ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica curriculum Didattico

Comprensione delle frazioni, dei decimali e loro rappresentazione sulla retta: caso studio in studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento

Tesi di Laurea in
Didattica e Pedagogia Speciale

Relatrice:
Chiar.ma Prof.ssa
MANUELA FABBRI

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
CRISTINA ASCIONE

Sessione Unica
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Prefazione

Argomento della tesi è la comprensione delle frazioni, dei decimali e la loro rappresentazione sulla retta da parte di studenti con discalculia.
La discalculia rientra nei Disturbi Specifici di Apprendimento (DSA) ed è caratterizzata da deficit nell'apprendimento dei numeri e del calcolo.
In particolar modo per questi studenti l'argomento dei numeri razionali risulta di difficile comprensione in quanto richiede un maggiore sforzo concettuale. L'apprendimento di questo argomento inoltre è di cruciale importanza per il miglioramento della comprensione di nozioni matematiche future.
Si è scelto di descrivere due casi studio in cui a ciascuna discente è stata proposta un'unità didattica strutturata in quattro lezioni che mira a potenziare l'apprendimento delle frazioni, dei decimali e la loro rappresentazione sulla retta.
Le due studentesse frequentano una la classe prima e l'altra la classe terza della scuola secondaria di primo grado. Entrambe presentano un DSA, precisamente discalculia e frequentano la Cooperativa Anastasis.
La Cooperativa Anastasis è una software house e un centro di formazione che lavora con persone con bisogni educativi speciali (BES) e disabilità (www.anastasis.it).
L'unità didattica è stata progettata in collaborazione con la Dott.ssa Galletti, psicologa dei Laboratori Anastasis e la Dott.ssa del Zozzo, ricercatrice presso tale centro.
Essa può essere rivolta a tutti i discenti ma può risultare particolarmente utile a quelli con DSA.
Nei casi studio verrà valutata l'effettiva efficacia di tale unità didattica nel miglioramento dell'apprendimento delle nozioni relative ai numeri razionali.

Capitolo 1

Disturbi Specifici di Apprendimento

I *Disturbi Specifici di Apprendimento* (DSA) rappresentano un gruppo di disturbi che si manifestano attraverso le difficoltà di acquisizione ed utilizzo di abilità inerenti la scrittura, la lettura o il calcolo. Tali disturbi comportano nei discenti alcune problematiche sia nello sviluppo cognitivo sia nell'apprendimento scolastico e vengono definiti "*sulla base del mancato raggiungimento di criteri attesi di apprendimento rispetto alle potenzialità generali del soggetto*" (Cornoldi, 1999, 2007).
I DSA sono di origine neurobiologica e coinvolgono specifiche aree cerebrali (accordo della comunità scientifica a livello internazionale).

1.1 Classificazioni

La Classificazione Internazionale ICD-10 dell'Organizzazione mondiale della sanità (1990) definisce i DSA tramite la sigla F81 (Disturbi evolutivi specifici delle abilità scolastiche) come segue: "*Questi sono disturbi nei quali le modalità normali di acquisizione delle capacità in questione sono alterate già dalle fasi iniziali dello sviluppo. Essi non sono semplicemente una conseguenza di una mancanza delle opportunità di apprendere o di un ritardo mentale, e non sono dovuti ad un trauma o ad una malattia cerebrale acquisita*".
Secondo questa classificazione vengono suddivisi in:

- **F81.0 Disturbo specifico della lettura**
  "*La principale caratteristica di questo disturbo è una specifica e significativa compromissione nello sviluppo delle capacità di lettura, che non è spiegata solamente dall'età mentale, da problemi di acutezza visiva o da inadeguata istruzione scolastica. La capacità di comprensione della lettura, il riconoscimento della parola nella lettura, la capacità di leggere ad alta voce e le prestazioni nei compiti che richiedono la lettura possono essere tutti interessati. Difficoltà nella compitazione sono frequentemente associate con il disturbo specifico della lettura e spesso*

persistono nell'adolescenza anche dopo che qualche progresso è stato fatto nella lettura. I disturbi specifici della lettura frequentemente sono preceduti da una storia di disturbi evolutivi specifici dell'eloquio e del linguaggio. Disturbi emozionali e comportamentali associati sono anche comuni durante il periodo dell'età scolare".

- **F81.1 Disturbo specifico della compitazione**
  "*La principale caratteristica di questo disturbo è una specifica e rilevante compromissione nello sviluppo delle capacità di compitazione, in assenza di una storia di disturbo specifico della lettura e non solamente spiegata da una ridotta età mentale, da problemi di acutezza visiva o da inadeguata istruzione scolastica. L'abilità a compitare oralmente ed a trascrivere correttamente le parole sono entrambe interessate*".

- **F81.2 Disturbo specifico delle abilità aritmetiche**
  "*Questo disturbo implica una specifica compromissione delle abilità aritmetiche che non è solamente spiegabile in base ad un ritardo mentale globale o ad un'istruzione scolastica inadeguata. Il deficit riguarda la padronanza delle capacità di calcolo fondamentali , come addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, piuttosto che delle capacità di calcolo matematico più astratto coinvolte nell'algebra, nella trigonometria o nella geometria*".

- **F81.3 Disturbo misto delle capacità scolastiche**
  "*Questa è una categoria residua mal definita, inadeguatamente concettualizzata (ma necessaria) comprendente i disturbi nei quali sono significativamente compromesse sia le funzioni aritmetiche sia quelle di lettura o di compitazione, ma nei quali il quadro non è solamente spiegabile come conseguenza di un ritardo mentale globale o di un'istruzione scolastica inadeguata. Essa si deve usare per i disturbi che soddisfano i criteri per F81.2 e inoltre per F81.0 o F81.1*".

L'American Psychiatric Association (1994) presenta nell'Asse I del Manuale Diagnostico e Statistico dei Disturbi Mentali, IV edizione (DSM-IV) le caratteristiche diagnostiche relative ai Disturbi dell'Apprendimento come segue:

- **Disturbo della Lettura/Calcolo/Espressione Scritta:**

  - "*il livello raggiunto nella lettura/calcolo/espressione scritta, come misurato da test standardizzati, è al di sotto in base a quanto previsto in base all'età cronologica del soggetto, alla valutazione psicometrica dell'intelligenza e a un'istruzione adeguata all'età;*
  - *l'anomalia interferisce significativamente con l'apprendimento scolastico e con le attività della vita quotidiana;*
  - *difficoltà di lettura maggiori di quelle date da un deficit sensoriale*".

- **Disturbo dell'Apprendimento Non Altrimenti Specificato:** "*questa categoria è per i disturbi dell'apprendimento che non soddisfano i criteri per alcun Disturbo dell'Apprendimento Specifico. Può includere problemi in tutte le 3 aree (lettura, calcolo ed espressione scritta) che interferiscono in modo significativo nell'apprendimento scolastico, anche se la prestazione al test che valuta ogni singola capacità, non è sostanzialmente al di sotto di quanto previsto in base all'età cronologica del soggetto, alla valutazione psicometrica dell'intelligenza e all'istruzione adeguata all'età*".

Inoltre classifica tali disturbi nel modo seguente:

- *315.00 – Disturbo della lettura*
- *315.01 – Disturbi nell'apprendimento della matematica*
- *315.02 – Disturbo dell'espressione scritta*
- *315.04 – Disturbo evolutivo della coordinazione*
- *315.09 – Disturbo dell'apprendimento non altrimenti specificato*
- *315.31 – Disturbo del linguaggio espressivo o misto recettivoespressivo*
- *315.39 – Disturbo fonologico*

In Italia il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR) definisce nelle Linee Guida per il Diritto allo Studio degli Alunni e degli Studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento (MIUR, 2011) (allegate al Decreto Ministeriale 12 luglio 2011) i DSA mediante una specifica denominazione volta ad esplicitare l'abilità interessata dal disturbo. Precisamente:

- "*la **dislessia** si manifesta attraverso una minore correttezza e rapidità della lettura a voce alta rispetto a quanto atteso per età anagrafica, classe frequentata, istruzione ricevuta. Risultano più o meno deficitarie - a seconda del profilo del disturbo in base all'età - la lettura di lettere, di parole e non-parole, di brani;*
- *il disturbo specifico di scrittura si definisce **disgrafia** o **disortografia**, a seconda che interessi rispettivamente la grafia o l'ortografia. La disgrafia fa riferimento al controllo degli aspetti grafici, formali, della scrittura manuale, ed è collegata al momento motorio-esecutivo della prestazione; la disortografia riguarda invece l'utilizzo, in fase di scrittura, del codice linguistico in quanto tale. La disgrafia si manifesta in una minore fluenza e qualità dell'aspetto grafico della scrittura, la disortografia è all'origine di una minore correttezza del testo scritto; entrambi, naturalmente, sono in rapporto all'età anagrafica dell'alunno. In particolare, la*

disortografia si può definire come un disordine di codifica del testo scritto, che viene fatto risalire ad un deficit di funzionamento delle componenti centrali del processo di scrittura, responsabili della transcodifica del linguaggio orale nel linguaggio scritto;

- *la* ***discalculia*** *riguarda l'abilità di calcolo, sia nella componente dell'organizzazione della cognizione numerica (intelligenza numerica basale), sia in quella delle procedure esecutive e del calcolo. Nel primo ambito, la discalculia interviene sugli elementi basali dell'abilità numerica: il subitizing (o riconoscimento immediato di piccole quantità), i meccanismi di quantificazione, la seriazione, la comparazione, le strategie di composizione e scomposizione di quantità, le strategie di calcolo mentale. Nell'ambito procedurale, invece, la discalculia rende difficoltose le procedure esecutive per lo più implicate nel calcolo scritto: la lettura e scrittura dei numeri, l'incolonnamento, il recupero dei fatti numerici e gli algoritmi del calcolo scritto vero e proprio*".

"*I disturbi sopra descritti possono coesistere in una stessa persona – ciò che tecnicamente si definisce* ***comorbidità***" (Linee Guida per il Diritto allo Studio degli Alunni e degli Studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento, 2011).

1.2 Distinzione tra DSA e difficoltà di apprendimento

È necessario distinguere i Disturbi Specifici di Apprendimento dalle più generali difficoltà di apprendimento ossia da momentanei ritardi nell'apprendimento che possono essere dovuti ad un disagio scolastico o emotivo:

- i DSA si riferiscono ad una precisa categoria diagnostica sia dal punto di vista clinico che scientifico e vengono identificati mediante criteri oggettivi. "*Il principale criterio necessario per effettuare una diagnosi di DSA è quello della "discrepanza" tra abilità nel dominio specifico interessato (lettura, ortografia, grafia, numero, procedure esecutive del numero e calcolo) e l'intelligenza generale. Si affianca a questo la necessità di escludere la presenza di disturbi sensoriali o neurologici gravi e di disturbi significativi della sfera emotiva, ma anche di situazioni ambientali di svantaggio socio-culturale che possono interferire con un'adeguata istruzione*" (Consensus Conference, 2007);

- le difficoltà di apprendimento possono essere di carattere temporaneo e possono consistere in semplici ritardi dell'apprendimento di natura maturativa cioè riconducibili a un'immaturità dei sistemi preposti all'acquisizione delle abilità di lettura, scrittura e calcolo oppure essere dovuti ad una momentanea particolare situazione emotiva.

Il documento elaborato dalla Consensus Conference definisce tale differenza attribuendo ai DSA la caratteristica essenziale di "specificità": ciascun disturbo è riferito in maniera significativa ad uno specifico dominio di abilità ma esso rimane circoscritto lasciando inalterato il funzionamento intellettivo generale (Consensus Conference, 2007).
In definitiva, a differenza dei DSA che manifestano una situazione resistente all'intervento, le difficoltà di apprendimento possono essere migliorate attraverso interventi di recupero che permettono di ottenere i risultati desiderati in tempi brevi.

La diagnosi di dislessia, disgrafia e disortografia può essere fatta alla fine della II classe della scuola primaria mentre la diagnosi di discalculia può essere fatta alla fine della III classe della scuola primaria.

1.3 Didattica e DSA

"*I Disturbi Specifici di Apprendimento hanno una componente evolutiva che comporta la loro manifestazione come ritardo e/o atipia del processo di sviluppo, definito sulla base dell'età anagrafica e della media degli alunni o degli studenti presenti nella classe*" (Linee Guida per il Diritto allo Studio degli Alunni e degli Studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento, 2011).
Per permettere a ciascuno studente con DSA il raggiungimento degli obiettivi di apprendimento previsti è importante favorire una didattica individualizzata e/o personalizzata in quanto ai DSA si accompagna uno stile di apprendimento specifico.
La *didattica individualizzata* pone obiettivi comuni che intende raggiungere attraverso metodologie adatte alle caratteristiche individuali di ciascuno studente permettendo il conseguimento delle competenze fondamentali.
La *didattica personalizzata*, invece, pur utilizzando metodologie individualizzate pone obiettivi diversi agli studenti al fine di sviluppare al meglio le potenzialità di ciascuno e di rafforzare le funzioni non coinvolte nel disturbo.
Allo scopo di permettere una didattica inclusiva, le istituzioni scolastiche redigono il *Piano Didattico Personalizzato.* Si tratta di un documento mediante il quale la scuola specifica gli strumenti compensativi, le misure dispensative, le strategie metodologiche e didattiche e le modalità di valutazione che intende mettere in atto in riferimento a ciascun discente con DSA.
Per strumenti compensativi si intendono strumenti didattici e tecnologici che aiutino e supportino lo studente nelle abilità deficitarie.
Le misure dispensative consentono di non svolgere attività o prestazioni che richiedono le abilità interessate dal disturbo. Lo scopo principale di tali misure è quello di tutelare gli studenti con DSA ed evitare di costringerli ad esperienze umilianti di fronte ai loro compagni di classe. Infatti tali esperienze potrebbero influire negativamente sulla loro autostima e rendere ancora più difficoltoso il loro percorso didattico.

È importante l'impiego di una opportuna strategia metodologica e didattica che consenta a ciascuno studente con DSA di agevolare la loro prestazione attraverso l'utilizzo di mappe concettuali, schemi ed altri mediatori didattici.
Infine, in sede di valutazione, l'alunno con DSA deve poter disporre degli stessi strumenti previsti dal proprio Piano Didattico Personalizzato di cui ha usufruito durante l'anno scolastico. Lo studente deve poter evidenziare il proprio grado di apprendimento senza essere ostacolato dal DSA.

1.4 Legislazione

Nonostante la Costituzione Italiana garantisca ai cittadini pari dignità sociale (art. 3), promuova lo sviluppo della cultura, la ricerca scientifica e tecnica (art. 9) e favorisca una scuola aperta a tutti (art. 34), occorre attendere il 2004 (MIUR, Nota 05/10/2004, prot. n. 4099/A/4, "Iniziative relative alla Dislessia") per poter leggere la prima circolare nazionale che tenga conto delle diagnosi di dislessia: il 5 ottobre, infatti, il MIUR ha fornito indicazioni inerenti alle iniziative da attuare in casi di dislessia. La Nota 1787/2005 (MIUR, Nota 01/03/2005, prot. n. 1787, "Esami di Stato 2004-2005 – Alunni affetti da dislessia") del MIUR relativa agli Esami di Stato rimarca l'attenzione da parte delle Commissioni esaminatrici ad adottare ogni iniziativa che possa ridurre le difficoltà di studenti dislessici.
Viene poi riservata la possibilità a tali studenti di usufruire di tempi più lunghi per lo svolgimento della terza prova dell'Esame di Stato grazie all'Ordinanza Ministeriale 22/2006 (MIUR, O.M. 20/02/2006, n. 22, "Istruzioni e modalità organizzative ed operative per lo svolgimento degli esami di Sato conclusivi dei corsi di studio di istruzione secondaria superiore nelle scuole statali e non statali. Anno scolastico 2005/2006"). Inoltre, tale ordinanza ribadisce come la Commissione d'Esame debba tener conto delle specifiche necessità dei candidati affetti da dislessia e richiede ai Consigli di classe di stilare un documento inerente l'azione educativa e didattica realizzata nell'ultimo anno di corso.
Con l'O.M. 26/2007 (MIUR, O.M. 15/03/2007, n. 26 prot. 2578, "Istruzioni e modalità organizzative ed operative per lo svolgimento degli esami di Stato conclusivi dei corsi di studio di istruzione secondaria superiore nelle scuole statali e non statali. Anno scolastico 2006/2007") viene consentito l'utilizzo di strumenti informatici qualora essi siano stati adoperati per le verifiche in corso d'anno dagli studenti dislessici.
Il termine Disturbi Specifici di Apprendimento appare per la prima volta nella Circolare Ministeriale 28/2007 (MIUR, C.M. 15/03/2007, n.28 prot. 2613, "Esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione nelle scuole statali e paritarie per l'anno scolastico 2006-2007") e nelle Note 4600/2007 (MIUR, Nota 10/05/2007, prot. n. 4600, "Circolare n. 28 del 15 marzo 2007 sull'esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione nelle scuole statali e paritarie per l'a. s. 2006/07. Precisazioni") e 4674/2007 (MIUR, Nota 10/05/2007, prot. 4674, "Disturbi di apprendimento – Indicazioni operative"). In tali

documenti vengono esplicitate le diverse tipologie di DSA (dislessia, disgrafia, discalculia), viene sottolineato come non sia possibile dispensare gli studenti con DSA dalle prove scritte ma viene sollecitato l'utilizzo di strumenti compensativi e misure dispensative in sede d'esame (rifacendosi alle Note 4099/2004 e 1787/2005 sopra citate), viene concesso loro maggior tempo per lo svolgimento delle prove ed inoltre si richiede alle Commissioni esaminatrici di valutare le prove prestando maggior attenzione al contenuto piuttosto che alla forma.
Gli studenti con DSA vengono finalmente tutelati con il Decreto del Presidente della Repubblica 122/2006 (D.P.R. 22/06/2009, n. 122, "Regolamento recante coordinamento delle norme vigenti per la valutazione degli alunni e ulteriori modalità applicative in materia, ai sensi degli articoli 2 e 3 del decreto-legge 1° settembre 2008, n. 137, convertito, con modificazioni, dalla legge 30 ottobre 2008, n. 169") nel quale si prevede l'utilizzo degli strumenti compensativi e delle misure dispensative per la valutazione degli apprendimenti e si specifica come nel diploma di licenza non si farà menzione delle differenti modalità di svolgimento delle prove.
Viene prestata maggiore attenzione agli studenti con DSA nella C.M. 5744/2009 (MIUR, C.M. 28/05/2009, prot. n. 5744, "Anno scolastico 2008/2009 – Esami di Stato per gli studenti affetti da disturbi specifici di apprendimento – DSA") relativa agli Esami di Stato conclusivi del primo e del secondo ciclo di istruzione. Si richiede ai Consigli di classe non solo di valutare con attenzione tali allievi verificando che siano state applicate le consuete misure dispensative e l'utilizzo degli strumenti compensativi ma anche e soprattutto di verificare che siano stati predisposti percorsi personalizzati.
L'8 ottobre 2010 viene approvata dal Parlamento la legge 170 (L. 08/10/2010, n. 170, "Nuove norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico"). Questa legge, completamente dedicata ai DSA, riconosce la dislessia, la disgrafia, la disortografia e la discalculia come Disturbi Specifici di Apprendimento evidenziando la necessità di tutela degli studenti che presentano tali disturbi in ambito scolastico, sociale e lavorativo. I ragazzi con DSA vengono riconosciuti come alunni aventi caratteristiche che limitano l'apprendimento e pertanto aventi diritto a ricevere un'offerta didattica personalizzata e individualizzata, adoperando misure dispensative e strumenti compensativi al fine di valorizzare le potenzialità di ciascuno. Inoltre la legge prescrive specifiche forme di valutazione anche in sede di Esame di Stato.
Con l'entrata in vigore del D.M. 5669/2011 (D.M. 12/07/2011, n. 5669, "Disposizioni attuative della legge 8/10/2010") vengono ritenute non più applicabili le disposizioni della C.M. 28/2007 e della Nota 4674/2007 e vengono esplicitate le modalità di formazione dei docenti e dirigenti scolastici, le misure educative e didattiche volte a garantire un corretto processo di insegnamento e apprendimento e le forme di verifica e di valutazione che devono consentire all'alunno con DSA di dimostrare il livello di apprendimento raggiunto. Tale D.M. garantisce una didattica personalizzata e individualizzata attraverso la redazione da parte della scuola di un Piano Didattico Personalizzato nel quale vengono indicati gli strumenti compensativi e le misure dispensative che si intendono adottare.

Allegate al suddetto decreto sono le "Linee Guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento". Tale documento specifica le azioni che le scuole, le famiglie e gli uffici Scolastici Regionali devono attuare per una corretta applicazione della legge.
La Direttiva Ministeriale del 27/12/2012 (MIUR, direttiva ministeriale 27/12/2012, "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica") presenta la nozione di Bisogni Educativi Speciali (BES).
Tale terminologia viene introdotta per rappresentare un'area dello svantaggio scolastico che comprende: "*svantaggio sociale e culturale, disturbi specifici di apprendimento e/o disturbi evolutivi specifici, difficoltà derivanti dalla non conoscenza della cultura e della lingua italiana perché appartenenti a culture diverse*" (MIUR, C.M. 06/03/2013, n. 8 prot. 561, "Direttiva Ministeriale 27 dicembre 2012 "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica". Indicazioni operative"). In particolare, nella classe dei disturbi evolutivi specifici vengono prese in considerazione alcune tipologie di disturbi che presentano problematiche nell'area del linguaggio o nelle aree non verbali o problematiche di altra natura che possono compromettere il percorso scolastico.
Gli alunni con BES possono avvalersi degli strumenti compensativi e delle misure dispensative previsti dalla L. 170/2010 e dal D.M. 5669/2011.
Inoltre la Direttiva Ministeriale del 27/12/2012, richiede la predisposizione di Piani Didattici Personalizzati per gli studenti con BES al fine di rendere la scuola sempre più inclusiva. Tale scopo viene evidenziato nella C.M. 8/2013 (MIUR, C.M. 06/03/2013, n. 8 prot. 561, "Direttiva Ministeriale 27 dicembre 2012 "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica". Indicazioni operative") nella quale si richiede ai Consigli di classe delle scuole primarie di individuare i casi in cui risulta necessaria l'adozione di una didattica individualizzata e personalizzata. Laddove risulti necessaria, lo strumento privilegiato è il Piano Didattico Personalizzato che assume un nuovo significato: non viene più inteso come una dichiarazione degli strumenti compensativi e delle misure dispensative ma rappresenta lo strumento mediante il quale è possibile includere progettazioni didattico-educative atte a garantire i livelli minimi attesi per le competenze in uscita. La suddetta C.M. dà il compito ad ogni istituzione scolastica di istituire il Gruppo di lavoro per l'inclusione (GLI) che tra gli altri ha il compito di elaborare il Piano Annuale per l'Inclusione (PAI) riferito a tutti gli studenti con BES che permette la progettazione di un'offerta formativa di natura inclusiva.
Il PAI "*non è un documento per chi ha bisogni educativi speciali, ma è lo sfondo ed il fondamento sul quale sviluppare una didattica attenta ai bisogni di ciascuno nel realizzare gli obiettivi comuni, le linee guida per un concreto impegno programmatico per l'inclusione*" (MIUR, Nota 27/06/2013, prot. 1551, "Piano Annuale per l'Inclusività – Direttiva 27 dicembre 2012 e C. M. n. 8/2013").

Capitolo 2

Discalculia Evolutiva

Il termine *Discalculia Evolutiva* è stato introdotto per la prima volta nel 1974 dallo psicologo cecoslovacco Ladislay Kosc il quale condusse uno studio relativo ai deficit nell'apprendimento dei numeri e del calcolo. Viene poi ufficialmente riconosciuta dal Department for Education and Skills (DfES) nel 2001.
L'American Psychiatric Association (1994) descrive la discalculia nel Manuale Diagnostico e Statistico dei Disturbi Mentali (DSM-IV) come segue: "*La caratteristica principale del Disturbo del calcolo è una capacità di calcolo, misurata con test standardizzati somministrati individualmente sul calcolo o sul ragionamento matematico, che si situa sostanzialmente al di sotto di quanto previsto in base all'età cronologica del soggetto, alla valutazione psicometrica dell'intelligenza e a un'istruzione adeguata all'età (Criterio A). Il Disturbo del Calcolo interferisce in modo significativo con l'apprendimento scolastico o con le attività della vita quotidiana che richiedono capacità di calcolo (Criterio B). Se è presente un deficit sensoriale, le difficoltà nelle capacità di calcolo vanno al di là di quelle di solito associate con esso (Criterio C).*".
"*Nel disturbo del Calcolo possono essere compromesse diverse capacità incluse le capacità linguistiche (comprendere o nominare i termini, le operazioni o i concetti matematici e decodificare problemi scritti in simboli matematici), capacità percettive (riconoscere o leggere simboli numerici o segni aritmetici e raggruppare oggetti in gruppi), capacità attentive (copiare correttamente numeri o figure, ricordarsi di aggiungere il riporto e rispettare i segni operazionali) e capacità matematiche (eseguire sequenze di passaggi matematici, contare oggetti, imparare tabelline).*".

"*L'intelligenza numerica è un'abilità presente nell'essere umano fin dalla nascita e influenza il nostro modo di interpretare gli stimoli della realtà che ci circonda. Con questo termine si intende la capacità di concepire e pensare al mondo in termini di numeri e quantità numeriche*" (Lucangeli, 2012).
La capacità di vedere la numerosità risulta essere una capacità innata nell'uomo così come la capacità di percepire i colori. Dunque, come esiste la cecità per i colori, può

esistere la cecità per i numeri (Butterworth, 1999; 2005).
Antell e Keating (1983) hanno mostrato che i neonati possiedono l'abilità di discriminare tra piccole quantità senza bisogno di contare. Tale processo prende il nome di subitizing ed è limitato al riconoscimento di 3-4 elementi.
Xu e Spelke (2000) hanno poi mostrato che i neonati sono in grado di discriminare anche tra insiemi con numerosità maggiore purché fra i due gruppi vi sia una differenza sufficientemente grande.

È stata accertata l'esistenza di un network cerebrale specializzato nell'elaborazione numerica. Tale network è collocato nel lobo parietale: l'emisfero sinistro specializzato nel calcolo (Cipolotti & van Harskamp, 2001; Dehaene et al., 2003); l'emisfero destro specializzato nella risoluzione di semplici compiti numerici (Piazza et al., 2002; 2003).
Isaacs et al. (2001) hanno mostrato che in un gruppo di studenti con scarse capacità matematiche (probabilmente affetti da discalculia evolutiva) è presente una minore quantità di materia grigia nel lobo parietale sinistro rispetto ai membri del gruppo di controllo.
Dunque è possibile ci sia un'area del nostro cervello specializzata nella comprensione dei numeri e che rappresenta un "kit di partenza" per l'apprendimento dell'aritmetica.
Gli studenti con discalculia risultano essere privi di tale "kit di partenza" che permette loro di comprendere i numeri e le operazioni numeriche. Ciò comporta gravi difficoltà dal punto di vista dell'insegnamento e dell'apprendimento.
I discenti senza difficoltà di apprendimento possiedono un senso numerico cioè una sensibilità connaturata per le quantità e i numeri. Questo permette loro di non riscontrare difficoltà nel lavorare con quantità e con numeri astratti. Inoltre, tali alunni riescono nel tempo a sviluppare il concetto di numero arricchendolo con nuove forme di comprensione.
Al contrario gli alunni discalculici non possiedono questa sensibilità verso i numeri e le quantità, mantengono un concetto del numero basato sulle unità e che non viene ulteriormente sviluppato nel corso degli anni di istruzione (Butterworth & Yeo, 2011).
Dunque gli studenti con discalculia faticano a visualizzare i numeri e trovano difficoltà nel conteggio e nel confronto di numeri a causa di un'inadeguata comprensione dei concetti numerici fondamentali. Ciò comporta una mancata acquisizione delle nozioni di base necessarie per l'apprendimento delle operazioni con i numeri.
In particolare gli studenti discalculici "*non imparano a vedere i numeri come entità che contengono molte combinazioni diverse, come quella dei doppi, hanno difficoltà a identificare le strutture interne ai numeri, faticano a raffigurarsi la struttura complessiva in base dieci del sistema numerico e la struttura per decine da 0 a 100*" (Butterworth & Yeo, 2011).
Altri autori hanno evidenziato ulteriori difficoltà riscontrate da studenti con discalculia tra cui:

- Piazza et al. (2010) hanno evidenziato la difficoltà riscontrata da discenti discalculici nel discriminare quantità rappresentate in maniera analogica. Ciò porta tali studenti a rilevare ulteriori difficoltà nel conteggio. Tale deficit di conteggio influirà a sua volta negativamente sui successivi stadi dell'apprendimento;

- uno studio condotto sulla comprensione numerica ha mostrato come i bambini discalculici siano più lenti a contare rispetto ai loro coetanei (Butterworth, Bevan, & Landerl, 2005);

- Landerl, Bevan e Butterworth (2004) hanno mostrato che i bambini discalculici hanno una velocità di transcodifica dal codice visivo-arabico a quello verbale più lenta rispetto agli altri;

- gli studenti con discalculia presentano difficoltà nell'affrontare il concetto di valore posizionale delle cifre manifestando errori di posizionamento. Ciò può essere dovuto al fatto che tali studenti hanno un deficit di natura visuo-spaziale (Morrison & Siegel, 1991; Geary, 1993).

Lo psicologo statunitense Geary (1993) sostiene che la discalculia evolutiva sia causata da due problemi cognitivi: una scarsa memoria a lungo termine e una memoria di lavoro deficitaria. Tali disturbi comprometterebbero l'apprendimento dell'aritmetica e la risoluzione di problemi ad essa relativi.
"*La padronanza dell'aritmetica di base si raggiunge quando si riescono a recuperare senza errore dalla memoria a lungo termine tutti i fatti fondamentali [. . .] [cosa che a sua volta] sembra facilitare l'acquisizione di capacità matematiche più complesse.*" (Geary, 1993).
Dunque, minore è la capacità della memoria di lavoro, peggiore sarà la performance del discente.
Nonostante ciò, non esistono prove certe sul rapporto causale relativo alla memoria di lavoro e all'apprendimento matematico. Gli studi condotti da McLean e Hitch (1999) non hanno rilevato alcuna differenza tra studenti discalculici e non relativamente alla capacità di memoria di lavoro.
Dunque potrebbe anche essere la scarsa capacità di rappresentazione dei numeri dei discenti con discalculia a favorire un deficit nella capacità di memoria di lavoro.

Al fine di garantire a tali studenti un adeguato apprendimento delle nozioni matematiche è necessario fornire loro le nozioni di base di cui sono sprovvisti. Inoltre è importante che i docenti adottino un programma didattico basato sulla comprensione ragionata dei concetti matematici. Infatti gli studenti discalculici non ricordano fatti e procedure matematiche appresi meccanicamente proprio a causa del deficitario concetto di numero da loro posseduto. È dunque necessario che tali discenti riescano a capire il senso di tali fatti e procedure.
A tal fine è di aiuto l'utilizzo di materiali di manipolazione. Tali materiali permettono di

avere una visione concreta dei concetti matematici astratti e hanno lo scopo di favorire il ragionamento e l'acquisizione delle conoscenze di base. Inoltre è possibile ricorrere alla costruzione di mappe concettuali che permettono di rappresentare schematicamente strumenti cognitivi concreti (Butterworth & Yeo, 2011).

La Consensus Conference (2006; 2007) ha individuato due profili di discalculia evolutiva: discalculia profonda e discalculia procedurale.
Il primo profilo è piuttosto raro ed è caratterizzato da una debolezza nella struttura cognitiva deputata all'elaborazione delle componenti numeriche (subitizing, meccanismi di quantificazione, seriazione, comparazione). In tal caso la discalculia risale ad una condizione di tipo neuropsicologico correlata ad un deficit nell'elaborazione delle quantità.
Il secondo profilo è più diffuso ed è caratterizzato da deficit negli aspetti procedurali e nell'acquisizione degli algoritmi di calcolo. Ciò comporta difficoltà di lettura e scrittura dei numeri, errori lessicali e sintattici, difficoltà di recupero di fatti aritmetici e di incolonnamento.
Dunque, al fine di riconoscere i profili di discalculia è necessaria un'analisi sulla tipologia di errore commessa dai discenti individuando quale sistema risulta compromesso.

