Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Teoria di campo conforme

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Davide Giosuè Lippolis

Anno Accademico 2015/2016

A Giusy e Patrizio, genitori e mentori

Sommario

In questa trattazione si introduce e si sviluppa la teoria di campo conforme. Il principale riferimento bibliografico è [1], da cui si è voluto estrarre ed elaborare un testo che, più che sull'esaustività della trattazione, si concentra sulle particolari proprietà della teoria date proprio dall'imposta invarianza sotto trasformazioni conformi.

Partendo da una breve introduzione storica seguita dall'esposizione di alcune nozioni preliminari utili (Capitolo 1) si passa successivamente allo sviluppo della teoria in $d \geq 3$ dimensioni (Capitolo 2) con particolare attenzione alla struttura di gruppo delle trasformazioni conformi e alle correnti conservate ottenute dalla presenza di tali simmetrie della teoria (Paragrafo 2.4). Inoltre particolare enfasi è data alle condizioni imposte sulle funzioni di correlazione dalle simmetrie (Paragrafo 2.5).

Successivamente (Capitolo 3) si procede con lo studio della teoria conforme in due dimensioni, dove essa possiede particolari proprietà che la distinguono dal caso di background a più alte dimensioni. In tale contesto si considera l'algebra di Virasolo (Paragrafo 3.2) e si espongono brevemente i casi del bosone libero (Paragrafo 3.5) e del fermione libero (Paragrafo 3.6).

Si ha infine (Capitolo 4) un'introduzione alla teoria nel caso di spazi curvi, in particolare il toro, concentrandosi sulla costruzione del background e sul gruppo modulare (Paragrafo 4.2).

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Generalità. Trasformazioni conformi e trasformazioni di scala

La CFT (Conformal Field Theory) affonda le proprie radici nello studio delle mappe conformi. Si definisce conforme una mappa

$$W : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

con $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ varietà Riemanniane o pseudo - Riemanniane, che conserva gli angoli. Piú precisamente date due curve passanti per un punto x la mappa W conserva gli angoli orientati tra di esse.

In principio il motivo d'interesse nelle mappe conformi fu l'applicazione alla cartografia, con l'introduzione da parte di Gerhardus Mercator della così chiamata proiezione di Mercatore nel 1569. Essa è una proiezione conforme di una sfera su un cilindro successivamente svolto su un piano.

Tale mappa fa parte di una classe di proiezioni chiamate stereografiche. Esse sono definite come proiezioni dei punti di una sfera da un polo P della stessa su un piano, solitamente tangente al punto antipodale a P. Si noti che per includere anche tale polo e dunque rendere la mappa biunivoca è necessario compattificare il piano aggiungendo il punto all'infinito.

Le trasformazioni conformi assunsero un interesse fisico all'inizio del Novecento, quando i lavori di Harry Bateman e Cunningham mostrarono che l'equazione d'onda di d'Alembert

$$\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 f(t,\vec{x}) - \nabla^2 f(t,\vec{x}) = 0 \tag{1.1}$$

è invariante sotto la trasformazione chiamata inversione[1]

$$\begin{aligned} R : \mathcal{M} &\to \mathcal{M} \\ x &\mapsto x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2} \end{aligned} \tag{1.2}$$

nel senso che se $f(x)$ è soluzione della (1.1) allora anche

$$f'(x') = \frac{f\big(R(x)\big)}{x^2} \qquad x^2 \neq 0 \tag{1.3}$$

sarà soluzione. Si noti che i vettori sul cono di luce non sono mappati, dunque per rendere la trasformazione suriettiva è necessario compattificare.

Durante tutta la prima metà del Novecento il ruolo delle trasformazioni conformi è stato marginale, sebbene esse abbiano avuto una loro importanza nello studio del comportamento asintotico delle varietà di spaziotempo. Con l'avvento della teoria quantistica dei campi esse sono state reinterpretate nell'ambito della meccanica statistica e della fisica fondamentale, con particolare enfasi negli ultimi decenni riguardo connessioni con la teoria delle stringhe, culminando nella congettura proposta da Juan Maldacena riguardo la corrispondenza AdS/CFT [2][3].

1.2 Introduzione al formalismo dei campi quantistici.

Si vogliono ora introdurre alcune nozioni fondamentali su cui si basa la teoria in esame. In tale sezione si proporrà il concetto di campo in seconda quantizzazione e quello di spazio di Fock. Inoltre si introdurranno gli strumenti dell'integrale funzionale e della rotazione di Wick. Per una trattazione esaustiva dell'argomento si rimanda ai testi [5][6].

Si consideri innanzitutto un campo classico scalare. Esso è una mappa

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{M} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \phi(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

con $\mathbb{K}$ campo reale o complesso (lo si considererà per ora reale) e $\mathcal{M}$ spaziotempo di Minkowski. Scalare in tale contesto significa che $\phi'(x') = \phi(x)$ sotto una trasformazione di coordinate, reale implica che $\bar{\phi}(\bar{x}) = \phi(x)$.

Sia ora un campo di questo tipo e si prenda l'equazione di Klein - Gordon

$$\big(\Box + m^2\big)\phi(x) = 0 \tag{1.5}$$

[1] In questo caso $\mathcal{M}$ indica lo spaziotempo di Minkowski e non una varietà generica.

dove si è posto c = 1.[2] Essa è l'equazione del moto a cui si vuole che ϕ obbedisca. La soluzione generale per il campo sarà

$$\phi(x) = \int \tilde{dk}\Big[a(\vec{k})e^{ikx} + a^*(\vec{k})e^{-ikx}\Big] \qquad \tilde{dk} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{1.6}$$

con $\tilde{dk}$ misura Lorentz-invariante.

Per passare alla formulazione quantistica si consideri la quantizzazione canonica che promuove le coordinate q_i e p_i ad operatori. Ciò che si vuole fare è estenderla al caso di sistemi con infiniti gradi di libertà, i campi. Per far ciò si definisce densità di lagrangiana il funzionale dei campi e delle loro derivate prime il cui integrale sulle coordinate spaziali definisce il funzionale lagrangiana:

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)] \tag{1.7}$$

In analogia con il caso a gradi di libertà finiti si definisce il campo coniugato

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \tag{1.8}$$

Nel caso di un campo libero scalare reale è possibile mostrare che la forma che la densità di lagrangiana dovrà avere è del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \Omega_0 \tag{1.9}$$

il che implica che si avrà per il campo coniugato $\Pi(x) = \dot{\phi}(x)$.

Si possono definire ora delle relazioni di commutazione canonica nel caso dei campi:

$$\begin{aligned} &\Big[\phi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t)\Big] = 0 \\ &\Big[\Pi(\vec{x},t), \Pi(\vec{x}',t)\Big] = 0 \\ &\Big[\phi(\vec{x},t), \Pi(\vec{x}',t)\Big] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned} \tag{1.10}$$

Data la (1.6) tali relazioni possono essere tradotte in equivalenti commutatori dei coefficienti a e $a^\dagger$ che saranno dunque promossi da funzioni scalari ad operatori e soddisferanno le relazioni

$$\begin{aligned} &\Big[a(\vec{k}), a(\vec{k}')\Big] = 0 \\ &\Big[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')\Big] = 0 \\ &\Big[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')\Big] = (2\pi)^3 2\omega\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \end{aligned} \tag{1.11}$$

[2] Nel corso di tutta la trattazione verranno utilizzate le unità naturali, se non specificato.

Gli operatori $a^\dagger(k)$ e $a(k)$ si rivelano essere rispettivamente gli operatori di creazione e distruzione di quanti del campo[3].

Si vuole ora costruire lo spazio di Hilbert degli stati su cui i campi agiranno, lo spazio di Fock.

Sia lo stato di vuoto $|0\rangle$ con la proprietà che $\langle 0|0\rangle = 1$. Lo stato di vuoto è annichilito da tutti gli operatori di distruzione[4], cioè

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0 \tag{1.12}$$

A partire da esso è possibile costruire lo spazio degli stati ad un quanto applicando allo stato di vuoto l'operatore di creazione

$$|\vec{k}\rangle = a^\dagger_{\vec{k}}|0\rangle \tag{1.13}$$

Si consideri allora il generico spazio degli stati a n quanti

$$\mathcal{F}_n = \left\{ |\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n\rangle \middle| |\vec{k}_1, \ldots, \vec{k}_n\rangle = a^\dagger_{\vec{k}_1} \ldots a^\dagger_{\vec{k}_n}|0\rangle, \qquad \vec{k}_i \in \mathbb{R}^3 \;\; \forall i = 1\ , \ \ldots\ , n \right\} \tag{1.14}$$

Lo spazio di Fock sarà dato dalla somma diretta

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bar{\mathcal{F}}_i \tag{1.15}$$

dove gli $\bar{\mathcal{F}}_i$ sono la chiusura degli insiemi definiti nella (1.14).

Come ultima cosa si vuole introdurre il concetto di integrale funzionale, con particolare attenzione alla sua formulazione Euclidea. Esso è uno strumento attraverso il quale è possibile definire la meccanica quantistica non relativistica in maniera alternativa rispetto alla formulazione attraverso la quantizzazione canonica. Eńon solamente un potente strumento di calcolo per le ampiezze di transizione, o funzioni di correlazione, ma fornisce un'interpretazione profonda della meccanica quantistica. Inoltre nella sua versione Euclidea dà un concreto indizio della connessione tra teoria di campo e meccanica statistica.

Si consideri l'integrale funzionale, o integrale sui cammini, nello spazio delle configurazioni

$$A = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[x]} \tag{1.16}$$

[3]Nel caso di una teoria fermionica si ha che i commutatori dovranno essere sostituiti dagli anticommutatori, mantenendo invariata la forma delle relazioni (1.10) e (1.11). Tale differenza è strettamente legata alle proprietà di simmetria e antisimmetria delle funzioni d'onda fermioniche e bosoniche.

[4]Qui gli operatori di creazione e distruzione sono stati normalizzati opportunamente perché nella (1.11) il fattore moltiplicativo della distribuzione delta di Dirac sia 1. In particolare si ha $a_{\vec{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}(2\omega)^{\frac{1}{2}}} a(\vec{k})$.

dove il simbolo $\mathcal{D}$ indica l'integrazione formale su tutti i cammini $x(t)$ che hanno come condizioni al contorno $x(t_i) = x_i$ e $x(t_f) = x_f$ e $\mathcal{S}[x]$ denota l'azione classica.

Ciò significa che a livello quantistico l'ampiezza di transizione tra due punti x_i e x_f è data dall'integrale su tutti i cammini possibili tra tali punti iniziali e finali pesati attraverso l'esponenziale immaginario dell'azione classica. L'idea è che i contributi dei cammini fortemente lontani da quello classico, cioè quello che minimizza il funzionale azione, avranno peso fortemente oscillante ($S >> \hbar$) eliminandosi così per interferenza distruttiva.

Si effettui ora la continuazione analitica della variabile temporale reale t in una immaginaria pura $-i\tau$. Tale trasformazione è detta rotazione di Wick. Allora l'azione acquisirà un fattore immaginario modificando l'integrale funzionale nella forma

$$\int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[x]} \tag{1.17}$$

In questo modo risulta evidente che nel limite semiclassico, cioè con azioni molto più grandi di $\hbar$, solamente il termine a $\mathcal{S}$ minima e cioè quello che corrisponde alla traiettoria classica dà contributo rilevante mentre tutti gli altri cammini sono soppressi dall'esponenziale.

Data la funzione di partizione

$$Z \equiv \mathrm{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T} \tag{1.18}$$

effettuando la rotazione di Wick $T \to -i\beta$, utilizzando la condizione al contorno $x(0) = x(\beta)$ e dunque considerando cammini chiusi si ottiene l'espressione della funzione di partizione attraverso l'integrale funzionale

$$Z_E = \int \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[x]} \tag{1.19}$$

Gli integrali funzionali non possono essere risolti senza una procedura di regolarizzazione. Esistono diverse procedure, tra le quali quella di Time Slicing che si utilizza per definire l'integrale sui cammini a partire dalla quantizzazione canonica e quella che considera l'espansione di Fourier delle funzioni nello spazio dei cammini, detta Mode Regularization.

