

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

## Simmetrie e modello a quark

**Relatore:**  
Prof. Fiorenzo Bastianelli

**Presentata da:**  
Marco Magnani

Anno Accademico 2015/2016

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Simmetrie e gruppi</b>	<b>6</b>
1.1 Invarianza e covarianza . . . . .	7
1.2 Struttura matematica . . . . .	8
<b>2 Rappresentazioni</b>	<b>10</b>
2.1 Rappresentazioni riducibili e irriducibili . . . . .	10
2.2 Lemma di Schur . . . . .	11
<b>3 I gruppi continui</b>	<b>14</b>
3.1 I gruppi di Lie . . . . .	14
3.2 Relazione di commutazione . . . . .	15
3.3 Generatori e osservabili . . . . .	16
3.4 Proprietà dell'algebra di Lie . . . . .	18
3.4.1 Identità di Jacobi . . . . .	18
3.4.2 Rappresentazioni aggiunta . . . . .	18
3.4.3 Algebra semi-semplice . . . . .	19
<b>4 Il gruppo <math>U(1)</math></b>	<b>20</b>
4.1 $SO(2)$ e $T_1$ . . . . .	20
4.1.1 Rappresentazione definente di $SO(2)$ . . . . .	20
4.1.2 Rappresentazioni irriducibili di $SO(2)$ . . . . .	21
4.1.3 $T_1$ . . . . .	22
<b>5 <math>SU(2)</math></b>	<b>23</b>
5.1 $SU(2)$ . . . . .	23
5.1.1 Operatori innalzamento e abbassamento $SU(2)$ . . . . .	24
5.1.2 Rappresentazioni irriducibili $SU(2)$ . . . . .	26
5.2 $SO(3)$ . . . . .	26
5.3 Tensori . . . . .	27

5.3.1	Esempio: somma degli autovalori . . . . .	27
5.3.2	Operatori tensoriali . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Algebre compatte e semisemplici, radici e pesi</b>	<b>30</b>
6.1	Operatori di Cartan . . . . .	30
6.2	Radici . . . . .	31
6.3	Metodo generale: innalzamento e abbassamento . . . . .	32
6.3.1	Condizioni sulle radici . . . . .	33
6.3.2	Radici semplici . . . . .	34
6.3.3	Trovare tutte le radici . . . . .	35
6.3.4	Pesi fondamentali . . . . .	35
6.4	SU(3) . . . . .	36
6.5	Indici alti e indici bassi . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Il gruppo di Lorentz</b>	<b>43</b>
7.1	Rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Applicazioni: simmetrie nell'interazione forte</b>	<b>49</b>
8.1	Isospin . . . . .	49
8.1.1	Spazio di Isospin . . . . .	49
8.1.2	Rottura della simmetria di isospin . . . . .	50
8.1.3	I pioni . . . . .	51
8.1.4	Altre simmetrie di Isospin . . . . .	52
8.2	Eightfold way . . . . .	52
8.3	Quark . . . . .	54
8.4	Struttura dei mesoni leggeri . . . . .	55
8.5	Struttura dei barioni leggeri . . . . .	56
8.5.1	Confinamento . . . . .	56
8.5.2	Funzione d'onda dei barioni . . . . .	57
	<b>Conclusioni</b>	<b>60</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di familiarizzare con la teoria dei gruppi, per poi osservarne la forza e l'utilità studiandone l'applicazione al modello a quark. Questa teoria si occupa dello studio delle simmetrie, intese come trasformazioni che agiscono sulle coordinate di un sistema e fornisce gli strumenti matematici necessari alla loro descrizione all'interno del formalismo della meccanica quantistica. La struttura matematica attraverso la quale vengono descritte le simmetrie è il gruppo, ogni particolare trasformazione di simmetria è rappresentata da un suo elemento. Ad ognuno di questi elementi è infine associato un operatore lineare tramite le rappresentazioni. Poichè in meccanica quantistica gli stati dei sistemi vivono in spazi vettoriali, l'operatore lineare è l'immediata realizzazione di una generica trasformazione. Ogni gruppo è rappresentativo di un particolare genere di simmetrie: vi è ad esempio il gruppo delle rotazioni, quello delle traslazioni e quello delle trasformazioni di Lorentz. La teoria dei gruppi si prefigge di esaminare le proprietà di un dato sistema invariante sotto l'azione di un gruppo, analizzando le caratteristiche di quest'ultimo senza esplorare direttamente la natura del sistema. Come vedremo approfondendo il modello a quark, è possibile studiare le simmetrie spazio-temporali, ma anche quelle relative a spazi "interni", le cui coordinate rappresentano caratteristiche intrinseche del sistema come massa, carica o isospin. Questi spazi vengono definiti appositamente per descrivere il comportamento invariante del sistema per trasformazioni di simmetria in tale spazio. Vedremo, ad esempio, come creare lo spazio di isospin e che una trasformazione di simmetria in tale spazio corrisponde a modificare alcune caratteristiche intrinseche del sistema senza variare il suo comportamento rispetto all'interazione forte.

Nel primo e secondo capitolo, oltre a definire le strutture matematiche di base, introdurremo il concetto di simmetria, il quale risulta fondamentale ed il punto di inizio di tutta l'analisi successiva. Per fare questo ci soffermeremo sui termini invarianza e covarianza e distingueremo le simmetrie di un osservabile da quelle di una legge fisica. Una simmetria per un osservabile è una trasformazione che lascia invariato il suo valore, mentre una simmetria per una legge fisica è una trasformazione che può lasciarla esattamente uguale (legge invariante), o uguale in forma (legge covariante). Gli osservabili invarianti rappresentano uno strumento importantissimo poichè sono associati a numeri quantici

costanti che classificano le rappresentazioni e gli stati sui quali esse agiscono. Un'altra importante nozione definita all'interno del secondo capitolo è quella di rappresentazione irriducibile. I due capitoli si concludono con il primo notevole risultato dello studio, ovvero il lemma di Schur, il quale ci fornisce un'idea di come gli stati di un sistema vengano classificati sulla base delle proprietà del gruppo. In particolare introdurremo il concetto di rappresentazione irriducibile e vedremo che un osservabile invariante sotto l'azione di un gruppo, assume lo stesso valore di aspettazione per ogni stato che trasforma secondo la stessa rappresentazione irriducibile. Identificare queste rappresentazioni è il primo passo per classificare gli stati dello spazio vettoriale su cui agisce il gruppo.