Spina (2011) e Lucangeli (2012) hanno evidenziato alcune tipologie di errore commesse dai discenti con discalculia. Errori relativi ai sistemi di comprensione e produzione:

- errori a base lessicale caratterizzati dalla lettura, rappresentazione mentale o scrittura di un numero al posto di un altro;
- errori a base sintattica frequenti nella conversione dal codice arabico a quello verbale e viceversa e caratterizzati dalla corretta codifica delle singole cifre ma da un insuccesso nel riconoscimento dei rapporti sintattici esistenti tra esse.

Errori relativi al sistema del calcolo:

- errori nel recupero di fatti numerici caratterizzati da un'errata memorizzazione dei risultati delle operazioni;
- errori nel mantenimento e nel recupero di procedure e strategie caratterizzati dall'insuccesso nell'esecuzione rapida e corretta di procedure di calcolo causate da un sovraccarico del sistema di memoria (spesso dovuto all'utilizzo di tecniche di conteggio immature);
- difficoltà visuo-spaziali caratterizzati dall'errato incolonnamento di numeri e dalla difficoltà riscontrata nel seguire la direzione procedurale (sia in senso orizzontale che verticale) delle operazioni;
- errori nell'applicazione delle procedure caratterizzati dall'applicazione di regole relative ad una determinata operazione ad una operazione diversa.

Capitolo 3

Numeri razionali

Il campo dei numeri razionali viene costruito come campo dei quozienti dell'anello degli interi.
Tale costruzione prevede l'immersione di un dominio di integrità in un campo.

Teorema. Sia $(M, +, 0_M)$ un monoide commutativo regolare. Esiste un gruppo abeliano G contenente un sottomonoide M' isomorfo ad M e tale che

$$\forall\, g \in G \;\exists\, a, b \in M' \; t.c. \; g = a + (-b).$$

Dimostrazione. Si consideri il prodotto cartesiano $M \times M$ i cui elementi sono le coppie ordinate (a, b) con $a, b \in M$.
Si definisca in $M \times M$ la seguente operazione:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Tale operazione è associativa ed ha come elemento neutro $(0_M, 0_M)$.
Dunque, $(M \times M, +, (0_M, 0_M))$ è un monoide commutativo regolare.
Si definisca in $M \times M$ la seguente relazione:

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$

Essa è una relazione d'equivalenza in quanto possiede le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.
Infatti:

- riflessività: $(a, b) \sim (a, b)$

$$(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a;$$

- simmetria: $(a, b) \sim (a', b') \Rightarrow (a', b') \sim (a, b)$

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a+b' = b+a' \Leftrightarrow b'+a = a'+b \Leftrightarrow a'+b = b'+a \Leftrightarrow (a', b') \sim (a, b);$$

- transitività: $(a,b) \sim (a',b'), (a',b') \sim (a'',b'') \Rightarrow (a,b) \sim (a'',b'')$

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$
$$(a',b') \sim (a'',b'') \Leftrightarrow a' + b'' = b' + a''.$$

  Sommando membro a membro si ha:

$$(a + b') + (a' + b'') = (b + a') + (b' + a'') \Rightarrow a + b' + a' + b'' = b + a' + b' + a'' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + b'' + b' + a' = b + a'' + b' + a'.$$

  Sottraendo ad entrambi i membri $b' + a'$ si ha:

$$a + b'' = b + a'' \Leftrightarrow (a,b) \sim (a'',b'').$$

Si denoti l'insieme quoziente con $G = M \times M/ \sim$.
Sia $[a,b]$ la classe di equivalenza di (a,b), costituita da tutte le coppie equivalenti ad (a,b):

$$[a,b] = \{(a',b') \in M \times M | (a,b) \sim (a',b')\}.$$

Si osservi che $(a,b) \sim (0_M, 0_M) \Leftrightarrow a + 0_M = b + 0_M$ e dunque si ha

$$[0_M, 0_M] = \{(a,a) | a \in M\} = [a,a].$$

La relazione di equivalenza $\sim$ è compatibile con l'operazione $+$:

$$(a,b) \sim (a',b'), (c,d) \sim (c',d') \Rightarrow (a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d').$$

Infatti:

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'.$$
$$(c,d) \sim (c',d') \Leftrightarrow c + d' = d + c'.$$

Sommando membro a membro si ha:

$$(a + b') + (c + d') = (b + a') + (d + c') \Leftrightarrow a + b' + c + d' = b + a' + d + c' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + c + b' + d' = b + d + a' + c' \Leftrightarrow (a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c') \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d').$$

Allora è possibile definire tra le classi la seguente operazione:

$$[a,b] + [c,d] = [a + c, b + d].$$

Tale operazione non dipende dalle particolari coppie scelte per rappresentare le classi d'equivalenza ma solo dalle classi stesse.

Essa risulta essere in G associativa, commutativa e dotata di elemento neutro $[0_M, 0_M]$.
Inoltre, ogni classe $[a, b]$ possiede l'opposta data dalla classe $[b, a]$.
Infatti:

$$[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b] = [0_M, 0_M] = 1_G.$$

Dunque $(G, +)$ è un gruppo abeliano.
Inoltre, il sottoinsieme M' costituito dalle classi della forma $[a, 0_M]$ è un sottomonoide del gruppo G ed è isomorfo ad M. L'isomorfismo è dato dalla seguente funzione:

$$f : M \to M', \qquad a \mapsto [a, 0_M].$$

Pertanto è possibile identificare gli elementi di M' con quelli di M, cioè è possibile porre $a = [a, 0_M]\ \forall a \in M$.
Si osservi infine che $\forall g = [a, b] \in G$ si ha $[a, b] = [a, 0_M] + [0_M, b] = [a, 0_M] + [-b, 0_M]$.
Allora è possibile scrivere in G, $[a, b] = a + (-b)$.

Considerando $(M, +, 0_M) = (\mathbb{N}, +, 0_{\mathbb{N}})$ si ottiene:

$$G = (M \times M/\sim, +) = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim, +) = (\mathbb{Z}, +).$$

La moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ viene definita nel modo seguente:

$$[a, b] \cdot [c, d] = [a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c].$$

Tale definizione è ben posta cioè non dipende dalla scelta dei rappresentanti delle classi.
Infatti, si vuole provare che dati $(a, b) \sim (a', b')$ e $(c, d) \sim (c', d')$ risulta:

$$(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \sim (a' \cdot c' + b' \cdot d', a' \cdot d' + b' \cdot c').$$

Siano:

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a',$$
$$(c, d) \sim (c', d') \Leftrightarrow c + d' = d + c'.$$

Si prova, innanzitutto, che

$$(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \sim (a' \cdot c + b' \cdot d, a' \cdot d + b' \cdot c).$$

Infatti:

$$(a{\cdot}c{+}b{\cdot}d, a{\cdot}d{+}b{\cdot}c) \sim (a'{\cdot}c{+}b'{\cdot}d, a'{\cdot}d{+}b'{\cdot}c) \Leftrightarrow (a{\cdot}c{+}b{\cdot}d){+}(a'{\cdot}d{+}b'{\cdot}c) = (a{\cdot}d{+}b{\cdot}c){+}(a'{\cdot}c{+}b'{\cdot}d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \cdot c + b \cdot d + a' \cdot d + b' \cdot c = a \cdot d + b \cdot c + a' \cdot c + b' \cdot d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a + b') \cdot c + (b + a') \cdot d = (b + a') \cdot c + (a + b') \cdot d.$$

Tale uguaglianza è verificata essendo $(a, b) \sim (a', b')$.
Inoltre risulta

$$(a' \cdot c + b' \cdot d, a' \cdot d + b' \cdot c) \sim (a' \cdot c' + b' \cdot d', a' \cdot d' + b' \cdot c').$$

Infatti:

$$(a' \cdot c + b' \cdot d, a' \cdot d + b' \cdot c) \sim (a' \cdot c' + b' \cdot d', a' \cdot d' + b' \cdot c') \Leftrightarrow (a' \cdot c + b' \cdot d) + (a' \cdot d' + b' \cdot c') =$$

$$= (a' \cdot d + b' \cdot c) + (a' \cdot c' + b' \cdot d') \Leftrightarrow a' \cdot c + b' \cdot d + a' \cdot d' + b' \cdot c' = a' \cdot d + b' \cdot c + a' \cdot c' + b' \cdot d' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c + d') \cdot a' + (d + c') \cdot b' = (d + c') \cdot a' + (c + d') \cdot b'.$$

Tale uguaglianza è verificata essendo $(c, d) \sim (c', d')$.
Per la transitività della relazione d'equivalenza $\sim$, si ha:

$$(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \sim (a' \cdot c' + b' \cdot d', a' \cdot d' + b' \cdot c').$$

L'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione è la classe $[1_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}]$.
Infatti:

$$[a, b] \cdot [1_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}] = [a \cdot 1_{\mathbb{Z}} + b \cdot 0_{\mathbb{Z}}, a \cdot 0_{\mathbb{Z}} + b \cdot 1_{\mathbb{Z}}] = [a, b].$$

Applicando la costruzione seguente all'anello degli interi $\mathbb{Z}$ si ottiene il campo dei razionali $\mathbb{Q}$.

Teorema. Dato un dominio di integrità $(A, +, \cdot, 1_A)$, esiste un campo $Q(A)$ contenente un sottoanello A' isomorfo ad A e tale che ogni elemento di $Q(A)$ è del tipo $a \cdot b^{-1}$, $a, b \in A'$. Tale campo è unico, a meno di isomorfismi, con questa proprietà.

Dimostrazione. Si consideri l'insieme F delle coppie ordinate (a, b) di elementi di A, con $b \neq 0_A$:

$$F = \{(a, b) \in A | b \neq 0_A\}.$$

Tali coppie vengono chiamate frazioni e sono indicate con $\frac{a}{b}$.
Si definiscano tra le frazioni le due operazioni seguenti:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

La definizione è ben posta in quanto $b \cdot d \neq 0_A$ essendo A un dominio di integrità.
L'insieme F delle frazioni è un monoide commutativo rispetto ad entrambe le operazioni.
Infatti:

- proprietà associativa dell'addizione:

$$(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})+\frac{e}{f}=(\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d})+\frac{e}{f}=\frac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot f+(b\cdot d)\cdot e}{(b\cdot d)\cdot f}=$$

$$=\frac{a\cdot d\cdot f+b\cdot c\cdot f+b\cdot d\cdot e}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a\cdot(d\cdot f)+b\cdot(c\cdot f+d\cdot e)}{b\cdot(d\cdot f)}=$$

$$=\frac{a}{b}+(\frac{c\cdot f+d\cdot e}{d\cdot f})=\frac{a}{b}+(\frac{c}{d}+\frac{e}{f});$$

- proprietà associativa della moltiplicazione:

$$(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d})\cdot\frac{e}{f}=(\frac{a\cdot c}{b\cdot d})\cdot\frac{e}{f}=\frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a\cdot(c\cdot e)}{b\cdot(d\cdot f)}=\frac{a}{b}\cdot(\frac{c\cdot e}{d\cdot f})=\frac{a}{b}\cdot(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}).$$

Inoltre, gli elementi neutri delle due operazioni sono rispettivamente $\frac{0_A}{1_A}$ e $\frac{1_A}{1_A}$.
Infatti:

$$\frac{a}{b}+\frac{0_A}{1_A}=\frac{a\cdot 1_A+b\cdot 0_A}{b\cdot 1_A}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1_A}{1_A}=\frac{a\cdot 1_A}{b\cdot 1_A}=\frac{a}{b}.$$

Si definisca in F la seguente relazione $\sim$:

$$\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'}\Leftrightarrow a\cdot b'=b\cdot a'.$$

Essa è una relazione di equivalenza.
Infatti:

- proprietà riflessiva:$\frac{a}{b}\sim\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b}\sim\frac{a}{b}\Leftrightarrow a\cdot b=b\cdot a;$$

- proprietà simmetrica: $\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'}\Rightarrow\frac{a'}{b'}\sim\frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'}\Leftrightarrow a\cdot b'=b\cdot a'\Leftrightarrow b'\cdot a=a'\cdot b\Leftrightarrow a'\cdot b=b'\cdot a\Leftrightarrow\frac{a'}{b'}\sim\frac{a}{b};$$

- proprietà transitiva: $\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'},\frac{a'}{b'}\sim\frac{a''}{b''}\Rightarrow\frac{a}{b}\sim\frac{a''}{b''}$

$$\frac{a}{b}\sim\frac{a'}{b'}\Leftrightarrow a\cdot b'=b\cdot a'\quad\text{e}\quad\frac{a'}{b'}\sim\frac{a''}{b''}\Leftrightarrow a'\cdot b''=b'\cdot a''.$$

Ne segue:

$$a \cdot b' = b \cdot a'$$
$$a' \cdot b'' = b' \cdot a''.$$

Moltiplicando membro a membro si ha:

$$a \cdot b' \cdot a' \cdot b'' = b \cdot a' \cdot b' \cdot a''.$$

Semplificando per b' (tale semplificazione è possibile essendo $b' \neq 0_A$) si ha:

$$a \cdot a' \cdot b'' = b \cdot a' \cdot a''.$$

Se $a' \neq 0_A$ si ha

$$a \cdot b'' = b \cdot a'' \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{a''}{b''}.$$

Se $a' = 0_A$ si ha

$$a = a'' = 0_A \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{a''}{b''}.$$

Tale relazione di equivalenza è compatibile con le due operazioni.
Infatti, siano $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$.

- (addizione) Si vuole provare che

  $$(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) \sim (\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}) \Leftrightarrow (\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}) \sim (\frac{a' \cdot d' + b' \cdot c'}{b' \cdot d'}) \Leftrightarrow (a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b' \cdot d') = (b \cdot d) \cdot (a' \cdot d' + b' \cdot c').$$

  Si ha: $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \cdot b' = b \cdot a'$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow c \cdot d' = d \cdot c'$.
  Dunque,

  $$(a \cdot d + b \cdot c) \cdot (b' \cdot d') = a \cdot d \cdot b' \cdot d' + b \cdot c \cdot b' \cdot d' = a \cdot b' \cdot d \cdot d' + b \cdot b' \cdot c \cdot d' =$$
  $$= b \cdot a' \cdot d \cdot d' + b \cdot b' \cdot d \cdot c' = b \cdot d \cdot a' \cdot d' + b \cdot d \cdot b' \cdot c' = (b \cdot d) \cdot (a' \cdot d' + b' \cdot c').$$

- (moltiplicazione) Si vuole provare che

  $$(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \sim (\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}) \Leftrightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \sim \frac{a' \cdot c'}{b' \cdot d'} \Leftrightarrow (a \cdot c) \cdot (b' \cdot d') = (b \cdot d) \cdot (a' \cdot c').$$

  Si ha: $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow a \cdot b' = b \cdot a'$ e $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'} \Leftrightarrow c \cdot d' = d \cdot c'$.
  Ne segue:

  $$a \cdot b' = b \cdot a'$$
  $$c \cdot d' = d \cdot c'.$$

  Moltiplicando membro a membro si ha:

  $$a \cdot b' \cdot c \cdot d' = b \cdot a' \cdot d \cdot c' \Leftrightarrow a \cdot c \cdot b' \cdot d' = b \cdot d \cdot a' \cdot c' \Leftrightarrow (a \cdot c) \cdot (b' \cdot d') = (b \cdot d) \cdot (a' \cdot c').$$

Si consideri la struttura quoziente $F/\sim$.
I suoi elementi sono classi d'equivalenza: $[\frac{a}{b}] = \left\{(a', b') \in F | \frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b}\right\}$.
Tale struttura è un monoide rispetto ad entrambe le operazioni e ha come elementi neutri rispettivamente $[\frac{0_A}{1_A}] = \left\{\frac{0_A}{b} | b \neq 0_A\right\}$ e $[\frac{1_A}{1_A}] = \left\{\frac{b}{b} | b \neq 0_A\right\}$.
Inoltre, ogni suo elemento $[\frac{a}{b}]$ ha l'opposto $[\frac{-a}{b}]$ e, se $a \neq 0_A$, ha anche l'inverso moltiplicativo $[\frac{b}{a}]$.
Infine, la moltiplicazione quoziente è distributiva rispetto all'addizione quoziente.
Infatti:

$$(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = (\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot d \cdot e + b \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f},$$

$$(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}) + (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) = (\frac{a \cdot e}{b \cdot f}) + (\frac{c \cdot e}{d \cdot f}) = \frac{a \cdot e \cdot d \cdot f + c \cdot e \cdot b \cdot f}{b \cdot f \cdot d \cdot f}.$$

Le frazioni ottenute sono equivalenti essendo

$$(a \cdot d \cdot e + b \cdot c \cdot e) \cdot (b \cdot f \cdot d \cdot f) = (b \cdot d \cdot f) \cdot (a \cdot e \cdot d \cdot f + c \cdot e \cdot b \cdot f),$$

come si vede eseguendo la moltiplicazione.
Dunque, la struttura quoziente è un campo denotato con $Q(A)$.
Il sottoinsieme $\left\{[\frac{a}{1_A}] | a \in A\right\}$ costituisce un sottoanello di $Q(A)$ e la funzione

$$\Phi : A \to Q(A), \qquad \Phi(a) = [\frac{a}{1_A}],$$

è un morfismo di anelli.
Inoltre, per ogni $[\frac{a}{b}] \in Q(A)$ si ha $[\frac{a}{b}] = [\frac{a}{1_A}] \cdot [\frac{1_A}{b}] = [\frac{a}{1_A}] \cdot [\frac{b}{1_A}]^{-1}$.
Pertanto $Q(A)$ è detto campo dei quozienti di A.
Infine, per ogni capo K che contiene un sottoanello A' isomorfo ad A, l'intersezione di tutti i sottocampi contenenti A' è un sottocampo costituito dai quozienti degli elementi di A', ed è isomorfo a $Q(A)$. Pertanto $Q(A)$ è unico.

Osservazione. Se l'anello A è fattoriale, cioè se ha senso parlare di MCD e mcm, gli elementi di $Q(A)$ si rappresentano mediante frazioni $\frac{a}{b}$ ridotte ai minimi termini ossia tali che $MCD(a, b) = 1_A$.

Siano $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x = [a, 0], a \neq 0\}$ e $\mathbb{Q}^a = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

Proposizione. Ogni elemento di $\mathbb{Q}$ o appartiene a $\mathbb{Q}^a$ oppure è l'opposto di un elemento di $\mathbb{Q}^a$.

Dimostrazione. Sia $[a, b] \in \mathbb{Q}$.
Se $a \geq b$ si ha $[a, b] = [a - b, 0]$ essendo $a + 0 = b + (a - b)$.
Se $a < b$ si ha $[a, b] = [0, b - a] = -[b - a, 0]$ essendo $a + (b - a) = b + 0$.

L'ordine in $\mathbb{Q}^a$ è viene definito ponendo:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d \leq b \cdot c$$

ed essendo tale relazione compatibile con la relazione d'equivalenza $\sim$, viene estesa alle classi di frazioni.
Gli elementi di $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x = [a, 0], a \neq 0\}$ verranno chiamati positivi e i loro opposti negativi.
Tale sottoinsieme risulta chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione e per ogni $x \in \mathbb{Q}$ non nullo, uno e uno solo tra x e $-x$ è positivo.
L'ordinamento in $\mathbb{Q}$ è definito ponendo $x < y$ se $y - x$ è positivo ed estende l'analogo ordine di $\mathbb{Q}^a$.
Tale ordine è denso, cioè tra due suoi elementi ce n'è sempre un altro.
Infatti, per ogni x, y distinti con $x < y$ risulta $x < \frac{x+y}{2} < y$.
L'ordine non è completo, cioè esistono sottoinsiemi non vuoti privi di estremo superiore come per esempio $\{x \in \mathbb{Q}^a | x^2 \leq 2\}$.
Dunque, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ è un campo oridnato, denso ma non completo.

Nelle scuole secondarie tale costruzione dei numeri razionali non viene presentata. Ciò che viene introdotto ai discenti è il concetto di frazione. In particolare, quest'ultima viene definita come parte di una unità-tutto: data una unità la si divide in m parti uguali e di queste se ne considerano n; la quantità considerata viene indicata con $\frac{n}{m}$ e viene definita frazione.
In seguito viene mostrato ai discenti che ci sono frazioni diverse rappresentanti la stessa quantità ossia lo stesso numero razionale. A tali frazioni viene attribuito l'aggettivo "equivalente".
Dunque, non vi è l'introduzione formale di una relazione d'equivalenza che permette di definire frazioni equivalenti bensì ci si fa riferimento sottolineando come queste rappresentino *evidentemente* la stessa quantità: considerare $\frac{1}{2}$ di una torta o considerarne i $\frac{2}{4}$ è *evidentemente* la medesima cosa per cui le due frazioni vengono dette *equivalenti*.
Viene poi fornita ai discenti una regola operativa che permette di determinare frazioni equivalenti ad una data frazione. Precisamente: moltiplicando o dividento (quando possibile) numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero, si ottiene una frazione equivalente a quella data.
Tale regola permetterà ai discenti di ordinare le frazioni. Infatti, la relazione d'ordine che viene presentata nelle scuole secondarie risulta dalla riduzione di due frazioni allo stesso denominatore, e dunque dalla determinazione di due frazioni equivalenti a quelle date aventi stesso denominatore, e dal confronto dei nuovi numeratori.

Capitolo 4

Didattica dei numeri razionali

Il tema dei numeri razionali rappresenta un tema cardine della Didattica della Matematica nei diversi cicli di istruzione. L'apprendimento dei numeri razionali richiede agli studenti un impegno concettuale significativo ed è questo il motivo per cui tale argomento risulta di difficile comprensione durante tutto il percorso di studi.
L'apprendimento delle frazioni è di particolare importanza in quanto il loro livello di conoscenza raggiunto dagli studenti nelle scuole elementari risulta essere indicatore delle performance matematiche degli stessi nei successivi gradi di istruzione (Siegler et al., 2012).
Quindi non sorprende il fatto che negli Stati Uniti, il National Mathematics Advisory Panel (NMAP, 2008) descrive l'insegnamento delle frazioni come di cruciale importanza per il miglioramento dei risultati in matematica degli studenti (Mazzocco et al., 2013).

Nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo di istruzione e per i Licei e nelle Linee Guida per gli Istituti Professionali e Tecnici sono riportati gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per lo sviluppo delle competenze che gli studenti devono conseguire nei diversi cicli di istruzione.
Per quanto riguarda l'ambito dei numeri razionali, questi vengono introdotti per la prima volta nella classe quinta della scuola primaria. In particolare gli studenti apprendono la scrittura e la lettura di numeri decimali, frazioni e percentuali, imparano ad eseguire operazioni tra le frazioni, a rappresentarle sulla retta e a riconoscere frazioni equivalenti. Inoltre si richiede loro di saper utilizzare tali nozioni per descrivere situazioni di vita quotidiana (MIUR, 2012a).
I numeri razionali vengono presentati in maniera più approfondita nel biennio della scuola secondaria di primo grado. Vengono esplicitate le diverse rappresentazioni che un numero razionale può assumere: frazione, numero decimale o percentuale. La frazione, a sua volta, può assumere significato di rapporto, di quoziente, di proporzione ed altro ancora. In particolar modo viene ripreso il concetto di numero decimale, di frazione equivalente e viene mostrato l'utilizzo di modi diversi per rappresentare uno stesso numero razionale.

Viene prestata maggiore attenzione al confronto, all'ordinamento e alla rappresentazione sulla retta di tali numeri. Al termine di tale ciclo di istruzione si richiede ai discenti di saper padroneggiare le diverse rappresentazioni dei numeri razionali e di sapere eseguire con essi le diverse operazioni (MIUR, 2012a).
Nei Licei, i numeri razionali (in particolar modo le frazioni e i numeri decimali) vengono studiati nel primo biennio in relazione al calcolo algebrico. Gli studenti svilupperanno maggiormente le capacità di calcolo e le proprietà delle operazioni relative a tali numeri (MIUR, 2012b).
Anche negli Istituti Tecnici e Professionali tale argomento viene affrontato nel primo biennio d'istruzione. Vengono approfondite le scritture decimale e frazionaria, le operazioni e le proprietà dei numeri razionali e la loro rappresentazione sulla retta (MIUR, 2012c, 2012d).

4.1 Difficoltà di apprendimento

"*Il processo di insegnamento–apprendimento delle frazioni è certamente uno dei più studiati da quando esiste la ricerca in Didattica della Matematica, forse perché (insieme al tema, ad esso connesso, dei numeri "decimali") costituisce uno dei più evidenti insuccessi della scuola, in tutti i Paesi del mondo*" (Fandiño Pinilla M. I., 2005).

La trasposizione didattica, cioè il passaggio che permette di trasformare il "Sapere" in "sapere da insegnare", è di fondamentale importanza per l'apprendimento degli allievi. A tal fine è necessario adattare il "Sapere", proprio di ciascun docente, a qualcosa che sia accessibile ai discenti tenendo conto della loro età, della loro situazione cognitiva e delle loro capacità (Fandiño Pinilla M. I., 2005). Ciò risulta essenziale per un' adeguata acquisizione del concetto di numero razionale. Infatti non è possibile presentare agli studenti il campo dei razionali $\mathbb{Q}$ nella forma matematica formalmente corretta cioè come estensione dei numeri interi ottenuta quozientando tale anello con una opportuna relazione di equivalenza. Tale costruzione cognitiva dei numeri razionali risulta fallimentare per motivi legati ad ostacoli ontogenetici[1], legati cioè all'allievo e alla sua natura.

L'approccio più consueto per presentare i numeri razionali ai discenti è quello di ricorrere al concetto di frazione.
Generalmente la frazione viene definita come segue: si considera una unità-tutto, la si divide in parti uguali e di queste se ne prendono alcune; le parti prese formano la frazione.

[1] "*Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età; rispetto all'acquisizione di certi concetti, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti rispetto ad un progetto didattico proposto dall'insegnante e possono costituire quindi ostacoli di natura ontogenetica*" (D'Amore, 2003).

Tale definizione ha il vantaggio di essere chiara, di facile comprensione e si presta ad un'ampia gamma di esempi (la suddivisione di un sacchetto di caramelle tra amici o ancora quanto rimane di un litro d' acqua se se ne beve $\frac{1}{4}$).
Curiosamente, questa definizione, se pur corretta, non rispecchia l'etimologia del termine "frazione" che deriva dal latino "fractio" cioè frangere, spezzare e dunque non necessariamente suddividere in parti uguali.
Importante è osservare che la definizione data di frazione risulta essere una definizione univoca che non permette di chiarire le diverse accezioni che il termine "frazione" può assumere. Infatti, "*oltre all'interpretazione della frazione come parte di un uno-tutto sia nel continuo che nel discreto, esistono altre interpretazioni che non si possono considerare ben fondate su tale definizione della suddivisione dell'intero in parti uguali*"(Sbaragli, 2007).
Inoltre, la scelta da parte dei docenti di usufruire di un'unica definizione di frazione può portare alla creazione di ostacoli didattici[2].

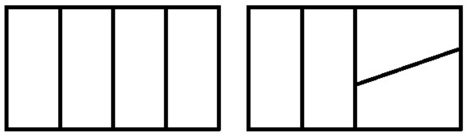
Fandiño Pinilla M. I. (2005) propone diversi significati che il termine frazione può assumere. Di seguito vengono presentati tali significati e le relative problematiche riscontrabili nel presentarli agli studenti.

- **Frazione come parte-tutto**
  La frazione $\frac{a}{b}$ indica la suddivisione dell'intero in b parti di cui se ne prendono a.
  Bisogna distinguere due casi: il caso in cui l'unità (il tutto) sia continua e il caso in cui l'unità (il tutto) sia discreta.
  Nel primo caso è sempre possibile trovare gli $\frac{a}{b}$ di un'unità continua purché a sia minore di b. Infatti supponendo il contrario, considerando quindi frazioni improprie, la definizione di frazione data sopra perderebbe significato.
  Nel secondo caso non solo le frazioni improprie non hanno un significato intuitivo ma si creano anche delle difficoltà di apprendimento relative alle frazioni proprie. Data una unità-tutto discreta ha senso concreto considerare gli $\frac{a}{b}$ del tutto solo se questo risulta divisibile per b per cui per esempio risulta non avere senso concreto considerare i $\frac{3}{7}$ di 30.
  Dunque in questo contesto le frazioni improprie non hanno senso da un punto di vista logico.

  È necessario osservare che la definizione che stiamo esaminando presenta un'ulteriore complicazione cognitiva costituita dall'aggettivo "uguali". Tale complicazione

[2] "*Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, un metodo, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche: egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi altri, la scelta di quel progetto si rivela un ostacolo didattico*" (D'Amore, 2003).

rappresenta un ostacolo alla costruzione del concetto di frazione e porta negli studenti alla creazione di misconcezioni.
Consideriamo i due rettangoli seguenti.

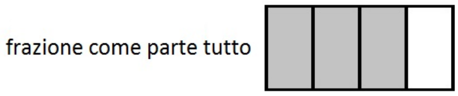


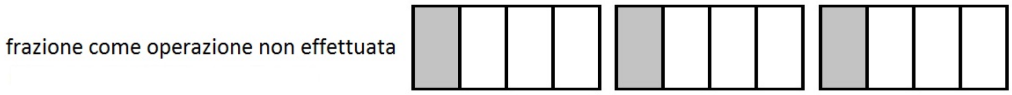
Se interpretiamo il termine "uguali" come "congruenti", "sovrapponibili" allora il secondo rettangolo non soddisfa la definizione di frazione come parte-tutto in quanto non permette di accettare che le figure siano divise in parti di forma diversa. Ma se ci riferiamo al termine "uguali" intendendo dire con esso "equiestesi" allora ciascuno dei due rettangoli soddisfa la definizione precedentemente data.
Si vede come il termine "uguali" vincola le convinzioni degli studenti non permettendo loro di attribuire al concetto di frazione altri attributi come la lunghezza, l'estensione, il volume (Sbaragli, 2007).

Spesso, per introdurre le frazioni, il docente fa ricorso ad esempi reali, concreti. Nella maggior parte dei casi l'unità-tutto viene rappresentata con una pizza. Se si chiede all'alunno di dividere la pizza a metà egli potrebbe trovarsi in difficoltà: anche se riuscisse a dividere la pizza in due parti uguali gli ingredienti presenti su ciascuna parte non saranno mai esattamente gli stessi. Dunque, mentre il docente, con la richiesta di divisione in parti uguali, fa riferimento ad un atto di astrazione, l'allievo è strettamente legato al modello concreto che gli è stato presentato.
"*L'idea di semplificare ad ogni costo, di trovare modelli concreti ad ogni costo, a volte si rivela una strategia didattica non ottimale; l'immagine concettuale che il bambino si fa della nuova proposta cognitiva si trasforma troppo presto in modello e nascono ostacoli didattici alla costruzione di conoscenza*" (Fandiño Pinilla, 2005).

- **Frazione come quoziente**
  In questo caso la frazione $\frac{a}{b}$ può indicare una divisione non effettuata la cui interpretazione intuitiva risulta quella di considerare a oggetti e di dividerli in b parti. Ma può anche rappresentare il quoziente risultante dalla divisione tra a e b, cioè un numero razionale.
  Dunque la scrittura $\frac{a}{b}$, per quanto visto finora, assume significati diversi: parte-tutto, operazione di divisione non effettuata, quoziente della divisione nonché numero razionale.
  Mentre risulta abbastanza semplice per gli studenti fornire una rappresentazione concreta per le prime due accezioni suddette, non è così per la terza.
  Consideriamo la frazione $\frac{3}{4}$. In relazione ai primi due significati, tale frazione può

essere rappresentata come segue:





Non vi è un'analoga rappresentazione che espliciti la frazione come numero razionale. È necessario dunque che gli studenti esprimano tale numero attraverso un'immagine differente (ad esempio come punto sulla retta).