Si considerino adesso le funzioni di correlazione a n punti nella rappresentazione di Heisenberg:

$$\langle \psi_f, t_f | T\hat{x}(t_1)\dots\hat{x}(t_n)|\psi_i, t_i\rangle \tag{1.20}$$

con T operatore temporale che considera gli operatori in ordine di tempo decrescente da sinistra a destra. Tali funzioni di correlazione, o semplicemente correlatori, possono essere facilmente definite utilizzando il formalismo dell'integrale funzionale come

$$\langle \psi_f, t_f | T\hat{x}(t_1)\dots\hat{x}(t_n)|\psi_i, t_i\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}x\; x(t_1)\dots x(t_n) e^{\frac{i}{\hbar}S[x]} \tag{1.21}$$

In questo contesto Z è definita come

$$Z = \int \mathcal{D}x e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}[x]} \tag{1.22}$$

In particolare il correlatore a 2 punti è detto anche propagatore. Si noti come in questo contesto diventa manifesto il legame tra la probabilità nella meccanica statistica e l'ampiezza di probabilità definita in meccanica quantistica.

Si vuole concludere estendendo la formulazione dell'integrale funzionale al caso dei campi. Considerato l'integrale definito come nella (1.16) e considerata la funzione di correlazione in (1.21) si definisce correlatore tra gli stati di vuoto:

$$\langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x_1)\dots\phi(x_n)e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi]} \tag{1.23}$$

1.3 Dipendenza dalla scala di energia del Modello Standard

Si analizzino le seguenti equazioni di campo:

Equazione di Maxwell senza sorgenti

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

Equazione di Dirac senza massa

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0$$

Equazione del moto per teorie di Yang-Mills

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{b\mu} F^c_{\mu\nu} = 0$$

Equazione del moto di un campo scalare auto-interagente

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

Tali equazioni definiscono le equazioni del moto di campi non massivi. Esse sono invarianti per trasformazioni di scala. Considerando campi massivi ciò non è più vero, dato che la massa introduce una scala di lunghezze, la lunghezza d'onda Compton, che rompe tale invarianza.

Questa invarianza si applica a campi classici, ma quando si effettua la procedura di quantizzazione anche nel caso di campi non massivi essa introduce una dipendenza dei termini di accoppiamento dalla scala di energie. Le teorie di campo quantistico sono quindi dipendenti da parametri di accoppiamento (la costante di struttura fine, il parametro di accoppiamento g forte, ecc.) che devono essere definiti per ottenere una teoria particolare che possa predire qualche realtà fisica. Si noti che nel caso di un campo scalare libero non massivo e nel caso di un campo fermionico libero non massivo non essendoci termini di accoppiamento l'invarianza resiste alla procedura di quantizzazione. Tali casi particolari verranno considerati nel seguito della trattazione.

Si vuole introdurre ora il concetto di rinormalizzazione. Sia una quantità osservabile, per esempio un'ampiezza di diffusione S. Essa è nell'ambito della teoria dei campi quantistici definita attraverso il metodo perturbativo in serie di potenze dei parametri di accoppiamento nudi. Analizzando gli ordini superiori allo zero si ottengono quantità divergenti che inficiano il calcolo dell'osservabile. Attraverso la procedura di regolarizzazione è possibile rinormalizzare tali quantità. Si consideri un termine dello sviluppo perturbativo mal definito per energie molto alte. Inserendo un cut-off, spesso indicato con Λ e chiamato cut-off ultravioletto, è possibile ottenere quantità non divergenti, salvo effettuare al termine della procedura il limite $\Lambda \longrightarrow \infty$. Si noti che né i parametri di accoppiamento nudi né il cut-off sono delle quantità osservabili, quindi il fatto che possano essere manipolati e che siano infiniti non rende la teoria mal definita.

Idea chiave è quella di assumere sperimentalmente conosciuto il valore dell'osservabile per un dato fenomeno ad una scala di energia particolare μ e porre

$$S(\mu) = g_R \tag{1.24}$$

con g_R parametro di accoppiamento rinormalizzato. A questo punto dallo sviluppo dell'osservabile S in serie di potenze di g_0 è possibile ai vari ordini perturbativi ottenere la corretta espressione per il parametro nudo che renda l'espressione dell'osservabile consistente con i valori sperimentali.

Il valore considerato di μ non è particolare. Infatti si può considerare un altro punto μ' e il conseguente parametro g'_R. Ciò implica l'esistenza di una classe di equivalenza di parametrizzazioni della teoria. Le trasformazioni tra differenti parametrizzazioni posseggono la struttura di gruppo e formano il così chiamato gruppo di rinormalizzazione. Effettuando trasformazioni infinitesime successive si ottiene il cosiddetto flusso del gruppo di rinormalizzazione.

Si introduce di seguito la funzione β di correlazione. Essa descrive la dipendenza di un parametro di accoppiamento dalla scala di energia μ ed è definita come

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \tag{1.25}$$

In questo modo se g è adimensionale anche β lo sarà. Si consideri adesso il caso particolare di $\beta = 0$. Se $g \neq 0$ allora tale condizione implica invarianza del parametro g dalla scala di energie (è quindi una costante). Questo implica che si sta prendendo in considerazione una teoria con invarianza per trasformazioni di scala. Attraverso il flusso di rinormalizzazione è possibile spostarsi da e verso tali punti particolari. L'ipotesi è che i punti non banali in cui la funzione di correlazione β è nulla possano indicare le proprietà della teoria in esame anche al di fuori degli stessi. In altre parole l'assunzione è che la teoria di campo conforme possa dare indizi sulle proprietà della teoria di campo al di fuori dei punti in cui la funzione β è nulla, e dunque per i punti in cui essa è non conforme, come nel caso delle teorie di campo del Modello Standard delle particelle [6][7].

Capitolo 2

Teoria di campo conforme in $d \geq 3$ dimensioni

2.1 Comportamento della metrica sotto trasformazioni conformi. Il fattore di scala Ω

Si consideri uno spazio reale $\mathbb{R}^{p,q}$ con p dimensioni temporali e q dimensioni spaziali[1] e dimensione $d = p + q \geq 3$ con metrica associata

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\underbrace{-1, \ldots,}_{p} \underbrace{+1, \ldots}_{q}) \tag{2.1}$$

Si ha che ψ mappa differenziabile è una trasformazione conforme su tale spazio se

$$\psi(x) : g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{2.2}$$

con Ω funzione locale chiamata fattore di scala. Si osservi che come casi particolari di trasformazioni conformi si hanno le trasformazioni di Poincaré con $\Omega = 1$ e le dilatazioni con $\Omega =$ cost. Più precisamente si consideri una generica trasformazione di coordinate $x \to x'$, allora la metrica si trasformerà come

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\nu}(x) = \Omega(x') g_{\rho\sigma}(x') \tag{2.3}$$

dove l'ultima uguaglianza si ha solamente nel caso di trasformazioni conformi.

Per procedere è conveniente considerare una trasformazione infinitesima delle coordinate

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{2.4}$$

[1]In tale trattazione sebbene si utilizzino gli indici greci si considererà come insieme di appartenenza degli stessi $\{1, \ldots d\}$.

da cui si potranno in seguito ottenere le trasformazioni finite attraverso la mappa esponenziale. Tale procedimento è sicuramente possibile poiché si vogliono considerare gruppi di Lie, cioè insiemi di trasformazioni con le proprietà di gruppo connesse all'identità e parametrizzati da un set di variabili. Un gruppo di Lie può essere definito a partire dalla sua algebra di Lie, come assicura il Teorema di Lie. Si otterranno i generatori e le relazioni di commutazione che definiscono l'algebra di Lie nel paragrafo 2.2.

Si vuole ora ottenere un'espressione per il fattore di scala Ω. Sviluppando le derivate nella (2.3) utilizzando la (2.4) si ottiene che

$$\Omega(x)g_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} + \partial_\rho\epsilon_\sigma + \partial_\sigma\epsilon_\rho \tag{2.5}$$

Contraendo la (2.5) con la metrica inversa $g^{\rho\sigma}$ si ottiene il fattore di scala Ω per trasformazioni infinitesime di coordinate

$$\Omega(x) = 1 + \frac{2}{d}\big(\partial\cdot\epsilon\big) \qquad \partial\cdot\epsilon \equiv \partial_\mu\epsilon^\mu \tag{2.6}$$

Inoltre combinando la (2.5) e la (2.6) possiamo ottenere un'equazione per ϵ. Infatti da tali equazioni si ottiene che

$$\partial_\rho\epsilon_\sigma + \partial_\sigma\epsilon_\rho - \frac{2}{d}\big(\partial\cdot\epsilon\big)g_{\rho\sigma} = 0 \tag{2.7}$$

Derivando in ∂^σ la (2.7) si ottiene

$$\partial_\rho\big(\partial\cdot\epsilon\big)\big(1-\frac{2}{d}\big) + \Box\epsilon_\rho = 0 \qquad \Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu \tag{2.8}$$

che derivata a sua volta in ∂_ρ porta con semplici manipolazioni all'equazione[2]

$$\big(d-1\big)\Box\big(\partial\cdot\epsilon\big) = 0 \tag{2.9}$$

2.2 Generatori dell'algebra del gruppo conforme e relazioni di commutazione

Per ottenere i generatori dell'algebra di Lie del gruppo conforme è utile considerare una trasformazione infinitesima generica conforme. Dati i generatori dell'algebra basterà utilizzare la mappa esponenziale per ottenere tutti gli elementi del gruppo. Si ricorda inoltre che in genere ci sono infinite rappresentazioni di un gruppo di Lie, ma dato che si ha a che fare con campi sarà necessario considerare quella infinito-dimensionale.

[2]Si noti che in tale trattazione $d \geq 3$. Se $d = 2$ bisognerà agire diversamente, come verrà mostrato nel capitolo 3.

Analizzando la (2.9) si può subito notare che $\partial \cdot \epsilon$ dovrà essere al più lineare in x e quindi ϵ dovrà essere al massimo quadratica in x. Possiamo dunque scrivere ϵ nella forma

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \qquad a, b, c \ll 1, \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \tag{2.10}$$

Si considerino ora separatamente i tre termini:

$\{\mathbf{a}_\mu\}$ Tale termine corrisponde alle traslazioni spaziotemporali, che ammettono come generatore $P_\mu = -i\partial_\mu$.

$\{\mathbf{b}_{\mu\nu}\}$ Si consideri l'Eq. (2.7). Ponendo in essa $\epsilon_\rho = b_{\rho\sigma} x^\sigma$ si ottiene che

$$b_{\rho\sigma} + b_{\sigma\rho} = \frac{2}{d}\big(g^{\mu\nu} b_{\mu\nu}\big) g_{\rho\sigma} \tag{2.11}$$

quindi la parte simmetrica di $b_{\rho\sigma}$ dovrà essere proporzionale alla metrica $g_{\rho\sigma}$. É dunque opportuno riscrivere tale termine esplicitando parte simmetrica e antisimmetrica:

$$b_{\rho\sigma} = \alpha g_{\rho\sigma} + m_{\rho\sigma} \qquad m_{\rho\sigma} = -m_{\sigma\rho} \tag{2.12}$$

La parte antisimmetrica $m_{\rho\sigma}$ corrisponde alle rotazioni di Lorentz, infatti omettendo gli altri termini nella (2.10) e sostituendo nella (2.4) si ottiene la trasformazione di coordinate

$$x'^\mu = x^\mu + m^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.13}$$

il cui generatore è l'operatore momento angolare definito come

$$L_{\mu\nu} = i\big(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\big) \tag{2.14}$$

La parte simmetrica di $b_{\rho\sigma}$ corrisponde alle trasformazioni di scala o dilatazioni infinitesime definite come

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha x^\mu \tag{2.15}$$

Al fine di ottenere il generatore di tali trasformazioni si consideri ora una trasformazione infinitesima generica

$$\begin{cases} x'^\mu = x^\mu + \epsilon_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon_a} \\ \\ \phi'(x') = \phi(x) + \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a} \end{cases} \tag{2.16}$$

Prima di procedere si definiscono alcune notazioni utili:

Variazione locale: $\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x')$

Variazione differenziale: $d\phi = \phi(x') - \phi(x)$

Variazione totale: $\Delta\phi = \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi + d\phi$

Data la variazione locale la si ponga

$$\phi'(x) - \phi(x) \equiv -i\epsilon_a Y_a \phi(x) \tag{2.17}$$

con Y incognita dipendente dal tipo di trasformazione. Dalla relazione tra variazione locale e totale si ottiene

$$-i\epsilon_a Y_a \phi = \Delta\phi(x) - d\phi(x) = \epsilon_a \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a}(x) - \partial_\mu \phi \epsilon_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon_a} \tag{2.18}$$