Nel terzo capitolo presenteremo i gruppi di Lie, i cui elementi dipendono in modo continuo da certi parametri. Ogni elemento può essere realizzato attraverso l'esponenziale di alcuni operatori lineari chiamati generatori, perciò l'analisi della maggior parte delle proprietà del gruppo si ricava dal semplice studio dei generatori, che formano uno spazio vettoriale. Essi descrivono tutte le caratteristiche locali del gruppo, rimangono escluse solo quelle globali che hanno comunque un'importante rilevanza nella costruzione delle rappresentazioni. Successivamente definiremo l'algebra di Lie come l'insieme dei generatori muniti di una relazione di commutazione, che è l'espressione della legge di moltiplicazione del gruppo. Gli osservabili invarianti si riconoscono poiché il loro commutatore con i generatori delle trasformazioni di simmetria risulta nullo. Inoltre si può associare ad ogni osservabile il generatore di una trasformazione unitaria poiché entrambi sono hermitiani. Risulta quindi immediato identificare tutti gli osservabili simultaneamente misurabili con quelli commutanti con tale generatore. Nella parte conclusiva del capitolo introdurremo la rappresentazione aggiunta attraverso la quale individueremo le algebre compatte e semisemplici, che sono di fondamentale importanza perché descrivono gruppi le cui rappresentazioni sono facilmente classificabili.

Nel quarto capitolo esamineremo il gruppo abeliano  $U(1)$  e due suoi omomorfismi: il gruppo delle rotazioni  $SO(2)$  (isomorfismo) e il gruppo delle traslazioni monodimensionali  $T_1$  (omomorfismo). Analizzeremo questi due gruppi concentrandoci sulle differenze delle loro rappresentazioni dovute alle diverse caratteristiche globali che possiedono.

Nel quinto capitolo studieremo in modo dettagliato  $SU(2)$  ed esplicheremo come costruire tutte le sue rappresentazioni irriducibili attraverso la costruzione del massimo peso.  $SU(2)$  è molto importante poiché, come vedremo nel sesto capitolo, ogni rappresentazione irriducibile di un gruppo compatto e semisemplice si costruisce utilizzando l'algebra di  $SU(2)$ . È perciò necessario ai fini di studiare tali gruppi comprendere al meglio come si caratterizzano le rappresentazioni di  $SU(2)$  e come si applica la costruzione del massimo peso. Studieremo le rappresentazioni del prodotto tensoriale di due spazi vettoriali e vedremo come decomporla in rappresentazioni irriducibili, inoltre calcoleremo per esteso il prodotto tensoriale  $3 \otimes 2$ . Infine parleremo di operatori tensoriali

e concluderemo il capitolo con il teorema di Wigner-Eckart.

Nel sesto capitolo studieremo come costruire le rappresentazioni irriducibili di algebre compatte e semisemplici. Definiremo gli operatori di Cartan, i pesi e le radici per poi soffermarci sulle radici semplici di un'algebra. Il numero di radici semplici delle algebre compatte e semisemplici eguaglia il numero di operatori di Cartan e vedremo come utilizzarle per etichettare gli stati. Inoltre per ognuna di esse esiste una sottoalgebra  $SU(2)$  dell'intera algebra che ci permette di utilizzare la costruzione del massimo peso. Introduciamo il concetto di rappresentazioni fondamentali, attraverso le quali si costruiscono tutte le altre rappresentazioni del gruppo ed analizzeremo nel dettaglio il gruppo  $SU(3)$ , per il quale calcoleremo i pesi delle rappresentazioni fondamentali e della rappresentazione aggiunta. Infine studieremo i metodi generali per scomporre i prodotti tensoriali mediante l'utilizzo di indici alti e bassi.

Nel settimo capitolo studieremo il gruppo di Lorentz e le sue rappresentazioni irriducibili. Il gruppo di Lorentz non è un gruppo compatto, perciò ha rappresentazioni finite dimensionalmente non unitarie e rappresentazioni infinite dimensionalmente unitarie. Vedremo come studiare le sue rappresentazioni finite dimensionalmente attraverso l'utilizzo del gruppo compatto  $SU(2)$ . In particolare ogni rappresentazione del ricoprimento  $SL(2, \mathbb{C})$  del gruppo di Lorentz si può scrivere come prodotto tensoriale di due rappresentazioni isomorfe a rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ .

Nell'ottavo capitolo vedremo come applicare la teoria dei gruppi al modello a quark. Inizieremo chiarendo cos'è lo spazio di isospin e perché utilizziamo il gruppo  $SU(2)$  per descrivere trasformazioni di simmetria in tale spazio. Introduciamo la eightfold way che è un chiaro esempio di come utilizzare pesi, radici e le rappresentazioni di  $SU(2)$  e di  $SU(3)$  per studiare e classificare le particelle. Infine esamineremo la simmetria di colore e costruiremo le funzioni d'onda del barione  $\Delta^{++}$  e del protone.

# Capitolo 1

## Simmetrie e gruppi

La nozione di simmetria è legata al concetto di invarianza e si può applicare sia ad oggetti che a leggi fisiche. Da un punto di vista matematico, un oggetto si dice simmetrico rispetto ad una certa trasformazione quando è invariante sotto tale trasformazione. Lo stesso vale per le leggi fisiche, per le quali introdurremo anche il concetto di covarianza. Ci sono due possibili interpretazioni delle trasformazioni: **attiva** e **passiva**. Una trasformazione si dice attiva se è a carico del sistema: ad esempio un oggetto traslato nello spazio rispetto alla posizione originale. Una trasformazione si dice passiva se è a carico dell'osservatore. Ad ogni modo, l'invarianza delle leggi fisiche implica che il comportamento del sistema non venga alterato dall'applicazione delle simmetrie: se l'interpretazione è attiva, il sistema iniziale e quello trasformato sono equivalenti; se l'interpretazione è passiva, l'osservatore iniziale e quello trasformato sono equivalenti. Il nostro scopo è quello di descrivere le simmetrie come trasformazioni generiche su spazi matematici astratti. La struttura matematica utilizzata nella teoria dei gruppi per descrivere le simmetrie è il gruppo, ogni particolare trasformazione è rappresentata da un suo elemento. I gruppi soddisfano una serie di proprietà che rispecchiano le caratteristiche delle simmetrie: la composizione di due simmetrie è ancora una simmetria, la trasformazione inversa è una simmetria, vale la proprietà associativa.

**Definizione 1.1** (Gruppo). Sia,  $G$ , un insieme di elementi in cui è definita una operazione binaria (detta anche legge di composizione)  $\cdot$  che ad ogni coppia di elementi  $f, g \in G$  associa un elemento  $f \cdot g$  ( $o fg$ )  $\in G$  :

$$(f, g) \rightarrow f \cdot g \tag{1.1}$$

Allora l'insieme  $G$  si chiama gruppo se l'operazione binaria verifica le seguenti condizioni:

**vale la legge associativa** :  $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \forall f, g, h \in G$

**esiste l'elemento neutro** :  $\exists e \in G$  tale che  $g \cdot e = e \cdot g \forall g \in G$

**esiste l'elemento inverso** :  $\forall g \in G \exists g^{-1}$  tale che  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Non è richiesta invece la proprietà commutativa, ovvero non è necessario che applicare la simmetria  $S_1$  e successivamente  $S_2$  equivalga ad applicare prima  $S_2$  poi  $S_1$ .