- **Frazione come rapporto**
  La frazione $\frac{a}{b}$ può indicare il rapporto tra a e b cioè può esplicitare una relazione tra due grandezze che stanno tra loro come a e b. Tale interpretazione richiama la nozione di proporzionalità che rappresenta l'uguaglianza di due rapporti.
  Dunque se $a : b = c : d$ allora $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ risultano essere due modi diversi per rappresentare lo stesso numero razionale cioè (a, b) e (c, d) appartengono alla stessa classe di equivalenza.

  Una delle caratteristiche di tale accezione del termine frazione è che numeratore e denominatore possono essere "scambiati": dire che il rapporto tra due grandezze G_1 e G_2 è $\frac{2}{3}$ è equivalente ad affermare che il rapporto tra le grandezze G_2 e G_1 è $\frac{3}{2}$.
  Tale proprietà può risultare di difficile comprensione da parte degli studenti quando viene presentata loro in quanto fortemente legati al significato di frazione come parte-tutto.

- **Frazione come operatore**
  Si ha una nuova interpretazione della frazione che prevede l'utilizzo di una operazione che coinvolge la moltiplicazione (per il numeratore) e la divisione (per il denominatore). Tale operazione viene effettuata sui numeri puri e non sulle parti-tutto che sono state proposte nella definizione iniziale di frazione. Infatti, in questo caso, non ha importanza l'ordine con cui vengono effettuate le due operazioni di moltiplicazione e divisione.
  Data la frazione $\frac{a}{b}$, è possibile moltiplicare prima l'unità-tutto per a e poi dividere il risultato ottenuto per b.
  Nella definizione di frazione come parte-tutto, invece, è possibile solo la successione divisione-moltiplicazione.

- **Frazione in probabilità**
La probabilità di un evento può esprimersi come $\frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$.
Dunque ogni frazione può assumere significato di probabilità cioè una misura relativa alla possibilità che un dato evento si verifichi o meno.
Per esempio, supponiamo di voler calcolare la probabilità che lanciando un dado esca un numero pari. Il numero dei casi possibili è 6 (le 6 facce del dado) mentre il numero dei casi favorevoli è 3 (le facce del dado che presentano un numero pari sono 3 precisamente sono quelle con i numeri 2, 4, 6). Dunque la probabilità richiesta si esprime attraverso la frazione $\frac{3}{6}$.
Tale frazione non rimanda ad alcuna immagine intuitiva.
Una frazione equivalente a $\frac{3}{6}$ è $\frac{1}{2}$ che certamente risulta essere più familiare agli allievi ma ancora non permette di rievocare una qualche rappresentazione immediata del concetto di probabilità.
Ciò invece avviene se facciamo riferimento ad un'altra frazione equivalente alle precedenti, precisamente $\frac{50}{100}$ o meglio ancora al 50%.

- **Frazione come numero razionale**
Si è visto che l'insieme dei numeri razionali è un insieme quoziente i cui elementi sono classi di equivalenza. Ciascuna di esse rappresenta un numero razionale.
Per esempio, $0,5 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+ | b = 2a\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),...\}$.
Ogni classe di equivalenza contiene infinite coppie di numeri naturali. Per semplificare la trattazione dell'argomento si sceglie per ogni classe un rappresentante, di solito quello ridotto ai minimi termini: nel nostro caso $\frac{1}{2}$.
Dunque $0,5$ e $\frac{1}{2}$ vengono considerate scritture equivalenti che rappresentano lo stesso numero razionale.
Rappresentare i numeri razionali mediante le frazioni o i numeri decimali piuttosto che classi d'equivalenza presenta particolari vantaggi nel caso specifico delle operazioni. Eseguire un'addizione o una moltiplicazione tra numeri razionali intesi come classi di equivalenza risulterebbe molto complesso. Il ricorso all'equivalente rappresentazione frazionaria o decimale semplifica notevolmente i calcoli.

- **Frazione come punto su una retta**
In questo caso la frazione viene vista come numero razionale precisamente come la distanza relativa (dipendente cioè dall'unità di misura) che separa l'origine dalla frazione-punto che si sta considerando.
Appare evidente come questa rappresentazione della frazione nulla ha a che fare con la definizione che è stata inizialmente data di frazione come parte-tutto.
La difficoltà nel rappresentare le frazioni sulla retta risiede nel fatto che gli studenti non riescono a percepire la frazione come un unico numero razionale bensì la considerano come formata da due numeri (numeratore e denominatore) che devono essere pertanto considerati indipendentemente.

Imparare a vedere numeratore e denominatore di una frazione insieme, come un singolo numero è uno degli aspetti cognitivi più difficili delle frazioni (Bobis, Mulligan, & Lowrie, 2013).
L'apprendimento della rappresentazione della frazione come punto-numero razionale sulla retta risulta fondamentale non solo per la comprensione del concetto di frazione ma anche per una adeguata acquisizione dell'aritmetica delle frazioni (Siegler et al., 2013).

Vergnaud (1990) definisce "*≪Concetto≫ una terna di insiemi C=(S, I,* ***S****) dove S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il referente), I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il significato),* ***S*** *è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il significante)*".
"*Studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre piani separatamente ed in mutua relazione reciproca*" (Vergnaud, 1990).
Per quanto concerne le frazioni abbiamo visto che ci sono significati diversi che danno senso al concetto di frazione. Ciascuno di essi possiede degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi e diversi registri semiotici che permettono di fornirne una rappresentazione.
Dunque è importante concettualizzare la nozione di frazione attraverso tutti i significati che tale termine può assumere.

Inoltre, ogni qual volta il docente introduce un nuovo concetto matematico egli deve avere presente la differenza tra noetica e semiotica.
Per noetica si intende l'acquisizione concettuale di un oggetto; per semiotica si intende l'acquisizione di una rappresentazione realizzata per mezzo di segni (D'Amore, 2005).
I concetti matematici che si desidera gli alunni apprendano non esistono nella realtà concreta. Ciò a cui il docente fa riferimento non è l'oggetto matematico bensì una sua rappresentazione in un dato registro semiotico. Ma allora ricadiamo nel paradosso di Duval "*(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, dall'altra, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici*" (Duval, 1993).
Dunque il docente, che conosce il concetto matematico astratto e che aspira esso venga appreso dai suoi allievi, deve tener conto del fatto che questi ultimi lavorano soltanto con rappresentazioni semiotiche dell'oggetto matematico. Ciò può portare gli studenti ad un mera gestione semiotica senza mai raggiungere la noetica cioè senza riuscire a concettualizzare l'oggetto matematico.
Tale osservazione diventa fondamentale quando si tratta il tema delle frazioni.
Il mancato apprendimento da parte degli studenti del concetto di frazione deriva dalla pluralità di significati che tale termine nasconde (Kieren, 1975, 1976).
Per questo motivo si corre il rischio che gli studenti imparino esclusivamente a manipo-

lare le diverse rappresentazioni che gli vengono proposte dal docente senza mai riuscire a ricreare nella loro mente un modello che riesca a rappresentare appieno il concetto astratto di frazione cioè a concettualizzare l'oggetto matematico "frazione".
Dunque, al fine di costruire un adeguato modello del concetto "frazione", è necessario che gli studenti usino tutti i registri semiotici a loro disposizione, che imparino a scegliere quello che gli sembra più adatto alla situazione, ad effettuare operazioni di trattamento per passare da una rappresentazione all'altra dello stesso registro e a convertire per passare da una rappresentazione all'altra in registri diversi (Fandiño Pinilla, 2005).
"*Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nei mesi o negli anni, da un'immagine ad un'altra più... comprensiva e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali, cioè di successive immagini* $I_1, I_2, \ldots, I_n, I_{n+1}, \ldots$ *come una specie di scalata, di avvicinamento ad un concetto C. Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi resiste a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza forte da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta. Un'immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare modello M del concetto C.*" (D'Amore 2003).
"*Un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C si trasforma in modello intuitivo. C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non essere ancora quello che, del concetto C, ci si aspetta all'interno del sapere matematico..*" (Fischbein, 1985, 1992).
Per questo è fondamentale che il docente insegni esplicitamente agli allievi a gestire i diversi registri semiotici, a scegliere le caratteristiche distintive del concetto matematico e ad attuare processi di conversione.

Diversi autori hanno proposto altre possibili cause delle difficoltà riscontrate dagli studenti nel padroneggiare i numeri razionali:

- nella scuola media viene riservato molto tempo all'insegnamento di procedure di manipolazione dei numeri decimali anziché concentrarsi sul loro significato concettuale. Viene quindi data precedenza alla conoscenza sintattica rispetto a quella semantica (Hiebert & Wearne, 1986; Resnick, 1982);

- gli insegnanti tengono poco conto dei tentativi spontanei degli alunni nell'attribuire un significato ai numeri razionali. In questo modo gli studenti vengono incoraggiati ad adottare un metodo basato sull'applicazione meccanica di regole (Confrey, 1994; Kieren, 1992; Mack, 1993);

- quando vengono introdotti i numeri razionali non vengono enfatizzate le differenze che tali numeri hanno rispetto ai numeri naturali. In particolare un problema a tal riguardo è l'utilizzo dei grafici a torta per introdurre agli studenti il concetto di frazione (Kerslake, 1986; Kieren, 1995; Mack, 1990; Nunes & Bryant, 1996; Ohlsson, 1988);

- nella scuola media le notazioni introdotte per i numeri razionali vengono presentate come definizioni, conoscenze preliminari alla lezione che si vuole affrontare. In realtà tali notazioni, in particolar modo quella relativa ai numeri decimali, presentano notevoli difficoltà. Il docente, non tenendo conto delle problematiche legate alla natura stessa della notazione, renderà più difficoltoso l'apprendimento del concetto di numero razionale ai suoi studenti (Hiebert, 1992).

4.2 Errori tipici

"*Un'analisi molto critica ed articolata dei lavori di ricerca sui processi di insegnamento – apprendimento delle frazioni, rivela che il rimedio all'evidente insuccesso planetario della didattica della frazioni non si risolve banalmente modificando il loro insegnamento in termini matematici, ma affrontando la questione attraverso una minuziosa verifica degli errori tipici degli studenti in termini di Didattica della Matematica*" (Campulucci et al., 2006).

Fandiño Pinilla M. I. (2005) raccoglie gli errori tipici commessi dagli studenti sui numeri razionali ricercandoli sia nel contesto della letteratura internazionale che nei temi della Didattica della Matematica.

- **Errori di ordinamento**
  Molto spesso gli studenti riscontrano difficoltà nell'ordinare frazioni e numeri decimali.
  Per quanto riguarda le frazioni l'errore che spesso viene commesso è quello di ordinare la frazione solo rispetto al denominatore (senza quindi tener conto del numeratore) o al numeratore (senza quindi tener conto del denominatore).
  Gli allievi riescono abbastanza bene ad ordinare i numeri decimali solo quando la parte decimale risulta avere lo stesso numero di cifre. Per esempio, non si riscontrano particolari difficoltà quando si richiede di ordinare i numeri decimali 2,3 e 2,5. Infatti, a parità di parte decimale, 3 è minore di 5 per cui si avrà $2,3 < 2,5$.
  I problemi nascono dalla richiesta di ordinare numeri decimali che presentano la parte decimale con diverso numero di cifre. Per esempio, considerando i numeri decimali 2,3 e 2,15 gli studenti tendono ad ordinarli come segue: $2,3 < 2,15$. L'osservazione che viene fatta dai discenti è che, a parità di parte decimale, 3 è minore di 15.
  L'errore è relativo al numero decimale 2,3. Infatti, 2,3 è equivalente a 2,30 ma quasi mai nelle scuole viene utilizzata la seconda scrittura. Ciò provoca una mi-

sconcezione[3] nel discente.
Un'altra causa di tale misconcezione si può ricercare nel fatto che gli studenti tendono ad estendere ai numeri razionali la nozione di successore appresa relativamente ai numeri naturali. Ciò mostra un mancato apprendimento della struttura e del linguaggio dei numeri razionali.

- **Errori nelle operazioni**
  L'errore più comune commesso dagli studenti è quello di estendere la regola per la moltiplicazione di frazioni ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$) anche alla loro addizione e sottrazione:

  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

  Si tratta di vero e proprio contratto didattico[4].
  Lo studente non ritiene necessariamente vero quanto scritto. Essendo quella scrittura simile a quanto proposto dal docente per la moltiplicazione, suppone semplicemente che possa soddisfare la richiesta dell'insegnante.
  Il fatto che non si riscontrino particolari difficoltà nell'esecuzione della moltiplicazione tra frazioni è spesso dovuto alla mera applicazione di una semplice regola formale piuttosto che ad un'avvenuta costruzione mentale del concetto di moltiplicazione.
  Quanto detto sulla moltiplicazione tra frazioni non risulta essere vero per quanto concerne la moltiplicazione tra decimali. Molti studenti commettono l'errore di valutare il risultato dell'operazione $3 \times 0,2$ maggiore di quello dell'operazione $3 \div 0,2$. Ciò è dovuto al fatto che il modello intuitivo a cui fanno riferimenti gli studenti per la moltiplicazione in $\mathbb{Q}^a$ risulta erroneamente coincidere con il modello creatosi per la moltiplicazione in $\mathbb{N}$.

- **Errori nelle equivalenze**
  Per quanto riguarda le equivalenze, si è notato che gli alunni riscontrano maggiori difficoltà quando occorre passare da numeri al numeratore e denominatore

[3] "*Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione. Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute*" (D'Amore, 2003).

[4] "*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo d'insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*" (Brousseau, 1980).

grandi a numeri piccoli piuttosto che viceversa. Per esempio, considerando le due uguaglianze seguenti

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{?} \qquad \text{e} \qquad \frac{8}{6} = \frac{4}{?}$$

gli studenti risolvono più facilmente la prima.

- **Errori nella riduzione ai minimi termini**
  Legato al problema relativo alle equivalenze è il problema della riduzione ai minimi termini. Quando bisogna ridurre una frazione ai minimi termini occorre dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero.
  Molte volte accade che l'operazione di divisione viene associata ad una "cancellazione" dei numeri comuni presenti al numeratore e al denominatore. Ciò porta lo studente a commettere errori.
  Si supponga di richiedere agli studenti di ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{4}{8}$.
  L'errore commesso è il seguente: $\frac{4}{8} = \frac{4}{4\cdot 2} = \frac{}{2} = \frac{0}{2}$.
  Avendo "cancellato" il 4 gli allievi suppongono che al numeratore "non ci sia nulla".
  Ciò può essere sintomo di una misconcezione causata dalle conoscenze precedentemente acquisite relative all'operazione di sottrazione. Quando in una sottrazione "non resta nulla" vuol dire che bisogna porre lo 0 e di conseguenza pongono lo 0 al numeratore.

- **Errori relativi all'utilizzo di figure non standard**
  Nella maggior parte dei casi i docenti privilegiano l'uso di figure standard sia nella parte introduttiva sulle frazioni che nella proposta di esercizi da far svolgere agli allievi. Questo genera una misconcezione per cui gli studenti si convincono che è possibile trovare frazioni solo di quelle figure standard che gli sono state mostrate. Ciò è dovuto alla creazione precoce da parte degli allievi di un modello che racchiude esclusivamente le immagini standard escludendo dunque ogni altra possibile figura. Questo comporta la mancata padronanza della noetica delle frazioni.

- **Errori nel passaggio dalla frazione all'unità**
  Un errore frequente si riscontra negli esercizi inversi cioè quelli che richiedono, data una frazione, di trovare l'unità che l'ha generata.
  Si supponga di considerare la figura seguente che rappresenta $\frac{2}{3}$ dell'unità:

Per riuscire a determinare l'unità richiesta occorre che gli studenti applichino sulla

frazione un ragionamento inverso rispetto a quello che gli è stato sempre insegnato (dividere l'unità in tante parti quanto indica il denominatore e prendere tante parti quanto indicato al numeratore). In questo caso infatti i discenti dovranno suddividere la figura in questione in tante parti quante indicate al numeratore e prenderne tante quante indicate dal denominatore.
La difficoltà è proprio questa: gli studenti tendono ad applicare la regola usuale senza considerare che si sta richiedendo di eseguire un'operazione inversa.

4.3 Particolari difficoltà per studenti discalculici

Nello studio delle frazioni, rispetto allo studio dei numeri naturali, è richiesta una maggiore memoria visuo-spaziale di lavoro (Halford, 2007) e un miglior controllo inibitorio[5] (Siegler et al., 2013).
Diversi studi hanno evidenziato come proprio le carenze nelle funzioni che coinvolgono la memoria di lavoro verbale e/o visuo-spaziale sono caratteristiche della discalculia evolutiva (Hitch & McAuley, 1991; Passolunghi & Siegel, 2001, 2004; Keeler & Swanson, 2001; Bull et al., 2008; Swanson, 2006; Geary, 2004) e come la memoria di lavoro sia correlata alle performance matematiche (Geary, 2011; Swanson, 2011; Passolunghi & Lanfranchi, 2012).
Ulteriori studi hanno mostrato come il controllo inibitorio sia strettamente correlato allo sviluppo delle abilità matematiche (Bull & Scerif, 2011; Espy et al., 2004; Blair & Razza, 2007; Swanson, 2011; Marzocchi et al., 2002) e questo risulta carente nella discalculia evolutiva (Szücs et all., 2013).
L'esecuzione di operazioni numeriche richiede il coordinamento di diversi processi mentali sia spaziali che temporali ed il recupero di fatti aritmetici. Il mancato controllo inibitorio potrebbe dunque interferire nell'organizzazione di questi processi (Szücs et al., 2013).
Per tali motivi le prestazioni matematiche che richiedono una visualizzazione implicita o esplicita risultano particolarmente difficoltose per questi studenti.
La ricerca scientifica ha evidenziato che l'approccio visivo non-verbale, cinestetico e uditivo risultano essere canali preferenziali per gli studenti con disturbi nell'apprendimento matematico per l'elaborazione di informazioni (Stella & Grandi, 2011).
Ciò viene riscontrato anche negli studi inerenti la didattica della matematica i quali hanno evidenziato che le esperienze senso-motorie, percettive e cinestetiche risultano fondamentali per la formazione dei concetti matematici (Arzarello, 2006; Gallese & Lakoff, 2005; Nemirovky 2003; Radford, 2003).
È necessario quindi l'uso di strumenti specifici per la risoluzione di problemi per favorire la costruzione dei concetti matematici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

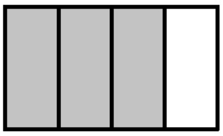
[5] Per controllo inibitorio si intende la capacità di ignorare le informazioni irrilevanti o i fattori distraenti.

Gli studi condotti da Mazzocco et al. (2013) mostrano come i discenti discalculici presentino significative misconcezioni sulle diverse rappresentazioni utilizzate per le frazioni. Ciò viene evidenziato dagli errori commessi nell'ordinare un insieme di frazioni, nell'incapacità di riconoscere frazioni equivalenti e dalle difficoltà riscontrate nell'utilizzo della rappresentazione decimale.
È stato rilevato che le diverse forme di rappresentazione dei numeri razionali (simbolica, grafica e decimale) hanno un impatto differente sugli studenti discalculici. Tali studenti riscontrano maggiori difficoltà nella rappresentazione simbolica numerica delle frazioni rispetto a quelle figurate.

Una delle difficoltà che i discenti discalculici hanno rispetto ai loro coetanei che presentano difficoltà in ambito matematico è l'insuccesso che riscontrano nel confrontare coppie di frazioni rappresentate numericamente.
In particolare è stato osservato che gli studenti con difficoltà in ambito matematico riscontrano minori difficoltà nel confrontare insiemi di frazioni nei quali è presente la frazione $\frac{1}{2}$ rispetto ad insiemi di frazioni che non contengono tale frazione. Per tali studenti risulta più semplice concettualizzare la frazione $\frac{1}{2}$ in quanto fin da piccoli hanno una conoscenza intuitiva di tale frazione (Hunting & Davis, 1991).
Lo stesso risultato non viene rilevato negli studenti con discalculia i quali mostrano avere una concettualizzazione atipica del concetto di frazione non riconoscendo che questa rappresenta una specifica quantità. Infatti, gli studenti con DSA tendono a considerare numeratore e denominatore della frazione come numeri naturali indipendenti (NI & Zhou, 2005).
Lewis (2016) ha mostrato che nella risoluzione di problemi relativi al confronto di frazioni, tra cui $\frac{1}{2}$, gli studenti con discalculia prendono in considerazione solo il denominatore cosicché erroneamente giudicano, ad esempio, la frazione $\frac{1}{3}$ maggiore di $\frac{1}{2}$ presupponendo di dover dividere l'unità-tutto in un numero maggiore di parti nel primo caso.
Inoltre lo studio di Mazzocco et al. (2013) ha evidenziato come la corretta concettualizzazione della frazione $\frac{1}{2}$ da parte degli studenti non discalculici ha permesso loro di estendere tale concetto anche alle frazioni più "difficili" (cioè quelle diverse da $\frac{1}{2}$).
Di contro, gli studenti discalculici non godono di questo vantaggio proprio a causa della mancata concettualizzazione della frazione $\frac{1}{2}$.

Un'altra difficoltà riscontrata dagli studenti con discalculia è nel confronto di frazioni che presentano stesso numeratore o stesso denominatore. Tali studenti apprendono lentamente che, considerate due frazioni con stesso numeratore, quella con denominatore maggiore rappresenta la grandezza minore. Una volta accettata tale regola, viene erroneamente applicata anche al caso in cui le due frazioni da confrontare presentano lo stesso denominatore.
Dunque, se da una parte si riscontra il successo di tali studenti nel confronto tra frazioni

con stesso numeratore, viene anche rilevato l'insuccesso ottenuto nel confrontare frazioni con uguale denominatore (Mazzocco et al., 2013).
Un'ulteriore misconcezione relativa al confronto di frazioni con stesso denominatore rappresentate per via grafica è stata evidenziata da Lewis (2016) notando che gli studenti con discalculia, spesso interpretano la frazione osservata non come rappresentante il valore della frazione stessa, bensì come rappresentante il complementare della frazione in esame. Per esempio, considerando la rappresentazione grafica della frazione $\frac{3}{4}$,



questa viene interpretata come $\frac{1}{4}$.

Mazzocco et al. (2013) hanno evidenziato come l'utilizzo di rappresentazioni grafiche, di uso frequente nella scuola primaria, favorisce l'apprendimento concettuale delle frazioni. Ciò permetterà agli studenti, nella scuola media, di acquisire nuove forme di rappresentazione tra cui quella numerica.
Quanto detto non è del tutto vero per gli studenti discalculici. Infatti, se da un lato l'uso di rappresentazioni figurate favorisce l'apprendimento dell'oggetto matematico "frazione", dall'altro viene fatto uso concreto di tali rappresentazioni da parte dei discenti con discalculia i quali non riescono a considerarle come rappresentazioni astratte delle frazioni. Ciò comporta la mancata concettualizzazione di tale argomento e l'insuccesso nella comprensione delle altre rappresentazioni introdotte nei successivi anni d'istruzione tra cui quella simbolica.

Vygotsky (1981) afferma che lo sviluppo umano procede rispetto due direzioni: quella biologica e quella socioculturale. Tipicamente tali direzioni di sviluppo tendono ad intersecarsi.
Non è così per gli individui che presentano disabilità. Infatti, per tali individui, gli strumenti socioculturali sviluppatisi nel corso della storia potrebbero risultare incompatibili con lo sviluppo biologico di ciascuno di essi (Vygotsky, 1993).
Nel caso di discenti discalculici, gli strumenti tipicamente utilizzati per lo sviluppo delle abilità matematiche potrebbero risultare incompatibili con il modo che tali studenti hanno di elaborare cognitivamente le informazioni numeriche.

Capitolo 5

Caso studio con E. e V.

Obiettivo del percorso didattico progettato è la comprensione delle frazioni, dei numeri decimali e il loro posizionamento sulla retta. Tale percorso è sottoposto a due studentesse: E. frequentante la classe terza e V. frequentante la classe prima della scuola secondaria di primo grado. Entrambe le studentesse presentano DSA e precisamente discalculia.
Le discenti frequentano la Cooperativa Anastasis, una software house e un centro di formazione che lavora con persone con bisogni educativi speciali (BES) e disabilità (www.anastasis.it).
In particolare, il disturbo di V. risulta essere più grave rispetto a quello di E..

5.1 Materiali e metodi

Per valutare le conoscenze possedute dalle due discenti relativamente ai concetti di percentuale, frazioni e numeri decimali viene sottoposto loro un test di ingresso.
Lo stesso è poi sottoposto alle allieve al termine delle quattro lezioni per valutare l'effetto di queste ultime sulle loro conoscenze.
Il test in questione è strutturato selezionando 7 domande invalsi sottoposte nelle classi quinta della scuola primaria e prima della scuola secondaria di primo grado e costruendone ulteriori 5 simili alle precedenti. Tutti i quesiti presentano lo stesso ambito (numeri) e 11 su 12 riguardano lo stesso processo: conoscere diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...). In particolare, vi sono quattro quesiti che richiedono il riconoscimento dell'equivalenza ed il confronto tra le rappresentazioni percentuali, frazionarie e decimali dei numeri razionali e otto quesiti che presentano come richiesta il posizionamento di frazioni e numeri decimali sulla retta.

Si è previsto lo svolgimento di quattro lezioni nelle quali vengono affrontate alcune rappresentazioni dei numeri razionali ed il posizionamento sulla retta di frazioni e numeri decimali. Precisamente:

- **lezione 1**: percentuali 100%, 50%, 25% e 12,5% e loro rappresentazione mediante frazioni; posizionamento di queste ultime sulla retta numerica;

- **lezione 2**: percentuale 75% e sue rappresentazioni frazionarie; posizionamento di queste ultime sulla retta numerica;

- **lezione 3**: percentuali 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100% e loro rappresentazione mediante frazioni; posizionamento di queste ultime sulla retta numerica;

- **lezione 4**: numeri decimali con particolare riguardo al significato della parte decimale; loro posizionamento sulla retta.

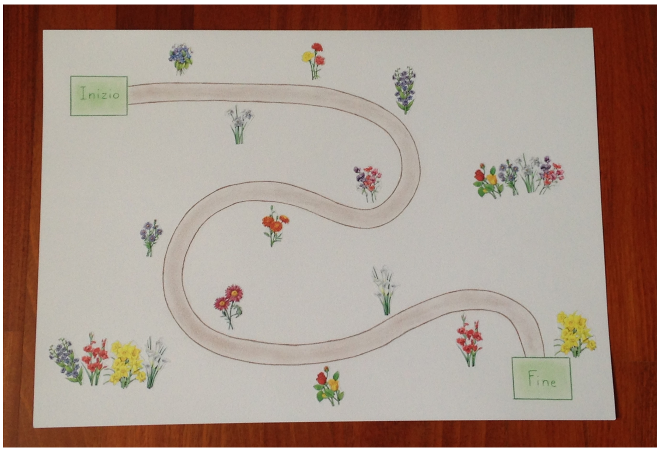
I materiali utilizzati per le quattro lezioni sono di seguito elencati.

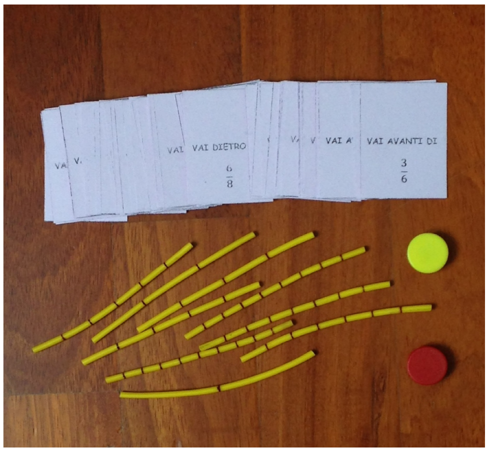
- **Lezione 1**: un contenitore trasparente avente la funzione di intero; due scatole rosa ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{2}$; quattro scatole verdi ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{4}$; otto scatole gialle ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{8}$; tre rappresentazioni del contenitore suddiviso rispetto l'unità di misura $\frac{1}{2}$, tre rispetto l'unità di misura $\frac{1}{4}$ e tre rispetto l'unità di misura $\frac{1}{8}$;colori; una scheda strutturata (appendice A); un cartoncino su cui è disegnata una retta; un cartoncino piccolo bianco indicante lo 0; due cartoncini piccoli rosa indicanti le frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{2}$; tre cartoncini piccoli verdi indicanti le frazioni $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{4}$; quattro cartoncini piccoli gialli indicanti le frazioni $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{8}{8}$.

- **Lezione 2**: : un contenitore trasparente avente la funzione di intero; due scatole rosa ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{2}$; quattro scatole verdi ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{4}$; otto scatole gialle ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{8}$; due rappresentazioni del contenitore suddiviso rispetto l'unità di misura $\frac{1}{4}$ e due rispetto l'unità di misura $\frac{1}{8}$; colori; una scheda strutturata (appendice B); un cartoncino su cui è disegnata una retta in cui sono posizionate le frazioni introdotte nella lezione 1; un cartoncino piccolo verde indicante la frazione $\frac{3}{4}$; un cartoncino piccolo giallo indicante la frazione $\frac{6}{8}$.

- **Lezione 3**: un contenitore trasparente avente la funzione di intero; dieci scatole azzurre ciascuna rappresentante l'unità di misura $\frac{1}{10}$; tre rappresentazioni del contenitore suddiviso rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$; colori; una scheda strutturata (appendice C); un cartoncino su cui è riportata la retta sulla quale sono posizionate le frazioni introdotte nelle due precedenti lezioni ed un'ulteriore retta suddivisa con la nuova unità di misura; dieci cartoncini piccoli azzurri indicanti le frazioni da $\frac{1}{10}$ a $\frac{10}{10}$.

- **Lezione 4**: un foglio in cui è riportata una retta suddivisa rispetto l'unità di misura $\frac{1}{8}$; un foglio in cui è riportata una retta suddivisa rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$.
  Gioco dell'oca: un cartoncino riportante il percorso, l'inizio, la fine e dodici fiori su ciascuno dei quali è posizionata una tessera del puzzle; segnaposto; mazzo di carte indicanti la frazione o il numero decimale di cui bisogna spostarsi in avanti o all'indietro lungo il percorso; dodici tessere componenti il puzzle (obiettivo del gioco); nove "bastoncini" taccati rispetto le nove diverse unità di misura ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$).





In accordo con i principi seguiti da Robotti et al. (2007), le lezioni sono progettate tenendo in considerazione l'importanza dei ruoli svolti dalle esperienze percettive e cinestetiche nella formazione dei concetti matematici, dai canali di accesso uditivi e visivi-non verbali per l'elaborazione delle informazioni e dalla discussione inerente concetti e procedure matematiche. Tale approccio favorisce una migliore comprensione dei concetti matematici e ancor di più sarà d'aiuto ai discenti con discalculia.
Si è scelto di affrontare il tema delle frazioni facendo leva sulle conoscenze preesistenti delle discenti riguardo il significato di questi numeri (Moss & Case, 1999). Pertanto si è scelto di partire utilizzando il linguaggio comune, adoperato nella quotidianità (tutto, metà, metà della metà, ecc.) per poi introdurre le percentuali ed infine affrontare la notazione frazionaria e decimale.
Alcuni studi hanno mostrato come la trattazione delle percentuali, posponendo ad essa l'introduzione delle frazioni e dei numeri decimali, presenti diversi vantaggi:

- gli studenti possiedono una buona conoscenza delle percentuali grazie alle esperienze di vita quotidiana (Parker & Leinhardt, 1995) e sono in grado di fornire al valore numerico un attributo qualitativo, ad esempio 100% significa tutto (Moss & Case, 1999);

- Noelting (1980) ha mostrato che i discenti di 10/11 anni possiedono una idea intuitiva ben sviluppata riguardo le proporzioni e i numeri naturali da 1 a 100. Le percentuali permettono di unificare tali intuizioni in modo del tutto naturale;

- l'utilizzo delle percentuali permette di evitare, in un primo momento, il confronto tra frazioni con diverso denominatore semplificando così il processo di acquisizione di procedure di calcolo e di confronto (Moss & Case, 1999);

- ogni valore percentuale ha un'equivalente scrittura frazionaria o decimale facile da determinare. Viceversa non tutte le frazioni sono facilmente rappresentabili in percentuale (basti pensare di voler trovare l'equivalente percentuale della frazione $\frac{1}{7}$). Dunque, l'introduzione delle percentuali permette agli studenti di operare una prima conversione tra tipologie diverse di rappresentazione in maniera diretta e intuitiva favorendo così una migliore comprensione delle correlazioni tra le rappresentazioni percentuali, decimali e frazionarie (Moss & Case, 1999).