Nel caso scalare si ha variazione totale nulla e dunque la mappa F è l'identità. Da ciò si ottiene

$$Y_a \phi = -i\partial_\mu \phi \frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon_a} \tag{2.19}$$

Data la trasformazione infinitesima di coordinate delle dilatazioni data dalla (2.15), identificando il parametro α con ϵ_a e inserendola nella (2.19), ponendo Y_a uguale a D si ottiene l'espressione per il generatore delle dilatazioni

$$D = -ix^\mu \partial_\mu \phi \tag{2.20}$$

$\{\mathbf{c}_{\mu\nu\rho}\}$ Per discutere l'ultimo termine della trasformazione infinitesima (2.10) è utile fare riferimento all'Eq. (2.7). Derivando tale espressione in ∂_μ ed effettuando lo scambio $(\rho \leftrightarrow \sigma)$ si ottiene l'equazione

$$\partial_\rho \partial_\sigma \epsilon_\rho = \frac{1}{d}\big(g_{\rho\mu}\partial_\rho + \underbrace{g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\rho\sigma}\partial_\mu}_{0}\big)\big(\partial \cdot \epsilon\big) \tag{2.21}$$

Utilizzando quest'ultima equazione, sostituendo in essa il termine quadratico $\epsilon_\mu = c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$ si ottiene l'espressione per $c_{\mu\nu\rho}$ nella forma

$$c_{\mu\nu\rho} = g_{\mu\rho}c_\nu + g_{\mu\nu}c_\rho - g_{\nu\rho}c_\mu \qquad c_\mu = \frac{1}{d}c^\nu{}_{\nu\mu} \tag{2.22}$$

Sostituendo infine nella (2.4) l'espressione quadratica di ϵ^μ si ottiene la trasformazione conforme speciale infinitesima

$$x'^\mu = x^\mu + 2c^\nu x_\nu \, x^\mu - x^2 \, c^\mu \tag{2.23}$$

con generatore corrispondente

$$K_\mu = -i\big(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu\big) \tag{2.24}$$

Di seguito si riporta l'espressione della trasformazione conforme speciale finita, da cui utilizzando la relazione (2.3) è possibile ottenere il fattore di scala Ω imposto.

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - x^2 c^{\mu}}{1 - 2c^{\nu} x_{\nu} + c^2 x^2} \tag{2.25}$$

Come ultima considerazione si noti che per $x^{\mu} = \frac{1}{c^2} c^{\mu}$ il denominatore nella legge di trasformazione (2.25) va a zero, quindi per definire le trasformazioni speciali conformi globalmente bisognerà compattificare lo spazio.

Si sono così ottenuti tutti i generatori delle trasformazioni del gruppo conforme. Essi formano l'algebra di Lie del gruppo con le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned}
&\Big[D,\, P_{\mu}\Big] = iP_{\mu} \\
&\Big[D,\, K_{\mu}\Big] = -iK_{\mu} \\
&\Big[K_{\mu},\, P_{\nu}\Big] = 2i(g_{\mu\nu} D - L_{\mu\nu}) \\
&\Big[L_{\mu\nu},\, P_{\rho}\Big] = i(g_{\nu\rho} P_{\mu} - g_{\mu\rho} P_{\nu}) \\
&\Big[L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}\Big] = i(g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Tutti gli altri commutatori sono nulli. Gli operatori di Poincaré e le dilatazioni formano una sotto-algebra, infatti una teoria in generale può essere invariante sotto trasformazioni di Poincaré e dilatazioni senza dover esserlo rispetto a tutto il gruppo conforme. Esso avrà dunque per $d \geq 3$ dimensioni numero di parametri uguale a

$$\underbrace{1}_{\text{dilatazioni}} + \underbrace{d}_{\text{traslazioni}} + \underbrace{d}_{\substack{\text{tr. speciali} \\ \text{conformi}}} + \underbrace{\frac{d(d-1)}{2}}_{\substack{\text{rotazioni} \\ \text{di Lorentz}}} = \frac{(d+2)(d+1)}{2} \tag{2.27}$$

Si nota che esso è esattamente il numero di generatori dell'algebra del tipo $\mathscr{SO}(d+2)$. Considerando tale relazione, se si ridefiniscono i generatori nel seguente modo:

$$\begin{cases}
J_{\mu\nu} \equiv L_{\mu\nu} \\
J_{-1\,\mu} \equiv \frac{1}{2}\big(P_{\mu} - K_{\mu}\big) \\
J_{0\,\mu} \equiv \frac{1}{2}\big(P_{\mu} + K_{\mu}\big) \\
J_{-1\,0} \equiv D
\end{cases} \tag{2.28}$$

combinando la (2.26) con la (2.28) si ottiene l'espressione dell'algebra

$$\Big[J_{m\,n},\,J_{p\,q}\Big] = i\big(g_{m\,q}J_{n\,p} + g_{n\,p}J_{m\,q} - g_{m\,p}J_{n\,q} - g_{n\,q}J_{m\,p}\big) \tag{2.29}$$

con metrica diag$(-1, 1,\ \ldots\ , 1)$. Essa è proprio la relazione di commutazione che definisce l'algebra di $\mathscr{SO}(d+1, 1)$ nel caso dello spazio euclideo $\mathbb{R}^d$. Dato che si vuole considerare uno spazio di Minkowski a d dimensioni con un solo tempo ciò che si ottiene è essenzialmente un'isomorfismo tra l'algebra conforme e quella di $\mathscr{SO}(d, 2)$.

Sia allora una teoria di campo conforme in d dimensioni. Essa possiede le simmetrie date dal gruppo conforme, che si è appena scoperto isomorfo a quello di Lorentz in $d+1$ dimensioni. Tale connessione è un primo indizio della corrispondenza AdS/CFT, proposta da Juan Maldacena per realizzare il principio olografico, che mette in relazione una teoria di gravità in $(d+1)$ dimensioni all'interno di uno spazio Anti de Sitter con una teoria di campo conforme sul suo bordo d-dimensionale.

Sebbene essa sia tuttora una congettura essa potrebbe portare a nuovi sviluppi nello studio delle teorie che si concentrano sulla grande unificazione (in particolare la M-teoria), cioè nella ricerca di un'unica interazione responsabile di tutte le quattro interazioni fondamentali conosciute.

2.3 Azione delle trasformazioni conformi sui campi

Si vogliono studiare ora le trasformazioni conformi applicate a campi non scalari (rispetto a tali trasformazioni). Si consideri un campo che si trasforma come

$$\phi'(x') = (1 - i\epsilon_a Y_a)\phi(x) \tag{2.30}$$

con ϵ_a parametri infinitesimi. Per primo si prenda il sottogruppo di Lorentz, che essendo quello delle rotazioni lascia invariato il punto $x = 0$. L'azione delle trasformazioni di Lorentz infinitesime su $\phi(x = 0)$ è

$$L_{\mu\nu}\phi(0) = S_{\mu\nu}\phi(0) \tag{2.31}$$

con S operatore di spin.

Dalla relazione di Baker - Campbell - Hausdorff è possibile ottenere la formula:

$$e^{-A}Be^{A} = B + \big[B,\,A\big] + \frac{1}{2}\Big[\big[B,\,A\big],\,A\Big] + \frac{1}{3!}\left[\Big[\big[B,\,A\big],\,A\Big],\,A\right] + \ldots \tag{2.32}$$

Sistituendo ora $L_{\mu\nu}$ a B e $ix^\lambda P_\lambda$ ad A in tale espressione si può ottenere il generatore $L_{\mu\nu}$ traslato su valori di $x \neq 0$. In particolare al primo ordine:

$$L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu \tag{2.33}$$

Allora l'operatore momento agirà sui campi come

$$L_{\mu\nu}\phi(x) = i\big(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\big)\phi(x) + S_{\mu\nu}\phi(x) \tag{2.34}$$

dato che il generatore delle traslazioni è nel caso infinito-dimensionale $P_\mu\phi(x) = -i\partial_\mu\phi(x)$.

Lo stesso procedimento può essere utilizzato per ottenere i generatori delle trasformazioni dell'intero gruppo conforme. Si consideri il sotto-gruppo che lascia l'origine $x = 0$ invariata generato dalle rotazioni, dalle trasformazioni conformi speciali e dalle dilatazioni. Nell'origine si ha

$$\begin{cases} L_{\mu\nu} \longrightarrow & S_{\mu\nu} \\ D \longrightarrow & \tilde{\Delta} \\ K_\mu \longrightarrow & k_\mu \end{cases} \tag{2.35}$$

Si hanno le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} &\Big[\tilde{\Delta},\, S_{\mu\nu}\Big] = 0 \\ &\Big[k_\mu,\, k_\nu\Big] = 0 \\ &\Big[\tilde{\Delta},\, k_\mu\Big] = -ik_\mu \\ &\Big[S_{\mu\nu},\, k_\sigma\Big] = i(g_{\sigma\nu}x_\mu - g_{\sigma\mu}x_\nu) \\ &\Big[S_{\mu\nu},\, S_{\sigma\rho}\Big] = i(g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}S_{\mu\sigma}) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Allora si può effettuare lo stesso procedimento fatto per il momento angolare in precedenza; utilizzando la formula (2.32) si ottiene l'azione dei generatori delle trasformazioni conformi speciali e delle dilatazioni sui campi per $x \neq 0$:

$$K_\mu\phi(x) = \big[k_\mu + 2x_\mu\tilde{\Delta} - x^\nu L_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu\partial_\nu + ix^2\partial_\mu\big]\phi(x) \tag{2.37}$$

$$D\phi(x) = \big(-ix^\mu\partial_\mu + \tilde{\Delta}\big)\phi(x) \tag{2.38}$$

Si enuncia ora il seguente teorema, che si dimostrerà subito utile all'identificazione del generatore $\tilde{\Delta}$ delle dilatazioni.

Lemma (di Schur). *Sia G gruppo, $p : G \longrightarrow GL(V)$ e $q : G \longrightarrow GL(W)$ rappresentazioni irriducibili di G su un campo dato $\mathbb{K}$ e sia $T : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tale che*

$$T\big(p(g)v\big) = q(g)\big(T(v)\big) \qquad \forall v \in V \quad e \quad \forall g \in G$$

Allora si ha che:

1. *$T = 0$ oppure T è isomorfismo*

2. *Se $V = W$ e $p = q$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso allora si ha che T è proporzionale all'identità.*

Si vuole ora utilizzare tale lemma. Considerando $V = W$, il gruppo G quello delle rotazioni, $S_{\mu\nu} = q(g) = p(g)$ rappresentazione irriducibile, ponendo $T = \tilde{\Delta}$ si ottiene dalla proprietà di commutazione nella (2.36) che $\tilde{\Delta}$ dovrà essere proporzionale all'identità, cioè un numero.

Dato che la rappresentazione finito - dimensionale di un'algebra di Lie non compatta è necessariamente non unitaria e le dilatazioni in particolare non sono limitate si ha che il generatore $\tilde{\Delta}$ non sarà hermitiano. Sia ora $\tilde{\Delta} = -i\Delta$ con Δ dimensione di scala del campo ϕ. Essa sarà definita attraverso l'azione delle trasformazioni di scala sul campo

$$\phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta}\phi(x) \tag{2.39}$$

Considerando che $\tilde{\Delta}$ è un numero, data la sua relazione di commutazione con k_μ definita nella (2.36) si ottiene che $k_\mu = 0$.

Alla luce di quel che si è ottenuto si riportano qui di seguito allora le leggi di trasformazione dei campi sotto trasformazioni infinitesime del gruppo conforme, da cui si potranno ottenere poi quelle finite.

$$P_\mu\phi(x) = -i\partial_\mu\phi(x) \tag{2.40}$$

$$L_{\mu\nu}\phi(x) = i\big(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\big)\phi(x) + S_{\mu\nu}\phi(x) \tag{2.41}$$

$$D\phi(x) = -i\big(x^\mu\partial_\mu + \Delta\big)\phi(x) \tag{2.42}$$

$$K_\mu\phi(x) = \big(-2i\Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu\partial_\nu + ix^\nu x_\nu\partial_\mu\big)\phi(x) \tag{2.43}$$

Si consideri ora un campo $\phi(x)$ a spin nullo. Dato $\Omega(x)$ fattore di scala e una trasformazione conforme $x \longrightarrow x'$ è conveniente scrivere lo Jacobiano della trasformazione come

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{\sqrt{\det g'_{\mu\nu}}} = \Lambda(x)^{-\frac{d}{2}} \tag{2.44}$$

Sia infine un campo che si trasforma sotto trasformazioni conformi globali come

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{\Delta}{d}}\phi(x') \tag{2.45}$$

Un campo di questo tipo è detto quasi-primario. Se tale legge di trasformazione vale per tutto il gruppo conforme allora il campo è detto primario.