Un gruppo si dice **abeliano** se la legge di moltiplicazione è commutativa

$$f \cdot g = g \cdot f \quad \forall f, g \in G \quad (1.2)$$

Esistono diversi modi per classificare le simmetrie. Abbiamo una prima distinzione tra simmetrie **continue**, descritte dai gruppi di Lie, e **discrete**. La traslazione temporale, la traslazione spaziale, la rotazione spaziale sono casi di trasformazioni continue. L'inversione temporale, la riflessione e la coniugazione di carica sono comuni esempi di trasformazioni discrete.

Abbiamo una seconda distinzione in base allo spazio sul quale le simmetrie agiscono. Distinguiamo quelle **esterne**, o spaziotemporali da quelle **interne**. Quest'ultime sono trasformazioni che non agiscono sullo spaziotempo, ma su spazi da noi costruiti, utili, ad esempio, a descrivere le interazioni fondamentali.

Introduciamo allo scopo di classificare le simmetrie alcuni termini relativi ai gruppi. Un gruppo  $G$ , si dice **finito** se possiede un numero finito di elementi. Altrimenti si dice **infinito**. Il numero di elementi di un gruppo finito è chiamato **ordine** del gruppo.

Introduciamo infine due nozioni rilevanti per lo sviluppo successivo della teoria.

**Definizione 1.2** (Omomorfismo). Un omomorfismo da un gruppo  $G$  ad un altro gruppo  $G'$  è una corrispondenza (non per forza uno a uno) che preserva la legge di moltiplicazione del gruppo. In altre parole se  $g_i \in G \rightarrow g'_i \in G'$  e  $g_1 g_2 = g_3$ , allora  $g'_1 g'_2 = g'_3$ .

**Definizione 1.3** (Isomorfismo). Due gruppi  $G$  e  $G'$  si dicono isomorfi se esiste una corrispondenza uno a uno tra i loro elementi, che preserva la legge di moltiplicazione del gruppo. In altre parole se  $g_i \in G \leftrightarrow g'_i \in G'$  e  $g_1 g_2 = g_3$  in  $G$ , allora  $g'_1 g'_2 = g'_3$  in  $G'$  e viceversa.

## 1.1 Invarianza e covarianza

Quando parliamo di trasformazione di simmetria e legghiamo questo concetto a quello di invarianza dobbiamo distinguere il caso in cui l'invarianza è relativa ad un oggetto o ad una legge fisica. Gli oggetti, che in fisica sono rappresentati da stati e operatori, sono simmetrici rispetto ad una trasformazione se rimangono invariati dopo la sua applicazione, tuttavia la simmetria di una legge non implica la simmetria (ovvero l'invarianza) degli oggetti contenuti nell'equazione che descrive la legge. Diamo ora una definizione precisa di oggetto invariante.

**Definizione 1.4** (Oggetto invariante). Consideriamo un set  $A$  di oggetti  $a_i \in A$  e un gruppo di trasformazioni  $g_\alpha \in G$ , dove  $g_\alpha : A \rightarrow A$  agisce su  $a_i$  come  $a_i \rightarrow a'_i$ . Un oggetto  $a_i \in A$  è invariante sotto  $g_\alpha$  se per tale trasformazione  $a'_i = a_i$ . Inoltre  $a_i$  si dice invariante sotto il gruppo  $G$  se è invariante  $\forall g_\alpha \in G$ .

In fisica, gli oggetti sui quali una trasformazione viene applicata sono, in genere, stati  $s$ , osservabili  $O$  e operatori differenziali  $D$ . Una equazione è **invariante** sotto una trasformazione se rimane immutata sotto l'azione di tale trasformazione. Una equazione è **covariante** quando la sua forma non cambia. Possiamo avere una legge covariante e non avere la conservazione del valore degli oggetti. La legge può rimanere esattamente la stessa, ovvero può conservare la sua forma. Questo implica lo stesso legame fra gli oggetti, il cui valore può però variare. D'altra parte una legge è invariante se gli oggetti sono invarianti. In questo caso può capitare che un'equazione continui ad essere valida quando il solo stato del sistema è variato. Precisamente:

**Definizione 1.5.** Sia  $L$  una legge rappresentata dall'equazione  $E(s, O_i, D_i) = 0$ , e sia  $G$  un gruppo di trasformazioni  $g_\alpha \in G$  agente sugli oggetti presenti nell'equazione:  $s \rightarrow s'$ ,  $O_i \rightarrow O'_i$  e  $D_j \rightarrow D'_j$ .  $L$  è covariante sotto la trasformazione  $g_\alpha$  se  $E(s', O'_i, D'_j) = 0$ ;  $L$  è invariante sotto la trasformazione  $g_\alpha$  se  $E(s', O_i, D_j) = 0$ . Inoltre,  $L$  è covariante - invariante sotto l'azione del gruppo  $G$ , se è covariante - invariante sotto tutte le trasformazioni  $g_\alpha \in G$ .

(In questa definizione non abbiamo considerato il caso in cui il sistema sia **degenere**, ma approfondiremo questo argomento in seguito).

Un gruppo  $G$  è detto di simmetria se le leggi che descrivono il sistema sono covarianti rispetto al gruppo  $G$ . Ci interessano però in particolar modo gli oggetti invarianti, poiché gli osservabili associati costituiscono integrali primi del moto. Nei prossimi argomenti vedremo che gli osservabili invarianti hanno una struttura particolare, che permette di individuarli facilmente ed utilizzarli per classificare gli stati del sistema.

## 1.2 Struttura matematica

Gli stati di un sistema sono definiti dall'equazione di Schroedinger. Le soluzioni dell'equazione di Schroedinger  $\psi$  sono elementi di uno spazio di Hilbert,  $H$ , di funzioni d'onda  $\phi$  su campo complesso [10]. Le trasformazioni che agiscono su questi stati sono perciò rappresentate da operatori lineari. Per ogni coppia di funzioni  $\phi, \phi'$  è definito il prodotto scalare

$$\langle \phi', \phi \rangle = \int_D d^3x \phi'^* \phi \quad (1.3)$$

Una trasformazione di simmetria preserva la probabilità di transizione

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \quad (1.4)$$

dove  $|\phi\rangle$  rappresenta lo stato del sistema, mentre  $|\psi\rangle$  sono le autofunzioni. Tale probabilità corrisponde alla probabilità che la misurazione di un osservabile dia un risultato corrispondente all'autovalore di  $|\psi\rangle$ . L'operatore descrittivo di una simmetria deve essere quindi un **operatore unitario**.