Si è scelto poi di focalizzare l'attenzione sul posizionamento di tali numeri sulla retta in quanto l'acquisizione di tale nozione risulta essere importante per l'apprendimento dei numeri razionali (Siegler et al., 2013). Inoltre, l'insieme dei razionali assoluti rappresenta una prima estensione dell'insieme dei numeri naturali. Di qui la necessità di attribuire alle frazioni, e più in generale ai numeri razionali, una specifica posizione sulla retta (Bobis et al., 2013; Bartolini Bussi et al., 2013).
L'utilizzo del contenitore e delle scatole sopra descritti riflette l'importanza rivestita dal comprendere come tali numeri possano essere posizionati sulla retta numerica. Il contenitore, posto orizzontalmente e coincidente con la retta disegnata sul cartoncino, permette di posizionare correttamente le frazioni in esame in maniera chiara e semplice. L'utilizzo di scatole rappresentanti diverse unità di misura permette di avere una corrispondenza immediata tra le rappresentazioni linguistica e percentuale e la notazione frazionaria ed inoltre di lavorare sul confronto di frazioni evidenziando l'equivalenza tra alcune di esse e mostrando in maniera chiara come tali frazioni occupino lo stesso punto sulla retta numerica. Infine, la scelta di associare un colore per ciascuna unità di misura adoperata favorisce la memoria di lavoro e la memoria a lungo termine sviluppando più facilmente concetti che potranno essere richiamati e riutilizzati (Baccaglini-Frank & Robotti, 2013). Tale scelta va incontro alle esigenze dei discenti con discalculia che riscontrano difficoltà nell'utilizzo dei canali di tipo verbale come evidenziato da Stella & Grandi (2011a).

5.2 Descrizione delle lezioni

Lezione 1: obiettivo della prima lezione è apprendere le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{4}{8}, \frac{8}{8}$ e posizionarle sulla retta, acquisire la nozione di equivalenza tra le frazioni $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ e $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{8}{8}$, posizionare sulla retta frazioni con denominatore qualsiasi.
La prima parte della lezione si struttura con una serie di richieste fatte alle studentesse. Precisamente:

- utilizzare le scatole rosa per rappresentare:
    - tutto e metà del contenitore,
    - 100% e 50% del contenitore,
    - $\frac{2}{2}$ e $\frac{1}{2}$ del contenitore;
- utilizzare le scatole verdi per rappresentare:

- tutto, metà e metà della metà del contenitore,
- 100%, 50% e 25% del contenitore,
- $\frac{4}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$ del contenitore;

- utilizzare le scatole gialle per rappresentare:
    - tutto, metà, metà della metà e metà della metà della metà del contenitore,
    - 100%, 50%, 25% e 12,5% del contenitore,
    - $\frac{8}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{8}$ del contenitore;

Al termine di ciascuna richiesta viene fornita loro una rappresentazione del contenitore suddiviso rispetto l'unità di misura relativa a ciascuna di esse. Viene chiesto alle discenti di colorare la porzione di contenitore corrispondente alla quantità richiesta.
Allineando tali rappresentazioni si giunge alla costruzione di una scheda strutturata (appendice A).
Viene poi mostrato loro un cartoncino rappresentante una retta suddivisa in ottavi e sono stati forniti piccoli cartoncini rappresentanti le frazioni suddette (il colore dei cartoncini riprende il colore delle scatole rappresentanti ciascuna unità di misura, quindi, per esempio, la frazione $\frac{1}{4}$ è stampata su cartoncino verde). È richiesto alle studentesse di posizionare tali frazioni sulla retta.
Al fine di generalizzare il processo di posizionamento di frazioni ad una qualunque frazione viene costruita con le discenti una mappa concettuale (appendice D). Quest'ultima focalizza l'attenzione sugli aspetti procedurali da eseguire per riuscire a posizionare le frazioni sulla retta. La costruzione di tale mappa risulta importante per gli studenti con discalculia nei quali si riscontra una memoria procedurale deficitaria.

Lezione 2: obiettivo della seconda lezione è apprendere e posizionare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ sulla retta numerica e apprendere l'equivalenza tra esse.
È richiesto alle studentesse di riempire il 75% del contenitore utilizzando come credessero più opportuno le scatole utilizzate nella lezione 1.
Vengono poi fatte quattro richieste:

- utilizzare le scatole verdi per rappresentare
    - 75% del contenitore,
    - $\frac{3}{4}$ del contenitore;
- utilizzare le scatole gialle per rappresentare
    - 75% del contenitore,
    - $\frac{6}{8}$ del contenitore.

Al termine di ciascuna richiesta viene fornita loro una rappresentazione del contenitore suddiviso rispetto l'unità di misura relativa a ciascuna di esse. Viene chiesto alle discenti di colorare la porzione di contenitore corrispondente alla quantità richiesta.
Allineando tali rappresentazioni con quelle ottenute nella lezione 1 si giunge alla costruzione di una nuova scheda strutturata (appendice B).
Viene mostrato loro il cartoncino rappresentante la retta della lezione precedente e due cartoncini piccoli, rispettivamente verde e giallo, rappresentati le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$. È chiesto alle studentesse di posizionare tali frazioni sulla retta.

Lezione 3: obiettivo di questa lezione è apprendere e posizionare sulla retta le frazioni da $\frac{1}{10}$ a $\frac{10}{10}$ e riconoscere l'equivalenza delle frazioni $\frac{5}{10}$ e $\frac{10}{10}$ rispettivamente con le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ e $\frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$ precedentemente studiate.
Viene richiesto alle discenti di utilizzare le scatole azzurre per rappresentare:

- tutto e metà del contenitore,
- 100% e 50% del contenitore,
- $\frac{10}{10}$ e $\frac{5}{10}$ del contenitore.

Al termine di ciascuna richiesta viene fornita loro una rappresentazione del contenitore suddiviso in decimi. Viene chiesto alle discenti di colorare la porzione di contenitore corrispondente alla quantità richiesta.
Allineando tali rappresentazioni con quelle ottenute nella lezione 1 e 2 si giunge alla costruzione di un'ultima scheda strutturata (appendice C).
Tale scheda è certamente uno strumento che potrà favorire il riconoscimento immediato ed una acquisizione del concetto di equivalenza tra frazioni e tra diverse rappresentazioni.
È poi chiesto alle alunne di riempire il 10% del contenitore ed in seguito di riempire il contenitore del 20%, 30%, 40%, 60%, 70%, 80%, 90%.
In seguito viene fatta un'ulteriore domanda: esprimere tali percentuali in frazioni ricordando quanto fatto nelle lezioni precedenti, adoperando le scatole azzurre fornite loro e prestando attenzione all'unità di misura che si sta utilizzando.
Infine viene mostrato alle studentesse il cartoncino contenente la retta con le frazioni posizionate nelle precedenti lezioni. In tale cartoncino viene aggiunta un'ulteriore retta, parallela alla precedente, suddivisa in decimi. Forniti loro i cartoncini piccoli azzurri rappresentanti le frazioni da $\frac{1}{10}$ a $\frac{10}{10}$, è richiesto di posizionarle sulla retta.

Lezione 4: tale lezione si articola in due momenti. Obiettivo della prima parte della lezione è posizionare i numeri decimali sulla retta e scoprire una nuova possibile interpretazione della parte decimale di tali numeri. Obiettivo della seconda parte è riepilogare i tratti salienti degli argomenti affrontati nel corso delle lezioni.
Per quanto riguarda la prima parte della lezione vengono mostrate alle studentesse due

rette, una suddivisa in ottavi e l'altra in decimi ed è chiesto loro di posizionarvi alcuni numeri decimali. Si è voluto evidenziare come la parte decimale di tali numeri può essere interpretata come distanza percentuale tra i numeri interi in cui esso è compreso.
Al fine di riepilogare quanto visto nel corso delle lezioni e di verificare la corretta acquisizione da parte delle studentesse delle nozioni di frazione e numero decimale, viene proposto alle discenti il gioco seguente.
Gioco dell'oca: viene mostrato alle discenti un cartellone in cui vi è raffigurato il percorso da seguire. Obiettivo del gioco è raccogliere i dodici pezzi del puzzle. Ciascuna studentessa è fornita di una pedina con cui potrà spostarsi avanti o indietro lungo il percorso, di nove "bastoncini" ciascuno dei quali è suddiviso secondo nove differenti unità di misura ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$) e di un mazzo di carte da cui pescare. Queste ultime indicano alla discente di quanto muoversi in avanti o indietro nel percorso attraverso un numero decimale o una frazione.

5.3 Caso E.

5.3.1 Test di ingresso

Si analizzano di seguito i risultati ottenuti dalla studentessa E. al test di ingresso.

D1: tale domanda è stata somministrata a discenti del quinto anno della scuola primaria di primo grado e richiede di riconoscere l'equivalenza tra diverse rappresentazioni dei numeri razionali.

Come si può osservare in figura, E. ha utilizzato due simboli diversi per mostrare le rappresentazioni equivalenti. Precisamente, ha riconosciuto che 1 è metà di 2 per cui la frazione $\frac{1}{2}$ è equivalente al 50% e che 5 è metà di 10 per cui la frazione $\frac{5}{10}$ è equivalente al 50% ma non ha riconosciuto l'equivalenza tra le frazioni suddette. Infatti E. ha cerchiato doppiamente la rappresentazione percentuale.
Va notato che a livello nazionale solo il 37,4% degli alunni ha fornito una risposta corretta a tale domanda (www.gestinv.it).

D2: anche questa domanda, come la precedente, è stata somministrata a discenti del quinto anno della scuola primaria e richiede di riconoscere l'equivalenza tra la rappresentazione frazionaria e decimale dei numeri razionali.

D2. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☒ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Si, perché valgono entrambi la metà di un intero

In questo caso E. non è stata in grado di riconosce l'equivalenza tra le scritture frazionaria e decimale per cui fornisce la risposta C. Tuttavia, come si vedrà nel seguito, nello svolgimento degli esercizi di rappresentazione di frazioni sulla retta, ha adoperato la calcolatrice per trasformare le frazioni in numeri decimali.
La percentuale di risposte corrette fornite a livello nazionale è stata del 53,4%. In particolare il 15,3% dei discenti ha fornito la risposta C, il 19% quella B ed infine il 9,1% la risposta A (www.gestinv.it).

D3: la domanda è stata sottoposta a discenti della prima classe della scuola secondaria di primo grado e richiede di confrontare tre numeri razionali aventi tre diverse rappresentazioni.

D3. Carla, Luca e Gianni comprano un sacchetto di caramelle. Carla mangia $\frac{1}{5}$ delle caramelle, Luca i **due decimi**, Gianni il 20%. Chi ne mangia di più?

- ☐ A. Carla
- ☒ B. Luca
- ☐ C. Gianni
- ☐ D. Nessuno: tutti ne mangiano lo stesso numero

Per rispondere a questo quesito E. ha, innanzitutto, ragionato sulle scritture 20% e $\frac{1}{5}$ chiedendosi se fossero o meno uguali. Tuttavia, una volta convintasi dell'uguaglianza delle rappresentazioni suddette, ha fornito la risposta errata.
È possibile che E. non avesse tenuto conto dei diversi denominatori presenti nelle frazioni $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$ ed avesse, per questo motivo, dato la risposta B.
Tale domanda presenta una triplice richiesta. Innanzitutto trasformare il 20% e i "due decimi" in frazione, trovare per ciascuna delle tre frazioni una frazione equivalente avente

stesso denominatore ed infine confrontarne i numeratori.
A livello nazionale il 42,6% dei discenti ha fornito la risposta corretta mentre il 53,3% quella errata preferendo, tra queste, la risposta C (www.gestinv.it).

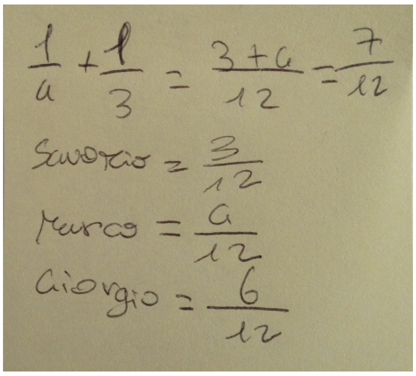
D4: tale domanda è stata sottoposta a discenti della classe quinta della scuola primaria e, come la precedente, richiede di confrontare tre numeri razionali due dei quali presentati in notazione frazionaria.

D4. Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$, a Giorgio la **metà**.

Chi dei tre ha speso di più in quella settimana?

Risposta: ha soeso di più Saverio

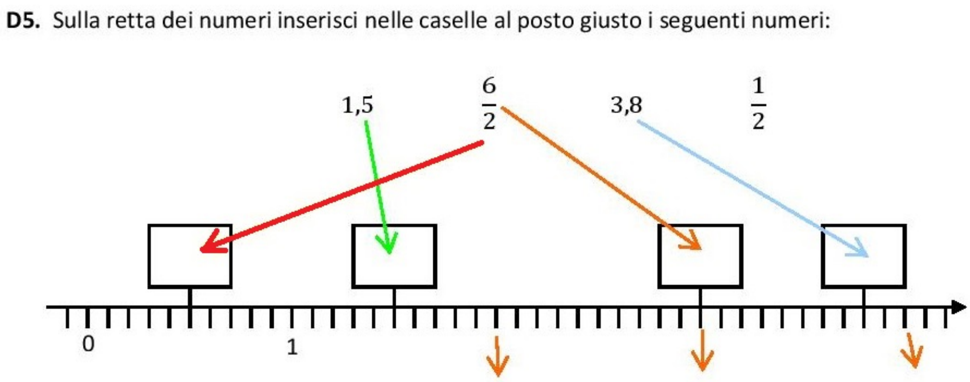
E. ha risposto correttamente a questa domanda.
È importante notare il ragionamento da lei eseguito.



Come si può vedere, come prima cosa E. ha eseguito una somma tra le frazioni presenti nel testo del quesito. Ciò palesa la presenza del contratto didattico: viste nel testo delle frazioni, E. si aspetta di dovervi eseguire una qualche operazione per poter rispondere al quesito.
In seguito è stata in grado di riconosce l'equivalenza dell'espressione "metà" con la frazione $\frac{1}{2}$, ha trasformato ciascuna frazione rispettivamente in frazioni equivalenti, ne ha confrontato i numeratori e ha fornito la risposta esatta.
Solo il 36,6% dei discenti, a livello nazionale, ha fornito la risposta corretta (www.gestinv.it).
Va fatta un'osservazione sul testo e sulla domanda presenti nel quesito. Mentre il testo descrive la somma di denaro che rimane ai tre nipoti, la domanda richiede di determinare quale dei tre nipoti spende più denaro. Pertanto è possibile che i discenti avessero male interpretato la richiesta del quesito rispondendo rispetto chi per loro possedesse più

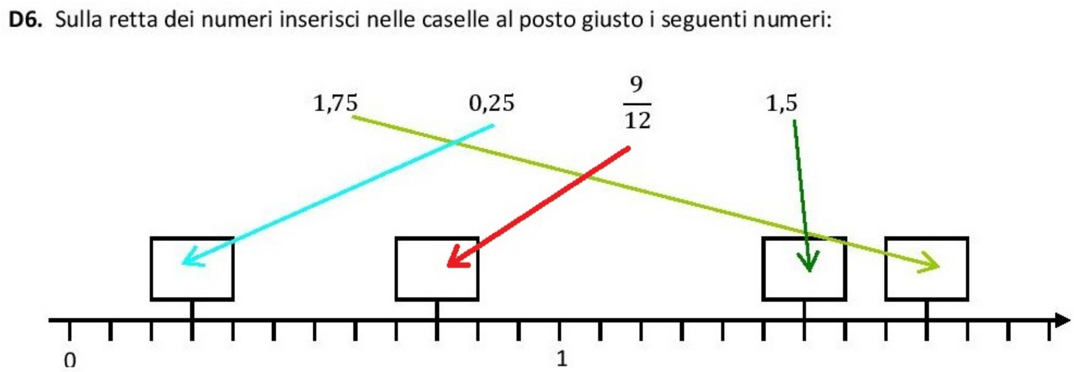
denaro.

D5: tale domanda è stata somministrata a discenti della classe quinta della scuola primaria e richiede di porre sulla retta quattro numeri razionali.



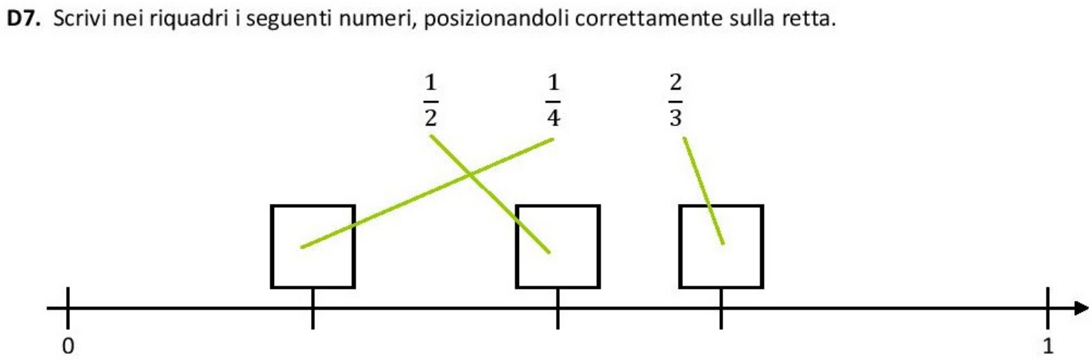
Innanzitutto E. ha riconosciuto l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta. Pertanto, come prima cosa, ha posizionato gli altri numeri interi sulla retta (in figura sono stati rappresentati mediante frecce piccole). In seguito ha posiziona i numeri decimali e in ultimo le frazioni.
Va notato che E. ha utilizzato la calcolatrice per trasformare le frazioni in decimali e dunque verificare di averli posizionati nel modo corretto. Infine, si osserva che probabilmente la freccia rossa in figura è riferita alla frazione $\frac{1}{2}$.
A livello nazionale il 42,6% dei discenti ha fornito la risposta corretta (www.gestinv.it).
Va osservato che la presenza dei riquadri nei quali porre i numeri razionali risulta essere di aiuto agli studenti per lo svolgimento del quesito.

D6: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso sono stati forniti tre decimali ed una frazione.



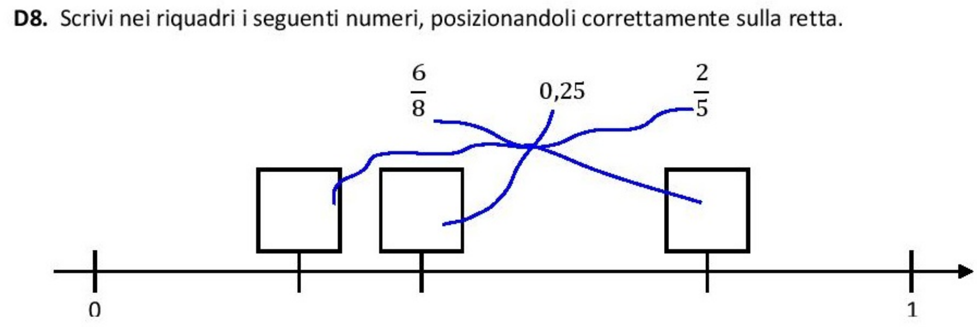
E. ha risposto correttamente al quesito. Come prima cosa ha posizionato i numeri decimali. In particolare, per posizionare il decimale 1,75 E. lo ha approssimato a 1,7 ed ha affermato che, essendo 7 maggiore di 5, 1,75 andrà dopo 1,5. Infine, per posizionare la frazione $\frac{9}{12}$, ha utilizzato la calcolatrice, eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore, per trasformare tale frazione in numero decimale.
Tale approccio è apparso strano in quanto E., nella precedente domanda D2, non è stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra la rappresentazione frazionaria e decimale.
Si osserva che nello svolgimento dei quesiti relativi al posizionamento di frazioni sulla retta E. utilizzerà sempre la calcolatrice per verificare la correttezza delle risposte fornite o per trasformare frazioni a lei poco note in decimali.

D7: il quesito è stato sottoposto ai discenti della classe prima della scuola secondaria di primo grado e richiede di posizionare sulla retta tre frazioni.



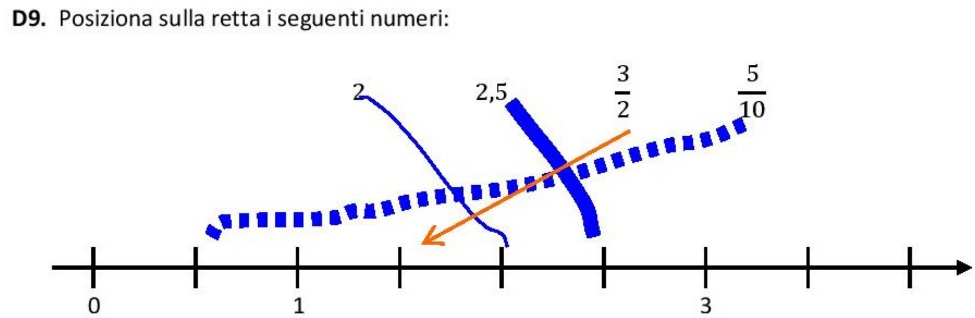
È importante osservare che E. ha inizialmente posizionato $\frac{1}{2}$ nel primo riquadro e $\frac{1}{4}$ nel secondo. In seguito ha utilizzato la calcolatrice per determinare i valori decimali corrispondenti alle tre frazioni presenti nel quesito e ha così corretto la risposta inizialmente data.
A livello nazionale solo il 34,2% dei discenti fornisce la risposta corretta (www.gestinv.it). Nonostante la presenza dei riquadri, la maggior parte degli studenti ha fornito la risposta errata probabilmente perché non sono stati in grado di suddividere la retta rispetto due diverse unità di misura.

D8: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso sono stati forniti un decimale e due frazioni.



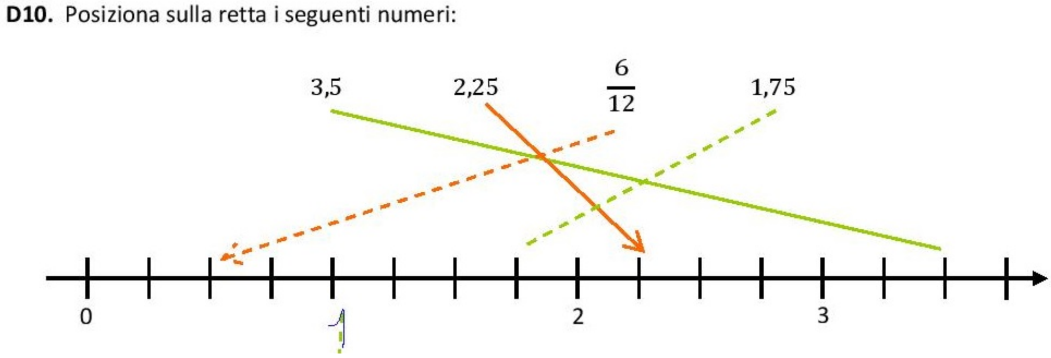
Nonostante E. avesse utilizzato la calcolatrice per determinare il numero decimale equivalente a ciascuna delle frazioni proposte nel testo, ha posiziona in maniera errata la frazione $\frac{2}{5}$. Inoltre, ha posizionato in maniera errata anche il numero decimale 0,25. Ciò può essere dovuto ad uno scorretto utilizzo della calcolatrice, probabilmente un errore di distrazione nel digitare i tasti.

D9: tale quesito è stato somministrato a discenti della classe prima della scuola secondaria di primo grado e richiede di posizionare sulla retta quattro numeri razionali.



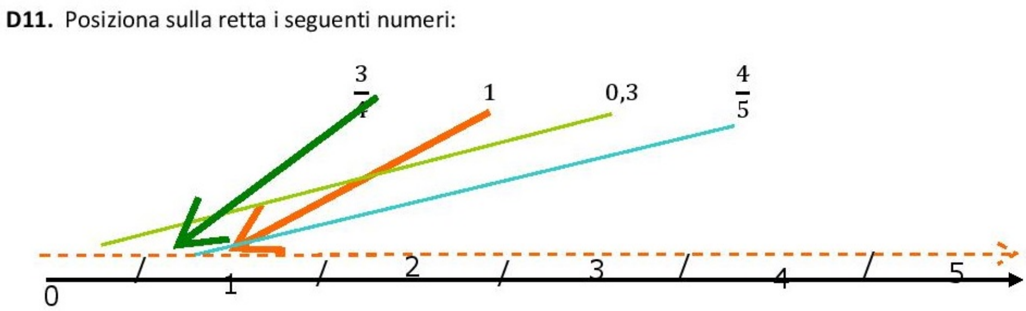
E. ha risposto correttamente al quesito. È stata in grado di riconosce l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta per cui ha posizionato correttamente l'intero 2 e il decimale 2,5. In seguito, con l'uso della calcolatrice, ha determinato i numeri decimali equivalenti alle due frazioni presenti nel testo e li ha posizionati sulla retta.
A livello nazionale l'85,1% dei discenti ha fornito la risposta errata mentre solo il 10,9% quella corretta (www.gestinv.it).
È qui evidente come l'assenza dei riquadri, che rappresentano un supporto al ragionamento, mette in difficoltà gli allievi.

D10: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso vengono forniti tre decimali ed una frazione.



Innanzitutto, E. ha cercato l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta e, una volta trovata, ha posizionato il numero intero 1. Avendo riconosciuto che l'unità di misura corrisponde a "4 tacche", è riuscita a posizionare correttamente il decimale 3,5, posizionandolo a due tacche di distanza dal 3. È importante notare come E. sia stata in grado di riconoscere che la parte decimale di 3,5 può essere interpretata come il 50% o la metà della distanza che separa gli interi 3 e 4. In seguito ha posizionato il decimale 2,25. Per farlo ha ragionato nel modo seguente: "25 è la metà di 50; se 50 corrisponde a 2 tacche allora 25 corrisponde a una tacca; quindi 2,25 va una tacca dopo il 2". La studentessa ha posizionato correttamente anche il decimale 1,75. Questa volta non ha eseguito un ragionamento sulle "metà" ma ha approssima 1,75 a 1,7 ed essendo 7 maggiore di 5 ha posizionato il decimale suddetto nella terza tacca dopo l'uno. Infine ha posizionato la frazione trasformandola in decimale mediante la calcolatrice.

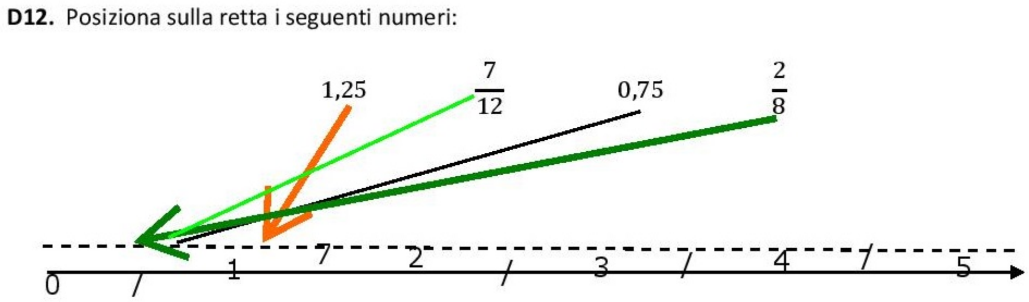
D11: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso la retta mostrata non presenta alcun tipo di riferimento.



Per prima cosa E. ha deciso di suddividere la retta fornita nel quesito utilizzando un'ulteriore retta tratteggiata e ha stabilito che ciascun trattino corrispondesse ad una tacca. Nel primo trattino ha posizionato lo 0. In seguito ha contato 5 trattini e ha posizionato una sbarra. Ne ha poi contati ulteriori 5 e ha posizionato 1. Ha proceduto nello stesso modo per taccare la retta e posizionarvi i naturali. Fatto ciò ha correttamente posizio-

nato 1, 0,3 e $\frac{4}{5}$. Per quanto riguarda la frazione $\frac{3}{4}$, E. ha utilizzato la calcolatrice per determinarne il decimale corrispondente. Osservato il risultato 0,75 lo ha approssimato a 0,7. Pertanto ha posizionato in maniera errata tale razionale sulla retta.
È possibile osservare come la suddivisione della retta, così come le posizioni dei razionali, non siano precise.

D12: tale quesito, come il precedente, è stato formulato seguendo le richieste della domanda D10 e presenta la retta senza alcun riferimento.



Come fatto nel quesito precedente, la studentessa si è costruita una retta tratteggiata in cui l'unità di misura corrisponde ad un trattino. In questo caso, E. ha posizionato in maniera errata tre dei razionali presenti nella domanda. Approssimando 1,25 a 1,20 e 0,75 a 0,70 ha posizionato in maniera errata entrambi i decimali. In seguito ha eseguito con la calcolatrice la divisione 7:12 e ha ottenuto come risultato $0,58\overline{3}$. Ha così deciso di approssimarlo a 0,6 e lo ha pertanto posizionato nel punto errato della retta. Infine ha posizionato correttamente la frazione $\frac{2}{8}$.

Come si può vedere, E. ha fornito il 50% di risposte corrette al test propostole.
In particolare, ha attribuito alla frazione principalmente significato operazionale. Infatti, ha fatto uso della calcolatrice per risolvere tutti i quesiti relativi al posizionamento di frazioni sulla retta.
Nonostante ciò non è stata in grado di riconosce l'equivalenza tra le rappresentazioni frazionaria e decimale.
Infine, è stata in grado di riconoscere in ciascun quesito inerente il posizionamento di razionali sulla retta un'unità di misura rispetto la quale dover posizionare i razionali.

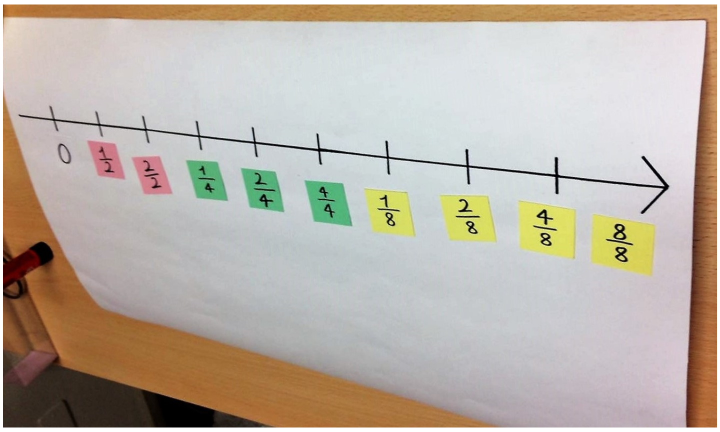
5.3.2 Lezioni

Si analizza di seguito il percorso di E. nel corso delle quattro lezioni.