2.4 Correnti conservate e tensore energia-impulso

Si introduce adesso il principio di minima azione per sistemi ad infiniti gradi di libertà. Si consideri il funzionale Lagrangiana[3] nella forma

$$L = \int d^3x \, \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \tag{2.46}$$

Si noti che la lagrangiana dipende dalle derivate rispetto a tutte le quattro coordinate spazio-temporali per preservare l'invarianza di Poincaré. In base al principio di relatività tutte le teorie fisiche infatti devono essere invarianti sotto tali trasformazioni. La densità di lagrangiana $\mathcal{L}$ dipende unicamente dai campi e dalle derivate prime, per garantire che le equazioni del moto dipendano al più dalle derivate seconde dei campi. Inoltre si impone che la lagrangiana sia un funzionale locale, per preservare la causalità. Perché l'integrale converga inoltre è necessario imporre una condizione sui campi quando $|x| \to \infty$. In particolare essi devono annullarsi abbastanza velocemente per tale limite, affinché l'integrale sia finito.

L'azione si definisce, come per sistemi a finiti gradi di libertà

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \, \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)] \tag{2.47}$$

Per utilizzare il principio di minima azione è necessario introdurre il concetto di derivata funzionale, che generalizza quello di derivata direzionale per spazi a infinite dimensioni. Dato un funzionale $F[\phi(x)]$ si può esprimere la derivata funzionale (o euleriana) come

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} F[\phi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta\phi(x)}}_{\substack{\text{derivata} \\ \text{ordinaria}}} \underbrace{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)}}_{\delta(x-y)} \tag{2.48}$$

Si può ora utilizzare il principio di minima azione al fine di ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi a infiniti gradi di libertà.

Sia una variazione locale dei campi $\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ e delle derivate $\partial_\mu \phi(x)$. Si consideri allora la variazione del funzionale azione e la si ponga uguale a zero, imponendo il principio di minima azione:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \delta\partial_\mu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \delta\phi \right] \tag{2.49}$$

Ponendo infinitesimi i termini di bordo e dato che $\delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\delta\phi$ si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \tag{2.50}$$

[3] In questo paragrafo si considererà il caso $d = 4$, sebbene una trattazione formalmente identica può essere fatta in più alte dimensioni avendo cura di considerare gli integrali su tutte le coordinate spaziali.

Si scelga ora una variazione del campo $\phi(x)$ del tipo:

$$\delta\phi(x) = \delta\alpha_s(x) Y^s \phi(x) \tag{2.51}$$

Allora la lagrangiana si trasformerà come

$$\mathcal{L}[\phi] \to \mathcal{L}[\phi + \delta\phi] = \tilde{\mathcal{L}} \tag{2.52}$$

Tale funzionale $\tilde{\mathcal{L}}$ sarà funzione di ϕ, $\partial_\mu\phi$, $\delta\alpha_s$ e $\partial_\mu\delta\alpha_s$. Considerandone allora una variazione attorno alla soluzione stazionaria si avrà

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \delta\alpha_s(x) \left[\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\delta\alpha_s(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\big(\partial_\mu\delta\alpha_s(x)\big)} \right] = 0 \tag{2.53}$$

Si definiscono correnti di Noether

$$j_s^\mu(x) = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\big(\partial_\mu\delta\alpha_s(x)\big)} \tag{2.54}$$

Data la relazione (2.53) si ottiene

$$\partial_\mu j_s^\mu(x) = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\delta\alpha_s} \tag{2.55}$$

Se la lagrangiana originale è invariante sotto la trasformazione (2.51) allora si avrà che il lato destro della (2.55) sarà nullo, da cui si ottiene la conservazione della quadri-corrente con associata equazione di continuità.

É possibile generalizzare il concetto di corrente considerando ora trasformazioni più generali. Sia una trasformazione generica del tipo considerato nella (2.16). Data questa trasformazione si consideri la variazione dell'azione

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \left[\mathcal{L} \underbrace{\delta\mathcal{J}}_{\substack{\text{Variazione}\\ \text{jacobiano}}} + \underbrace{\Delta\mathcal{L}}_{\substack{\text{Variazione}\\ \text{totale}}} \right] \tag{2.56}$$

da cui è possibile ottenere un'espressione per la corrente conservata

$$j_s^\mu = \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\big(\partial_\mu\phi\big)} \partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \right] \frac{\delta x^\nu}{\delta\alpha_s} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \frac{\delta F}{\delta\alpha_s} \tag{2.57}$$

Si nota facilmente che se la corrente è conservata l'aggiunta di una divergenza di un tensore antisimmetrico non ne modifica questa proprietà. Infatti se

$$j_s^\mu \to j_s'^\mu = j_s^\mu + \partial_\nu B_s^{\nu\mu} \qquad B_s^{\mu\nu} = -B_s^{\nu\mu} \tag{2.58}$$

si avrà che se j_s^μ è conservata anche $j_s'^\mu$ lo sarà.

Si vogliono ora ottenere le correnti relative alle trasformazioni conformi. Sia una traslazione infinitesima. Si ha:

$$\begin{cases} \frac{\delta x^\mu}{\delta \alpha^\nu} = \delta^\mu{}_\nu \\ \\ \frac{\delta F}{\delta \alpha^\nu} = 0 \end{cases} \tag{2.59}$$

Allora sostituendo nell'espressione (2.57) per la corrente si ottiene:

$$j^\mu{}_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \tag{2.60}$$

Il corrispondente tensore energia-impulso sarà quindi

$$\Theta_C^{\mu\nu} = j^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{2.61}$$

Tale quantità non è in generale simmetrica, ma ciò implica la presenza nella corrente di un termine di spin. Per rendere il tensore energia-impulso simmetrico si considera allora il tensore di Belinfante - Rosenfeld

$$\Theta_B^{\mu\nu} = \Theta_C^{\mu\nu} + \partial_\rho B^{\rho\mu\nu} \qquad B^{\rho\mu\nu} = -B^{\nu\mu\rho} \tag{2.62}$$

Perché esso sia simmetrico si cerca ora una forma appropriata per il tensore $B^{\rho\mu\nu}$. Per far ciò si prenda dunque una trasformazione infinitesima del gruppo di Poincaré omogeneo (rotazione di Lorentz infinitesima):

$$\begin{cases} \frac{\delta x^\rho}{\delta \alpha_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\big(g^{\rho\mu} x^\nu - g^{\rho\nu} x^\mu\big) \\ \\ \frac{\delta F}{\delta \alpha_{\mu\nu}} = -\frac{i}{2} S^{\mu\nu} \phi \end{cases} \tag{2.63}$$

Considero ora la corrente $j^{\mu\nu\rho}$ che pongo

$$j^{\mu\nu\rho} \equiv \Theta_B^{\mu\nu} x^\rho - \Theta_B^{\mu\rho} x^\nu \tag{2.64}$$

Data la formula per la corrente (2.57) e le leggi di trasformazione nella (2.63) si ottiene la corrente

$$\begin{aligned} j^{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi x^\rho - g^{\mu\nu} x^\rho \mathcal{L} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial^\rho \phi x^\nu + g^{\mu\rho} x^\nu \mathcal{L} + i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} S^{\nu\rho} \phi\Big] \\ &= \frac{1}{2} \Theta_C^{\mu\nu} x^\rho - \frac{1}{2} \Theta_C^{\mu\rho} x^\nu + \frac{i}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} S^{\nu\rho} \phi \end{aligned} \tag{2.65}$$

A questo punto sceglie come ansatz per il termine $B^{\rho\mu\nu}$ del tensore di Belinfante:

$$B^{\rho\mu\nu} = \frac{i}{2}\Big[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\rho\phi}S^{\nu\mu}\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}S^{\rho\nu}\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu\phi}S^{\rho\mu}\phi\Big] \tag{2.66}$$

Si può vedere che con tale termine il tensore energia-impulso di Belinfante è simmetrico e soddisfa la (2.64).

Si cercano ora le correnti associate all'invarianza conforme. Si prenda in considerazione innanzitutto una trasformazione infinitesima di scala

$$\begin{cases} x'^\mu = (1+\alpha)x^\mu \\ \\ F(\phi) = (1-\alpha\Delta)\phi \end{cases} \tag{2.67}$$

Utilizzando sempre la (2.57) si ottiene la corrente associata

$$j^\mu_D = \Theta_C{}^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\Delta\phi \tag{2.68}$$

Si vuole ora cercare di eliminare il secondo termine in tale espressione. Si aggiunga un termine del tipo $\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho\chi^{\lambda\rho\mu\nu}$ al tensore $\Theta^{\mu\nu}_B$ con la condizione

$$\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho\chi^{\lambda\rho}{}_\mu{}^\mu = \partial_\mu V^\mu \tag{2.69}$$

Ponendo

$$V^\mu = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\rho\phi}\big(g^{\mu\rho}\Delta + iS^{\mu\rho}\big)\phi \tag{2.70}$$

si ottiene che $\Theta^{\mu\nu}_D = \Theta^{\mu\nu}_B + \frac{1}{2}\partial_\lambda\partial_\rho\chi^{\lambda\rho\mu\nu}$ soddisfa l'equazione

$$\Theta_D{}^\mu{}_\mu = \partial_\mu j^\mu_D \tag{2.71}$$

e dunque la corrente sarà data come

$$j^\mu_D = \Theta_D{}^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.72}$$

Si noti dunque che la condizione di traccia nulla nel tensore energia-impulso così definito corrisponde a quella di corrente conservata.

Sia infine una trasformazione conforme speciale infinitesima $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$. Si ha che per il parametro ϵ^μ vale l'Equazione (2.7). Sia la variazione dell'azione sotto una trasformazione generica delle coordinate. Si ha

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int d^4x\Theta^{\mu\nu}\big(\partial_\mu\epsilon_\nu - \partial_\nu\epsilon_\mu\big) \tag{2.73}$$

Dato che si vuole che la trasformazione sia conforme si può utilizzare la (2.7) e dunque ottenere per l'azione

$$\delta\mathcal{S} = -\frac{1}{4}\int d^4x\Theta^{\mu}_{\ \mu}\big(\partial\cdot\epsilon\big) \tag{2.74}$$

Da questa equazione si ottiene un importante risultato. Infatti la variazione dell'azione è nulla se la traccia del tensore energia-impulso Θ è nulla, cosa che si è appena ottenuta per il tensore associato alle trasformazioni di scala. Di conseguenza se un sistema è invariante sotto trasformazioni di scala lo è anche per trasformazioni speciali conformi, e dunque diventa invariante sotto l'azione di tutto il gruppo conforme.

2.5 Vincoli imposti dall'invarianza conforme sulle funzioni di correlazione

La condizione di invarianza sotto trasformazioni conformi impone dei grossi vincoli alle funzioni di correlazione. Si consideri la funzione di correlazione a due punti nel caso Euclideo (si è effettuata la rotazione di Wick):

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle = \frac{1}{Z_E}\int \mathcal{D}\phi\ \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)e^{-\mathcal{S}[\phi]} \tag{2.75}$$

con ϕ_1 e ϕ_2 campi quasi-primari. Assumendo che la misura funzionale, così come l'azione, sia invariante sotto trasformazioni conformi, si avrà che la funzione di correlazione si trasformerà come

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle \longrightarrow \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\frac{\Delta_1}{d}}_{x=x_1}\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{\frac{\Delta_2}{d}}_{x=x_2}\langle 0|T\phi_1(x_1')\phi_2(x_2')|0\rangle \tag{2.76}$$

Si consideri il caso delle dilatazioni. Si ha che se $x \to x' = \alpha x$ allora il correlatore si trasformerà come

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle \longrightarrow \alpha^{\Delta_1+\Delta_2}\langle 0|T\phi_1(\alpha x_1)\phi_2(\alpha x_2)|0\rangle \tag{2.77}$$

Inoltre dall'invarianza sotto traslazione si evince che il propagatore non potrà essere dipendente dai punti x_1 e x_2 ma solo dalla loro distanza $|x_1 - x_2|$. Allora

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle = f\big(|x_1-x_2|\big) \quad \text{con} \quad f(x) = \alpha^{\Delta_1+\Delta_2}f(\alpha x) \tag{2.78}$$

Allora la forma del propagatore sarà la seguente:

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle = \frac{d_{1\,2}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.79}$$

Il fattore $d_{1\,2}$ è una costante di normalizzazione che dipende da ϕ_1 e ϕ_2 e che può essere modificata arbitrariamente ridefinendo la normalizzazione dei campi in maniera opportuna.