**Definizione 1.6** (Operatore unitario). Un operatore invertibile  $U$  è detto unitario se

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (1.5)$$

Un operatore unitario preserva il prodotto scalare

$$(\langle\phi'|U^\dagger)(U|\phi\rangle) = \langle\phi'|\phi\rangle \quad (1.6)$$

Vediamo come si trasforma un operatore  $A$  in seguito ad una trasformazione  $T$  di simmetria. Si deve conservare il valore di aspettazione dell'osservabile  $A$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi'|A'|\psi'\rangle = \langle T\psi|A'|T\psi\rangle = \langle\psi|T^\dagger A' T|\psi\rangle \quad (1.7)$$

$$\implies A = T^\dagger A' T \quad (1.8)$$

Un operatore  $A$  si dice **hermitiano**, o autoaggiunto se

$$\langle\phi, A\phi\rangle = \langle\phi, A\phi\rangle^* \quad \forall\phi \in H \quad (1.9)$$

Un osservabile deve essere descritto da un operatore hermitiano, poichè il valore di aspettazione di una grandezza fisica deve essere un numero reale. Gli stati delle particelle d'ora in avanti saranno identificati da funzioni d'onda che occupano tutto lo spazio. Se un determinato sistema è simmetrico sotto una certa trasformazione, allora la funzione d'onda che lo descrive rimarrà invariata sotto la trasformazione considerata.

Studiamo ora i gruppi di simmetria attraverso le rappresentazioni, le quali mappano ogni elemento del gruppo in un operatore lineare. Inoltre focalizziamo la nostra attenzione sulla degenerazione del sistema.

# Capitolo 2

## Rappresentazioni

### 2.1 Rappresentazioni riducibili e irriducibili

Gli elementi del gruppo  $G$  sono associati ad operatori lineari attraverso le rappresentazioni.

**Definizione 2.1** (Rappresentazione). Una rappresentazione  $D$ , di  $G$ , è un omomorfismo che associa ad ogni elemento di  $G$  un operatore lineare con le seguenti proprietà:

- 1)  $D(e) = \hat{1}$ , dove  $\hat{1}$  è l'operatore identità dello spazio in cui vivono gli operatori lineari.
- 2)  $D(f)D(g) = D(fg)$ , in altre parole la legge moltiplicativa del gruppo è mappata nella naturale moltiplicazione dello spazio lineare degli operatori. Se l'omomorfismo è anche un isomorfismo la rappresentazione si dice **fedele**, altrimenti si dice **degenere**.

Una rappresentazione si dice **unitaria** se tutte le  $D(g)$  sono unitarie ( $D(g)^\dagger = D(g)^{-1} \forall g \in G$ ).

**Definizione 2.2** (Rappresentazione **riducibile**). Una rappresentazione è detta riducibile se ha un sottospazio invariante, ovvero l'azione di  $D(g)$  su un qualsiasi vettore del sottospazio è ancora nel sottospazio.

In termini dell'operatore proiezione  $P$  si scrive:  $PD(g)P = D(g)P \forall g \in G$ . Ovvero, attraverso un operatore di proiezione si può limitare l'azione della rappresentazione ad un sottospazio. Una rappresentazione si dice **irriducibile** se non è riducibile, di conseguenza non esiste un operatore  $P$  che limiti l'azione di  $D$  ad un sottospazio. Una rappresentazione si dice **completamente riducibile** se è equivalente ad una rappresentazione le cui matrici sono **diagonali a blocchi**. Diremo che  $D(g)$  è completamente riducibile se vale

$$D'(g) = AD(g)A^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \dots \\ 0 & D_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Una rappresentazione completamente riducibile è detta **somma diretta** delle sottorappresentazioni  $D_j(g)$  e si scrive

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \quad (2.2)$$

Valgono i seguenti teoremi [3]:

**Teorema 2.1.** *Ogni rappresentazione di un gruppo finito è equivalente ad una rappresentazione unitaria.*

**Teorema 2.2.** *Ogni rappresentazione di un gruppo finito è completamente riducibile.*

**Esempio 2.1.** Prendiamo il gruppo ciclico di ordine 3:  $Z_3 = \{e, a, a^2\}$ , con  $a^3 = a^0 = e$ . Possiamo costruire una rappresentazione di  $Z_3$  formando una base ortonormale  $|e\rangle$ ,  $|a\rangle$ ,  $|a^2\rangle$  e definendo

$$D(f)|g\rangle = |fg\rangle \quad f, g \in Z_3$$

si ha

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questo tipo di rappresentazione è detto rappresentazione **regolare**. Sia ora

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando la (2.1) abbiamo

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad D'(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

## 2.2 Lemma di Schur

**Teorema 2.3.** *Se  $D_1(g)A = AD_2(g) \forall g \in G$ , dove  $D_1$  e  $D_2$  sono rappresentazioni irriducibili non equivalenti, allora  $A=0$ .*

*Dimostrazione.* Se esiste  $|a\rangle$  tale che  $A|a\rangle = 0$ , allora esiste un proiettore  $P$  non nullo, che proietta un generico vettore nel sottospazio che annichila  $A$ .

$$AD_2(g)P = D_1(g)AP = 0 \quad \forall g \in G$$

Poichè  $D_2$  è irriducibile, l'operatore  $P$  deve proiettare su tutto lo spazio, perciò  $A = 0$ . Con un ragionamento analogo si mostra che se esiste  $\langle b|$  tale che  $\langle b|A = 0$  allora  $A$  deve essere nullo. Se tali vettori non esistono allora  $A$  è una matrice invertibile e quadrata, ma allora:

$$A^{-1}D_1(g)A = D_2(g)$$

ovvero  $D_1$  e  $D_2$  sono equivalenti contrariamente alle ipotesi. Ne risulta che  $A = 0$   $\square$

Studiamo lo stesso quesito supponendo  $D_1$  e  $D_2$  equivalenti.

**Teorema 2.4.** *Se  $D(g)A = AD(g) \forall g \in G$ , dove  $D$  è una rappresentazione irriducibile finito dimensionale, allora  $A \propto I$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che la rappresentazione è finito dimensionale e la matrice  $A$  ha la stessa dimensione della rappresentazione. L'equazione caratteristica di ogni matrice finito dimensionale ammette almeno una soluzione, perciò  $A$  ha almeno un autovalore  $\lambda$  e un autovettore  $|a\rangle$  tali che

$$(A - \lambda I)|a\rangle = 0$$

Inoltre

$$D(g)(A - \lambda I) = (A - \lambda I)D(g) \quad \forall g \in G$$

Ma allora, date queste due condizioni, con gli stessi ragionamenti utilizzati nel teorema precedente ricaviamo  $(A - \lambda I) = 0 \implies A \propto I$ .  $\square$

### Osservabili invarianti e rappresentazioni irriducibili

Se un osservabile  $O$  è invariante sotto la trasformazione di simmetria allora l'osservabile trasformato  $O'$  eguaglia  $O$ . Dalla (1.7) abbiamo

$$O \rightarrow D(g)OD(g)^\dagger = O \quad \forall g \in G \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) si può scrivere anche nel seguente modo

$$D(g)O = OD(g) \quad \forall g \in G \quad (2.4)$$

e implica che  $O$  commuta con  $D(g)$

$$[O, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G \quad (2.5)$$

Un osservabile invariante soddisfa perciò il lemma di Schur. Di conseguenza se  $O$  è invariante per trasformazioni del gruppo  $G$ , associamo ad ogni rappresentazione irriducibile di  $G$  un autovalore di  $O$ , poichè questo è proporzionale all'identità. Tutti gli stati che trasformano secondo una rappresentazione irriducibile assumo quindi lo stesso valore di aspettazione della variabile fisica determinata da  $O$ .

