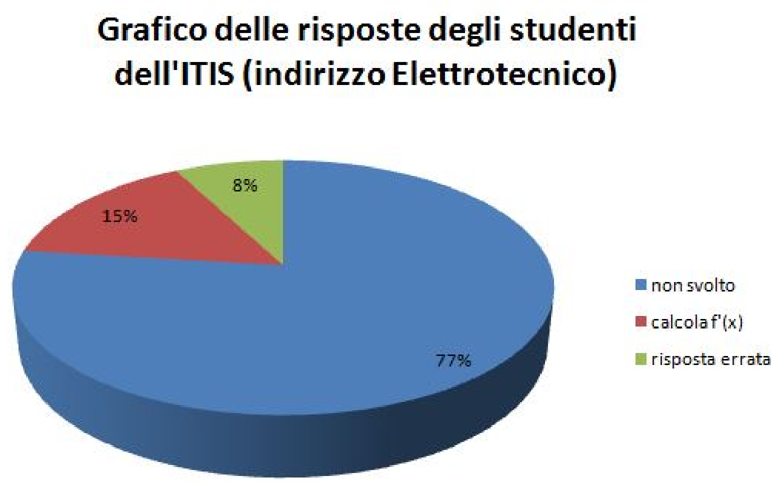


Grafico delle risposte degli studenti dell'ITIS (indirizzo Elettrotecnico)
8%
15%
77%
non svolto
calcola f'(x)
risposta errata

Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro di tesi sperimentale è stato quello di analizzare le difficoltà legate all'insegnamento dell'Analisi Matematica, tenendo in considerazione i diversi aspetti del percorso formativo compiuto dagli studenti. Vi sono ostacoli legati alla complessità dei concetti matematici che accomunano tutti gli studenti. In particolare, è emerso come le maggiori difficoltà non risiedano nel calcolo o nelle applicazioni di procedimenti matematici standard, ma nella reale comprensione del concetto. È su questo difficile obiettivo che si deve quindi concentrare l'azione didattica, al fine di apportare un significativo contributo nell'acquisizione di competenza da parte dell'allievo.
Il Test a cui sono stati sottoposti gli studenti delle due diverse scuole comprendeva appositamente quesiti sia teorici che pratici in quanto, come è poi emerso dall'analisi delle risposte, mi aspettavo una differente preparazione degli studenti per la teoria e per la pratica.
Per quanto riguarda la parte di teoria possiamo dire sicuramente che all' Istituto Tecnico gli insegnanti si sono limitati a presentare o a dare maggiore importanza soltanto ai teoremi fondamentali dell'analisi matematica; infatti, abbiamo visto che alcuni quesiti teorici non sono stati proprio svolti dagli studenti dell'ITIS perchè non erano a conoscenza di alcuni teoremi. Per quanto riguarda, invece, i teoremi fondamentali possiamo dire che la preparazione tra gli studenti dell'Istituto Tecnico e gli studenti del Liceo Scientifico di indirizzo Tradizionale è quasi allo stesso livello. Sicuramente diversa è la formazione degli studenti del Liceo Scientifico Potenziato: dalle loro risposte

è emerso, infatti, che sono stati abituati non solo a imparare a memoria definizioni, enunciati, ipotesi e tesi dei teoremi, ma a capire il vero significato dei concetti teorici, delle relazioni espresse dai teoremi in modo poi da essere in grado di saper applicare la teoria alla pratica.
Riguardo la parte pratica, invece, per la risoluzione di esercizi standard in cui bisogna far uso delle tecniche di calcolo studiate la preparazione degli studenti delle due diverse scuole è la stessa, anzi sicuramente all'ITIS ci si sofferma di più su questo aspetto; la differenza è che gli studenti del Liceo sono abituati anche ad esercizi in cui ci sono richieste più complesse dove non sempre si applicano gli stessi tecnicismi. Questo aspetto è confermato anche dalle Indicazioni Nazionali per i Licei Scientifici, riportate nel capitolo precedente:
Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.
È naturale che scuole diverse attuino strategie didattiche differenti, ma per evitare che si presentino risultati così discordanti tra domande teoriche e pratiche, un insegnamento dovrebbe comprendere sia l'illustrazione dei teoremi fondamentali e delle relative dimostrazioni, sia le loro applicazioni. Questi due processi-di dimostrazione e di applicazione-dovrebbero procedere quasi contemporaneamente. Per assicurarsi la memorizzazione e soprattutto la comprensione da parte degli studenti dei teoremi è necessario infatti evidenziare in maniera chiara come essi vengano applicati nella risoluzione degli esercizi e presentare svariati esempi. È solo attraverso la pratica, infatti, che lo studente riesce a interiorizzare i concetti; questi ultimi se introdotti come fine a se stessi e mai utilizzati vengono memorizzati pedissequamente nell'immediato e poi presto dimenticati. Pertanto, il modo ottimale di proce-