Si consideri adesso una trasformazione speciale conforme. Si avrà

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \frac{1}{(1 - 2c \cdot x + c^2 x^2)^d} \tag{2.80}$$

da cui si ottiene che se $d_{1\,2} \neq 0$ allora $\Delta_1 = \Delta_2$. Ciò impone che solamente campi quasi primari con stessa dimensione conforme Δ avranno funzione di correlazione non nulla. In definitiva si avrà:

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)|0\rangle = \begin{cases} \frac{d_{1\,2}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}} & \text{se} \quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta \\ \\ 0 & \text{se} \quad \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \tag{2.81}$$

Considerazioni analoghe portano alle espressioni per i correlatori a 3 e 4 punti, che si riportano di seguito:

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)|0\rangle = \frac{\lambda_{1\,2\,3}}{x_{1\,2}^{\Delta-2\Delta_3} x_{2\,3}^{\Delta-2\Delta_1} x_{1\,3}^{\Delta-2\Delta_2}} \tag{2.82}$$

$$\langle 0|T\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\phi_4(x_4)|0\rangle = f(u,v) \prod_{i<j}^{4} x_{ij}^{\frac{\Delta}{3} - \Delta_i - \Delta_j} \tag{2.83}$$

con $x_{i\,j} \equiv |x_i - x_j|$, $\Delta \equiv \sum_i \Delta_i$ e $f(u,v)$ funzione dei rapparti anarmonici

$$\begin{aligned} u &\equiv \left(\frac{x_{1\,2} x_{3\,4}}{x_{1\,3} x_{2\,4}}\right)^2 \\ v &\equiv \left(\frac{x_{1\,2} x_{3\,4}}{x_{2\,3} x_{1\,4}}\right)^2 \end{aligned} \tag{2.84}$$

In questo caso il parametro $\lambda_{1\,2\,3}$ non è normalizzabile, ma al contrario è necessario definirlo per scegliere una particolare teoria.

Dati i correlatori per campi quasi-primari, si suppone poter definire un campo generico come combinazione lineare di campi quasi-primari, definendo così le funzioni di correlazione per un qualsiasi campo.

2.6 Quantizzazione radiale

Si consideri uno spazio-tempo piatto a d dimensioni foliato da superfici $(d-1)$-dimensionali. Per teorie Poincaré - invarianti si è soliti utilizzare superfici a tempo t costante. Ogni superficie avrà il suo spazio di Hilbert associato e se tali superfici sono legate da trasformazioni di simmetria allora gli spazi di Hilbert saranno tutti uguali.

Dati due stati in superfici differenti, dunque a tempi differenti, esiste un operatore unitario che li connette, detto operatore di evoluzione. Se si considerano teorie Poincaré - invarianti quali la meccanica quantistica allora si avrà che tale operatore sarà dato dall'esponenziale dell'Hamiltoniana

$$U = e^{i\hat{H}(t_f - t_i)} \tag{2.85}$$

Nel caso di teorie conformi è conveniente utilizzare una foliazione che abbia a che fare con le trasformazioni di scala piuttosto che con le traslazioni temporali.

Si prenda allora in considerazione la metrica

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\hat{n}^2 \tag{2.86}$$

In questo modo si stanno considerando sfere $(d-1)$-dimensionali di raggio r e centro nell'origine. Per passare da una superficie all'altra della foliazione si utilizzeranno allora trasformazioni di scala definite dal generatore D delle dilatazioni.

Gli stati su ogni superficie sono caratterizzati dalla dimensione di scala Δ e dal momento l. Si consideri uno stato generico come sovrapposizione di stati a parametri Δ e l dati. L'azione dell'operatore D su uno stato $|\Delta, l\rangle$ sarà

$$D|\Delta, l\rangle = i\Delta|\Delta, l\rangle \tag{2.87}$$

Allo stesso modo dato l'operatore momento $M_{\mu\nu}$ si avrà

$$M_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle = \Sigma_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle \tag{2.88}$$

Sia ora $\tau = \ln r$. La metrica (2.48) diventa allora

$$ds^2 = e^{2\tau}\big(d\tau^2 + d\hat{n}^2\big) \tag{2.89}$$

Si noti che tale metrica è conformemente equivalente a quella di un cilindro. Si ha che τ è l'analogo della coordinata temporale nell'operatore di evoluzione, che in tale contesto è

$$U = e^{iD\tau} \tag{2.90}$$

Facendo agire l'operatore di evoluzione su un autostato di D si ottiene

$$U|\Delta\rangle = e^{-\Delta\tau}|\Delta\rangle = r^{-\Delta}|\Delta\rangle \tag{2.91}$$

La foliazione dello spazio-tempo così definita è detta quantizzazione radiale. Si noti che il futuro remoto ($\tau \to \infty$) è equivalente alla condizione $r \to \infty$ mentre il passato remoto ($\tau \to -\infty$) è equivalente alla condizione $r \to 0$.

Si consideri ora lo stato di vuoto $|0\rangle$. Esso è annichilito dall'operatore D. Sia l'operatore $O_\Delta(x = 0)$ definito dall'equazione

$$O_\Delta(x = 0)|0\rangle = |\Delta\rangle \tag{2.92}$$

Si vuole ora traslare tale operatore su $x \neq 0$. Dato che l'operatore P è il generatore delle traslazioni spazio-temporali, si avrà

$$|\chi\rangle \equiv O_\Delta(x)|0\rangle = e^{iPx}O_\Delta(0)e^{-iPx}|0\rangle = e^{iPx}|\Delta\rangle \tag{2.93}$$

Espandendo l'esponenziale si vede che lo stato finale è in una sovrapposizione di autostati a differenti autovalori. Si può dimostrare inoltre che gli operatori P e K sono rispettivamente gli operatori di creazione e distruzione per gli stati di autovalori Δ.

Capitolo 3

Teoria di campo conforme in $d = 2$ dimensioni

3.1 Gruppo delle trasformazioni conformi in $d = 2$ dimensioni

Il gruppo conforme in due dimensioni presenta un'importante proprietà che lo distingue da quello in $d \geq 3$ dimensioni. Esso ha algebra ad infiniti generatori. Si vuole ora ottenere l'algebra di Lie del gruppo di trasformazioni in questo caso particolare.

Si consideri a tal proposito la trasformazione infinitesima di coordinate che si assume conforme

$$z^\mu = (z^0,\, z^1) \longrightarrow w^\mu = z^\mu + \epsilon^\mu \tag{3.1}$$

Data l'Eq. (2.7) che definisce l'equazione per il parametro infinitesimo ϵ^μ e data la metrica

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

si ottengono le condizioni sul parametro infinitesimo che devono essere soddisfatte perché la trasformazione sia conforme:

$$\begin{aligned} \partial_0 \epsilon_0 &= -\partial_1 \epsilon_1 \\ \partial_0 \epsilon_1 &= +\partial_1 \epsilon_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Tali equazioni assomigliano alle condizioni di olomorfismo di Cauchy - Riemann. In realtà i segni dovrebbero essere scambiati tra le due equazioni, cosa che si può ottenere considerando la metrica Euclidea bidimensionale piuttosto che quella Minkowskiana.

Data questa relazione è conveniente passare alle coordinate complesse:

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \epsilon^0 + i\epsilon^1 \\ z &\equiv x^0 + ix^1 \\ \partial_z &\equiv \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se si considerano le complesse coniugate di tali equivalenze si tenga presente che al posto della (3.3) si otterranno le relazioni di anti-olomorfismo. Date queste coordinate il tensore metrico diventerà

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Si definisce ora la seguente utile notazione, atta a snellire ulteriormente le equazioni e rendere ancor più manifesta la relazione di dualità delle equazioni ottenute dalle condizioni di olomorfismo o anti-olomorfismo:

$$\begin{aligned} \partial &\equiv \partial_z \\ \bar{\partial} &\equiv \partial_{\bar{z}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Con le coordinate (3.4) e la notazione appena definita, dalla trasformazione (3.1) utilizzando le condizioni (3.3) si ottengono infine le equazioni di Cauchy - Riemann

$$\bar{\partial} w(z, \bar{z}) = 0 \tag{3.7}$$

Allora w, considerata come funzione di z e $\bar{z}$ non dovrà dipendere da $\bar{z}$. L'insieme delle funzioni che soddisfano tale condizione è quello di tutte e sole le funzioni olomorfe sul piano complesso. Tale insieme è inoltre il gruppo di trasformazioni conformi in due dimensioni, ovviamente infinito-dimensionale.

Si scrive ora una trasformazione infinitesima conforme nella forma alternativa:

$$z' = f(z) = z + \epsilon(z) \qquad \text{con} \qquad \left|\epsilon(z)\right| << 1 \tag{3.8}$$

La metrica si trasformerà allora come

$$ds^2 = dzd\bar{z} \longrightarrow ds'^2 = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} dzd\bar{z} \tag{3.9}$$

Allora il fattore di scala in due dimensioni sarà $\Omega = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2$.

Si hanno quindi infinite trasformazioni conformi infinitesime indipendenti. Perché tali trasformazioni formino un gruppo esse devono possedere inversa e devono mappare l'intero piano complesso in se stesso. Si chiamino tali mappe trasformazioni conformi globali. Il gruppo da esse formato sarà il gruppo conforme speciale.

Si vogliono trovare quali funzioni olomorfe appartengono a tale gruppo. Innanzitutto si possono subito eliminare le funzioni polidrome, dato che non sono univocamente definite nei loro punti di diramazione. Successicamente, neanche le funzioni olomorfe con singolarità essenziali vanno bene, dato che l'immagine dell'intorno di una singolarità di questo tipo è denso in $\mathbb{C}$. Allora le uniche funzioni che hanno proprietà accettabili sono quelle con poli. Ogni funzione di questo tipo può essere scritta nella forma

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{3.10}$$

Se $P(z)$ ha più zeri distinti si ha che la controimmagine dello zero non sarà univoca e dunque la funzione non è invertibile. Se $P(z)$ ha uno zero con molteplicità maggiore di uno allora si avrà che un intorno abbastanza piccolo dello zero sarà mappato in 0, quindi la funzione non sarà iniettiva e dunque invertibile. Allo stesso modo si ha per $Q(z)$ considerando il comportamento all'infinito. Si ha dunque che P e Q dovranno essere al più lineari. Si ha quindi

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{con} \qquad ad-bc \neq 0 \tag{3.11}$$

con la condizione sui parametri $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ perché la trasformazione sia invertibile. Si possono riscalare le costanti in modo da avere precisamente $ad - bc = 1$ e associare dunque a ogni trasformazione una matrice

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \det T = 1 \tag{3.12}$$

Il gruppo formato da tali matrici è il gruppo SL(2, $\mathbb{C}$), equivalente al gruppo di Lorentz in $d = 4$.

3.2 Algebra del gruppo conforme in due dimensioni. Algebra di Witt e di Virasolo

Si è ottenuto nel precedente paragrafo che le trasformazioni conformi infinitesime devono essere olomorfe in un aperto, ma possono avere singolarità isolate al di fuori di tale aperto. Si considerino dunque le funzioni meromorfe. Possiamo sviluppare una generica funzione di questo tipo in serie di Laurent attorno ad un punto. Sia l'espansione attorno a $z = 0$ di $f(z)$:

$$\begin{aligned} z' &= f(z) = z + \epsilon(z) = z + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n\big(-z^{n+1}\big) \\ \bar{z}' &= \bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \bar{\epsilon}_n\big(-\bar{z}^{n+1}\big) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si consideri il termine m-esimo e sia un campo $\phi(z,\,\bar{z})$. Allora

$$\delta\phi(z,\,\bar{z}) = \epsilon(z)\partial\phi + \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi \tag{3.14}$$

Quindi il generatore associato al termine m-esimo sarà

$$\begin{aligned} l_m &= -z^{m+1}\partial_z \\ \bar{l}_m &= -\bar{z}^{m+1}\partial_{\bar{z}} \end{aligned} \tag{3.15}$$

L'algebra che tali generatori soddisfano è chiamata algebra di Witt, con le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned} \big[l_m,\,l_n\big] &= (m-n)l_{m+n} \\ \big[\bar{l}_m,\,\bar{l}_n\big] &= (m-n)\bar{l}_{m+n} \\ \big[l_m,\,\bar{l}_n\big] &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Tali algebra è infinito-dimensionale, infatti si hanno infiniti generatori l_m, ma essa contiene una sotto algebra con generatori l_{-1}, l_0 e l_1 che corrisponde al gruppo conforme globale di cui si era precedentemente discusso.