In generale [9] si ha che due set di vettori, i quali trasformano secondo rappresentazioni irriducibili non equivalenti, generano due sottospazi invarianti ortogonali fra loro. Per questo utilizzeremo le rappresentazioni irriducibili per scomporre gli spazi vettoriali in sottospazi degeneri rispetto agli osservabili invarianti. Notiamo infine che se le rappresentazioni irriducibili sono equivalenti possiamo avere due casi: o i sottospazi invarianti sono in realtà lo stesso sottospazio, oppure sono anche essi ortogonali tra loro. In questo caso i due set di vettori si distinguono per il valore di qualche osservabile fisico.

# Capitolo 3

## I gruppi continui

### 3.1 I gruppi di Lie

Ci sofferiamo ora sull'analisi dei gruppi continui: i **gruppi di Lie**. Un gruppo di Lie è un gruppo i cui elementi dipendono in modo continuo da dei parametri:  $g \rightarrow g(\alpha)$ . Per studiare tali gruppi introduciamo una nozione di vicinanza. Due elementi sono vicini se i parametri che li descrivono sono vicini. Siamo interessati allo studio delle trasformazioni infinitesime del gruppo e alla sua legge di moltiplicazione, che è definita dall'**algebra di Lie**.

Parametizziamo il gruppo in modo tale che ad  $\alpha=0$  corrisponda l'elemento identità e assumiamo che in un intorno dell'identità, gli elementi del gruppo siano descritti da una funzione di  $N$  parametri reali,  $\alpha_a$ , con  $a = 1 \dots N$

$$\begin{aligned} g(\alpha)|_{\alpha=0} &= e \\ D(g)|_{\alpha=0} &= \hat{1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Espandiamo ora in serie di Taylor gli elementi  $D(\alpha)$  in un intorno dell'identità.

$$D(d\alpha) = \hat{1} + id\alpha_a X_a + \dots \quad (3.2)$$

dove è sottintesa la convenzione di Einstein relativa alla somma di indici ripetuti. Gli operatori lineari  $X_a$  nella (3.2) sono detti **generatori del gruppo** e sono definiti come

$$X_a \equiv -i \frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad (3.3)$$

La  $i$  viene aggiunta affinché i generatori di una rappresentazione unitaria siano operatori hermitiani. Dobbiamo scegliere ora la parametrizzazione che più ci conviene per studiare le proprietà del gruppo. Poiché il prodotto di due elementi è ancora un elemento del

gruppo, possiamo allontanarci dall'identità elevando alla  $k$ -esima potenza un elemento infinitesimo. Consideriamo l'elemento  $D(\alpha) = \hat{1} + id\alpha_a X_a$ , esso differisce da un elemento del gruppo per un termine dell'ordine di  $(d\alpha)^2$ , perciò tende ad un elemento del gruppo per  $d\alpha \rightarrow 0$ .

$$D(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{1} + id\alpha_a X_a/k)^k = e^{id\alpha_a X_a} \quad (3.4)$$

Poichè  $k \rightarrow \infty$ ,  $\hat{1} + id\alpha_a X_a/k$  diventa l'elemento infinitesimo del gruppo. Questa parametrizzazione è molto utile, perchè possiamo scrivere gli elementi del gruppo in termini dei generatori, i quali, a differenza degli elementi del gruppo, formano uno spazio vettoriale.

## 3.2 Relazione di commutazione

Vogliamo ora analizzare la realizzazione della legge di composizione del gruppo all'interno di una rappresentazione del tipo (3.4). Distinguiamo a questo scopo due casi, il primo quello in cui la moltiplicazione avviene fra due elementi con gli stessi valori degli  $\alpha_a$ , a meno di una costante comune a tutti gli elementi. Il secondo nel quale la moltiplicazione avviene tra elementi generati da una diversa combinazione lineare dei generatori  $X_a$ . Nel primo caso avremo un gruppo di elementi a un parametro:

$$U(\lambda) = e^{i\lambda\alpha_a X_a} \quad (3.5)$$

e la moltiplicazione del gruppo è semplicemente

$$U(\lambda_1)U(\lambda_2) = U(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (3.6)$$

Invece, se moltiplichiamo elementi generati da due diverse combinazioni lineari dei generatori, in generale

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \neq e^{i(\alpha_a + \beta_b) X_a} \quad (3.7)$$

D'altra parte, poichè gli esponenziali formano una rappresentazione del gruppo deve essere vero che il prodotto di due esponenziali di generatori da ancora un esponenziale di generatori

$$e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} = e^{i\delta_a X_a} \quad (3.8)$$

per qualche  $\delta$ . Si trova [3] che affinché la (3.8) sia valida, deve valere

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad (3.9)$$

per qualche costante  $f_{abc}$  con

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (3.10)$$

perchè  $[A, B] = -[B, A]$ . Le  $f_{abc}$  sono chiamate **costanti di struttura**.

La formula che esprime il valore di  $\delta$  e quella di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots} \quad (3.11)$$

dove i puntini indicano i termini successivi. Al primo grado di approssimazione si ha semplicemente

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2} - \alpha_a \beta_b f_{abc} \quad (3.12)$$

La relazione di commutazione esprime quindi la legge di moltiplicazione del gruppo. Se la (3.9) è valida diciamo che i generatori formano un'algebra.

**Definizione 3.1.** Un'algebra di Lie  $n$ -dimensionale è uno spazio vettoriale definito su un campo  $K$ , generato da  $n$  generatori  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) nel quale è definita una regola di moltiplicazione chiamata commutatore o parentesi di Lie.

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^n i f_{abc} X_c \quad (3.13)$$

La formula (3.11) mostra che basta conoscere la relazione (3.9) per determinare l'elemento prodotto del gruppo a qualunque ordine di approssimazione. Perciò, le costanti di struttura, bastano a determinare con precisione la legge di moltiplicazione del gruppo. La struttura del gruppo, è quindi specificata dalla legge di moltiplicazione calcolata vicino all'identità. Il comportamento locale dei gruppi determina la maggior parte delle loro proprietà. Esprimendo le trasformazioni in termini dei generatori possiamo focalizzare la nostra attenzione solo su questi pochi operatori, base di uno spazio vettoriale, invece che sugli infiniti elementi del gruppo. Deve essere però puntualizzato che non tutte le informazioni sono contenute nell'algebra del gruppo. Queste informazioni sono le caratteristiche globali, le quali giocano un ruolo determinante nella costruzione delle rappresentazioni irriducibili.