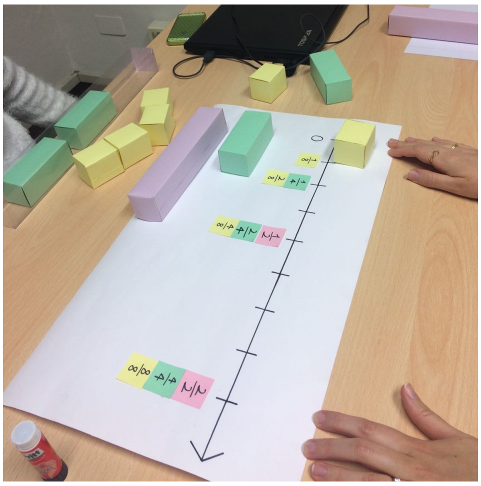
Lezione 1: nella prima parte della lezione sono state utilizzate le scatole rappresentanti diverse unità di misura con le quali riempire il contenitore rispetto percentuali e

frazioni diverse e le rappresentazioni del contenitore da colorare.
La studentessa non ha riscontrato difficoltà nell'eseguire quest'ultima attività. In particolare, nel colorare le porzioni di contenitore nelle quali le quantità richieste sono espresse in termini linguistici e percentuali ha utilizzato un ragionamento basato sulle "metà" mentre, nel caso delle frazioni, ha fatto riferimento al significato di queste ultime come parte-tutto.
È stata così costruita una prima scheda strutturata (appendice A). Le è stato chiesto di osservare tale scheda e di esporre alcune considerazioni a riguardo. È stata in grado di riconoscere che ci sono modi diversi con cui poter rappresentare "tutto", "metà", "metà della metà" e "metà della metà della metà". Ha osservato che è possibile rappresentare una data frazione utilizzando unità di misura differenti ed anche come somma di frazioni aventi unità di misura differenti. Per esempio, ha riconosciuto che la frazione $\frac{1}{2}$ può essere rappresentata utilizzando le unità di misura $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ ed anche come somma delle frazioni $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{8}$.

È stato poi chiesto ad E. di determinare una frazione equivalente a $\frac{1}{8}$. La studentessa ha mostrato la frazione $\frac{2}{16}$. Le è stato chiesto di motivare tale scelta e ha argomentato come segue: "il tutto è rappresentato da $\frac{16}{16}$, la metà da $\frac{8}{16}$, la metà della metà da $\frac{4}{16}$ e la metà della metà della metà da $\frac{2}{16}$; ora $\frac{1}{8}$ è la metà dela metà della metà di $\frac{8}{8}$ e quindi $\frac{2}{16}$ e $\frac{1}{8}$ sono equivalenti".
Nella seconda parte della lezione sono state posizionate le frazioni studiate sulla retta.
Datele tutti i cartoncini piccoli rappresentanti le frazioni, le è stato chiesto di posizionarli sulla retta.



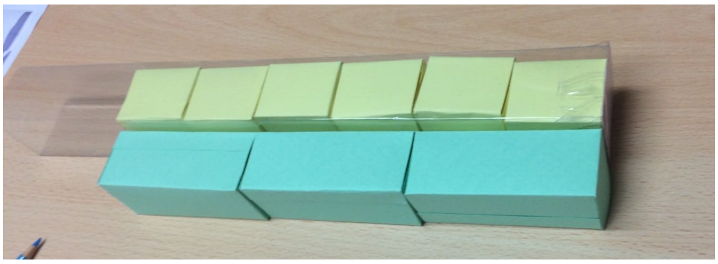
Come è possibile notare in figura, la studentessa ordina le frazioni ponendole sulla retta in ordine crescente prima rispetto al denominatore e poi rispetto al numeratore. Le è stato chiesto di osservare la scheda strutturata costruita e di ricordare quanto detto sulle frazioni equivalenti. In particolare le è stato ricordato che $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{8}{8}$ sono frazioni equivalenti. La studentessa ha riconosciuto l'equivalenza ma ha affermato che tali frazioni non sono uguali perché rappresentate da numeri diversi pertanto vanno posizionati in punti diversi della retta. Al fine di eliminare questa misconcezione è stato chiesto alla studentessa di rappresentare ciascuna frazione riempiendo il contenitore con le scatole e di capovolgere il contenitore sulla retta. Così facendo E. è stata in grado di posizionare correttamente le frazioni sulla retta ma non è riuscita a comprendere l'errore da lei commesso.



Le è stato spiegato che ciascuna frazione rappresenta un unico numero che pertanto rappresenta un unico punto della retta, che le frazioni equivalenti occupano lo stesso punto sulla retta e che l'errore da lei commesso è stato quello di considerare indipendenti nu-

meratore e denominatore delle frazioni.
Al fine di riuscire a posizionare una qualunque frazione sulla retta, e dunque di generalizzare quanto fatto per le particolari frazioni studiate, è stata costruita con la discente una mappa concettuale nella quale sono stati riportati tre passaggi chiave necessari per il posizionamento di frazioni sulla retta (appendice D).
Tale mappa fornisce alla studentessa con discalculia, che risulta presentare una deficitaria memoria procedurale, un notevole aiuto.

Lezione 2: preliminarmente all'inizio delle attività previste nella seconda lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nella lezione 1.
Nella prima parte della seconda lezione sono state adoperate le scatole rappresentanti diverse unità di misura (utilizzate anche nella lezione precedente) con cui riempire il contenitore rispetto la percentuale 75% e le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$.
È stato chiesto ad E. di riempire il contenitore del 75%.

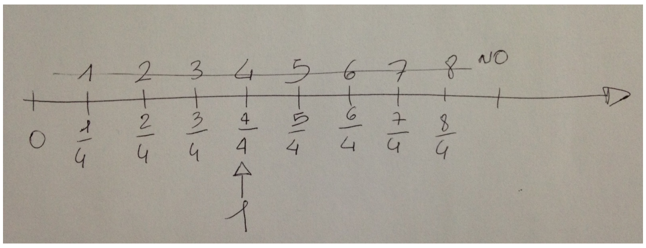


Per prima cosa la studentessa ha utilizzato le scatole gialle ed ha riempito il contenitore con sei di queste. Ha motivato la sua scelta affermando che 75% è la somma di 50% e 25% pertanto ha considerato quattro scatole gialle (rappresentanti il 50%) più altre due (rappresentanti il 25%). Con lo stesso tipo di ragionamento ha riempito il contenitore del 75% utilizzando le scatole verdi.
Le è stato chiesto di riempire i $\frac{3}{4}$ del contenitore. A tal fine E. ha utilizzato le scatole verdi ed ha motivato la sua scelta affermando che ciascuna scatola verde rappresenta $\frac{1}{4}$ per cui, prendendone tre, si ottiene la frazione desiderata. Le è stato inoltre chiesto di riempire i $\frac{6}{8}$ del contenitore. La studentessa ha utilizzato la scatole gialle argomentando in maniera analoga a quanto fatto per la frazione precedente.
In seguito le è stato chiesto di colorare le rappresentazioni del contenitore fornitele. Fatto ciò, E. ha osservato che $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ e 75% sono rappresentazioni equivalenti.
Allineando tali rappresentazioni con quelle della lezione 1 è stata ottenuta una nuova scheda strutturata (appendice B).
Infine è stato chiesto alla studentessa se fosse possibile rappresentare tali frazioni come somma di altre frazioni. E. è stata in grado di rappresentare la frazione $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ come somma delle frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ e ancora come somma dell frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{8}$. Inoltre è stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra tali scritture.

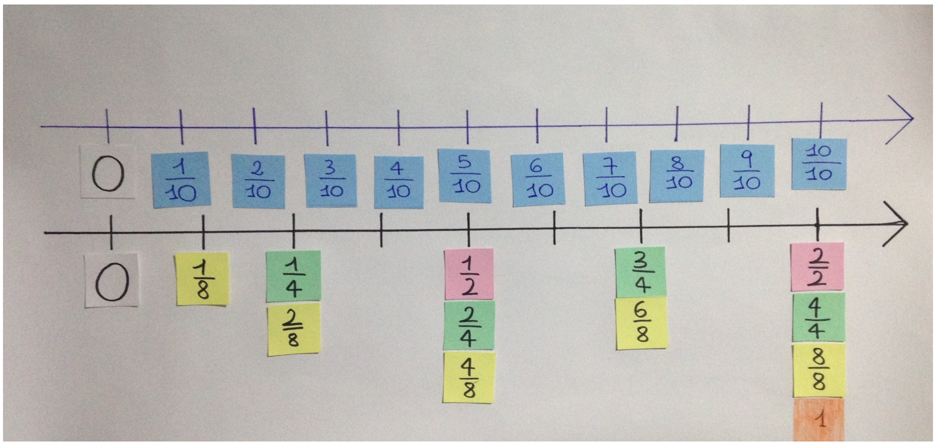
Nella seconda parte della lezione è stato chiesto ad E. di posizionare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ sulla retta. La studentessa non ha riscontrato difficoltà. Innanzitutto ha posizionato sulla retta la frazione $\frac{3}{4}$ utilizzando l'equivalenza tra tale scrittura e quella percentuale e ragionando sulle "metà". In seguito ha posizionato la frazione $\frac{6}{8}$ sotto la precedente riconoscendo l'equivalenza tra queste.

Lezione 3: preliminarmente all'inizio delle attività previste nella terza lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nelle due lezioni precedenti.
Per verificare se la studentessa avesse appreso come posizionare una qualunque frazione sulla retta le è stato chiesto di posizionarvi la frazione $\frac{5}{9}$. E. non ha riscontrato alcuna difficoltà nell'esecuzione dell'esercizio.
Nella prima parte della lezione sono stati utilizzati il contenitore trasparente e le dieci scatole, ciascuna rappresentante $\frac{1}{10}$ al fine di colorare le rappresentazioni del contenitore rispetto le percentuali 100%, 50% e rispetto le frazioni $\frac{10}{10}$ e $\frac{5}{10}$. La studentessa non ha riscontrato difficoltà nel rispondere alle domande postele. Tali rappresentazioni, allineate alle precedenti, hanno permesso di costruire un'ultima scheda strutturata (appendice C).
In seguito è stato chiesto ad E. di riempire il contenitore del 10%. La studentessa ha considerato una scatola azzurra. Inoltre ha aggiunto che anche se si considerassero le scatole gialle il 10% di queste sarebbe stato rappresentato da una scatola gialla. Al fine di correggere questo errore, le sono state mostrate le otto scatole gialle e le è stato chiesto di utilizzare il ragionamento basato sulle "metà" per individuare la percentuale corrispondente ad una scatola gialla. In questo modo la studentessa ha associato a quest'ultima la percentuale 12,5% accorgendosi di avere precedentemente sbagliato. Dunque, le è stato chiesto a quanto corrispondesse il 10% delle scatole gialle e la studentessa ha affermato: "corrisponde a un po' meno di una scatola gialla cioè a una scatola gialla meno il 2,5%".
È stato chiesto ad E. di utilizzare le scatole azzurre per riempire il contenitore rispetto le altre percentuali. La studentessa non ha riscontrato difficoltà. Tali percentuali sono state poi rappresentate in termini di frazioni. A tal fine è stato fatto riferimento all'unità di misura che ciascuna scatola azzurra rappresenta e al numero di scatole necessarie per riempire il contenitore rispetto ciascuna frazione.
Nella seconda parte della lezione è stato chiesto ad E. di posizionare le frazioni da $\frac{1}{10}$ a $\frac{10}{10}$ sulla retta.
Preliminarmente a tale attività, è stato chiesto alla studentessa il motivo per cui è stata disegnata sul cartoncino un'ulteriore retta parallela alla precedente. E. è stata in grado di riconoscere che si è utilizzata un'unità di misura differente dalla precedente ed ha aggiunto che la frazione $\frac{1}{10}$ è più piccola di $\frac{1}{8}$ in quanto per rappresentare il tutto rispetto alla prima unità di misura è necessario utilizzare un numero di scatole maggiore rispetto a quelle necessarie per rappresentare il tutto utilizzando la seconda unità di misura.
Al fine di posizionare le frazioni sulla retta la studentessa ha utilizzato le scatole azzurre e il contenitore posto orizzontalmente sul cartoncino raffigurante la retta suddivisa

rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$. E. non ha riscontrato difficoltà nel posizionamento ed ha notato l'equivalenza tra le frazioni $\frac{5}{10}$ e $\frac{10}{10}$ con quelle posizionate in corrispondenza degli stessi punti sulla prima retta.
Le è stato poi chiesto di indicare un numero che potesse rappresentare l'intero contenitore. Non riuscendo a rispondere a tale domanda gliene è stata posta un'ulteriore.
Le è stata mostrata una retta in cui sono stati posizionati lo 0 e $\frac{4}{4}$ e le è stato chiesto di posizionarvi le frazioni da $\frac{1}{4}$ a $\frac{8}{4}$. E. non ha riscontrato difficoltà nello svolgimento di tale esercizio. In seguito le è stato chiesto di posizionare i numeri naturali sulla medesima retta.

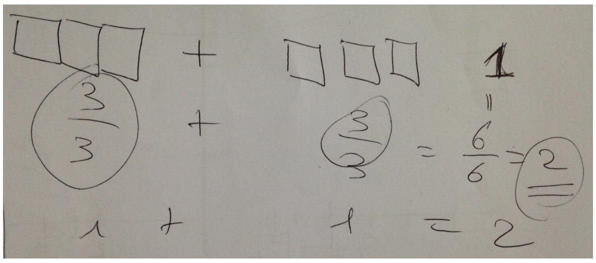


Come si osserva in figura, inizialmente E. ha posizionato in maniera errata i naturali. Non essendo convita di quanto fatto, ha osservato la retta ed ha affermato: "no, ho sbagliato perché 1 non è uguale a $\frac{1}{4}$ ma a $\frac{4}{4}$". Dunque, ha concluso osservando che il contenitore può essere rappresentato mediante l'intero 1. Tale intero è stato posizionato sulla retta.

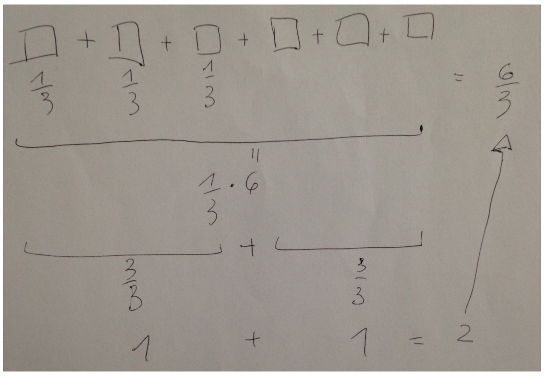


Al fine di verificare l'avvenuta comprensione dell'equivalenza tra 1 e le frazioni $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$ e $\frac{8}{8}$ è stata mostrata alla discente una retta in cui sono stati posizionati i numeri 0, 1, e 2 e le è stato chiesto di posizionarvi la frazione $\frac{2}{3}$.
E. ha collocato correttamente tale frazione ed ha aggiunto: "se $\frac{3}{3}$ è uguale a 1 allora $\frac{6}{6}$ è uguale a 2".

Al fine di correggere tale misconcezione le sono state mostrate sei scatole gialle, le è stato detto che ciascuna scatola gialla rappresenta $\frac{1}{6}$ e le è stato chiesto di rappresentare, mediante una frazione, il tutto. E. ha risposto correttamente ed ha affermato: "$\frac{6}{6}$ rappresenta il tutto quindi è uguale a 1 ma prima ho trovato che è uguale a 2". Non essendo convinta di quanto affermato, ha riformulato il ragionamento su un foglio ma è ricaduta ancora nell'errore.



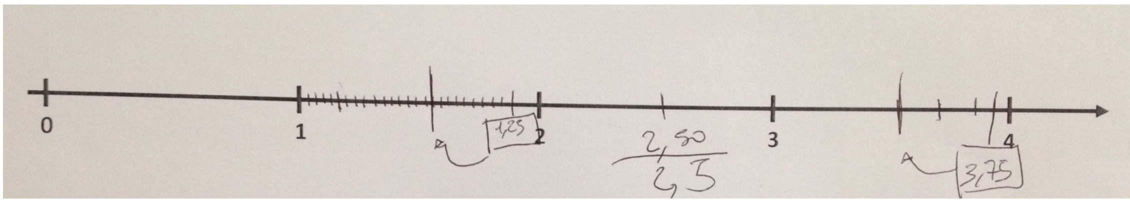
Le è stata così mostrata una scatola gialla e le è stato detto che rappresentava l'unità di misura $\frac{1}{3}$.
Gliene sono state date tre e le è stato chiesto a quale frazione corrispondessero. E. risponde correttamente $\frac{3}{3}$. Le è stata data un'ulteriore scatola gialla e le è stato chiesto di esprimere una frazione che rappresentasse le quattro scatole. La studentessa è stata indecisa sul rispondere non sapendo se queste rappresentassero la frazione $\frac{4}{3}$ o $\frac{4}{4}$. Riflettendo su quanto fatto, la discente è riuscita autonomamente a comprendere l'errore commesso e a correggersi.



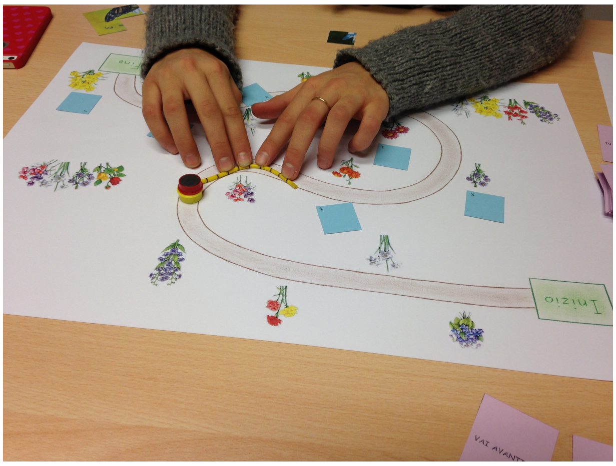
Infine, avendo fatto qualche osservazione sulle frazioni improprie, è stato chiesto alla studentessa di posizionare la frazione $\frac{7}{5}$ sulla retta al fine di verificare se fosse riuscita a generalizzare il posizionamento di frazioni anche a frazioni improprie. La studentessa ha svolto correttamente l'esercizio senza riscontrare alcuna difficoltà.

Lezione 4: preliminarmente all'inizio delle attività previste nell'ultima lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nelle lezioni precedenti.

Nella prima parte della lezione sono stati utilizzati due fogli rappresentanti ciascuno una retta suddivisa rispettivamente in ottavi e in decimi.
Mostrata alla studentessa la retta suddivisa in ottavi, le è stato chiesto di posizionare il numero decimale 1,25.



A tal fine, E. ha suddiviso il segmento che va da 1 a 2 in 25 parti ed ha posizionato il decimale nell'ultima tacca precedente a quella corrispondente al 2. La studentessa ha suddiviso il segmento rispetto un'unità di misura da lei scelta ma non è stata in grado di posizionare il decimale rispetto questa.
Le è stato poi chiesto di posizionare i decimali 2,50 e 2,5 sulla retta. La studentessa esegue l'esercizio correttamente posizionandoli sullo stesso punto della retta.
Infine le è stato chiesto di posizionare 3,75. Come si vede in figura, E. ha segnato nel segmento congiungente i punti tra 3 e 4 una tacca rappresentante la metà e due tacche rappresentanti i decimali 3,60 e 3,70. Ha posizionato infine il decimale 3,75 poco dopo 3,70. La studentessa ha commesso qui un errore di approssimazione.
Al fine di correggere gli errori commessi, le sono stati mostrati i tre decimali e di ciascuno sono state cerchiate le parti decimali. È stato chiesto alla discente di osservare le parti cerchiate e di ricordare quanto fatto nelle lezioni precedenti. E. ha così compreso gli errori commessi e ha corretto quanto fatto in precedenza. Al fine di posizionare correttamente i decimali suddetti, ha utilizzato il ragionamento basato sulle "metà".
In seguito le è stata mostrata la retta suddivisa rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$ e le è stato chiesto di posizionarvi 1,20 e 2,70. E. non ha riscontrato alcuna difficoltà nel risolvere correttamente l'esercizio.
Gioco dell'oca: E. non ha riscontrato difficoltà nello spostarsi in avanti o all'indietro sul percorso di numeri razionali rappresentati mediante frazioni. Nel pescare una carta con numero decimale, ha avuto alcune perplessità su quale unità di misura dover utilizzare. Le è bastato riflettere su quanto fatto nella parte precedente della lezione per riuscire ad individuare correttamente il "bastoncino" da utilizzare.



5.3.3 Test di uscita

Si analizzano di seguito i risultati ottenuti dalla studentessa E. nel test di uscita.

D1.

Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

È possibile notare come E. sia stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra le tre diverse scritture utilizzate per rappresentare lo stesso numero razionale. In particolare, ha saputo riconoscere l'equivalenza tra le due frazioni e l'equivalenza di queste ultime con la notazione percentuale.

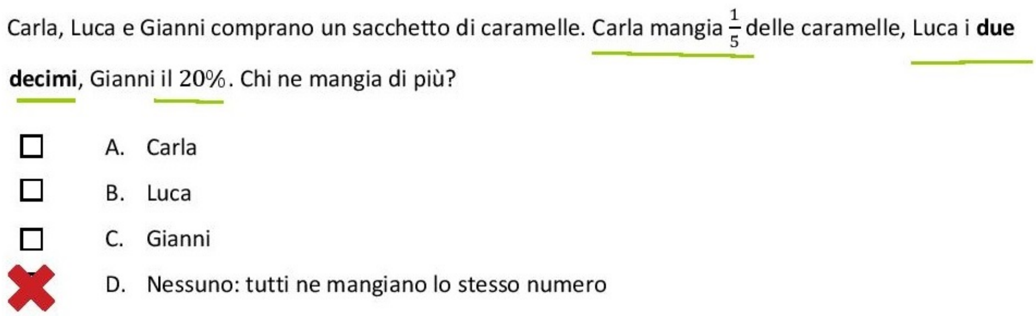
D2.

$\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ✗ D. Si, perché valgono entrambi la metà di un intero

E. ha fornito la risposta corretta. Ha affermato che la frazione $\frac{4}{8}$ è la metà di $\frac{8}{8}$ e che quest'ultima rappresenta l'intero così come il numero decimale 0,5 è la metà di 1 e che quest'ultimo rappresenta l'intero. Dunque è stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra le due notazioni.

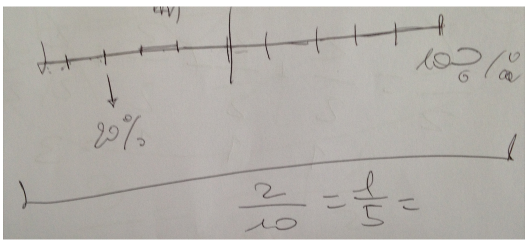
D3.



Carla, Luca e Gianni comprano un sacchetto di caramelle. Carla mangia $\frac{1}{5}$ delle caramelle, Luca i **due decimi**, Gianni il 20%. Chi ne mangia di più?

- ☐ A. Carla
- ☐ B. Luca
- ☐ C. Gianni
- ☒ D. Nessuno: tutti ne mangiano lo stesso numero

Innanzitutto si noti che E. ha sottolineato le informazioni chiave che le permetteranno di rispondere al quesito. A tal fine la studentessa ha considerato "due decimi", ne ha trascritto la frazione su un foglio ed ha eseguito la semplificazione ottenendo la frazione $\frac{1}{5}$. In questo modo si è resa conto che Carla e Luca mangiano la stessa quantità di caramelle. Poi è passata a studiare il 20%.



Come si vede in figura, E. ha disegnato un segmento rappresentante il 100%, lo ha diviso in 10 parti uguali e ha posizionato la percentuale su tale segmento. Ha poi riconosciuto che 20% equivale alla frazione $\frac{2}{10}$, "perché ho diviso il segmento in 10 parti uguali e ne ho prese 2", e che quest'ultima è equivalente alla frazione $\frac{1}{5}$. Dunque, ha concluso il suo ragionamento dicendo: "Carla, Luca e Gianni mangiano lo stesso numero di caramelle". È importante notare che E. è stata in grado di riconoscere l'equivalenza sia tra diverse rappresentazioni che tra diverse frazioni.

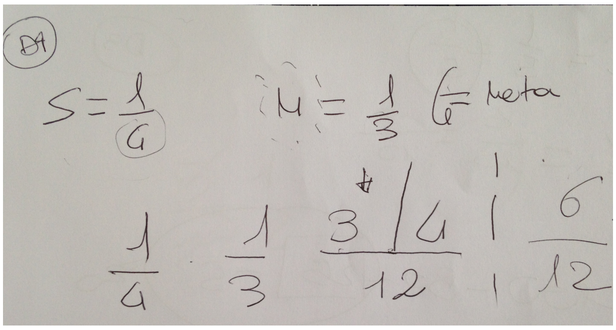
D4.

Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$, a Giorgio la **metà**.

Chi dei tre ha speso di più in quella settimana?

Risposta: saverio

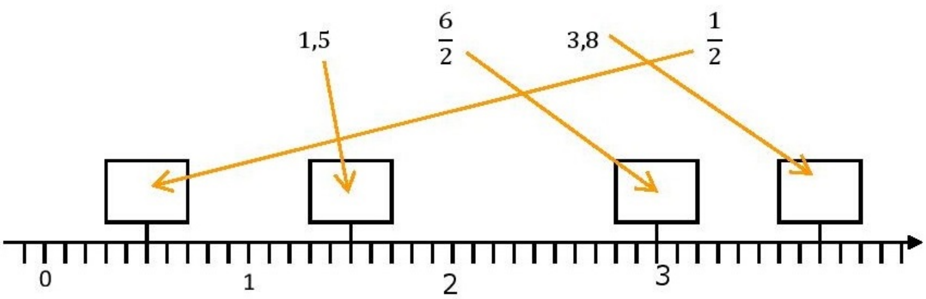
E. ha risposto correttamente al quesito, così come aveva risposto nel modo corretto al test di ingresso. Va però osservata la strategia risolutiva utilizzata.



A differenza di quanto apparso nel test di ingresso, non si è riscontrata la presenza di contratto didattico. E., infatti, non ha eseguito alcuna operazione tra le frazioni presenti nel testo. Per trovare la risposta alla domanda presentatale ha trasformato le frazioni in altre ad esse equivalenti aventi stesso denominatore.

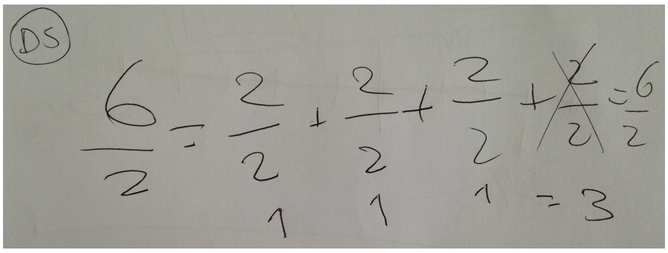
D5.

Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:



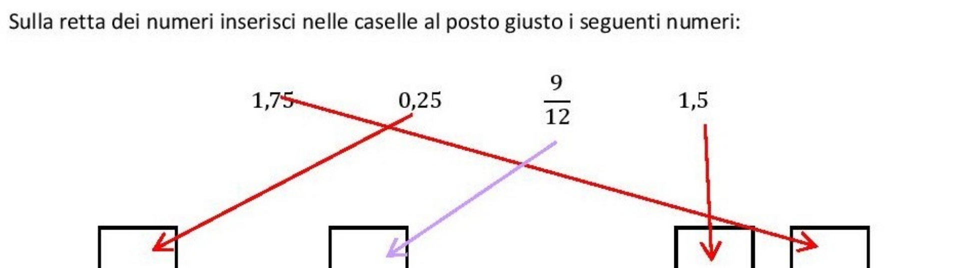
Come si vede, E. ha posizionato correttamente i decimali sulla retta. Così come fatto

nel test di ingresso, la prima cosa che ha fatto è stata posizionare sulla retta gli interi 2 e 3. Dunque è stata in grado di riconoscere l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta.
È importante osservare che per risolvere questo e i quesiti successivi E. non ha utilizzato la calcolatrice, a differenza di quanto fatto nel test di ingresso.
Ha posizionato i decimali e la frazione $\frac{1}{2}$ adoperando lo stesso ragionamento sviluppato nel test di ingresso.
Si noti, invece, il ragionamento eseguito per posizionare la frazione $\frac{6}{2}$.



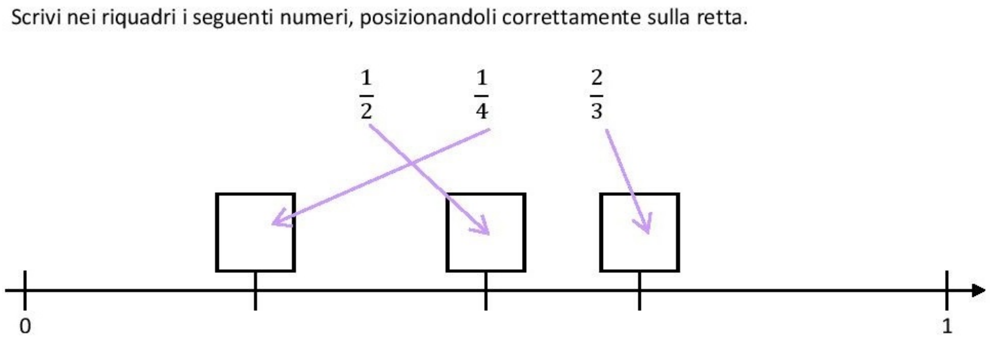
La studentessa è stata in grado di scomporre la frazione impropria nella somma di tre frazioni rappresentanti l'unità. Sommando queste ultime ha ottenuto il numero intero 3.
È importante osservare come non sia più presente la misconcezione mostratasi nel corso delle lezioni.

D6.



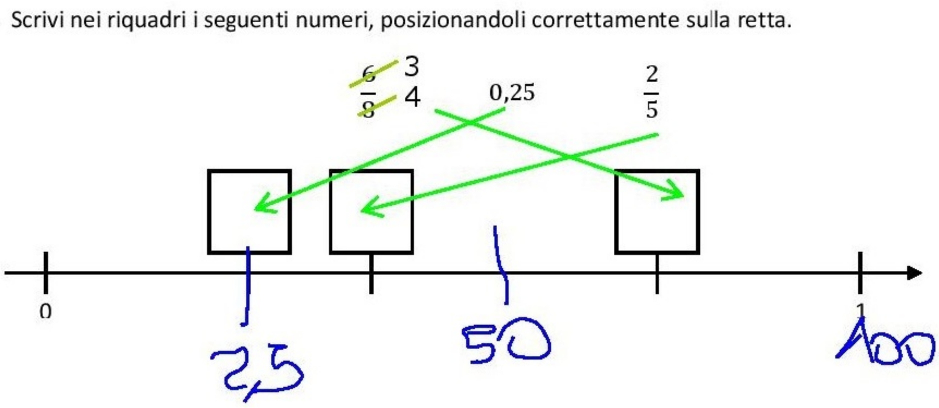
E. ha posizionato i numeri decimali utilizzando lo stesso ragionamento proposto nel test di ingresso. Invece, per posizionare la frazione $\frac{9}{12}$, ha riconosciuto l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta, ha contato 9 tacche a partire dallo 0 e ha posizionato la frazione suddetta.

D7.



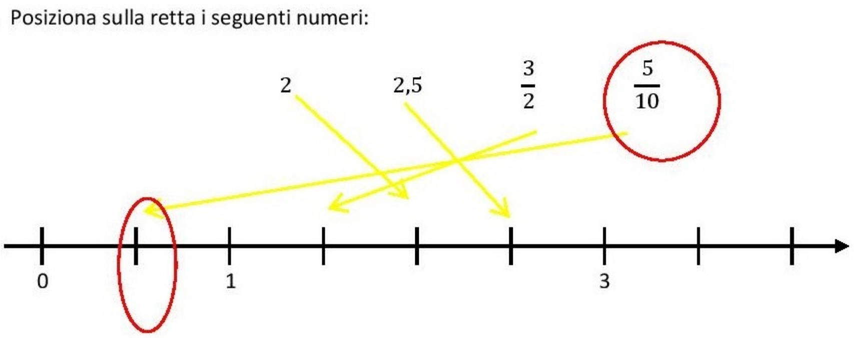
In un primo momento E. è stata indecisa sul posizionamento delle frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Per chiarirsi le idee ha consultato il cartoncino rappresentante la retta su cui sono state posizionate le frazioni studiate durante le lezioni. In questo modo è riuscita a posizionare correttamente tutte le frazioni.

D8.