dere sarebbe-nei limiti del possibile-dimostrare tutto ciò che viene utilizzato e viceversa utilizzare tutto ciò che viene dimostrato. Solo un'integrazione di tutti gli aspetti della disciplina può fornire un'immagine autentica e completa, e favorirne di conseguenza un approfondimento valido e approfondito.
Inoltre, nell'insegnamento bisogna prestare attenzione a non compiere eccessive semplificazioni che rischiano da un lato di sminuire l'importanza e la bellezza della materia, e dall'altro creano dei punti di discontinuità nel percorso scolastico. Questi ultimi possono in futuro compromettere il corretto apprendimento per coloro che intendono proseguire gli studi in ambito universitario. Il rischio è quello che lo studente si costruisca prematuramente un modello stabile, inadeguato per descrivere il concetto matematico. Tali modelli risultano, in seguito, difficili da modificare o abbattere; di conseguenza è preferibile a volte limitarsi a immagini generali, che possano essere facilmente ampliate per accogliere al loro interno una più ampia varietà di significati.
La matematica è una scienza complessa, costituita da una molteplicità di aspetti interessanti e significativi che si intrecciano tra di loro formando concetti più ampi e ricchi di spessore.
Un valido insegnamento deve quindi essere in grado di rispecchiare tutte le sue molteplici sfaccettature, senza trascurare le peculiarità di ogni singolo studente.

Appendice A

Allegato: Questionario

QUESTIONARIO

QUESITO 1

Quante intersezioni può avere il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con l'asse delle ordinate? Motivare la risposta.

QUESITO 2

Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(3-5x)}$. Determinarne il Dominio.

QUESITO 3

Sia $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Scrivere l'espressione di $f(3-2x)$.

QUESITO 4

Il limite della funzione $\frac{\sin x - \cos x}{x}$, quando $x \to +\infty$, è

a. 0
b. 1
c. Un valore diverso dai precedenti
d. Non è determinato

Motivare la risposta.

QUESITO 5

Si consideri la funzione $f(x) = \frac{2x+\sin x}{2x-\cos x}$. Stabilire se si può calcolare il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al Teorema di De L'Hôpital.

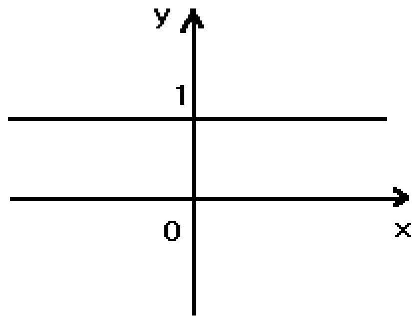
QUESITO 6

Il Teorema di Fermat afferma che:

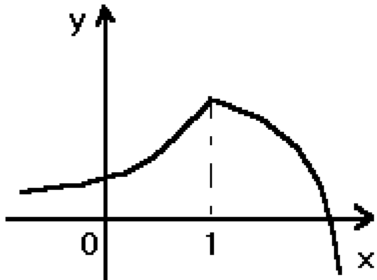
se f è una funzione derivabile nel suo dominio, x_0 è un punto interno al dominio ed è punto di minimo o di massimo per f , allora $f'(x_0) = 0$.