### 3.3 Generatori e osservabili

Vediamo per prima cosa che i generatori di una rappresentazione unitaria sono hermitiani. Sia  $D(d\alpha_a)$  una trasformazione infinitesima vicino all'identità. Se  $D(g)$  è unitaria posso scrivere:

$$D^\dagger(d\alpha_a)D(d\alpha_a) = \hat{1} \quad (3.14)$$

con

$$\begin{aligned} D^\dagger(d\alpha_a) = \hat{1} + id\alpha_a X_a &\implies \hat{1} + d\alpha_a(X_a + X_a^\dagger) = \hat{1} \\ &\implies X_a^\dagger = X_a. \end{aligned} \quad (3.15)$$

L'introduzione della  $i$  è servita allo scopo di rendere i generatori hermitiani.

Vediamo inoltre che un osservabile è invariante sotto l'azione di una trasformazione appartenente ad un gruppo di Lie, se il suo commutatore con il generatore corrispondente alla particolare trasformazione è nullo.

$$O' = e^{i\alpha_a J_a} O e^{-i\alpha_a J_a} = O \Leftrightarrow [O, J_a] \quad (3.16)$$

La (3.15) e la (3.16) permettono di studiare il valore degli osservabili indagando le trasformazioni ad essi associate. La (3.16) mostra che un osservabile è invariante per una trasformazione, se il suo commutatore con il generatore della trasformazione è 0. Questa condizione è l'analogia, per i gruppi di Lie, della condizione (2.5). Dato un osservabile  $O$  espresso da un operatore hermitiano, lo si può associare al generatore di una trasformazione unitaria  $T$ . Tutti gli osservabili invarianti sotto la trasformazione  $T$ , si identificano perciò con quelli che commutano con  $O$ .

Consideriamo ad esempio il gruppo galileiano  $G = \{g_\alpha\}$  con  $\alpha = 1, \dots, 10$ . È un gruppo di trasformazioni spaziotemporali continue che agiscono nel seguente modo

- traslazione temporale:  $t \rightarrow t' + \tau$
- traslazione spaziale:  $r \rightarrow r' = r + \rho$
- rotazione spaziale:  $r \rightarrow r' = R_\theta r$
- boosts<sup>1</sup>:  $r \rightarrow r' = r + ut$

con  $\tau \in \mathbb{R}$  numero reale che rappresenta l'intervallo di tempo,  $\rho = (\rho_x, \rho_y, \rho_z) \in \mathbb{R}$  tripletto di numeri reali rappresentanti l'intervallo spaziale,  $R_\theta$  matrice  $3 \times 3$  rappresentante le rotazioni spaziali di un angolo  $\theta$  e  $u = (u_x, u_y, u_z)$  tripletto di numeri reali rappresentanti velocità costanti. Poiché il gruppo galileiano  $G$  è un gruppo di Lie, possiamo esprimere le trasformazioni  $g_\alpha$  in forma esponenziale. Il gruppo  $G$  è definito da dieci generatori:  $K_\tau$  per le traslazioni temporali,  $K_{\rho_i}$  per le traslazioni spaziali,  $K_{\theta_i}$  per le rotazioni spaziali,  $K_{u_i}$  per i boosts, con  $i = 1, 2, 3$ . L'azione combinata di tutte le trasformazioni è data da:

$$U_s = \prod_{\alpha=1}^{10} e^{iK_\alpha s_\alpha}. \quad (3.17)$$

Le relazioni di commutazione sono date da [6]:

$$\begin{aligned} [K_{\rho_i}, K_{\rho_j}] &= 0 & [K_{u_i}, K_{u_j}] &= 0 & [K_{\theta_i}, K_{\theta_j}] &= i\epsilon_{ijk}K_{\theta_k} & [K_{\theta_i}, K_{\rho_j}] &= i\epsilon_{ijk}K_{\rho_k} \\ [K_{\theta_i}, K_{u_j}] &= i\epsilon_{ijk}K_{u_k} & [K_{u_i}, K_{\rho_j}] &= i\delta_{ij}M & [K_{\rho_i}, K_\tau] &= 0 & [K_{\theta_i}, K_\tau] &= 0 \\ [K_{u_i}, K_\tau] &= iK_{\rho_i} \end{aligned} \quad (3.18)$$

con  $M = mI$  ( $m$  massa). In meccanica quantistica, in un sistema libero da campi esterni, i generatori  $K_\alpha$  rappresentano le principali grandezze del sistema:

$$H = \hbar K_\tau \quad J_i = \hbar K_{\theta_i} \quad G_i = \hbar K_{\mu_i} \quad P_i = \hbar K_{\rho_i} \quad (3.19)$$

con  $H$  operatore hamiltoniano,  $J_i$  operatore del momento angolare,  $G_i$  operatori dei boosts,  $P_i$  operatore della quantità di moto. Inoltre ponendo  $\hbar = 1$ , soddisfano le regole

---

<sup>1</sup>trasformazioni fra due sistemi inerziali in moto relativo.

di commutazione (3.18). Perciò se prendiamo una trasformazione temporale, questa non varia l'hamiltoniana e tutte le grandezze relative a osservabili che commutano con l'hamiltoniana. Per trasformazioni rotazionali non varia né il momento angolare né tutte quelle grandezze i cui osservabili commutano con esso. Viceversa vediamo che le rotazioni e le traslazioni spaziali non variano l'hamiltoniana che invece è variata dai boosts.

## 3.4 Proprietà dell'algebra di Lie

### 3.4.1 Identità di Jacobi

I generatori di un'algebra di Lie soddisfano la seguente identità [3]

$$[X_a, [X_b, X_c]] = [[X_a, X_b], X_c] + [X_b, [X_a, X_c]] \quad (3.20)$$

### 3.4.2 Rappresentazioni aggiunta

Le costanti di struttura stesse generano una rappresentazione dell'algebra chiamata **rappresentazione aggiunta**. Definendo un set di matrici  $T_a$

$$[T_a]_{bc} \equiv -if_{abc} \quad (3.21)$$

si ha, per l'identità di Jacobi

$$f_{bcd}f_{ade} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} \quad (3.22)$$

da cui ricaviamo la seguente relazione di commutazione:

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (3.23)$$

Questa rappresentazione ricavata dalle costanti di struttura è la rappresentazione aggiunta. La dimensione di una rappresentazione è la dimensione dello spazio lineare sulla quale agisce. Nel caso della rappresentazione aggiunta, come si vede dalla (3.21), corrisponde al numero di generatori linearmente indipendenti, il quale corrisponde al numero di parametri reali necessari a descrivere un elemento del gruppo. È utile introdurre un prodotto scalare sullo spazio lineare dei generatori, per renderlo uno spazio vettoriale. Utilizziamo la traccia delle matrici  $T_a$

$$Tr(T_a, T_b) \quad (3.24)$$

Possiamo porre questa matrice in forma canonica attuando una trasformazione lineare (nonché un cambio di base) sui generatori  $X_a$ , la quale induce una trasformazione sulle costanti di struttura ed ottenere [3]

$$Tr(T_a, T_b) = k^\alpha \delta_{ab} \quad (3.25)$$

(no somma). Possiamo infine riscaldare le costanti  $k^\alpha$  con una trasformazione diagonale, ma non possiamo variare il segno di  $k^\alpha$ . Assumiamo ora che tutte le  $k^\alpha$  siano positive. Questo definisce una serie di algebre dette **compatte** e **semisemplici** e possiamo prendere

$$\text{Tr}(T_a, T_b) = \lambda \delta_{ab} \quad (3.26)$$

per qualche  $\lambda$  positivo. In questo caso le costanti di struttura risultano completamente antisimmetriche e la rappresentazione aggiunta risulta unitaria.