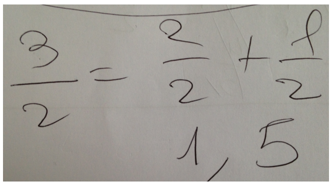


Innanzitutto E. ha considerato il numero decimale 0,25. A tal fine ha fatto corrispondere all'1 il 100 e ha segnato sul segmento che va da 0 a 100 la metà (50) e la metà della metà (25). Dunque, attribuendo alla parte decimale di 0,25 un valore percentuale, E. ha posizionato correttamente tale numero sulla retta. In seguito ha considerato la frazione $\frac{6}{8}$, ha semplificato tale frazione trasformandola nella frazione equivalente $\frac{3}{4}$ e l'ha posizionata sulla retta. Infine ha posizionato la frazione $\frac{2}{5}$.

D9.

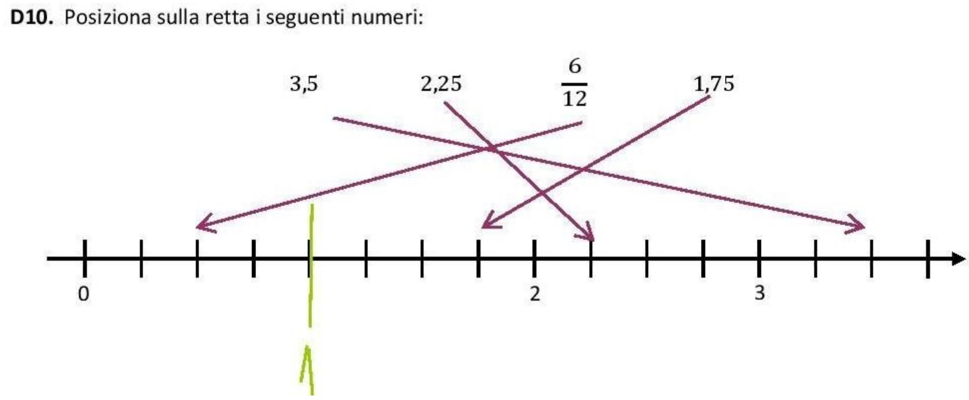


Come prima cosa E. ha riconosciuto l'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta e ha posizionato l'intero 2. Riconoscendo che l'intero corrisponde a due tacche e interpretando la parte decimale di 2,5 come la metà dell'intero, ha posizionato tale decimale una tacca dopo il 2. Ha poi deciso di posizionare la frazione $\frac{5}{10}$ e per farlo l'ha semplificata nella frazione $\frac{1}{2}$. Infine, ha posizionato la frazione $\frac{3}{2}$ utilizzando il seguente ragionamento.



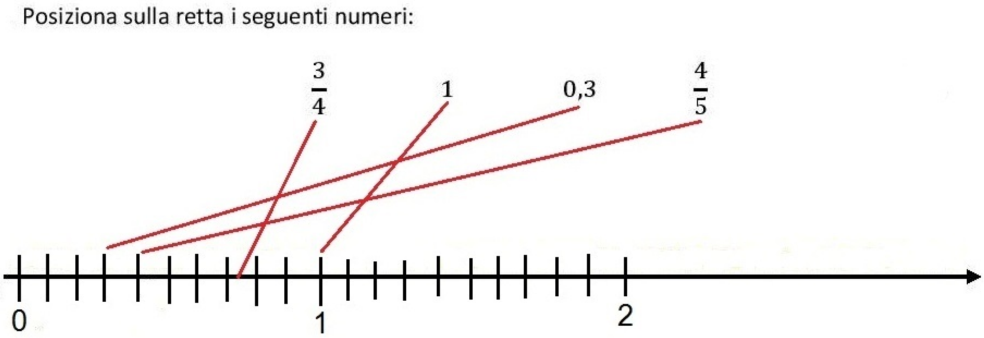
E. ha trasformato la frazione impropria nella somma delle frazioni $\frac{2}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Ha poi trasformato tale notazione in notazione decimale riconoscendo l'equivalenza tra la frazione $\frac{2}{2}$ e l'intero 1 e la frazione $\frac{1}{2}$ con il decimale 0,5.

D10.



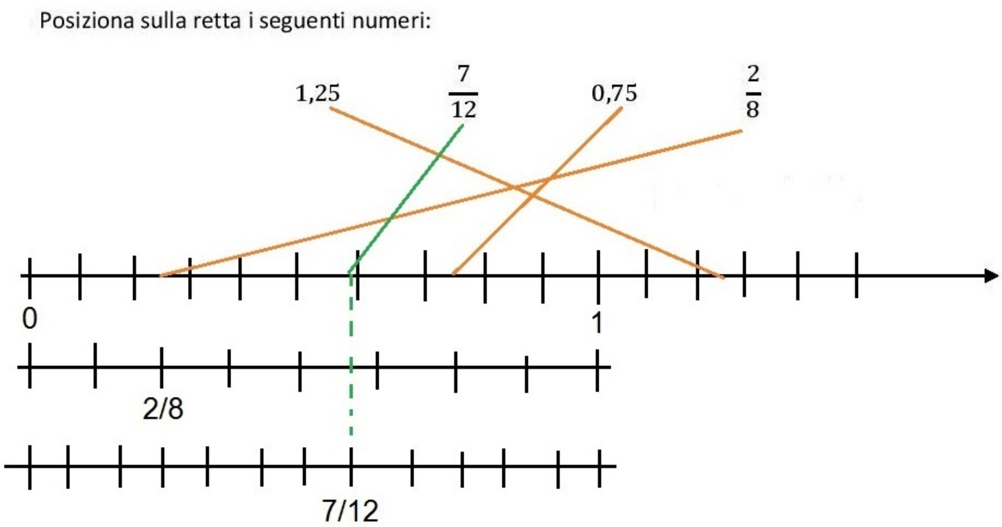
E. ha risposto correttamente al quesito e, per farlo, ha adoperato lo stesso ragionamento utilizzato nel test di ingresso. L'unica differenza consiste nella strategia utilizzata per posizionare la frazione $\frac{6}{12}$. In questo caso E. ha trasformato tale frazione nella frazione equivalente $\frac{1}{2}$.

D11.



Innanzitutto E. ha scelto un'unità di misura e rispetto ad essa ha suddiviso la retta. Così facendo ha posizionato facilmente l'intero 1 e il decimale 0,3. Per posizionare la frazione $\frac{3}{4}$ ha ricordato che questa è equivalente al 75%. Dunque, ha considerato il segmento che va da 0 a 1, ne ha considerato metà e poi ancora metà della metà. In questo modo ha posizionato correttamente la frazione. L'unico errore commesso dalla studentessa è nel posizionamento della frazione $\frac{4}{5}$ che è stata posizionata nella tacca successiva a quella relativa al decimale 0,3.

D12.



Come fatto per il quesito precedente, E. ha scelto un'unità di misura rispetto la quale suddividere la retta. Precisamente, ha utilizzato $\frac{1}{10}$ come unità di misura. In seguito ha posizionato i numeri decimali. Per posizionare la frazione $\frac{2}{8}$ ha riconosciuto di dover suddividere la retta rispetto una diversa unità di misura. Dunque si è costruita un nuovo segmento analogo al segmento che va da 0 a 1 e lo ha suddiviso in 8 parti uguali. Ha posizionato la frazione in esame su quest'ultimo segmento e lo ha poi riportato sulla retta iniziale.
Allo stesso modo ha proceduto per il posizionamento della frazione $\frac{7}{12}$. Questa volta ha suddiviso il segmento che va da 0 a 1, da lei costruito, utilizzando come unità di misura la frazione $\frac{1}{12}$.

Come si può vedere E. ha risposto correttamente a tutti i quesiti. L'unico errore commesso è relativo al posizionamento della frazione $\frac{4}{5}$ sulla retta.
La studentessa ha saputo riconoscere l'equivalenza tra diverse rappresentazioni ed è stata in grado di riconoscere frazioni equivalenti. In particolare è stata in grado di determinare frazioni equivalenti ad una data frazione adoperando, per numeratore e denominatore, sia l'operazione di moltiplicazione che di divisione per uno stesso numero. È stata in grado di riconoscere i diversi significati che la frazione può assumere. Infine, non è stata più riscontrata la presenza della misconcezione per cui nella somma di frazioni sommava sia numeratore che denominatore della frazione in esame.

5.4 Caso V.

5.4.1 Test di ingresso

Si analizzano di seguito i risultati ottenuti dalla studentessa V. al test di ingresso.

D1: tale domanda è stata somministrata a discenti del quinto anno della scuola primaria di primo grado e richiede di riconoscere l'equivalenza tra diverse rappresentazioni dei numeri razionali.


D1. Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

50% $\frac{1}{2}$ 0,2 $\frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

Come si può vedere in figura, V. ha riconosciuto solo in parte l'equivalenza richiesta. Va osservato che anche nel caso in cui è riuscita a riconoscere l'equivalenza tra 50% e $\frac{5}{10}$ non ha saputo motivare la risposta ma ha semplicemente affermato di notare una somiglianza tra le due scritture. È stata capace di riconoscere che la frazione $\frac{1}{2}$ corrisponde alla metà di 1 mentre non è stata in grado di attribuire alcun significato al numero decimale 0,2. Va notato che a livello nazionale solo il 37,4% degli alunni ha fornito una risposta corretta a tale domanda (www.gestinv.it).

D2: anche questa domanda, come la precedente, è stata somministrata a discenti del quinto anno della scuola primaria e richiede di riconoscere l'equivalenza tra la rappresentazione frazionaria e decimale dei numeri razionali.

D2. $\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☐ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☒ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Si, perché valgono entrambi la metà di un intero

Per V. i razionali in questione rappresentano quantità diverse che non possono essere confrontate. Non è stata in grado di trasformare la rappresentazione frazionaria in decimale operando la divisione tra numeratore e denominatore della frazione. Inoltre, V. ha attribuito a quest'ultima esclusivamente il significato di parte di un uno-tutto escludendo gli altri possibili significati che la frazione può assumere.
In questo caso, la percentuale di risposte corrette fornite a livello nazionale è stata del 53,4%. In particolare il 15,3% dei discenti fornisce la risposta C, il 19% quella B ed infine il 9,1% la risposta A (www.gestinv.it).

D3: la domanda è stata sottoposta a discenti della prima classe della scuola secondaria di primo grado e richiede di confrontare tre numeri razionali aventi tre diverse rappresentazioni.

D3. Carla, Luca e Gianni comprano un sacchetto di caramelle. Carla mangia $\frac{1}{5}$ delle caramelle, Luca i **due decimi**, Gianni il 20%. Chi ne mangia di più?

- ☐ A. Carla
- ☐ B. Luca
- ☒ C. Gianni
- ☐ D. Nessuno: tutti ne mangiano lo stesso numero

V. ha confrontato tali numeri senza tener conto che ciascuno di essi presenta un'unità di

misura differente dagli altri. Ha affermato che Carla mangia una sola caramella, Luca ne mangia due e Gianni ne mangia 20. Pertanto ha fornito la risposta C.
Tale domanda presenta una triplice richiesta. Innanzitutto trasformare il 20% e i "due decimi" in frazione, trovare per ciascuna delle tre frazioni una frazione equivalente avente stesso denominatore ed infine confrontarne i numeratori.
A livello nazionale il 42,6% dei discenti ha fornito la risposta corretta mentre il 53,3% quella errata preferendo, tra queste, la risposta C (www.gestinv.it).

D4: tale domanda è stata sottoposta a discenti della classe quinta della scuola primaria e, come la precedente, richiede di confrontare tre numeri razionali due dei quali presentati in notazione frazionaria.

D4. Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$, a Giorgio la **metà**.

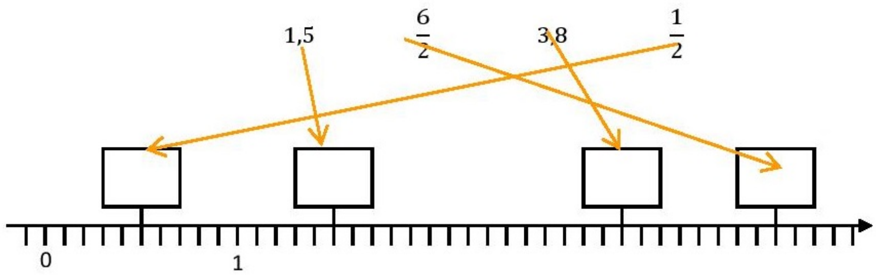
Chi dei tre ha speso di più in quella settimana? marco

Risposta: ....

È importante notare il ragionamento eseguito da V. per rispondere al quesito: "Saverio ha $\frac{1}{4}$ quindi gli rimane $4 - 1 = 3$; Marco ha $\frac{1}{3}$ quindi gli rimane $3 - 1 = 2$; Giorgio ha tutta la metà". Pertanto V. ha fornito come risposta "Marco perché gliene sono rimasti solo 2".
Dunque, V. ha attribuito alla frazione l'operazione di sottrazione (e non quella di divisione).
Solo il 36,6% dei discenti, a livello nazionale, ha fornito la risposta corretta (www.gestinv.it).
Va fatta un'osservazione sul testo e sulla domanda presenti nel quesito. Mentre il testo descrive la somma di denaro che rimane ai tre nipoti, la domanda richiede di determinare quale dei tre nipoti spende più denaro. Pertanto è possibile che i discenti avessero male interpretato la richiesta del quesito rispondendo rispetto chi per loro possedesse più denaro.

D5: tale domanda è stata somministrata a discenti della classe quinta della scuola primaria e richiede di porre sulla retta quattro numeri razionali.

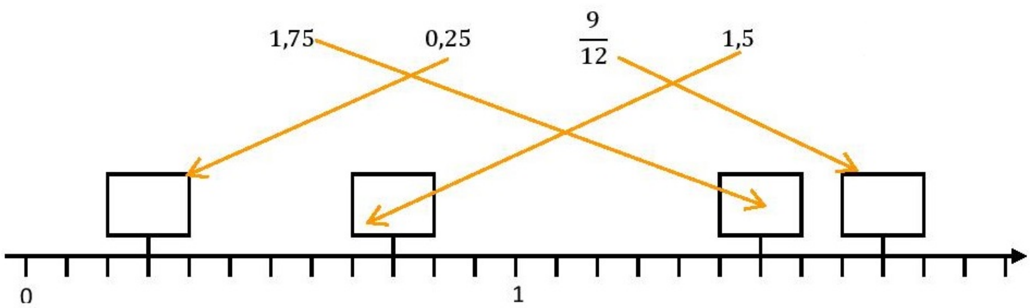
D5. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:



La studentessa ha posizionato correttamente la frazione $\frac{1}{2}$ affermando che è la metà di 1. Ha posiziona correttamente anche il numero decimale 1,5 ma ha giustificato la risposta data affermando che 1,5 è più grande di 1 ma anche più piccolo di $\frac{6}{2}$ e 3,8. Questo perché V. ha confrontato la parte intera dei numeri decimali 1,5 e 3,8 e il numeratore della frazione $\frac{6}{2}$. Per questo motivo, infatti, ha posiziona sulla retta prima il numero decimale 3,8 e poi la frazione $\frac{6}{2}$.
Va osservato che V. non ha prestato attenzione all'unità di misura rispetto la quale è stata suddivisa la retta. Ciò si mostrerà anche nei quesiti successivi.
È riuscita a posizionare correttamente alcuni dei numeri razionali grazie al supporto datole dai riquadri.
Inoltre è importante notare che V. non solo non ha riconosciuto il significato operazionale della frazione ma non è riuscita a fornire nemmeno un significato di parte-tutto alla frazione impropria $\frac{6}{2}$.
A livello nazionale il 42,6% dei discenti ha fornito la risposta corretta (www.gestinv.it).
Va osservato che la presenza dei riquadri nei quali porre i numeri razionali risulta essere di aiuto agli studenti per lo svolgimento del quesito.

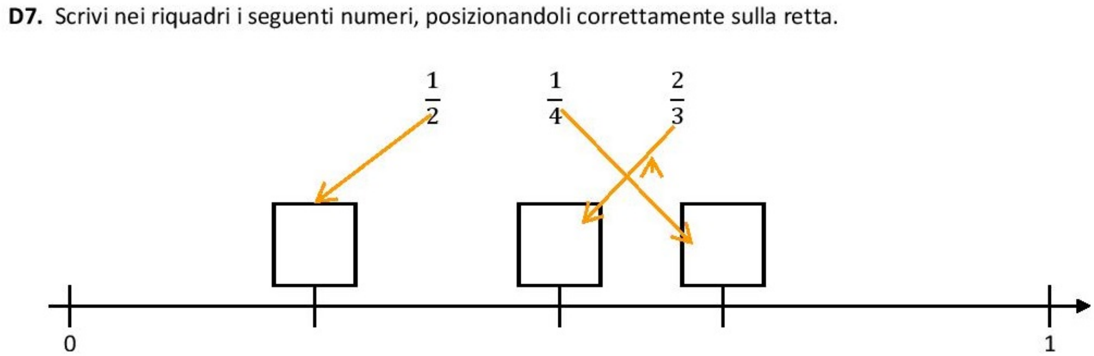
D6: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso sono stati forniti tre decimali ed una frazione.

D6. Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:



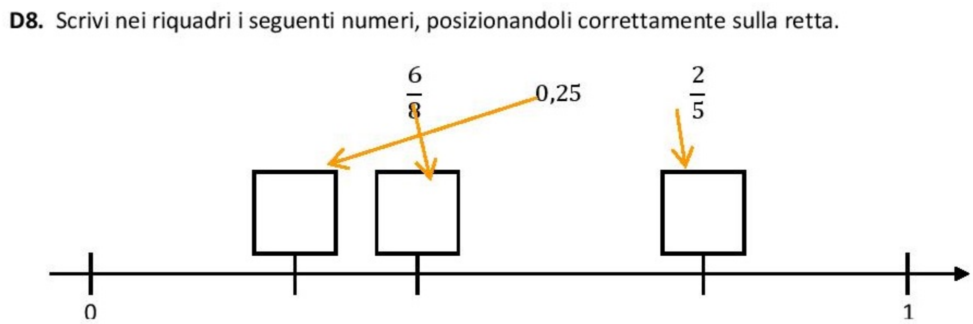
V. è riuscita ad ordinare in modo crescente i numeri decimali 0,25, 1,5, 1,75 per cui li ha posizionati nei primi tre riquadri. Inoltre, ragionando soltanto sul numeratore della frazione $\frac{9}{12}$, ha deciso di posizionarlo nell'ultimo riquadro.
È palese, in questo caso, come V. non tenga conto dell'unità di misura utilizzata per la suddivisione della retta.

D7: il quesito è stato sottoposto ai discenti della classe prima della scuola secondaria di primo grado e richiede di posizionare sulla retta tre frazioni.



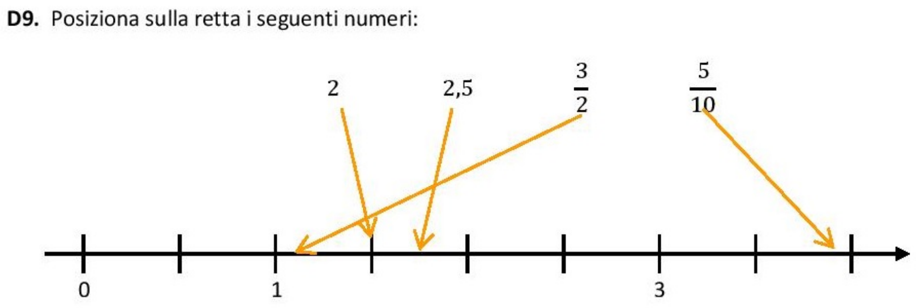
È possibile osservare come V. ha posizionato tali frazioni prestando attenzione esclusivamente ai denominatori e ordinando questi ultimi in ordine crescente.
È importante osservare che a livello nazionale solo il 34,2% dei discenti ha fornito la risposta corretta (www.gestinv.it).
Nonostante la presenza dei riquadri, la maggior parte degli studenti ha fornito la risposta errata probabilmente perché non sono stati in grado di suddividere la retta rispetto due diverse unità di misura.

D8: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso sono stati forniti un decimale e due frazioni.



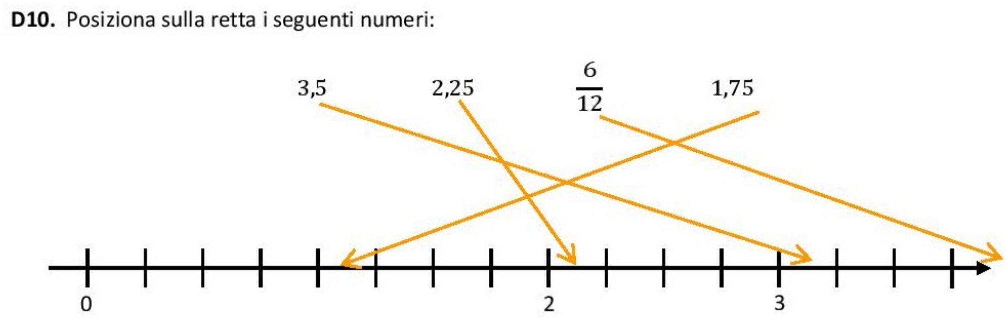
V. ha riconosciuto che 0,25 rappresenta il numero più piccolo. Poi ha ordinato le frazioni attribuendo a queste l'operazione di sottrazione: "$\frac{6}{8}$ corrisponde a $8-6=2$ mentre $\frac{2}{5}$ corrisponde a $5-2=3$; quindi viene prima $\frac{6}{8}$ e poi $\frac{2}{5}$ perché 2 è più piccolo di 3".

D9: tale quesito è stato somministrato a discenti della classe prima della scuola secondaria di primo grado e richiede di posizionare sulla retta quattro numeri razionali.



V. non è stata in grado di riconosce l'unità di misura per cui ha posiziona il 2 nella tacca dopo l'1. Ha poi posizionato il decimale 2,5 rispettando l'unità di misura da lei attribuita alla retta per cui ha collocato 2,5 a metà tra il 2 e la tacca dopo il 2. Ha affermato "la frazione $\frac{5}{10}$ è un po' meno di 5", dunque ha contato le tacche dopo il 3 per individuare la posizione del 5 (sempre rispettando l'unità di misura da lei attribuita alla retta) e ha posizionato la frazione un po' prima del 5. Infine ha collocato la frazione $\frac{3}{2}$ un po' dopo l'uno ma non ha motivato la risposta.
A livello nazionale l'85,1% dei discenti ha fornito la risposta errata mentre solo il 10,9% quella corretta (www.gestinv.it).
È qui evidente come l'assenza dei riquadri, che rappresentano un supporto al ragionamento, mette in difficoltà gli allievi.

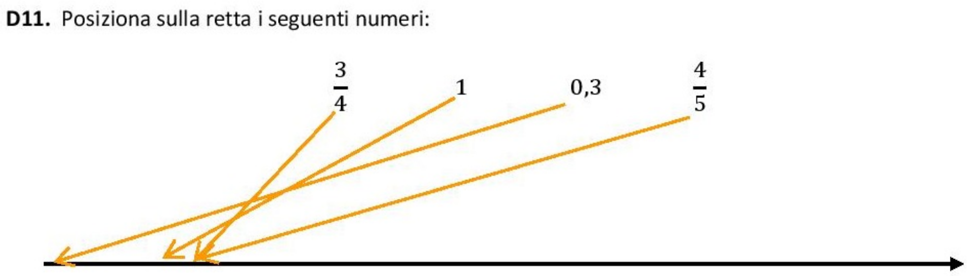
D10: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso vengono forniti tre decimali ed una frazione.



V. ha riconosciuto la corretta posizione dell'intero 1. Poi però non ha adoperato la stessa unità di misura per posizionare i decimali 1,75, 2,25 e 3,5. V. ha attribuito a questi

ultimi un valore poco più grade di 1, 2 e 3 rispettivamente. Dunque sono stati da lei posizionati subito dopo l'1, il 2 e il 3 rispettivamente.
Si osserva come V. non sia stata in grado di fare alcuna distinzione tra le diverse parti decimali presenti nei razionali suddetti. Ha ragionato su di essi adoperando un criterio di stima senza attribuire loro un valore specifico e senza riconoscere alcun ordine tra le parti decimali.
Infine ha posizionato la frazione $\frac{6}{12}$ al di fuori della retta. Infatti, V. ha ragionato solo sul numeratore e, contando le tacche presenti sulla retta, ha affermato che il 6 cade al di fuori della retta.

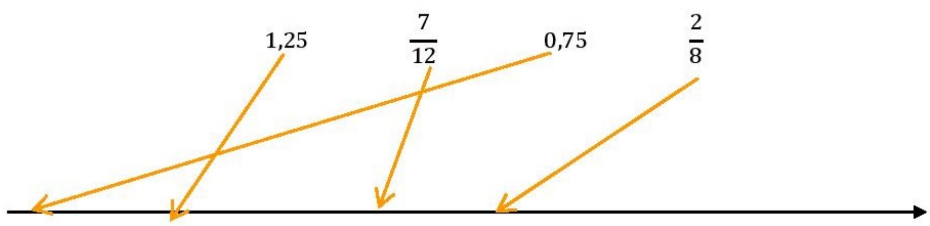
D11: tale domanda è stata formulata seguendo le richieste della precedente. In questo caso la retta mostrata non presenta alcun tipo di riferimento.



Innanzitutto si osserva come V. non è stata in grado di riconoscere né stabilire alcuna unità di misura. La studentessa non è riuscita a sviluppare un ragionamento considerando contemporaneamente i quattro razionali proposti ma ha considerato inizialmente il numero decimale e l'intero e solo in seguito le due frazioni.
Tale modalità esecutiva si presenterà anche nella domanda successiva.
V. ha riconosciuto che 0,3 è più piccolo di 1 per cui li ha posizionati sulla retta uno di seguito all'altro. Per quanto riguarda le due frazioni, come fatto in precedenza, ha attribuito ad esse l'operazione di sottrazione: "$\frac{3}{4}$ corrisponde a $4-3=1$ e $\frac{4}{5}$ corrisponde a $5-4=1$; quindi sono vicini a 1". Pertanto V. li ha collocati vicini all'1.

D12: tale quesito, come il precedente, è stato formulato seguendo le richieste della domanda D10 e presenta la retta senza alcun riferimento.

D12. Posiziona sulla retta i seguenti numeri:



In tale quesito V. ha utilizzato lo stesso ragionamento della domanda precedente. Ha posizionato in ordine crescente i decimali e per quanto riguarda le frazioni ha fatto ricorso alla sottrazione per stabilirne la posizione sulla retta.

Come si può vedere, V. non è riuscita a fornire alcuna risposta corretta al test propostole.
Non ha riconosciuto i diversi significati che la frazione può assumere ma le ha attribuito solo il significato di parte-tutto. In particolare è risultato errato il significato operazionale che la studentessa attribuisce alla frazione.
Non è stata in grado di riconoscere frazioni equivalenti né di riconoscere rappresentazioni equivalenti. Non ha mai riconosciuto né stabilito un'unità di misura per il posizionamento sulla retta numerica e, anche quando è stata in grado di ordinare in modo crescente i decimali, non è riuscita a ordinare decimali e frazioni contemporaneamente.

5.4.2 Lezioni

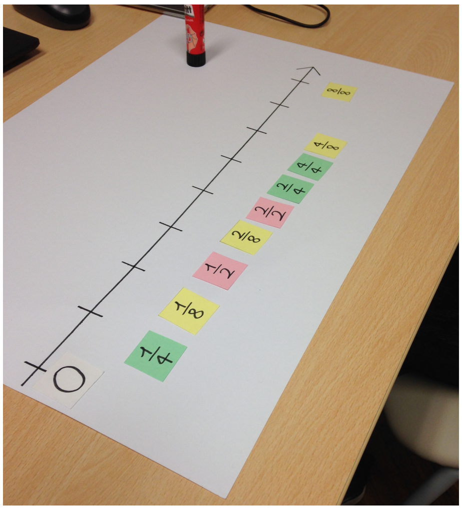
Si analizza di seguito il percorso di V. nel corso delle quattro lezioni.

Lezione 1: nella prima parte della lezione sono state utilizzate le scatole rappresentanti diverse unità di misura con le quali riempire il contenitore rispetto percentuali e frazioni diverse e le rappresentazioni del contenitore da colorare.
In quest'ultima attività V. ha riscontrato difficoltà quando le è stato chiesto di colorare frazioni di contenitore. Così come fatto nel test d'ingresso, V. ha attribuito alle frazioni l'operazione di sottrazione. Per esempio, dovendo colorare $\frac{1}{4}$ del contenitore, V. ha preso le 4 scatole verdi, ne ha tolta una (corrispondente alla quantità presente nel numeratore) e ne ha colorate 3. Per questo motivo ha riscontrato maggiori difficoltà quando le si è chiesto di colorare frazioni rappresentanti l'intero, come per esempio $\frac{4}{4}$. In tal caso, adoperando la sottrazione non rimane alcuna scatola.
Le è stato così spiegato che quando utilizza questo tipo di ragionamento il denominatore sta ad indicare il numero di scatole che ha a disposizione mentre il numeratore indica il numero di scatole che deve prendere. Le è stato sottolineato che è proprio a quest'ultimo numero che deve far riferimento per colorare il contenitore.

Come si potrà vedere in seguito, V. non commetterà più questo tipo di errore.
È stata così costruita una prima scheda strutturata (appendice A). Le è stato chiesto di osservare tale scheda e di esporre alcune considerazioni a riguardo. È stata in grado di riconoscere che ci sono modi diversi con cui poter rappresentare "tutto", "metà", "metà della metà" e "metà della metà della metà". In particolare le è stato fatto notare come tali quantità possano essere rappresentate da frazioni diverse, a seconda dell'unità di misura considerata. Le è stato inoltre chiesto di provare a cercare una regola che potesse descrivere le quantità suddette. Sono state così stabilite con la discente le seguenti regole:

- "tutto" corrisponde alla frazione in cui il numeratore è uguale al denominatore;
- "metà" corrisponde alla frazione in cui il numeratore è metà del denominatore;
- per "metà della metà" si guarda la "metà" e si fa di nuovo "metà";
- per "metà della metà della metà" si guarda la "metà della metà" e si fa di nuovo "metà".

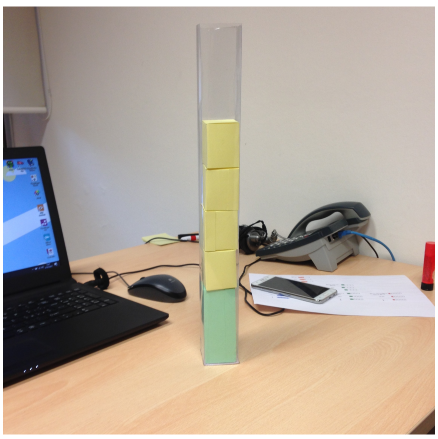
Nella seconda parte della lezione sono state posizionate le frazioni studiate sulla retta. Datele tutti i cartoncini piccoli rappresentanti le frazioni, le è stato chiesto di posizionarli sulla retta.