I generatori l_m non sono ben definiti globalmente. Si considerino infatti i generatori nell'origine. Essi sono ben definiti solo se $m+1 \geq 0$. Allo stesso modo dato il punto all'infinito, la condizione sarà $m-1 \leq 0$. Combinando tali condizioni si ottiene che per trasformazioni definite globalmente $-1 \leq m \leq +1$ e dunque le trasformazioni conformi globali saranno definite dai generatori l_{-1}, l_0 e l_1.

É immediato notare che $l_{-1} = -\partial_z$ e $\bar{l}_{-1} = -\partial_{\bar{z}}$ generano le traslazioni nel piano complesso, mentre $l_1 = -z^2\partial_z$ e $\bar{l}_1 = -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}}$ generano le trasformazioni speciali conformi. Per quanto riguarda l_0 e $\bar{l}_0$ si consideri la trasformazione $z \to az$ con $a \in \mathbb{C}$ in coordinate polari ($z = re^{i\theta}$). Si ha

$$\begin{aligned} l_0 &= -\frac{1}{2}r\partial_r + \frac{i}{2}\partial_\theta \\ \bar{l}_0 &= -\frac{1}{2}r\partial_r - \frac{i}{2}\partial_\theta \end{aligned} \tag{3.17}$$

Allora combinando linearmente questi generatori si possono ottenere i generatori delle dilatazioni e delle rotazioni rispettivamente

$$\begin{aligned} -\,r\partial_r &= \big(l_0 + \bar{l}_0\big) \\ -\,\partial_\theta &= i\big(l_0 - \bar{l}_0\big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Si introduce ora l'estensione centrale dell'algebra di Lie del gruppo conforme. In tal modo è possibile rendere le rappresentazioni proiettive reali rappresentazioni. L'estensione centrale dell'algebra di Witt è detta algebra di Virasolo, con le seguenti relazioni di commutazione:

$$\begin{aligned}
&\big[L_m,\, L_n\big] = (m-n)L_{m+n} + c g(m,\, n) \\
&\big[\bar{L}_m,\, \bar{L}_n\big] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \bar{c} g(m,\, n) \qquad \text{con} \qquad c \in \mathbb{C} \\
&\big[L_m, \bar{L}_n\big] = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

La prima proprietà osservabile della funzione $g(m,\, n)$ è che deve essere antisimmetrica per scambio $(m \leftrightarrow n)$, dalle proprietà del commutatore. Si vuole inoltre che i generatori L_m rimpiazzino quelli dell'algebra di Witt l_m, che in quanto generatori di un'algebra di Lie soddisferanno l'identità di Jacobi

$$\Big[A,\, \big[B,\, C\big]\Big] + \Big[B,\, \big[C,\, A\big]\Big] + \Big[C,\, \big[A,\, B\big]\Big] = 0 \tag{3.20}$$

con A, B e C generatori di un'algebra di Lie. Data questa relazione, sostituendone i generatori L_n, L_m e L_0 si ottiene che $g(m,\, n) = 0$ per $m + n \neq 0$. Allo stesso modo sviluppando l'identità di Jacobi per L_n, L_{-1} e L_{-n+1} si ottiene che dovrà essere $g(n,\, -n) = \frac{1}{12}(n^3 - n)$ considerando la normalizzazione $g(2,\, -2) = \frac{1}{2}$.

Si è dunque ottenuta l'algebra di Virasolo

$$\begin{aligned}
&\big[L_m,\, L_n\big] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,\,0} \\
&\big[\bar{L}_m,\, \bar{L}_n\big] = (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{\bar{c}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,\,0} \\
&\big[L_m, \bar{L}_n\big] = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3 Campi primari e quantizzazione radiale in due dimensioni

Sia un campo $\phi(x^0,\, x^1)$ in due dimensioni. Si trasformino le variabili in modo tale da avere $\phi(x^0,\, x^1) \to \phi(z,\, \bar{z})$. Se $\phi(z,\, \bar{z}) = \phi(z)$ è detto campo olomorfo o chirale, mentre se $\phi(z,\, \bar{z}) = \phi(\bar{z})$ allora è detto antiolomorfo o antichirale. Sia una trasformazione di scala $z \to \lambda z$. Allora il campo si trasformerà come

$$\phi(z,\, \bar{z}) \longrightarrow \phi'(z',\, \bar{z}') = \lambda^h \bar{\lambda}^{\bar{h}} \phi(\lambda z,\, \bar{\lambda}\bar{z}) \tag{3.22}$$

con h e $\bar{h}$ rispettivamente dimensione olomorfa e antiolomorfa del campo. Allora considerata una trasformazione conforme globale generica $z \to f(z)$ se un campo si trasforma come

$$\phi(z,\,\bar{z}) \longrightarrow \phi'(z',\,\bar{z}') = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \phi(f(z),\,\bar{f}(\bar{z})) \tag{3.23}$$

è detto campo quasi-primario. Se si trasforma in questo modo sotto trasformazioni conformi generali (non necessariamente globali) allora è detto primario.

Sia una trasformazione infinitesima $z \to f(z) = z + \epsilon(z)$. Allora si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h = 1 + h\partial_z\epsilon(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.24}$$

$$\phi(z + \epsilon(z),\,\bar{z}) = \phi(z) + \epsilon(z)\partial_z\phi(z,\,\bar{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.25}$$

Allora la variazione locale del campo ϕ sarà

$$\delta_\epsilon\phi(z,\,\bar{z}) = \big(h\partial_z\epsilon(z) + \epsilon(z)\partial_z + \bar{h}\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon}(\bar{z}) + \bar{\epsilon}(\bar{z})\partial_{\bar{z}}\big)\phi(z,\,\bar{z}) \tag{3.26}$$

Si vuole ora utilizzare la quantizzazione radiale per mappare il cilindro sulla sfera di Riemann (o il piano complesso compattificato). Sia allora la coordinata $w = x^0 + ix^1$ sul cilindro. La si può mappare nel piano attraverso la trasformazione $z = e^w = e^{x^0}e^{ix^1}$. In questo modo si mappa il passato remoto ($x^0 \to -\infty$) nell'origine del piano complesso e il futuro remoto ($x^0 \to \infty$) nel punto all'infinito.

Le traslazioni temporali $x^0 \to x^0 + a$ sono mappate nelle dilatazioni $z \to e^a z$ e le traslazioni spaziali $x^1 \to x^1 + b$ nelle rotazioni $z \to e^{ib}z$.

Sia un campo ϕ con dimensioni conformi $(h,\,\bar{h})$. Espandendo in serie di Laurent:

$$\phi(z,\,\bar{z}) = \sum_{m,\,\bar{n}\in\mathbb{Z}} z^{-m-h}\bar{z}^{-\bar{n}-\bar{h}}\phi_{m,\,\bar{n}} \tag{3.27}$$

Si consideri uno stato asintotico per $t \to -\infty$ e cioè $z \to 0$. Si ha

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\,\bar{z}\to 0}\phi(z,\,\bar{z})|0\rangle \tag{3.28}$$

Per evitare singolarità si impone $\phi_{m,\,\bar{n}}|0\rangle = 0$ per $m > -h$ e $\bar{n} > -\bar{h}$. Allora si ottiene

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\,\bar{z}\to 0}\phi(z,\,\bar{z})|0\rangle = \phi_{-h,\,-\bar{h}}|0\rangle \tag{3.29}$$

Si vogliono trovare ora gli stati $\phi^\dagger(z,\,\bar{z})$. L'hermitiano coniugato agisce come la trasformazione $z \to \frac{1}{\bar{z}}$, ma ciò implica che si avrà

$$\phi^\dagger(z,\,\bar{z}) = \bar{z}^{-2h}z^{-2\bar{h}}\phi\big(\frac{1}{z},\,\frac{1}{\bar{z}}\big) \tag{3.30}$$

Utilizzando quindi l'espansione di Laurent (3.27) si ottiene infine che

$$\phi^{\dagger}_{m,\,\bar{n}} = \phi_{-m,\,-\bar{n}} \tag{3.31}$$

Sia allora uno stato finale asintotico a $t \to +\infty$ ($z \to +\infty$). Si richiede dunque che non ci siano singolarità per $z,\ \bar{z} \to +\infty$. Facendo questo, considerando lo sviluppo di Laurent ciò implica imporre

$$\langle\phi| = \lim_{z,\,\bar{z}\to\infty} z^{2h}\bar{z}^{2\bar{h}}\langle 0|\phi(z,\,\bar{z}) = \langle 0|\phi_{h,\,\bar{h}} \tag{3.32}$$

3.4 Tensore energia-impulso. Introduzione all'OPE

Sia una trasformazione infinitesima generica $x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$. Allora la corrente associata sarà nella forma $j_{\mu} = \Theta_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}$. Sia j_{μ} conservata, e cioè $\partial^{\mu}j_{\mu} = 0$. Allora

$$\big(\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu}\big)\epsilon^{\nu} + \Theta_{\mu\nu}\big(\partial^{\mu}\epsilon^{\nu}\big) = 0 \tag{3.33}$$

Se ϵ^{μ} è costante allora si ha semplicemente $\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = 0$, altrimenti si ha

$$\big(\partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu}\big)\epsilon^{\nu} + \Theta_{\mu\nu}\delta^{\mu\nu} = 0 \tag{3.34}$$

Allora si hanno le condizioni sul tensore energia-impulso:

$$\begin{cases} \partial^{\mu}\Theta_{\mu\nu} = 0 \\[2ex] \Theta^{\mu}_{\mu} = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

Si vuole passare ora da $\Theta_{\mu\nu}$ a $\Theta_{z\,\bar{z}}$. Si ottengono dunque le relazioni

$$\begin{cases} \Theta_{z\,\bar{z}} = \Theta_{\bar{z}\,z} = \frac{1}{4}\Theta^{\mu}_{\mu} = 0 \\[2ex] \Theta_{zz} = \frac{1}{4}\big(\Theta_{00} - 2i\Theta_{10} - \Theta_{11}\big) = \frac{1}{2}\big(\Theta_{00} - i\Theta_{10}\big) \\[2ex] \Theta_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}\big(\Theta_{00} + 2i\Theta_{10} - \Theta_{11}\big) = \frac{1}{2}\big(\Theta_{00} + i\Theta_{10}\big) \end{cases} \tag{3.36}$$

Allora dalle Eq. (3.35) si ottiene per il tensore energia-impulso così ridefinito

$$\partial_{\bar{z}}\Theta_{zz} = \partial_{z}\Theta_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{3.37}$$

Si è ottenuto quindi che le componenti non nulle di Θ sono un campo $\Theta(z)$ olomorfo e uno $\bar{\Theta}(\bar{z})$ anti-olomorfo.