### 3.4.3 Algebra semi-semplice

**Definizione 3.2** (Sottoalgebra invariante). Una **sottoalgebra invariante** è un set di generatori che è chiuso rispetto alla commutazione con ogni elemento dell'algebra. Quindi se  $X$  è un generatore nella sottoalgebra invariante e  $Y$  un qualsiasi generatore dell'intera algebra,  $[X, Y]$  è un generatore nella sottoalgebra invariante.

Quando esponenziata una sottoalgebra invariante genera un sottogruppo invariante [3]. L'algebra stessa e 0 sono le sottoalgebre invarianti banali. Un'algebra che non ha sottoalgebre invarianti oltre a quelle banali si dice **semplice**. Una sottoalgebra invariante **abeliana** consiste in un singolo generatore che commuta con tutti i generatori del gruppo. Chiamiamo una tale algebra un  $U(1)$  del gruppo.  $U(1)$  è il gruppo delle trasformazioni di fase. Se  $X_a$  è il generatore di  $U(1)$ ,  $f_{abc} = 0$  per ogni  $b$  e  $c$ . Le algebre abeliane invarianti identificano direzioni nello spazio per le quali  $k^\alpha$  è uguale a 0. Un'algebra senza sottoalgebre invarianti abeliane è detta **semisemplice**.

# Capitolo 4

## Il gruppo $U(1)$

$U(1)$  è definito come il gruppo abeliano delle fasi  $\{e^{i\theta} | \theta \in [0, 2\pi]\}$ . Si può dimostrare [3] che tutte le rappresentazioni irriducibili unitarie di un gruppo abeliano sono monodimensionali. Il parametro del gruppo è perciò uno solo e lo indichiamo con  $\theta$ . Lo spazio vettoriale sul quale agisce ogni rappresentazione irriducibile è complesso e monodimensionale. In particolar l'azione di  $U(1)$  su un generico vettore  $v$  è

$$v \rightarrow v' = e^{i\theta}v. \quad (4.1)$$

In questo capitolo analizziamo due gruppi, entrambi con la stessa algebra di  $U(1)$ : quello delle rotazioni nel piano  $SO(2)$  e quello delle traslazioni monodimensionali  $T_1$ . Utilizzeremo  $SO(2)$  per vedere come si deduce l'algebra di Lie dalla rappresentazione definente. Vedremo l'effetto delle proprietà globali dei gruppi sulle rappresentazioni irriducibili analizzando la differenza tra  $SO(2)$  e  $T_1$  e infine studieremo il significato fisico dei sottospazi invarianti sui quali agiscono tali rappresentazioni.

### 4.1 $SO(2)$ e $T_1$

#### 4.1.1 Rappresentazione definente di $SO(2)$

Il gruppo  $SO(2)$  esprime le rotazioni nel piano. Sappiamo la forma delle matrici di rotazione  $R(\phi)$  dalla geometria elementare:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Un generico vettore  $x$  trasforma nel seguente modo:

$$x'^j = R(\phi)_{ji}x^i \quad (4.3)$$

Poiche il modulo di  $x$  si conserva,

$$R(\phi)R^T(\phi) = \hat{1} \quad \forall \phi \quad (4.4)$$

dove  $R^T$  è la matrice trasposta di  $R$ . Le matrici che soddisfano questa relazione sono dette **ortogonali** ed hanno determinante  $=\pm 1$ . Dalla scrittura esplicita di  $R(\phi)$  vediamo che il determinante vale solo  $+1$ . Matrici che soddisfano questa condizione più stringente si dicono **speciali**, da cui  $SO(2)$ . Questo gruppo infatti descrive unicamente le rotazioni che si possono ricavare con un'evoluzione continua a partire dall'identità, la quale ha determinante uguale a 1. Escludere le matrici con determinante uguale a -1 equivale ad escludere la trasformazione di parità o inversione spaziale. Sempre ragionando geometricamente possiamo ricavare le seguenti proprietà:

$$R(\phi_2)R(\phi_1) = R(\phi_1 + \phi_2) \quad (4.5)$$

$$R(\phi) = R(\phi \pm 2\pi) \quad (4.6)$$

Definiamo infine

$$R(\phi = 0) = \hat{1} \quad (4.7)$$

$$R(\phi)^{-1} = R(-\phi) \quad (4.8)$$

Le matrici  $R(\phi)$  così definite possiedono tutte le proprietà di gruppo. La (4.5) esprime la legge di composizione e lo rende un gruppo commutativo. In termini del generatore  $X_{d(efinente)}$  esprimiamo le rotazioni come

$$R(\phi) = e^{-i\phi X_d} \quad (4.9)$$

con

$$X_d = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Questa particolare rappresentazione viene detta rappresentazione definita.

### 4.1.2 Rappresentazioni irriducibili di $SO(2)$

Poichè  $SO(2)$  è abeliano, tutte le sue rappresentazioni irriducibili sono  $1 - dimensional$ i. Se indichiamo con  $|\alpha\rangle$  un sottospazio invariante minimo

$$X|\alpha\rangle = |\alpha\rangle\alpha \quad (4.11)$$

$$D(g)|\alpha\rangle = |\alpha\rangle e^{-i\phi\alpha}. \quad (4.12)$$

Data la forma della (4.12) la regola di moltiplicazione è automaticamente soddisfatta. Per soddisfare la proprietà globale di periodicità (4.6) dobbiamo compiere una restrizione

sull'autovalore  $\alpha$ . Dobbiamo avere  $e^{\pm i2\pi\alpha} = 1$ , perciò  $\alpha$  può assumere solo valori interi. Denotiamo questi interi con  $m$  e le corrispondenti rappresentazioni con  $U^m$ :

$$X|m\rangle = |m\rangle m \quad (4.13)$$

$$U^m(\phi)|m\rangle = |m\rangle e^{-im(\phi)}. \quad (4.14)$$

Le rappresentazioni irriducibili di  $SO(2)$  sono date da  $X = m$ , con  $m$  intero e

$$U^m(\phi) = e^{-im\phi} \quad (4.15)$$

Poichè la rappresentazione defnente è due dimensionale, deve essere riducibile. Il generatore  $X_d$ , ha due autovalori [9],  $\pm 1$ , ed i corrispondenti autovettori sono  $e_{\pm} = (\mp e_1 - i e_2)\sqrt{2}$ .