Ha innanzitutto posizionato $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{2}$ affermando che il primo è più piccolo del secondo in quanto $\frac{1}{2}$ equivale a dividere a metà mentre $\frac{1}{8}$ a fare la metà della metà della metà. Poi ha posizionato $\frac{1}{4}$ prima di $\frac{1}{8}$ affermando che 4 è più piccolo di 8. V. ha ordinato le frazioni facendo riferimento al denominatore cioè andando ad ordinare in modo crescente i denominatori presenti nelle ultime due frazioni menzionate. Ha poi utilizzato lo stesso ragionamento, adoperato per posizionare le prime due frazioni, per ordinare le frazioni $\frac{2}{8}$

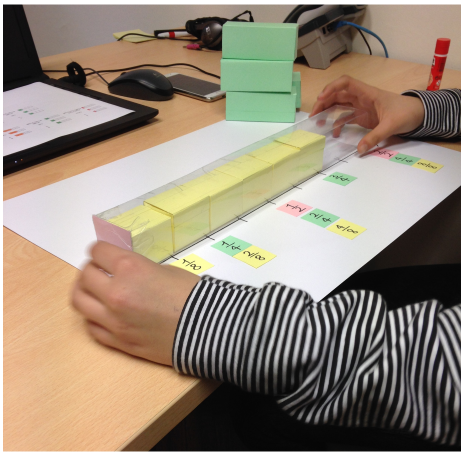
e $\frac{2}{2}$. Ha collocato queste ultime subito dopo $\frac{1}{2}$ ordinando le 4 frazioni rispetto al numeratore. Allo stesso modo ha posizionato $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{4}$. In seguito ha posiziona $\frac{4}{8}$ posponendolo a $\frac{4}{4}$ e affermando che 8 è maggiore di 4. L'unica frazione correttamente posizionata è stata $\frac{8}{8}$. La posizione di tale frazione è stata stabilita da V. contando le tacche segnate sulla retta.
Al fine di collocare correttamente le frazioni sulla retta sono state riutilizzate le scatole colorate e il contenitore trasparente. È stato riempito il contenitore rispetto alle frazioni introdotte e, per ciascuna di esse, il contenitore è stato posto orizzontalmente sulla retta. In questo modo è stata mostrata una corrispondenza diretta tra la frazione intesa come parte-tutto, rappresentata dalle scatole presenti nel contenitore e la frazione intesa come punto sulla retta.
Le è stato fatto notare che le frazioni equivalenti corrispondono allo stesso punto sulla retta dei numeri.
Al fine di riuscire a posizionare una qualunque frazione sulla retta, e dunque di generalizzare quanto fatto per le particolari frazioni studiate, è stata costruita con la discente una mappa concettuale nella quale sono stati riportati tre passaggi chiave necessari per il posizionamento di frazioni sulla retta (appendice D).
Tale mappa fornisce alla studentessa con discalculia, che risulta presentare una deficitaria memoria procedurale, un notevole aiuto.

Lezione 2: preliminarmente all'inizio delle attività previste nella seconda lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nella lezione 1.
Nella prima parte della seconda lezione sono state utilizzate le scatole rappresentanti diverse unità di misura (utilizzate anche nella lezione precedente) con cui riempire il contenitore rispetto la percentuale 75% e le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$.
È stato chiesto a V. di riempire il contenitore del 75%.

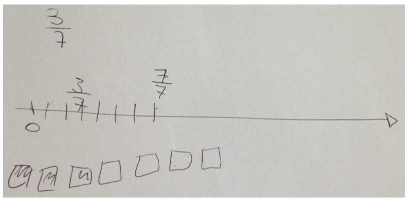


Come si vede, V. ha scelto di utilizzare una scatola verde e 4 gialle ed ha affermato: "75% è più della metà". Le è stato chiesto di specificare quanto di più. V. ha riconosciuto che

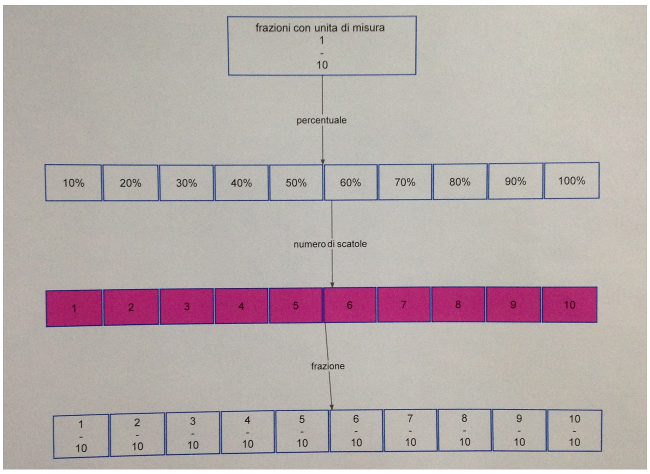
metà corrisponde ad una scatola verde più due gialle e ha affermato che per riempire il contenitore del 75% bisogna riempirlo della metà più due scatole gialle. A questo punto le si è chiesto di guardare la scheda strutturata costruita nella lezione precedente e di vedere a quale percentuale corrispondessero due scatole gialle. In questo modo è giunta ad affermare che per riempire il contenitore del 75% occorre riempirne il 50% più il 25% ossia considerarne la metà più la metà della metà.
In seguito le è stato chiesto di riempire il 75%, i $\frac{3}{4}$ e i $\frac{6}{8}$ del contenitore utilizzando le scatole verdi e gialle rispettivamente ed inoltre di colorare le rappresentazioni del contenitore fornitele.
Allineando tali rappresentazioni con quelle della lezione 1 è stata ottenuta una nuova scheda strutturata (appendice B).
Nella seconda parte della lezione è stato chiesto a V. di posizionare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ sulla retta. La studentessa non ha riscontrato difficoltà. Al fine di posizionare le nuove frazioni ha scelto di utilizzare il contenitore e le scatole fornitele.



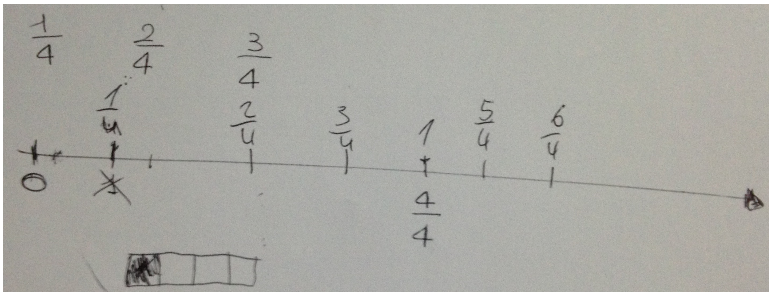
Lezione 3: preliminarmente all'inizio delle attività previste nella terza lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nelle due lezioni precedenti.
Per verificare se la studentessa avesse appreso come posizionare una qualunque frazione sulla retta le è stato chiesto di posizionarvi la frazione $\frac{3}{7}$. Al fine di risolvere l'esercizio V. ha disegnato 7 scatole e ne ha colorate 3 ma non ha saputo come posizionare la frazione sulla retta. Le è stato suggerito di indicare le scatole sulla retta utilizzando delle tacche e le è stato fatto notare che, essendo le scatole di dimensioni uguali, è necessario che le tacche siano equidistanziate. Così facendo ha posizionato correttamente la frazione sulla retta.



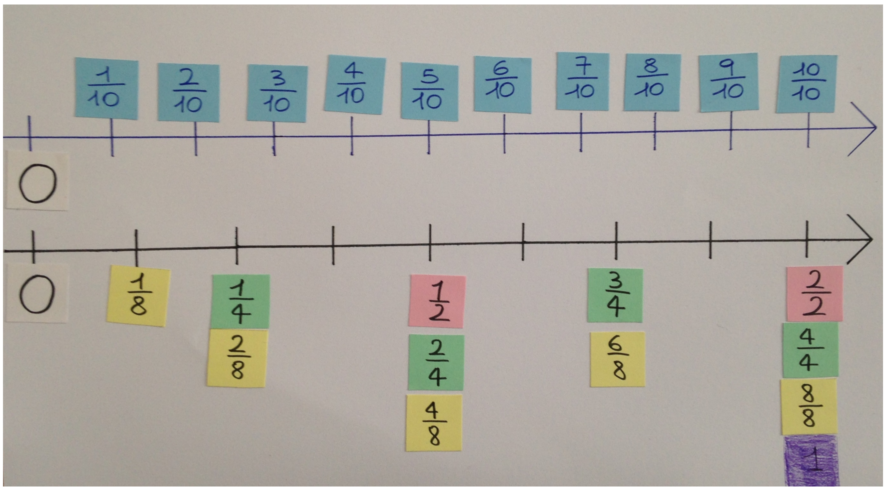
Nella prima parte della lezione sono stati utilizzati il contenitore trasparente e le dieci scatole, ciascuna rappresentante $\frac{1}{10}$ al fine di colorare le rappresentazioni del contenitore rispetto le percentuali 100%, 50% e rispetto le frazioni $\frac{10}{10}$ e $\frac{5}{10}$. La studentessa non ha riscontrato difficoltà nel rispondere alle domande postele. Tali rappresentazioni, allineate alle precedenti, hanno permesso di costruire un'ultima scheda strutturata (appendice C).
In seguito è stato chiesto a V. di riempire il contenitore del 10%. Istintivamente ha utilizzato una sola scatola azzurra affermando che 10% è una percentuale piccola e che per questo motivo ha preso un'unica scatola. Al fine di fornire una giustificazione corretta alla scelta di un'unica scatola per rappresentare il 10% del contenitore, le sono state mostrate le 10 scatole azzurre e le è stato chiesto quante scatole fossero necessarie per riempire il 100% del contenitore. La studentessa ha correttamente affermato che ne occorrono 10. Le è stato poi chiesto quante scatole fossero necessarie per riempire il 10% del contenitore. V. ha risposto una ed ha affermato "ne devo prendere una perché è come se ogni scatola vale 10". Allo stesso modo è stato riconosciuto il numero di scatole necessarie per riempire il contenitore rispetto le altre percentuali.
Tali percentuali sono state poi rappresentate in termini di frazioni. A tal fine è stato fatto riferimento all'unità di misura che ciascuna scatola azzurra rappresenta e al numero di scatole necessarie per riempire il contenitore rispetto ciascuna frazione.
Insieme alla discente è stata costruita una mappa concettuale che mostra l'equivalenza tra le notazioni percentuale e frazionaria.



Nella seconda parte della lezione è stato chiesto a V. di posizionare le frazioni da $\frac{1}{10}$ a $\frac{10}{10}$ sulla retta.
A tal fine la studentessa ha utilizzato le scatole azzurre e il contenitore posizionato orizzontalmente sul cartoncino raffigurante la retta suddivisa rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$.
La studentessa non ha riscontrato difficoltà nel posizionamento.
Le è stato poi chiesto di indicare un numero che potesse rappresentare l'intero contenitore. Non riuscendo a rispondere a tale domanda gliene è stata posta un'ulteriore.
Le è stata mostrata una retta e le è stato chiesto di posizionare le frazioni da $\frac{1}{4}$ a $\frac{6}{4}$. V. ha eseguito l'esercizio correttamente. In seguito le è stato chiesto di posizionare su tale retta l'intero 1. Inizialmente la studentessa ha posizionato tale intero in corrispondenza della frazione $\frac{1}{4}$ associando il numero 1 ad una tacca. V. si è subito accorta dell'errore commesso affermando che 1 non è equivalente a $\frac{1}{4}$ ma non ha saputo dove posizionare l'intero. Le è stato così spiegato che 1 rappresenta l'intero, il tutto, il 100% e, in questo modo, è stata in grado di posizionarlo correttamente.

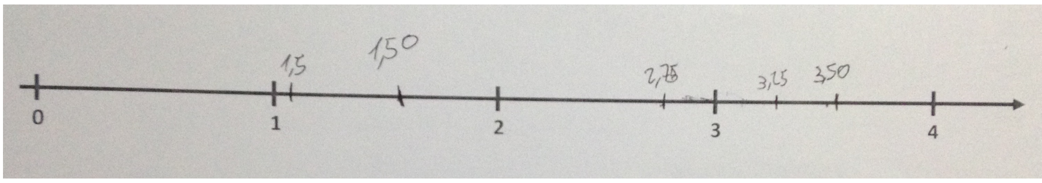


In seguito il numero intero 1 è stato rappresentato sulla retta.



Una volta posizionate tutte le frazioni sulla retta, è stato fatto notare a V. che è possibile suddividere la retta rispetto diverse unità di misura. Inoltre è stata evidenziata l'equivalenza di alcune delle frazioni presenti sul cartoncino.

Lezione 4: preliminarmente all'inizio delle attività previste nell'ultima lezione, è stato fatto un breve ripasso delle principali nozioni apprese nelle lezioni precedenti.
Nella prima parte della lezione sono stati utilizzati due fogli rappresentanti ciascuno una retta suddivisa rispettivamente in ottavi e in decimi.
Mostrata alla studentessa la retta suddivisa in ottavi, le è stato chiesto di posizionare il numero decimale 1,5.



Viene palesata una delle misconcezioni maggiormente presenti nei discenti. V. ha giustificato il posizionamento del decimale affermando: "mi devo spostare solo di 5 dopo l'uno".
In seguito le è stato chiesto di posizionare il decimale 1,50. V. lo ha posizionato correttamente e ha affermato: "va messo a metà tra 1 e 2".
Le è poi stato chiesto di posizionare 2,75 sulla retta. Inizialmente la studentessa ha affermato che tale decimale valesse un po' più di 2,50, dunque lo ha posizionato quasi vicino al 3. Le è stato suggerito di guardare la scheda strutturata e di pensare al modo in cui era stata ottenuta la percentuale 75%. V. ha riconosciuto che è stata ottenuta come somma del 50% e del 25% e ha affermato: "quindi devo considerare la metà più la metà della metà".
Per verificare il corretto apprendimento le è stato infine chiesto di posizionare il decimale 3,25 sulla retta. La studentessa ha come prima cosa riportato il decimale 3,50 sulla retta e dopo ha considerato la metà del segmento che va da 3 a 3,50 e ha posiziona correttamente il decimale 3,25.
In seguito le è stata mostrata la retta suddivisa rispetto l'unità di misura $\frac{1}{10}$ e le è stato chiesto di posizionarvi 1,20 e 2,70. Essendo la retta già suddivisa, V. non ha riscontrato difficoltà e ha posiziona 1,20 contando due tacche dopo l'uno e 2,70 contando sette tacche dopo l'uno.
Va notato che V. non si è interessata dell'unità di misura con cui è stata suddivisa la retta.
Al fine di correggere tale errore è stata mostrata a V. una retta in cui erano segnati solo i punti interi 0, 1, 2, 3. Le è stato chiesto di posizionare il decimale 2,40. Per risolvere l'esercizio V. ha suddiviso il segmento che va da 2 a 3 con un numero di tacche scelto a piacere, ne ha contate quattro e ha posizionato il decimale. Le è stato fatto notare che il segmento congiungente i punti tra 2 e 3 rappresenta un intero ossia il 100% e che per rappresentare il 100% contando di 10 in 10 occorre suddividere tale segmento in 10 parti

uguali. In questo modo V. ha ripetuto l'esercizio correttamente.
Gioco dell'oca: V. non ha riscontrato difficoltà nello spostarsi in avanti o all'indietro sul percorso di numeri razionali rappresentati mediante frazioni. Nel pescare una carta con numero decimale, ha avuto alcune perplessità su quale unità di misura dover utilizzare. Le è bastato riflettere su quanto fatto nella parte precedente della lezione per riuscire ad individuare correttamente il "bastoncino" da utilizzare.

5.4.3 Test di uscita

Si analizzano di seguito i risultati ottenuti dalla studentessa V. nel test di uscita.

D1.

Osserva le seguenti rappresentazioni di numeri.

50% $\quad \frac{1}{2} \quad$ 0,2 $\quad \frac{5}{10}$

Cerchia tutte quelle che rappresentano lo stesso numero.

V. è stata in grado di riconoscere l'equivalenza delle due frazioni presenti nel testo. Per farlo ha fatto riferimento al cartoncino, costruito durante le lezioni, che presenta la retta nella quale sono state posizionate le diverse frazioni. Inoltre è stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra le frazioni suddette e la notazione percentuale. A tal fine ha utilizzato la scheda strutturata costruita durante le lezioni svolte. Non è stata in grado di esprimere alcun parere riguardo il decimale 0,2.

D2.

$\frac{4}{8}$ e 0,5 indicano la stessa quantità?

- ☐ A. No, perché $\frac{4}{8}$ indica una quantità minore di 0,5
- ☒ B. No, perché 0,5 indica una quantità minore di $\frac{4}{8}$
- ☐ C. No, perché la prima è una frazione, il secondo è un numero decimale
- ☐ D. Si, perché valgono entrambi la metà di un intero

La studentessa non è riuscita a riconosce l'equivalenza tra frazioni e decimali. Per V. il decimale risulta più piccolo della frazione. Infatti, ha confrontato 0,5 con il numeratore della frazione e ha valutato 0,5 come quantità che vale poco più di 0. Ciò è dovuto alla misconcezione evidenziata nel corso della quarta lezione.

D3.

Carla, Luca e Gianni comprano un sacchetto di caramelle. Carla mangia $\frac{1}{5}$ delle caramelle, Luca i **due decimi**, Gianni il 20%. Chi ne mangia di più? ne hanno mangiate di più luca e gianni

- ☐ A. Carla
- ☐ B. Luca
- ☐ C. Gianni
- ☐ D. Nessuno: tutti ne mangiano lo stesso numero

Si può notare un miglioramento rispetto al test di ingresso. Infatti, V. è stata in grado di riconoscere l'equivalenza tra 20% e "due decimi". Per farlo ha utilizzato la mappa concettuale costruita nella terza lezione. Tuttavia, non è riuscita a riconoscere l'equivalenza tra le due rappresentazioni suddette e la frazione $\frac{1}{5}$.

D4.

Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto $\frac{1}{4}$ dei soldi ricevuti, a Marco $\frac{1}{3}$, a Giorgio la **metà**.

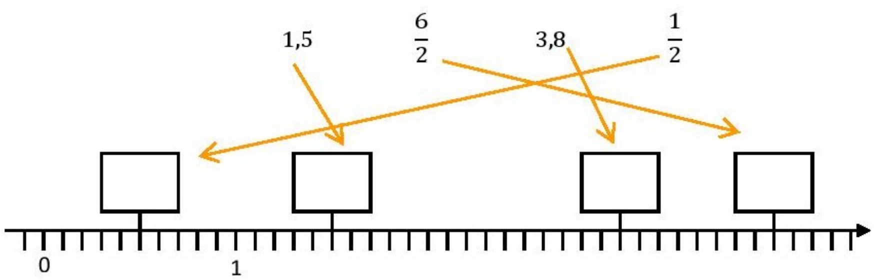
Chi dei tre ha speso di più in quella settimana?

Risposta: ....

Come si vede, V. non è riuscita a fornire alcuna risposta al quesito. Innanzitutto si è chiesta a quanto corrispondesse la somma di denaro che i nonni hanno dato ai tre nipoti. Ha deciso di attribuire a tale somma il valore di 10 e ha detto: "se la somma vale 10 e Giorgio ha la metà allora ne ha 5". Sebbene il ragionamento che la studentessa ha impostato risulti corretto, non è riuscita ad estenderlo al caso delle frazioni $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$.

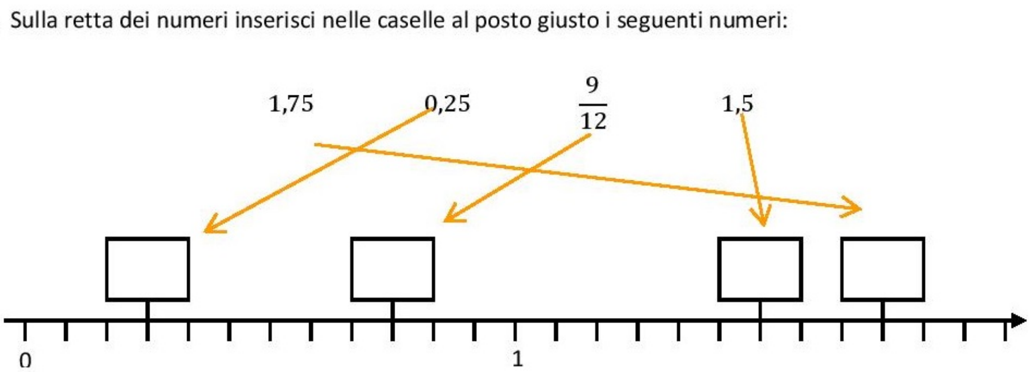
D5.

Sulla retta dei numeri inserisci nelle caselle al posto giusto i seguenti numeri:



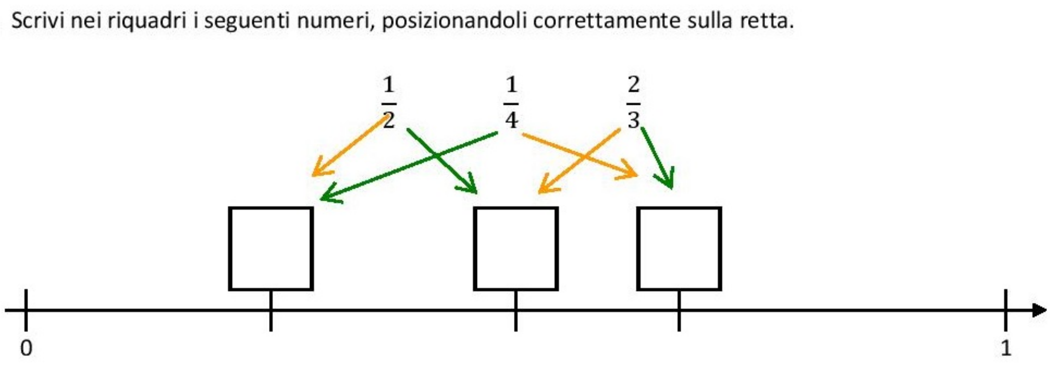
Come è possibile notare in figura, V. ha risposto ed argomentato come fatto per il test di ingresso. Dunque, per questo quesito non è stato riscontrato alcun miglioramento.

D6.



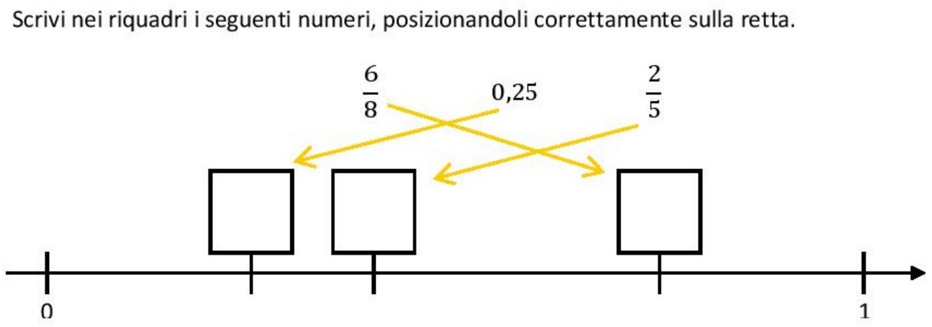
V. ha posizionato per primo il decimale 0,25 ed ha affermato: "è la metà della metà". Dunque ha contato il numero di tacche in cui è stato suddiviso il segmento che va da 0 a 1, ne ha fatto la metà e in seguito la metà della metà. In questo modo è riuscita a posizionare correttamente il decimale suddetto. Utilizzando lo stesso tipo di ragionamento ha posizionato il decimale 1,5 correttamente affermando "1,5 è a metà dopo l'uno". In seguito ha posizionato in maniera errata il decimale 1,75 nel secondo riquadro e la frazione nel quarto. Accortasi subito dell'errore ha affermato: "ho sbagliato perché 1,75 significa che si trova a 75% dopo 1" ed ha corretto quanto fatto in precedenza.

D7.



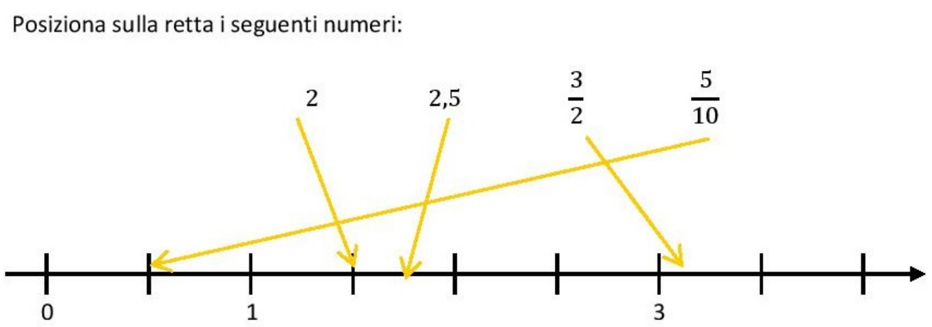
Inizialmente la studentessa ha posizionato le tre frazioni come fatto nel test di ingresso. Non essendo convinta di quanto eseguito, ha guardato il cartoncino rappresentante la retta sulla quale sono state posizionate le frazioni durante le lezioni e si è corretta dicendo: "ho sbagliato perché $\frac{1}{2}$ significa la metà e $\frac{1}{4}$ significa metà della metà quindi viene prima $\frac{1}{4}$ e poi $\frac{1}{2}$".

D8.



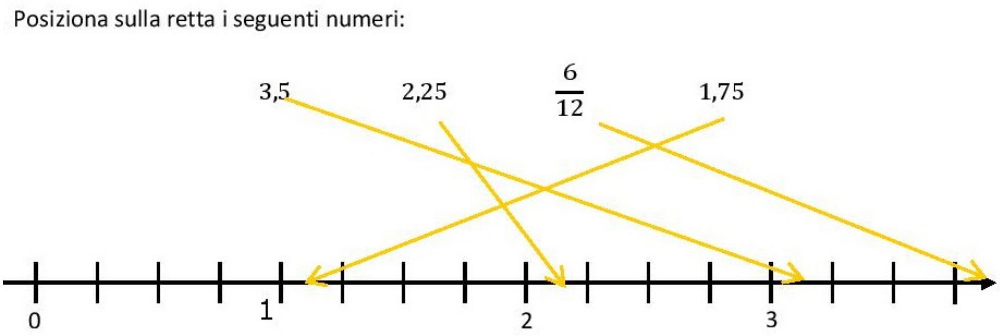
V. ha posizionato correttamente il decimale presente nel testo del quesito affermando che rappresenta la metà della metà di 1 e dunque il numero più piccolo.
Va notato che, nonostante abbia posizionato le frazioni nel modo corretto, V. ha articolato un ragionamento errato per il loro posizionamento. Infatti non ha tenuto conto che le due frazioni presentano denominatori diversi e che quindi non sono immediatamente confrontabili. Dunque le ha posizionate ordinandone i numeratori.

D9.



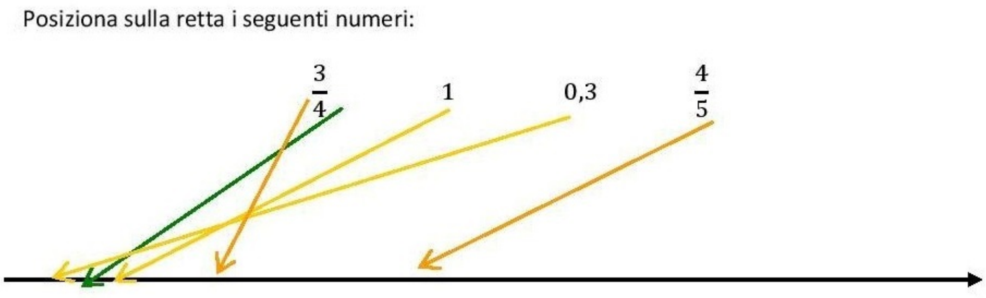
La studentessa ha posizionato correttamente la frazione $\frac{5}{10}$ riconoscendo l'equivalenza di quest'ultima con la frazione $\frac{1}{2}$. Inoltre è stata in grado di riconoscere che entrambe le frazioni suddette rappresentano la metà.
Come si può notare in figura, V. ha cambiato unità di misura per posizionare l'intero 2 e il decimale 2,5. Si può notare che rispetto la nuova unità di misura da lei attribuita alla retta, 2 e 2,5 sono stati posizionati correttamente.
Infine, ha posizionato la frazione $\frac{3}{2}$ in maniera errata.
È evidente che la studentessa non è in grado di rappresentare le frazioni improprie mediante somma di frazioni.

D10.



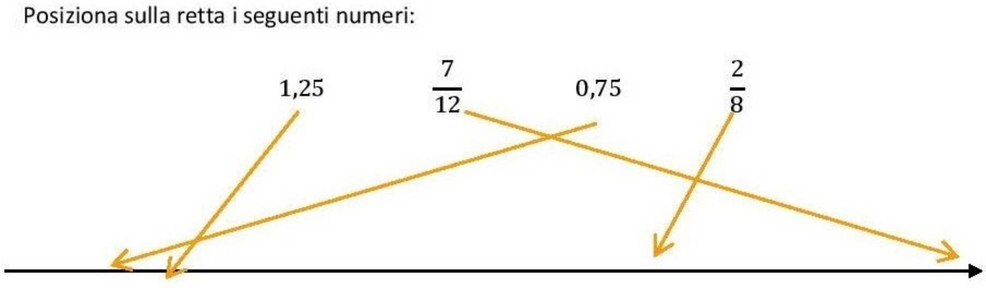
V. ha fornito una risposta errata al quesito. Non è stata in grado di riconosce alcuna unità di misura e ha posiziona i tre decimali utilizzando un criterio di approssimazione. Infatti ha affermato: "3,5 è un po' più di 3; 2,25 è un po' più di 2; 1,75 è un po' più di 1". Infine ha posizionato in maniera errata anche la frazione non riconoscendo l'equivalenza di quest'ultima con la frazione $\frac{1}{2}$.

D11.



La studentessa non è riuscita ad apprendere che per posizionare i numeri razionali sulla retta è necessario stabilire un'unità di misura rispetto la quale suddividerla. Per prima cosa ha posizionato il decimale 0,3 all'inizio della retta riconoscendo che questo è il razionale più piccolo. Di seguito ha posizionato l'intero 1 e poi la frazione $\frac{3}{4}$. Non essendo convinta di quanto fatto, è andata a guardare la scheda strutturata e il cartoncino rappresentante la retta su cui sono state posizionate le frazioni costruiti nel corso delle lezioni. In tal modo è riuscita a rendersi conto dell'errore commesso e si è corretta posizionando prima la frazione e poi l'intero. Infine non ha saputo riconoscere la posizione della frazione $\frac{4}{5}$. Ciò è dovuto al fatto che non è stata stabilita alcuna unità di misura. Va osservato che, nonostante non sia stata in grado di rispondere correttamente al quesito, è riuscita ad ordinare in modo crescente la frazione $\frac{3}{4}$, il decimale 0,3 e l'intero 1.

D12.



Come per la domanda precedete, V. non ha stabilito alcuna unità di misura al fine di suddividere la retta. La studentessa ha focalizzato l'attenzione prima sui due decimali. È riuscita a posizionare 0,75 e 1,25 in ordine crescente riconoscendo che il primo è più piccolo del secondo. In seguito ha posizionato le due frazioni andando ad ordinare i numeratori.
Come si può notare, V. non è in grado di confrontare contemporaneamente frazioni e decimali.

È importante osservare i miglioramenti prodotti dalla studentessa durante il corso delle lezioni. Innanzitutto è stata eliminata la misconcezione, riscontrata sia nel test di ingresso che nel corso della prima lezione, che le faceva attribuire alla frazione l'operazione di sottrazione. È stata in grado di riconoscere la maggior parte delle frazioni equivalenti presenti nel test e di ordinare correttamente le frazioni incontrate nel corso delle lezioni svolte.
È stato possibile riscontrare un miglioramento nel posizionamento dei numeri decimali. In particolare, è stata in grado di posizionare correttamente tutti i decimali che potevano essere posizionati adoperando il ragionamento basato sulle "metà". Infine, nonostante non abbia riconosciuto che per posizionare i numeri sulla retta è necessario stabilire un'unità di misura, V. ha mostrato un miglioramento nell'ordinare in maniera crescente frazioni e decimali.

Capitolo 6

Conclusioni

L'unità didattica proposta ha permesso alle discenti a cui è stata sottoposta di potenziare la concettualizzazione delle frazioni, dei decimali e la loro rappresentazione sulla retta.
Come è stato evidenziato nell'analisi dei test di uscita, le discenti hanno mostrano miglioramenti a seguito delle lezioni svolte. In particolare, la studentessa E. ha fornito a tale test il 100% delle risposte corrette a fronte del 50% ottenuto nel test d'ingresso mente V., che nel test di ingresso non ha fornito alcuna risposta corretta, ha fornito il 25% di risposte esatte. Va ricordato che quest'ultima frequenta la classe prima della scuola secondaria di primo grado. Pertanto, il miglioramento da lei compiuto risulta essere significativo.
Al fine di permettere a tale studentessa, che presenta una grave forma di discalculia, un miglior apprendimento delle nozioni matematiche trattate, si potrebbe progettare un maggior numero di lezioni affrontando tali argomenti in maniera più dettagliata.
Inoltre, va sottolineato come tali lezioni hanno permesso alle discenti di eliminare alcune delle misconcezioni relative alla nozione di frazione che vengono tipicamente riscontrate nei discenti.
In particolare, è stata corretta la misconcezione per cui nella somma di due frazioni E. sommava sia numeratore che denominatore di queste.
Inoltre, è stata corretta la misconcezione riscontrata nella studentessa V. la quale attribuiva erroneamente alla frazione l'operazione di sottrazione.