Data la definizione di carica conservata

$$Q = \int dx^1 j_0 \tag{3.38}$$

e data la forma della corrente conservata $j_\mu = \Theta_{\mu\nu}\epsilon^\nu$ si ha che Q è il generatore delle trasformazioni di simmetria per l'operatore generico A. Infatti:

$$\delta A = \big[Q,\, A\big] \tag{3.39}$$

con gli operatori considerati a tempi uguali. Nel caso delle due dimensioni l'integrale nella (3.38) diventa un integrale curvilineo nel piano complesso, in particolare un integrale circolare (in quantizzazione radiale tempi uguali corrisponde a raggi uguali, e dunque si ha $|z| = \text{cost}$) del tipo:

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \big(dz\Theta(z)\epsilon(z) + d\bar{z}\bar{\Theta}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z})\big) \tag{3.40}$$

Si ponga ora tale espressione per Q nella (3.39) e si sostituisca un campo $\phi(w,\, \bar{w})$ all'operatore A. Allora:

$$\delta_\epsilon \phi(w,\, \bar{w}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \Big\{ dz\Big[\Theta(z)\epsilon(z),\, \phi(w,\, \bar{w})\Big] + d\bar{z}\Big[\bar{\Theta}(\bar{z})\bar{\epsilon}(\bar{z}),\, \phi(w,\, \bar{w})\Big]\Big\} \tag{3.41}$$

Si consideri l'operatore di ordinamento temporale T introdotto nell'Eq. (1.20). In quantizzazione radiale si ha analogamente l'operatore di ordinamento radiale definito come:

$$RA(z)B(w) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{se} \quad |z| > |w| \\ \\ B(w)A(z) & \text{se} \quad |z| < |w| \end{cases} \tag{3.42}$$

Si vuole riformulare l'Eq. (3.41) utilizzando l'operatore di ordinamento così definito. Si prenda l'integrale circolare del commutatore tra due campi A e B

$$\begin{aligned} \oint dz\big[A(z),\, B(w)\big] &= \oint_{|z|>|w|} dzA(z)B(w) - \oint_{|z|<|w|} dzB(w)A(z) \\ &= \oint_{\mathcal{C}(w)} dzRA(z)B(w) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Allora si ottiene per la variazione (3.41) la forma

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi(w,\, \bar{w}) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}(w)} dz\epsilon(z)R\Theta(z)\phi(w,\, \bar{w}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}(w)} d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z})R\bar{\Theta}(\bar{z})\phi(w,\, \bar{w}) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Si consideri l'Eq. (3.26) e si utilizzi la rappresentazione integrale di Cauchy per esprimere i termini della somma come integrali circolari. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \phi(w,\, \bar{w}) = &\Bigg(\frac{h\partial_w \epsilon(w)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \frac{\phi(z,\, \bar{z})}{z-w} + \\ &+ \frac{\epsilon(w)}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}(w)} dz \frac{\phi(z,\, \bar{z})}{(z-w)^2} \Bigg) + \text{parte anti-chirale} \end{aligned} \tag{3.45}$$

Combinando la (3.44) e la (3.45), considerando che il percorso d'integrazione è arbitrario ed eliminando il parametro infinitesimo ϵ si ottiene l'espressione

$$\Theta(z)\phi(w,\, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\, \bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w \phi(w,\, \bar{w}) + \underbrace{\dots}_{\substack{\text{Termini non} \\ \text{singolari}}} \tag{3.46}$$

Tale espressione è chiamata OPE (Operator Product Expansion) e fornisce un'espansione del prodotto di due operatori calcolati in punti vicini. A volte è chiamata anche espansione a basse distanze oppure di Wilson. Infatti quest'ultimo propose un'espansione del prodotto di due operatori calcolati in punti vicini del tipo:

$$A(x)B(y) \sim \sum_n C_n(x-y) O_n\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \qquad \text{con} \qquad x \to y \tag{3.47}$$

In tale espressione gli O_n sono operatori regolari locali, mentre i coefficienti complessi $C_n(x-y)$ sono singolari per $x \to y$.

Tornando al caso bidimensionale, attraverso l'OPE è possibile verificare che il tensore energia impulso è in effetti un campo quasi-primario. Si consideri a tal proposito l'espansione del prodotto del tensore energia-impulso con se stesso. Per far ciò si consideri la sua espansione in modi di Laurent:

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \\ L_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \Theta(z) z^{n+1} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Imponendo che gli L_n appartengano all'algebra di Virasolo e utilizzando ancora la rappresentazione integrale di Cauchy per i commutatori $\big[L_m,\, L_n\big]$ si ottiene l'espansione del prodotto $\Theta\Theta$ come:

$$\Theta(z)\Theta(w) = \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2\Theta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \Theta(w)}{z-w} + \dots \tag{3.49}$$

Inoltre utilizzando l'OPE si può dimostrare che per un campo primario $\phi_n$vale la relazione

$$\big[L_m,\, \phi_n\big] = \big((h-1)m - n\big)\phi_{m+n} \qquad m,\, n \in \mathbb{Z} \tag{3.50}$$

Se tale relazione vale solamente per $m = 0,\, \pm 1$ allora ϕ_n è un campo quasi-primario, come nel caso del tensore energia-impulso. Esso è infatti un campo quasi-primario di dimensioni conformi $(h,\, \bar{h}) = (2,\, 0)$.

Si consideri una trasformazione infinitesima con parametro ϵ. Il tensore energia-impulso si trasforma come

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \Theta(z) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}(z)} dw \epsilon(w)\Theta(w)\Theta(z) = \\ =& \frac{c}{12}\partial_z^3 \epsilon(z) + 2\Theta(z)\partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z)\partial_z \Theta(z) \end{aligned} \tag{3.51}$$

Data la (3.48) si ha

$$\Theta(z)|0\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}|0\rangle \tag{3.52}$$

Si vuole che per $z = 0$ tale espressione non sia singolare. Allora le condizioni sui modi di Laurent saranno, ricordando che $L_n^\dagger = L_{-n}$:

$$\begin{aligned} L_n|0>=0 \qquad & \text{se} \qquad n \geq -1 \\ \langle 0|L_n = 0 \qquad & \text{se} \qquad n \leq 1 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Da ciò si ottiene che gli stati non triviali che si trasformano come rappresentazioni dell'algebra di Virasolo saranno generati da $L_{-n}|0\rangle$ con $n \geq 2$. Si noti che in questo modo lo stato di vuoto è annichilito dai generatori delle trasformazioni conformi globali $L_{\pm 1}$ e L_0.

Si può inoltre verificare utilizzando il metodo degli infinitesimi che sotto una trasformazione $x \to f(x)$ conforme il tensore energia-impulso si trasforma come

$$\Theta(z) \longrightarrow \Theta'\big(f(z)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Theta\big(f(z)\big) + \frac{c}{12} S\big(f(z),\, z\big) \tag{3.54}$$

con S derivata Schwarziana definita nel seguente modo:

$$S(f,\, z) = \frac{1}{\big(\partial_z f\big)^2}\Big[\big(\partial_z f\big)\big(\partial_z^3 f\big) - \frac{3}{2}\big(\partial_z^2 f\big)^2\Big] \tag{3.55}$$

Tale derivata ha la proprietà di essere nulla per qualunque $f(z)$ lineare frazionaria, cioè nella forma (3.11). Da tale proprietà si ottiene che il tensore Θ è un campo quasi-primario.

Si può infine considerare il correlatore a due punti tra il tensore energia-impulso e se stesso sfruttando l'espansione (3.49), ottenendo

$$\langle 0|\Theta(z)\Theta(w)|0\rangle = \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} \tag{3.56}$$

3.5 Bosone libero

Si consideri un campo scalare senza massa $\phi(x^0, x^1)$ sul cilindro di raggio $R = 1$. La densità di lagrangiana che lo descrive sarà

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2}\sqrt{|h|}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi \tag{3.57}$$

da cui è possibile ricavare l'azione. Sebbene g in questo caso sia considerata una costante moltiplicativa adimensionale arbitraria, nella teoria delle stringhe essa è legata alla tensione propria di stringa, mentre nel caso dell'applicazione di tale lagrangiana a problemi di meccanica statistica essa ricopre il ruolo di costante di accoppiamento.

Ponendo la metrica $h^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ si ottiene la seguente forma per l'azione:

$$\mathcal{S} = \frac{g}{2}\int dx^0 dx^1 \Big[\big(\partial_0\phi\big)^2 + \big(\partial_1\phi\big)^2\Big] \tag{3.58}$$

Ci si aspetta che tale azione sia invariante sotto trasformazioni conformi, considerato che in tale espressione non ci sono termini di massa né lunghezze di scala.

Attraverso la mappa esponenziale si può mappare il cilindro nel piano complesso, ottenendo l'azione nella forma

$$\mathcal{S} = \frac{g}{2}\int dz d\bar{z} \partial\phi \cdot \bar{\partial}\phi \tag{3.59}$$

Applicando adesso il principio di minima azione si ottiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \frac{g}{2}\int dz d\bar{z}\Big[\partial(\delta\phi)\bar{\partial}\phi + \partial\phi\bar{\partial}(\delta\phi)\Big] \\ &= \frac{g}{2}\int dz d\bar{z}\Big[-\delta\phi(\partial\bar{\partial}\phi) - \delta\phi\bar{\partial}\partial\phi\Big] = 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Allora l'equazione del moto del campo bosonico sarà $\partial\bar{\partial}\phi = 0$. Ciò implica che è sempre possibile scomporre il campo bosonico in parte chirale e parte anti-chirale $\phi(z, \bar{z}) = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z})$, dove L e R stanno rispettivamente per Left-moving e Right-moving, il cui significato è dato dalla reinterpretazione nel campo della teoria delle stringhe, in particolare quella bosonica.

Data l'equazione del moto si ha che la funzione di Green, e dunque la funzione di correlazione, è data dall'equazione

$$\partial\bar{\partial}G(z,\,w) = -\frac{1}{g}\delta^{(2)}(z-w) \tag{3.61}$$

per la parte olomorfa e analogamente per quella anti-olomorfa. La soluzione per i correlatori della parte chirale e antichirale del campo bosonico è

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi_L(z)\phi_L(w)|0\rangle &= -\frac{1}{g}\ln{(z-w)}\\ \langle 0|\phi_R(\bar{z})\phi_R(\bar{w})|0\rangle &= -\frac{1}{g}\ln{(\bar{z}-\bar{w})}\end{aligned} \tag{3.62}$$

La funzione logaritmo nel campo complesso è polidroma, quindi i correlatori trovati non sono ben definiti. A tal proposito si definiscano

$$\begin{aligned}J(z) &\equiv i\partial\phi\\ \bar{J}(\bar{z}) &\equiv i\bar{\partial}\phi\end{aligned} \tag{3.63}$$

Utilizzando l'OPE per questi due campi si ottengono le ampiezze di transizione

$$\begin{aligned}\langle 0|J(z)J(w)|0\rangle &= \frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2}\\ \langle 0|J(z)\bar{J}(\bar{w})|0\rangle &= 0\\ \langle 0|\bar{J}(\bar{z})\bar{J}(\bar{w})|0\rangle &= \frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\end{aligned} \tag{3.64}$$

J e $\bar{J}$ sono chiamati correnti e sono campi primari con dimensioni conformi $(h,\,\bar{h}) = (1,\,0)$ e $(h,\,\bar{h}) = (0,\,1)$ rispettivamente.

Si consideri ora in coordinate euclidee il tensore energia-impulso

$$\Theta_{\mu\nu} = g\big(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi\big) \tag{3.65}$$

Passando al piano complesso si ottiene

$$\Theta(z) = -2\pi g :\partial\phi\cdot\partial\phi: \tag{3.66}$$

In quest'ultima equazione si è introdotta la prescrizione dell'ordinamento normale o di Wick di cui si dà la definizione:

$$: \frac{1}{2}\left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger\right) :\equiv a_k^\dagger a_k \tag{3.67}$$

in cui a_k e $a_k^\dagger$ sono rispettivamente gli operatori di distruzione e creazione. Si noti che all'interno del prodotto ordinato normalmente gli operatori commutano.

Si consideri adesso il prodotto del tensore $\Theta(z)$ con se stesso, utilizzando l'espansione del prodotto di operatori:

$$\begin{aligned}\Theta(z)\Theta(w) =& 4\pi^2 g^2 : \partial\phi(z)\partial\phi(z) :: \partial\phi(w)\partial\phi(w) :\sim \\ &\sim \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} - \frac{4\pi g : \partial\phi(z)\partial\phi(w) :}{(z-w)^2} \sim \\ &\sim \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2\Theta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\Theta(w)}{z-w}\end{aligned} \tag{3.68}$$

Dalla forma dell'OPE si ottiene che per il bosone libero la carica centrale è $c = 1$.

3.6 Fermione libero

Si consideri una densità di lagrangiana così fatta:

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2}\bar{\Psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\Psi \qquad \text{con} \qquad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \tag{3.69}$$

in cui Ψ ha due componenti e le γ^α sono matrici 2x2 che soddisfano l'algebra di Clifford

$$\left\{\gamma^\alpha,\, \gamma^\beta\right\} = 2\delta^{\alpha\beta}\mathbb{I}_2 \tag{3.70}$$

Si utilizzi la rappresentazione per le matrici gamma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

Passando ora alle variabili complesse si ottiene

$$\gamma^0\gamma^\alpha\partial_\alpha = \gamma^0\left(\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1\right) = 2\begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \tag{3.72}$$

Allora inserendo tale espressione nell'Eq. (3.69) si ottiene l'espressione per la densità di lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{g}{2}\Psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^\alpha\partial_\alpha}\Psi = g\Psi^\dagger \begin{pmatrix}\partial_{\bar z} & 0\\ 0 & \partial_z\end{pmatrix}\Psi \\ &= g\begin{pmatrix}\bar\Psi\\ \Psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_{\bar z} & 0\\ 0 & \partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi & \bar\Psi\end{pmatrix} = g\big(\bar\Psi\partial\bar\Psi + \Psi\bar\partial\Psi\big)\end{aligned} \tag{3.73}$$

Allora imponendo il principio di minima azione si ottiene

$$\partial\bar\Psi = \bar\partial\Psi = 0 \tag{3.74}$$

Le soluzioni a tale equazione del moto sono un campo $\Psi(z)$ chirale e un campo $\bar\Psi(\bar z)$ anti-chirale.