È noto che non vale il "teorema inverso", cioè, da $f'(x_0) = 0$ non segue necessariamente che x_0 sia un punto di minimo o massimo per f . 100

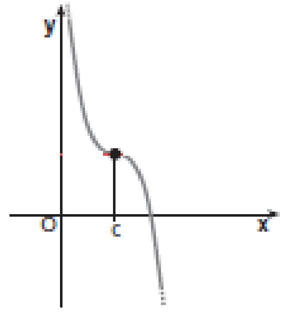
Quale dei seguenti grafici illustra questo fatto?



a.



b.



c.

<u>QUESITO 7</u>

La funzione $f(x) = \ln x - x$ soddisfa nell'intervallo [1; e] le ipotesi del teorema di Lagrange. Trovare i punti che soddisfano la tesi di tale teorema.

<u>QUESITO 8</u>

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x + x$ è positiva in tutto il dominio di f. Dedurre che f è invertibile nel suo dominio dandone una spiegazione.

<u>QUESITO 9</u>

Verificare che la derivata di $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ è positiva in tutto il dominio di f. Notare che, tuttavia, f non è invertibile nell'intero dominio. Dare una motivazione, spiegando quali sono le ragioni per le quali si giunge qui a una conclusione opposta rispetto a quella del QUESITO 8.

<u>QUESITO 10</u>

Considera la seguente funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - x & se \;\; x \in [0,1] \\ x & se \;\; x \in [-1,0[\end{cases}$.

Dire se f ha massimo o minimo. Ciò contraddice il Teorema di Weierstrass?

<u>QUESITO 11</u>

La carica che attraversa la sezione di un conduttore è espressa in funzione del tempo dalla funzione $q(t) = 3e^{-t}(\sin t + \cos t)$. Determina l'intensità della corrente in funzione del tempo.

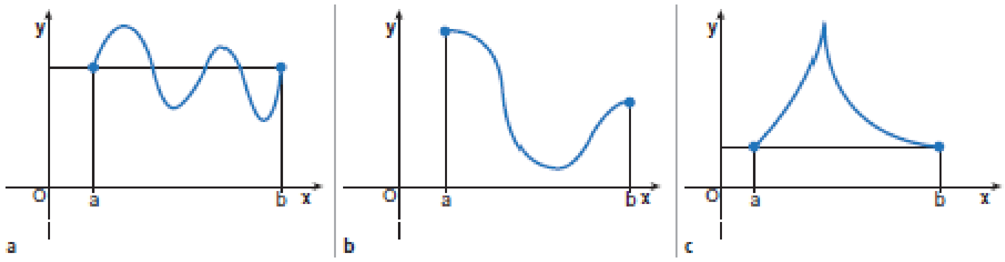
QUESITO 12

Si consideri la funzione $f(x) = \log_2 x + x^2$. Mostrare applicando il Teorema degli zeri che nell'intervallo $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ c'è almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Stabilire se la soluzione è unica.

QUESITO 13

Indica quale delle seguenti funzioni verifica il Teorema di Rolle nell'intervallo [a;b] e perché.

Segna nel grafico il punto (o i punti) in cui vale la relazione del teorema.



QUESITO 14

Calcola la derivata della funzione $f(x) = arctanx + arctan\frac{1}{x}$. Quali conclusioni ne potete trarre per la $f(x)$? La funzione è costante? Se sì, quale è la costante?

Bibliografia

[1] Battaia L - Suppia E., *MATEMATICA ALLA MATURITÀ, Tracce dei temi assegnati agli esami di stato di Liceo Scientifico*, consultato in www.batmath.it - www.rotupitti.it.

[2] Brousseau G., *Fondements et métodhes de la didactique des Mathématiques*, 1986.

[3] Brousseau G., *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica. Scritti scelti a cura di Bruno D'Amore*, Pitagora Editrice, Bologna 2008.

[4] Chevallard Y., *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, 1985.

[5] D'Amore B., *Elemnti di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna 1999.

[6] MIUR, 2010, *Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 Marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.*

[7] Sasso L., *Nuova Matematica a colori*, Petrini, 2012.