Nelle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (2012a) viene evidenziata l'importanza del ruolo rivestito dai laboratori: "*In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e*

collettive".
L'uso di strumenti di manipolazione quali le scatole rappresentanti diverse unità di misura e il cartoncino in cui è stata riportata la retta sulla quale posizionare le frazioni hanno rappresentato strumenti di supporto per le discenti nella costruzione dei concetti di frazione, decimale, equivalenza e rappresentazione sulla retta. Questi hanno permesso loro di modificare e costruire i significati dei concetti matematici trattati.
Inoltre, la costruzione di mappe concettuali e schede strutturate ha rivestito un ruolo fondamentale.
Allo stesso modo, Huntington (1995), Maccini e Hughes (2000) e Mercer e Miller (1992) hanno evidenziato nei loro studi l'importanza rivestita da tali strumenti nell'apprendimento dell'algebra e delle nozioni matematiche di base.
È importante sottolineare i limiti riscontrati nell'utilizzo di strumenti di manipolazione: se da un lato l'uso di tali strumenti permette ai discenti di lavorare in prima istanza con i concetti matematici, dall'altro è necessario distaccarsi da essi al fine di attuare un processo di astrazione che permetterà ai discenti di apprendere appieno le nozioni matematiche.
Ad esempio, nel caso in esame, il lavoro svolto utilizzando le scatole per la comprensione del concetto di frazione non permette di studiare il significato di proporzione che la frazione può assumere.
Dunque, è importante proseguire il lavoro svolto e costruire ulteriori unità didattiche al fine di permettere ai discenti di lavorare e acquisire gli altri significati che la frazione può assumere.

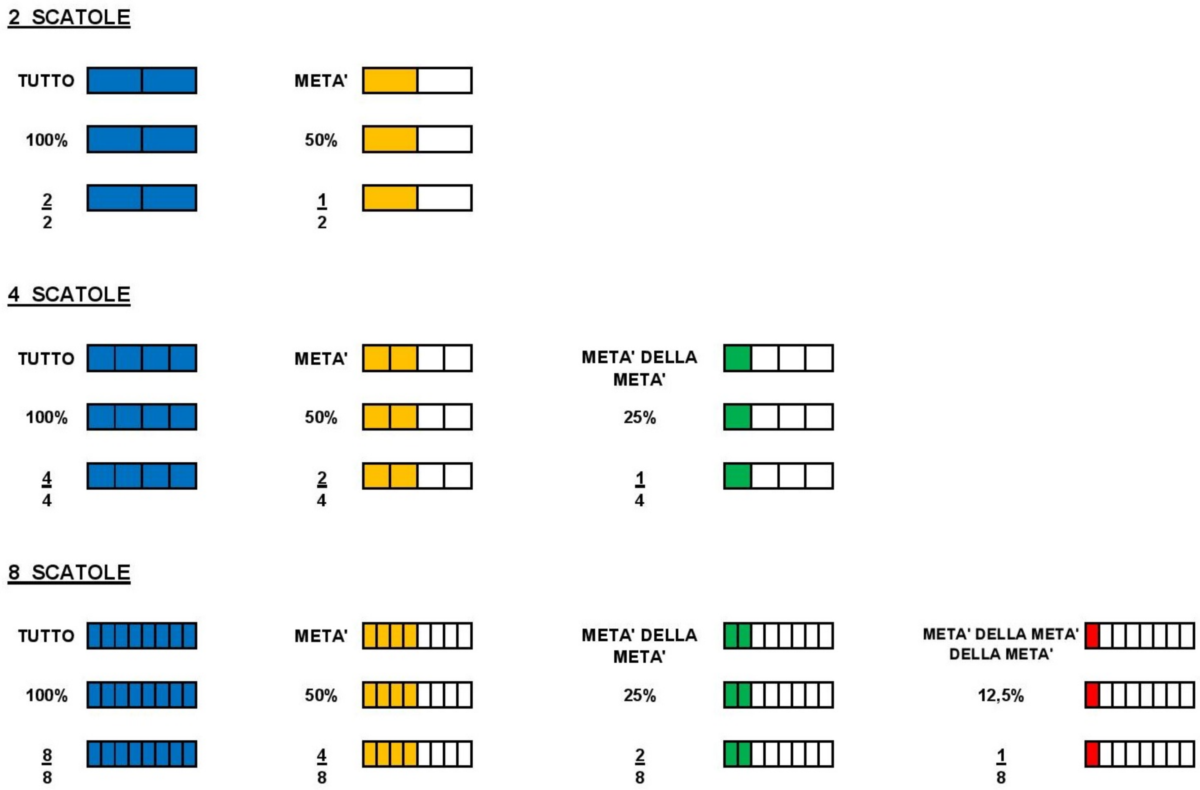
Si osserva, infine, che questo è solo uno dei percorsi che può essere seguito per introdurre il concetto di frazione.
Si potrebbe, ad esempio, strutturare un'unità didattica "musicale".
Ogni nota ed ogni pausa mediante le quali viene composto lo spartito ha un valore numerico espresso mediante una frazione. All'inizio della stesura dello spartito viene stabilita un'unità di tempo espressa mediante una frazione. Lo spartito musicale si struttura in battute. La somma del valore numerico delle note e delle pause utilizzate in ciascuna battuta deve rispettare il tempo suddetto.
Dunque, un percorso basato sull'utilizzo della musica, così come può essere la semplice lettura di uno spartito, potrebbe permettere ai discenti di lavorare in prima istanza non solo con le frazioni ma soprattutto con la somma, la sottrazione e l'equivalenza tra queste.

Ninna Nanna

Johannes Brahms

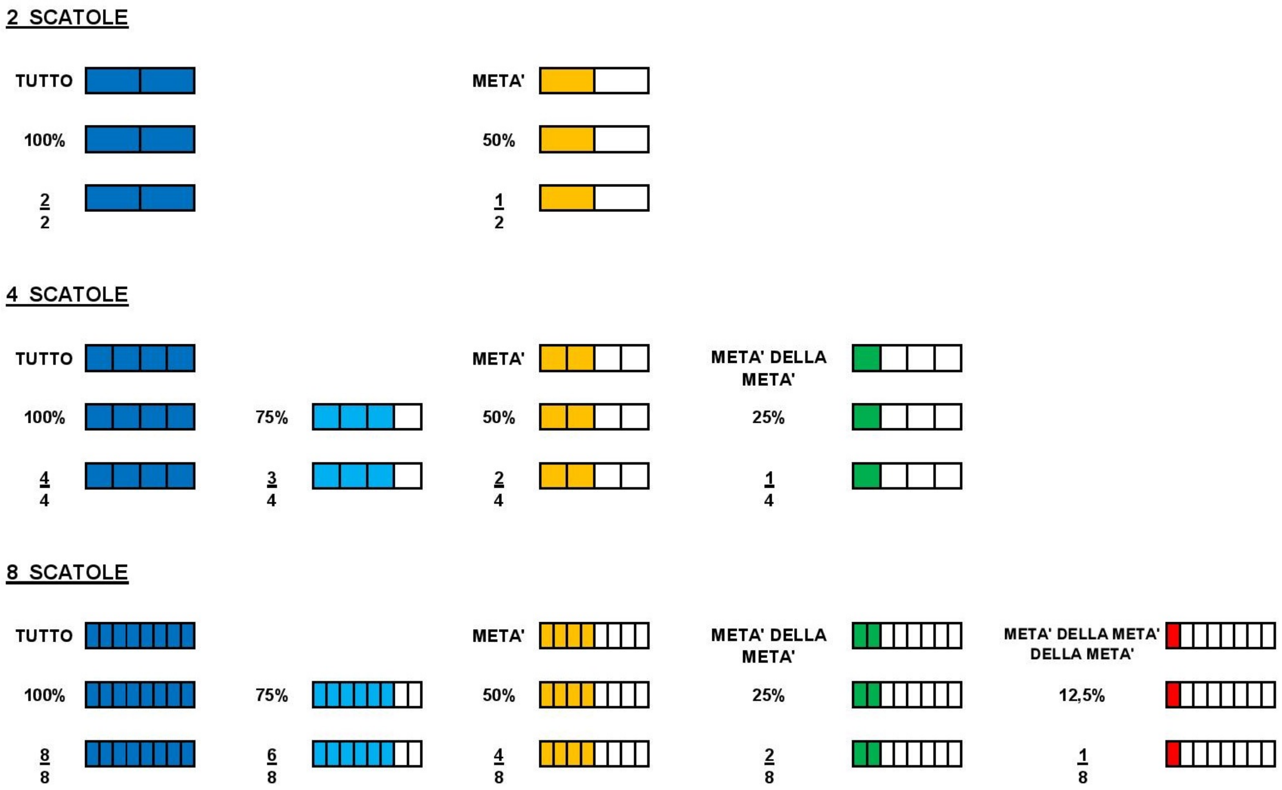
Appendice A

Scheda strutturata della prima lezione



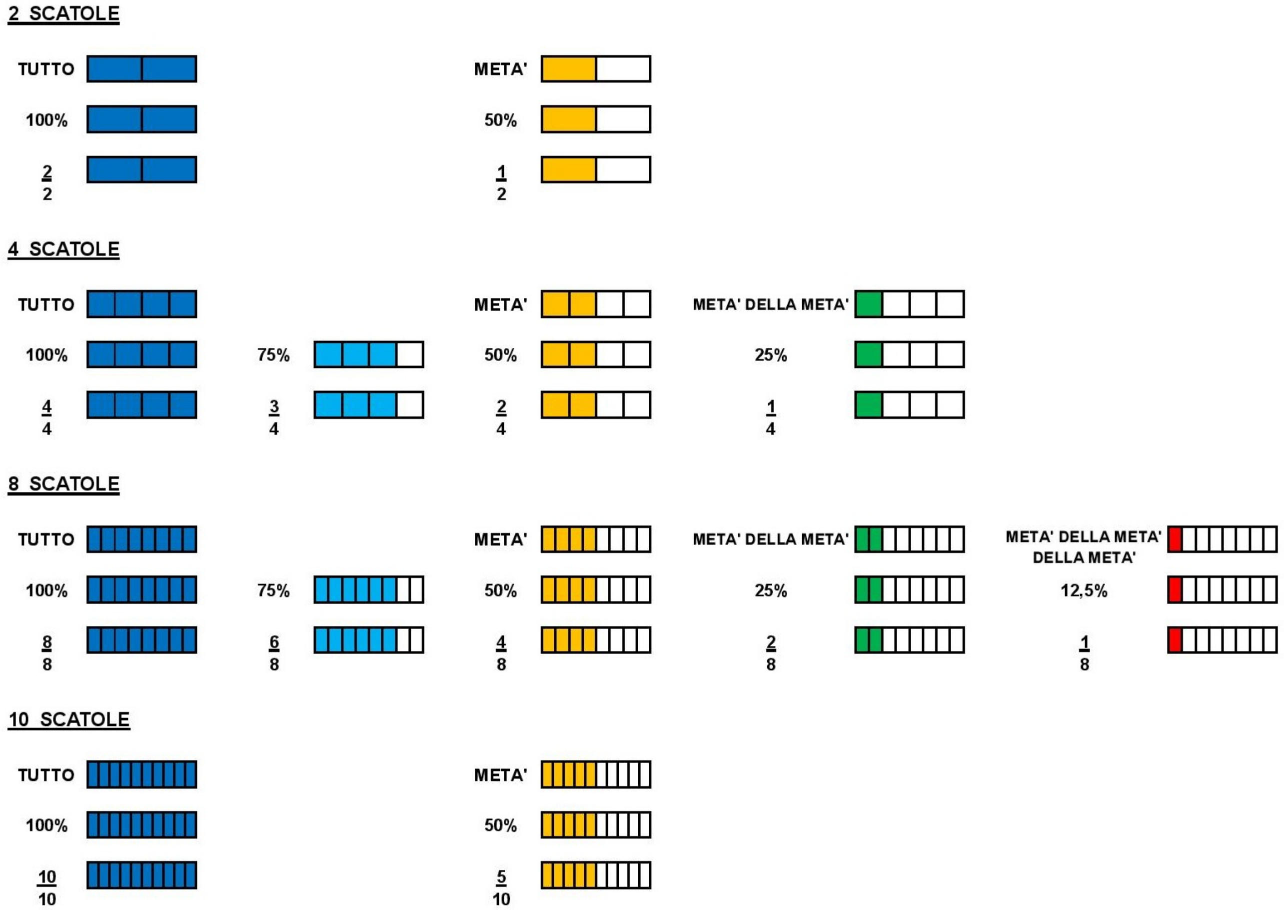
Appendice B

Scheda strutturata della seconda lezione



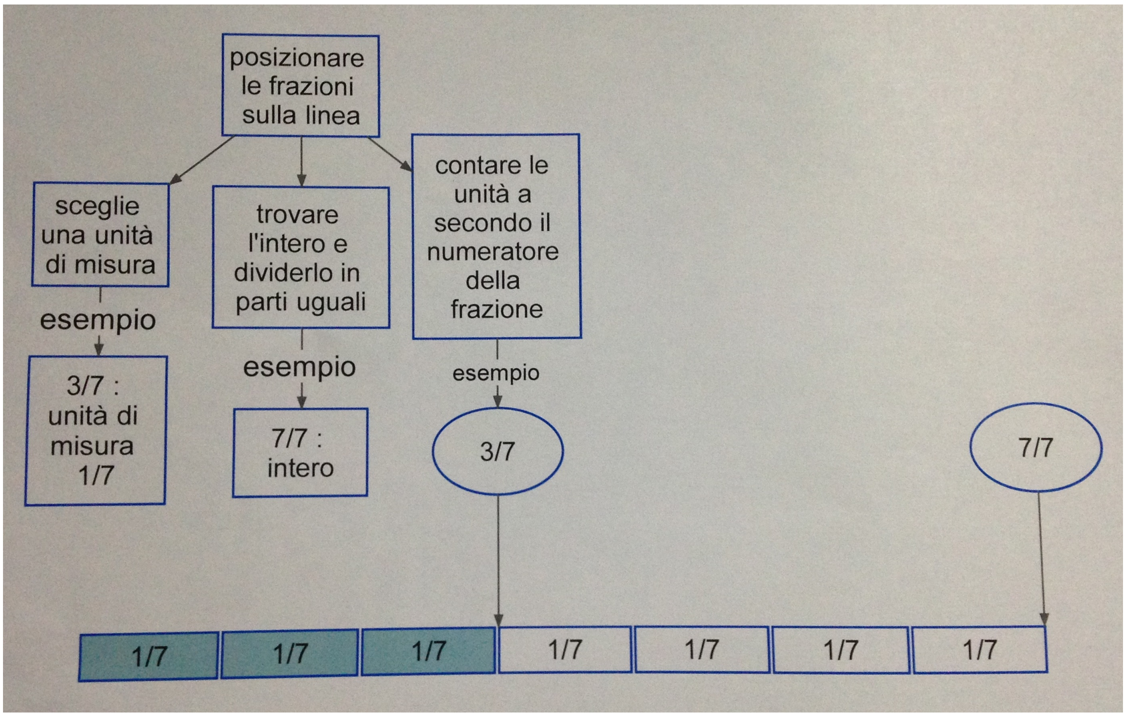
Appendice C

Scheda strutturata della terza lezione



Appendice D

Mappa concettuale



Bibliografia

American Psychiatric Association (1994). Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, Fourth Edition. Washington, DC.

Antell D., & Keating D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. Child Development, 54, pp. 695-710.

Arzarello F. (2006). Semiosis as a multimodal process. Relime, Numero Especial, pp. 267-299.

Baccaglini – Frank A., & Robotti E. (2013). Gestire gli studenti con DSA in classe. Alcuni elementi di un quadro comune. In: C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, P. Vighi, Quaderni GRIMeD n. 1, pp. 75-86.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artifacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In: L. English, M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, & B. Sriraman (Eds.). Handbook of International Research in Mathematics Education, pp. 750-787. Mahwah, NJ: LEA.

Bartolini Bussi M. G., Baccaglini - Frank A., & Ramploud A. (2013). Intercultural dialogue and the geography and history of thought. For the Learning of Mathematics, 34 (1), pp. 31-33.

Blair C., & Razza R. P. (2007). Relating effortful control, executive function, and false belief understanding to emerging math and literacy ability in kindergarten. Child Development, 78, pp. 647-663.

Bobis J., Mulligan J., & Lowrie T. (2013). Mathematics for children: challenging children to think mathematically, 4th edition. Pearson Australia, Malaysia.

Brousseau G. (1980). Les échecs electifs dans l'enseignements des mathématiques à l'école élémentaire. Revue de laryngologie, otologie, rhinologie. 127 [Trad. it. di M. L. Schubauer-Leoni in : Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento, 1996, p. 21. In Gallo E., Giacardi L., Roero C. S. (eds.) (1996), pp. 21-32].

Bull R., & Scerif G. (2011). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: Inhibition, switching, and working memory. Developmental Neuropsychology, 19, pp. 273-293.

Bull R., Espy K. A., & Wiebe S. A. (2008). Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. Developmental Neuropsychology, 33, pp. 205-228.

Butterworth B. (1999). Intelligenza matematica. Rizzoli, Milano.

Butterworth B. (2005). The development of arithmetical abilities. The Journal of Child Psychology and Psychiatry, 43, pp. 3-18.

Butterworth B., & Yeo D. (2011). Didattica per la discalculia. Attività pratiche per gli alunni con DSA in matematica. Edizioni Erickson, Trento.

Butterworth B., Bevan A., & Landerl K. (2005). Discalculia evolutiva e capacità numeriche di base. Difficoltà in matematica, 2 (1) , pp. 9-42.

Campulucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. La matematica e la sua didattica. 3, pp. 353-400.

Cipolotti L., & van Harskamp N. (2001). Disturbances of number processing and calculation. In: R. S. Berndt (a cura di), Handbook of neuropsychology. Vol. 3. Elsevier Science, Amsterdam.

Confrey J. (1994). Splitting, similarity, and the rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics, pp. 291-330. State University of New York Press, Albany.

Consensus Conference (2006, 2007). Disturbi Evolutivi Specifici di Apprendimento. Raccomandazioni per la pratica clinica definite con il metodo della Consensus Conference. Montecatini-Terme 22-23 settembre 2006, Milano 26 gennaio 2007.

Cornoldi C. (1999). Le difficoltà di apprendimento a scuola. Il Mulino, Bologna.

Cornoldi C. (2007). Difficoltà e Disturbi dell'Apprendimento. Il Mulino, Bologna.

D'Amore B. (2003). Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica. Pitagora, Bologna.

D'Amore B. (2005). Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica. In: Ancona R. L., Faggiano E., Montone A., Pupillo R (eds.) (2005). Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno. Atti del convegno omonimo, Università di Bari, 16-18 febbraio 2004. Ghisetti & Corvi, Milano.

Dehaene S., Piazza M., Pinel P., Cohen L. (2003). Three parietal circuits for number processing. Cognitive Neuropsychology, 20, pp. 487-506.

DfES - Department for Education and Skills (2001). Guidance to support pupils with dyslexia and dyscalculia. DfES Circular 0512/2001. Department for Education and Skills, London.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, ULP, IREM Strasbourg, pp. 37-65 [Trad. it. di B. D'Amore in : La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. For the learning of mathematics. 23, 1, 2003, pp. 47-51].

Espy K. A., McDiarmid M. M., Cwik M. F., Stalets M. M., Hamby A., Senn T.E. (2004). The contribution of executive functions to emergent mathematical skills in preschool children. Developmental Neuropsychology, 26, pp. 465-486.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici. Pitagora, Bologna.

Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). Numeri e operazioni nella scuola di base, pp. 8-19. UMI-Zanichelli, Bologna.

Fischbein E. (1992). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). Matematica a scuola: teorie ed esperienza, pp. 1-24. A cura di B. D'Amore. Pitagora, Bologna.

Gallese V., & Lakoff G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. Cognitive neuropsychology, 22 (3-4) , pp. 455-479.

Geary D. C. (1993). Mathematical disabilities: Cognition, neuropsychological and genetic components. Psychological Bulletin, 114, p. 347.

Geary D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. Journal of Learning Disabilities, 37, pp. 4-15.

Geary D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics: A five year longitudinal study. Developmental Psychology, 47, pp. 1539-1552.

Halford G. S., Cowan N., & Andrews G. (2007). Separating cognitive capacity from knowledge: a new hypothesis. Trends Cogn. Sci. 11, pp. 236-242.

Hiebert J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching, pp. 283-322. Hillsade, NJ: Erlbaum.

Hiebert J., & Wearne D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, pp. 199-223. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hitch G. J., & McAuley E. (1991). Working memory in children with specific arithmetical learning difficulties. British Journal of Psychology, 82, pp. 375-386.

Hunting R. P., & Davis G. E. (1991). Dimensions of young children's conceptions of the fraction one half. In R. P. Hunting, & G. Davis (Eds.). Early fraction learning, pp. 27–53. New York, NY: Springer-Verlag.

Huntington D. J. (1995). Instruction in concrete, semi-concrete, and abstract representation as an aid to the solution of relational problems by adolescents with learning disabilities. Doctoral dissertation, University of Georgia, 1994. Dissertation Abstracts International, 56, 512.

Isaacs E. B., Edmonds C. J., Lucas A., Gadian D. G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight: A neural correlate. Brain, 124, pp. 1701-1707.

Keeler M. L., & Swanson H. L. (2001). Does strategy knowledge influence working memory in children with mathematical disabilities? Journal of Learning Disabilities, 34, pp. 418-434.

Kerslake D. (1986). Fractions: Children's strategies and errors. NFER-Nelson. Windsor, England.

Kieren T. E. (1975). On the mathematical cognitive and instructional foundations of rational number. In: Lesh R. A. (ed.) (1976). Number and measurement, pp. 101-144. Columbus (Oh): Eric-Smeac.

Kieren T. E. (1976). Research on rational number learning. Athens (Georgia).

Kieren T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching, pp. 323-371. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren T. E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades, pp. 31-65. State University of New York Press, Albany.

Landerl K., Bevan A., & Butterworth B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students. Cognition, 93 (2), pp. 99-125.

Lewis K. E. (2016). Beyond Error Patterns: A Sociocultural View of Fraction Comparison Errors in Students With Mathematical Learning Disabilities. Hammill Institute on Disabilities: Learning Disability Quarterly, Vol. 39(4), pp. 199-212.

Lucangeli D. (a cura di) (2012). La discalculia e le difficoltà in aritmetica. Giunti scuola, Firenze.

Maccini P., & Hughes C. A. (2000). Effects of a problem-solving strategy on the introductory algebra performance of secondary students with learning disabilities. Learning Disabilities Research & Practice, 15, pp. 10–21.

Mack N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. Journal for Research in Mathematics Education, 21, pp. 16-32.

Mack N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal Knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), Rational numbers: An integration of research, pp. 85-105. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Marzocchi G. M., Lucangeli D., De Meo T., Fini F., Cornoldi C. (2002). The disturbing effect of irrelevant information on arithmetic problem solving in inattentive children. Developmental Neuropsychology, 21(1), pp. 73-92.

Mazzocco M. M. M., Myers G. F., Lewis K. E., Hanich L. B., Murphy M. M. (2013). Limited knowledge of fraction representations differentiates middle school students with mathematics learning disability (dyscalculia) versus low mathematics achievement. Journal of Experimental Child Psychology 115, pp. 371–387.

McLean J. F., & Hitch G. J. (1999). Working memory impairments in pupils with specific arithmetical difficulties. Journal of Pupil Psychology, 74, pp. 240-260.

Mercer C. D., & Miller S. P. (1992). Teaching students with learning problems in math to acquire, understand, and apply basic math facts. Remedial and Special Education, 13(3), pp. 19–34.

MIUR - Dipartimento per l'Istruzione, Direzione generale per lo Studente, l'Integrazione, la Partecipazione e la Comunicazione (2011). Linee Guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con Disturbi Specifici di Apprendimento.

MIUR (2012a). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Annali della Pubblica Istruzione.

MIUR (2012b). Schema di regolamento recante "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e agli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 Marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.".

MIUR (2012c). Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento – Istituti Tecnici, d.P.R. 15 marzo 2010, art. 8, comma 3.

MIUR (2012d). Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento – Istituti Professionali, d.P.R. 15 marzo 2010, n. 87, art. 8, comma 6.

Morrison S. R., & Siegel L. S. (1991). Arithmetic disability: Theoretical considerations and empirical evidence for this subtype. In: L. V. Feagans, E. J. Short, & L. Meltzer (Eds.). Subtypes of learning disabilities: Theoretical perspectives and research, pp. 189-208. Erlbaum, Hillsdale.

Moss J., & Case R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 30, No. 2, pp. 122-147.

Nemirovsky R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.). Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 1, pp. 103-135. Honolulu, USA:PME.

Ni Y., & Zhou Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. IEduc. Psychol., 40, pp. 24-52.

NMAP - National Mathematics Advisory Panel (2008). Foundations for success: Final report of the national mathematics advisory panel . Washington, DC: U.S. Department of Education.

Noelting G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. Educational Studies in Mathematics, 11, pp. 217-253.

Nunes T., & Bryant P. (1996). Children doing mathematics. Cambridge, MA: Blackwell.

Ohlsson S. (1988). Mathematics meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades, Vol. 2, pp. 53-92. Hillsdale, NJ: Erlbaum and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

OMS – Organizzazione Mondiale della Sanità (1990). Classificazione Statistica Internazionale delle Malattie e dei Problemi Sanitari correlati, Decima revisione.

Parker M, & Leinhardt G. (1995). Percent: A privileged proportion. Review of Educational Research, 65, pp. 421-481.

Passolunghi M. C., & Lanfranchi S. (2012). Domain-specific and domain-general precursors of mathematical achievement: A longitudinal study from kindergarten to first grade. British Journal of Educational Psychology, 82, pp. 42-63.

Passolunghi M. C., & Siegel L. S. (2001). Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. Journal of Experimental Child Psychology, 80(1) , pp. 44-57.

Passolunghi M. C., & Siegel L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. Journal of Experimental Child Psychology, 88(4) , pp. 348-367.

Piazza M., Facoetti A., Trussardi A. N., Berteletti I., Conte S., Lucangeli D., Dehaene S., Zorzi M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. Cognition, 116, pp. 33-41.

Piazza M., Giacomini E., Le Bihan D., Dehaene S. (2003). Single-trial classification of parallel pre-attentive and serial attentive processes using functional magnetic resonance imaging. Proceedings of the Royal Society, 270 (1521), pp. 1237-1245.

Piazza M., Mechelli A., Butterworth B., Price C. J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? NeuroImage, 15 (2), pp. 345-446.

Radford L. (2003) Gestures, speech, and the sprouting of signs: a semiotic-cultural approach to student's types of generalization. Mathematical Thinking and Learning, 5 (1), pp. 37-70.

Resnick L. B. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), Addition and subtraction: A cognitive perspective, pp. 136-155. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Robotti E., Antonini S., & Baccaglini – Frank A. (2007). Coming to see fractions on the number line.

Sbaragli S. (2007). Le frazioni di tutti i giorni. Rubrica: I ferri del mestiere. Il giornale della formazione. La Vita scolastica, 2, p. 63.

Siegler R. S., Fazio L. K., Bailey D. H., & Zhou X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. Trends in Cognitive Sciences, 17 (1).

Siegler R.S., Duncan G.J., Davis-Kean P.E., Duckworth K., Claessens A., Engel M., Susperreguy M. I., Chen M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. Psychological Science, 23, pp. 691–697.

Spina I. (2011). DSA: I Disturbi Specifici dell'Appendimento. Psico-Pratika, 64.

Stella G., & Grandi L. (2011). Come leggere. La dislessia e i DSA. Giunti Editore, Milano.

Stella G., & Grandi L. (2011a). Conoscere la dislessia e i DSA. Giunti Editore, Milano.

Swanson H. L. (2006). Cognitive processes that underlie mathematical precociousness in young children. Journal of Experimental Child Psychology, 93, pp. 239-264.

Swanson H. L. (2011). Working memory, attention, and mathematical problem solving: A longitudinal study of elementary school children. Journal of Educational Psychology, 103, pp. 821-837.

Szücs D., Devine A., Soltesz F., Nobes A., Gabriel F. (2013). Devevlopmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory ad inhibition impairment. Cortex, 49 (10), pp. 2674-2688.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactiques des mathématiques, 10, pp. 133-169. [Trad. it. di F. Speranza in : La matematica e la sua didattica, 1, 1992, pp. 4-19].

Vygotsky L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.). The Concept of Activity in Soviet Psychology, pp. 144–188. Armonk, NY: M. E. Sharpe, Inc..

Vygotsky L. S. (1993). Introduction: Fundamental problems of defectology. In R. W. Rieber, & A. S. Carton (Eds.). The collected works of L.S. Vygotsky: Volume 2. The fundamentals of defectology, pp. 29–51. New York, NY: Plenum Press.

www.anastasis.it

www.dm.unibo.it/∼verardi/Elementi%20di%20Algebra,%20cap%203.pdf

www.gestinv.it

Xu F., & Spelke E. S. (2000). Large number discrimination in 6-mounth-old infants. Cgnition, 74, B1-B11.

Legislazione in materia di Disturbi Specifici dell'Apprendimento

Costituzione della Repubblica Italiana, articoli 3, 9, 34.

D.M. 12/07/2011, n. 5669, "Disposizioni attuative della legge 8/10/2010".

D.P.R. 22/06/2009, n. 122, "Regolamento recante coordinamento delle norme vigenti per la valutazione degli alunni e ulteriori modalità applicative in materia, ai sensi degli articoli 2 e 3 del decreto-legge 1° settembre 2008, n. 137, convertito, con modificazioni, dalla legge 30 ottobre 2008, n. 169".

L. 08/10/2010, n. 170, "Nuove norme in materia di disturbi specifici di apprendimento in ambito scolastico".

MIUR, C.M. 06/03/2013, n. 8 prot. 561, "Direttiva Ministeriale 27 dicembre 2012 "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica". Indicazioni operative".

MIUR, C.M. 06/03/2013, n. 8 prot. 561, "Direttiva Ministeriale 27 dicembre 2012 "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica". Indicazioni operative".

MIUR, C.M. 15/03/2007, n.28 prot. 2613, "Esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione nelle scuole statali e paritarie per l'anno scolastico 2006-2007".

MIUR, C.M. 28/05/2009, prot. n. 5744, "Anno scolastico 2008/2009 – Esami di Stato per gli studenti affetti da disturbi specifici di apprendimento – DSA".

MIUR, direttiva ministeriale 27/12/2012, "Strumenti d'intervento per alunni con bisogni educativi speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica".

MIUR, Nota 01/03/2005, prot. n. 1787, "Esami di Stato 2004-2005 – Alunni affetti da dislessia".

MIUR, Nota 05/10/2004, prot. n. 4099/A/4, "Iniziative relative alla Dislessia".

MIUR, Nota 10/05/2007, prot. 4674, "Disturbi di apprendimento – Indicazioni operative".

MIUR, Nota 10/05/2007, prot. n. 4600, "Circolare n. 28 del 15 marzo 2007 sull'esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione nelle scuole statali e paritarie per l'a. s. 2006/07. Precisazioni".

MIUR, Nota 27/06/2013, prot. 1551, "Piano Annuale per l'Inclusività – Direttiva 27 dicembre 2012 e C. M. n. 8/2013".

MIUR, O.M. 15/03/2007, n. 26 prot. 2578, "Istruzioni e modalità organizzative ed operative per lo svolgimento degli esami di Stato conclusivi dei corsi di studio di istruzione secondaria superiore nelle scuole statali e non statali. Anno scolastico 2006/2007".

MIUR, O.M. 20/02/2006, n. 22, "Istruzioni e modalità organizzative ed operative per lo svolgimento degli esami di Sato conclusivi dei corsi di studio di istruzione secondaria superiore nelle scuole statali e non statali. Anno scolastico 2005/2006".