Come effettuato per il bosone libero, si ottiene il tensore energia-impulso in coordinate complesse

$$\begin{aligned}\Theta^{zz} &= 2g\bar\Psi\bar\partial\bar\Psi\\ \Theta^{\bar z\bar z} &= 2g\Psi\partial\Psi\\ \Theta^{z\bar z} &= -2g\Psi\bar\partial\Psi\end{aligned} \tag{3.75}$$

Si consideri la componente olomorfa $\Theta(z)$. Essa è definita come

$$\Theta(z) \equiv -2\pi\Theta_{zz} = -\frac{1}{2}\pi\Theta^{\bar z\bar z} = -\pi g :\Psi(z)\partial\Psi(z): \tag{3.76}$$

da cui si ottiene l'OPE del tensore Θ con se stesso nella forma:

$$\Theta(z)\Theta(w) \sim \frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4} + \frac{2\Theta(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\Theta(w)}{z-w} \tag{3.77}$$

Nel caso del fermione libero si ha $c = \frac{1}{2}$.

Capitolo 4

Introduzione alla teoria conforme in uno spazio curvo. Il toro

4.1 Spazi curvi e genere di una superficie di Riemann. Il toro come background della teoria conforme in due dimensioni

Come si è ricavato nel precedente capitolo, sul piano complesso la parte olomorfa e la parte anti-olomorfa della teoria di campo conforme non si accoppiano, bensì possono essere trattate singolarmente come due teorie distinte. Tale situazione non è quella cercata, dato che si vorrebbe poter deformare la teoria con continuità allontanandosi dai punti critici dello spazio dei parametri per ottenere teorie che siano perturbazioni di quella conforme.

Per imporre un'accoppiamento tra il settore chirale e quello anti-chirale è possibile agire sulla geometria dello spazio su cui si costruisce la teoria. Si vuole dunque cercare una superficie che soddisfi i requisiti. Per far ciò si consideri il piano complesso da un punto di vista geometrico. Esso è topologicamente equivalente alla sfera di Riemann, una superficie di genere zero. Il genere è una proprietà delle superfici che fornisce un metodo di classificazione delle stesse. In particolare, il genere di una superficie è definito come il numero più grande di curve semplici chiuse disgiunte che possono essere disegnate sulla superficie in esame senza che si separi in due componenti connesse distinte.

Si vogliono allora considerare superfici con genere $g \geq 1$.[1] Imponendo che la teoria abbia senso su superfici a genere arbitrario si ottengono necessariamente delle condizioni per la teoria stessa.

Si prende qui in esame la superficie più semplice con genere diverso da zero, cioè il toro. Esso ha genere $g = 1$. Si vuole dunque studiare il comportamento della teoria

[1] Nella teoria delle stringhe il genere è legato alle ampiezze di diffusione di multi-loop.

conforme sul toro. Esso può essere considerato come il piano su cui sono applicate delle condizioni al contorno periodiche in entrambe le direzioni. È possibile definire il toro specificando due vettori primitivi linearmente indipendenti e considerare i punti che differiscono per combinazioni lineari intere di tali vettori. In tal modo si ottiene un reticolo di punti. Sia il piano complesso, allora tali vettori possono essere identificati dai numeri complessi α_1 e α_2, i periodi del reticolo (e del toro).

Per considerare la teoria sul toro bisognerà aggiungere delle condizioni alla quantizzazione radiale utilizzata per la teoria sul piano. A tal proposito per sviluppare il formalismo operatoriale sul toro bisognerà aggiungere delle condizioni al contorno periodiche sul cilindro.

Sia un campo primario chirale definito su $\mathbb{C}$. Allora esso si trasformerà sotto la mappa $z \to e^w$ come:

$$\begin{aligned} \phi_c(w) =& \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^h \phi(z) = z^h \phi(z) \\ =& z^h \sum_n \phi_n z^{-n-h} = \sum_n \phi_n e^{-nw} \end{aligned} \tag{4.1}$$

con ϕ_c campo sul cilindro. Si ha quindi che, dato un campo invariante sotto trasformazioni del tipo $z \to ze^{2\pi i}$ nel piano complesso e mappando tale campo sul cilindro si otterrà un campo invariante a meno di un fattore di fase $e^{2\pi i(h-\bar{h})}$. Per questo motivo si ha che solamente se $(h-\bar{h})$ è intero la condizione al contorno non viene modificata.

Sia ora il tensore energia - impulso. Come si è ottenuto nel capitolo precedente, esso non è un campo primario, quindi non è possibile utilizzare la formula (4.1). Sia dunque una trasformazione generica $z \to f(z)$. Il tensore energia-impulso si trasforma sotto questa mappa come

$$\Theta'\big(f(z)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \Theta\big(f(z)\big) + \frac{c}{12} S\big(f(z),\, z\big) \tag{4.2}$$

Si consideri la mappa esponenziale $z = e^w$. Allora si ha la seguente espressione per il tensore energia - impulso sul cilindro:

$$\Theta_c(w) = e^{2w}\Theta(e^w) - \frac{c}{24} \qquad \text{dato che} \qquad S(e^w,\, w) = -\frac{1}{2} \tag{4.3}$$

Espandendo il tensore Θ in serie di Laurent si ottiene inoltre

$$\Theta_c(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n e^{-nw} - \frac{c}{24} = \sum_n \big(L_n - \frac{c}{24}\delta_{n,0}\big) e^{-nw} \tag{4.4}$$

Tale risultato indica che l'unica differenza che intercorre tra i termini della somma (4.4) e i generatori dell'algebra di Virasolo è che il modo di ordine zero è $L_{0,c} = L_0 - \frac{c}{24}$ e allo stesso modo si ha per $\bar{L}_{0,c}$. Tale spostamento implica che l'energia di vuoto sul cilindro prende la forma

$$E_0 = -\frac{c + \bar{c}}{24} \tag{4.5}$$

Si vuole ora ottenere la funzione di partizione canonica Z. Si scelga a tal proposito il sistema di coordinate in modo da avere sull'asse reale la coordinata spaziale e sull'asse immaginario quella temporale. Sia un toro di parametri α_1 e α_2 tali che $\tau = \tau_1 + i\tau_2 \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. É possibile mostrare che la teoria non è dipendente dalla scala del reticolo né dall'orientazione assoluta dei vettori primitivi bensì proprio dal parametro modulare τ.

Per semplicità si scelga $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = \tau$. Si può definire Z come:

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Big(e^{-2\pi\tau_2 H} e^{2\pi\tau_1 P}\Big) \tag{4.6}$$

con H generatore delle traslazioni temporali e P generatore delle traslazioni spaziali. $\mathcal{H}$ è lo spazio di Fock di tutti gli stati della teoria. Siano le relazioni tra H, P e i generatori di Virasolo

$$\begin{aligned} H_c =& L_{0,c} + \bar{L}_{0,c} \\ P_c =& i(L_{0,c} - \bar{L}_{0,c}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Da esse si può ottenere la funzione di partizione nella forma

$$Z = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Big(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}}\Big) \qquad \text{con} \qquad q \equiv e^{2\pi i \tau} \tag{4.8}$$

4.2 Invarianza modulare

Sia la coppia (α_1, α_2). Essa definisce un reticolo la cui cella più piccola è il dominio fondamentale del toro. Detto ciò, si ha che dato un reticolo ci saranno più coppie di parametri che lo genereranno. Sia allora un reticolo (e quindi un toro) definito dalle coppie (α_1, α_2) e (β_1, β_2). Esse saranno collegate da una trasformazione lineare invertibile del tipo

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \tag{4.9}$$

e dalla trasformazione inversa

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Perché la matrice inversa abbia a sua volta elementi interi bisogna aggiungere la condizione $ad - bc = \pm 1$.

Si consideri la trasformazione $(\alpha_1, \alpha_2) \to (-\alpha_1, -\alpha_2)$. Il reticolo formato da (α_1, α_2) è lo stesso formato da $(-\alpha_1, -\alpha_2)$. Allora le matrici che soddisfano le condizioni di essere ad elementi interi e in aggiunta con quest'ultima proprietà fanno parte del gruppo $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$. Scegliendo infine $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, \tau)$ si ottiene il così chiamato gruppo modulare. Il gruppo modulare è sul toro un gruppo d'isometrie agente sul parametro modulare come

$$\tau \longrightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \text{con} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2 \tag{4.11}$$

Si considerano ora alcune trasformazioni particolari del parametro modulare.

$T \,:\, \tau \longrightarrow \tau + 1$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

$U \,:\, \tau \longrightarrow \frac{\tau}{\tau+1}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$S \,:\, \tau \longrightarrow -\frac{1}{\tau}$

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Si ha inoltre che

$$\begin{cases} S = UT^{-1}U \\ S^2 = (ST)^3 = \mathbb{I}_2 \end{cases} \tag{4.15}$$

Reiterando le trasformazioni S e T è possibile ottenere tutto il gruppo modulare. Si consideri ora l'azione del gruppo modulare sul semipiano superiore ($\Im(\tau) \geq 0$) del piano di Gauss che definisce τ. Dato il dominio fondamentale

$$F_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \quad \Im(z) > 0; \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq 0 \quad \text{con} \quad |z| \geq 1 \\ \\ 0 < \Re(z) < \frac{1}{2} \quad \text{con} \quad |z| > 0 \end{cases} \right\} \tag{4.16}$$

attraverso le trasformazioni T e S applicate a tale dominio ci si può spostare in settori diversi del piano.

Conclusioni

Riepilogando, si sono evidenziate le proprietà generali delle trasformazioni conformi e del gruppo da esse formato. In particolare si sono ottenute le relazioni di commutazione tra i generatori delle trasformazioni conformi, con particolare attenzione alla struttura dell'algebra in relazione a quella del gruppo speciale ortogonale.

Successivamente si è utilizzato il Teorema di Noether per ottenere le correnti associate alle simmetrie della teoria per ottenere infine il tensore energia-impulso con le proprietà richieste.

Si è ottenuta l'algebra di Lie del gruppo conforme in due dimensioni, identificando il gruppo con l'insieme delle funzioni olomorfe. Utilizzando tale risultato si è sviluppata la teoria definendo il tensore energia-impulso, riferendosi in particolare alla sua forma ottenuta attraverso l'implementazione dell'espansione del prodotto di operatori. In tale contesto si è specializzata la teoria nel caso del bosone libero e del fermione libero. Infine si è introdotto il caso del toro come background della teoria.

Successivi ipotetici sviluppi della trattazione sono indirizzati da un lato verso la fisica fondamentale, con lo studio della già citata ipotesi di corrispondenza AdS/CFT, e dall'altro verso la fisica della materia per quanto riguarda lo studio delle transizioni di fase, con particolare attenzione nei confronti dello studio degli esponenti critici.

Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento va fatto al Relatore Professore Fiorenzo Bastianelli, per la disponibilità e la pazienza dimostrata nel rispondere a domande a volte di dubbia sagacia.

Ringrazio la mia famiglia, che mi ha supportato in ogni momento riponendo in me la massima fiducia.

Per ultimi, ma non per importanza, ringrazio i miei amici, Buba per primo, per avermi negato l'imbarazzo di studiare quando non era giusto farlo, permettendomi di apprezzare la condizione di studente da diverse prospettive, tutte allo stesso modo importanti.

Bibliografia

[1] Paul Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Lyman Laboratory of Physics, Harvard University

[2] Juan M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, arXiv:hep-th/9711200v3

[3] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, Yaron Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, arXiv:hep-th/990511v3

[4] H. A. Kastrup, *On the Advancements of Conformal Trasformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics*, arXiv:0808.2730v1

[5] Mark Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press

[6] Claude Itzykson, Jean-Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, Courier Corporation

[7] Bertrand Delamotte, *A hint of renormalization*, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Universités Paris