### 4.1.3 $T_1$

Esaminiamo ora il gruppo delle traslazioni spaziali uno dimensionali, che chiameremo  $T_1$ . Indichiamo la coordinata dell'asse spaziale con  $x$  e un arbitrario elemento di  $T_1$  corrispondente ad una traslazione di distanza  $x$ , con  $T(x)$ . Sia poi  $|x_0\rangle$  lo stato di una particella localizzata nella posizione  $x_0$ .

$$T(x)|x_0\rangle \equiv |x + x_0\rangle \quad (4.16)$$

Allora  $T(x)$  deve avere le seguenti proprietà:

$$T(x_1)T(x_2) = T(x_1 + x_2) \quad (4.17)$$

$$T(0) = 1 \quad (4.18)$$

$$T(x)^{-1} = T(-x) \quad (4.19)$$

Perciò  $T(x)$  forma un gruppo, ed è abeliano. Possiamo esprimere  $T(x)$  nel seguente modo:

$$T(x) = e^{-iPx} \quad (4.20)$$

dove  $P$  è il generatore del gruppo. Le rappresentazioni di  $T(x)$  sono di nuovo unidimensionali. Denominiamo la base di sttograppi minimi invarianti con  $|p\rangle$ , gli autovalori con  $p$  e le rappresentazioni irriducibili con  $U^p(x)$ .

$$P|p\rangle = |p\rangle p \quad (4.21)$$

$$U^p(x)|p\rangle = |p\rangle e^{-ipx} \quad (4.22)$$

La differenza con  $SO(2)$  è che in questo caso non dobbiamo fare restrizione sul parametro  $x$  che può assumere tutti i valori da meno infinito a più infinito. La trasformazione  $T(x)$  agisce sullo stato  $|p\rangle$ , modificandolo di un fattore  $e^{-ipx}$ . Ricordiamo che, mentre gli stati  $|x\rangle$ ,  $|\phi\rangle$ , indicavano stati localizzati a valori ideali di posizione e angolo, gli stati  $|p\rangle$  e  $|m\rangle$  descrivono modi normali di funzioni d'onda definite in tutto lo spazio.

# Capitolo 5

## SU(2)

Oltre alle simmetrie dello spaziotempo sono molto importanti le simmetrie interne. Queste simmetrie sono introdotte per descrivere le interazioni fondamentali. Una simmetria interna non è relativa allo spaziotempo, bensì agisce su spazi creati appositamente, i quali vettori di base sono rappresentati da stati delle particelle.  $SU(2)$  viene utilizzato per descrivere sia simmetrie esterne, che interne. Attraverso  $SO(3)$  che possiede la stessa algebra di  $SU(2)$  descriviamo le rotazioni nello spazio tridimensionale, ma possiamo utilizzare  $SU(2)$  anche per descrivere lo spazio dello spin e dell'isospin. Un altro gruppo molto importante è  $SU(3)$ , utilizzato ad esempio per descrivere simmetrie nello spazio di sapore e colore. Studiamo le algebre compatte perchè sono le uniche che ammettono rappresentazioni unitarie finite dimensionalmente, e quindi in grado di descrivere simmetrie degli stati. Utilizzeremo la proprietà di essere finite dimensionalmente per ricostruire le rappresentazioni irriducibili. Inoltre studiamo algebre semplici, in particolare  $SU(2)$ , o semisemplici poichè queste permettono la classificazione delle rappresentazioni irriducibili attraverso gli operatori di Cartan.

### 5.1 SU(2)

$SU(2)$  è il gruppo delle matrici unitarie  $2 \times 2$  con determinante uguale ad 1.

$$SU(2) = \{ U \text{ matrici complesse } 2 \times 2 \mid U^\dagger = U^{-1}, \det U = 1 \}$$

I generatori sono matrici  $2 \times 2$  hermitiane a traccia nulla [1]. Quest'ultima condizione è necessaria affinché il determinante di  $U$  sia unitario. Infatti, se diagonalizziamo  $X_a$

$$\det(U) = 1 + i \operatorname{tr} X_a = 1. \quad (5.1)$$

Una base per i generatori è data dalle matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

I generatori sono espressi da

$$J_a = \frac{\sigma_a}{2} \quad (5.3)$$

e soddisfano la seguente algebra di Lie:

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c. \quad (5.4)$$

Si tratta di un' algebra compatta, infatti  $\epsilon_{abc}$  è il più semplice oggetto completamente antisimmetrico con tre indici. Quest'algebra è equivalente a quella del momento angolare.

### 5.1.1 Operatori innalzamento e abbassamento $SU(2)$

Studiamo le rappresentazioni di  $SU(2)$ , tenendo presente che le rappresentazioni unitarie di gruppi compatti sono finite dimensionalmente. Supponiamo di avere uno spazio finito dimensionale, di dimensione  $N$ , che si trasforma secondo una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$ . Per etichettare gli stati, diagonalizziamo il massimo numero di generatori dell'algebra. Poiché nessuno commuta con nessun altro, ne scegliamo solo uno:  $J_3$ . Prendiamo ora gli autostati con il più alto valore di  $J_3$  e chiamiamo l'autovalore corrispondente  $j$ .

$$J_3|j, \alpha\rangle = j|j, \alpha\rangle, \quad (5.5)$$

dove  $\alpha$  è un indice necessario nel caso in cui ci siano più autostati di autovalore  $j$ , ovvero indica tutte le altre variabili fisiche. Scegliamo gli stati in modo da avere

$$\langle j, \alpha|j, \beta\rangle = 0. \quad (5.6)$$

Definiamo ora gli operatori di innalzamento e abbassamento

$$J^\pm = \frac{(J_1 \pm iJ_2)}{\sqrt{2}}, \quad (5.7)$$

che soddisfano le seguenti relazioni di commutazione

$$[J_3, J^\pm] = \pm J^\pm \quad (5.8)$$

$$[J^+, J^-] = J_3. \quad (5.9)$$

Vengono chiamati in questo modo, poichè, se  $m$  è l'autovalore di  $|m\rangle$  rispetto a  $J_3$ , allora  $m \pm 1$  è autovalore di  $J^\pm|m\rangle$  rispetto a  $J_3$

$$\begin{aligned} J_3|m\rangle &= m|m\rangle \\ J_3J^\pm &= J^\pm J_3|m\rangle \pm J^\pm|m\rangle = (m \pm 1)J^\pm|m\rangle \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'operatore  $J^+$  annichila gli stati  $|j, \alpha\rangle$ , perchè non esiste nessuno stato con autovalore  $j + 1$ . Possiamo però utilizzare  $J^-$  e definire

$$J^-|j, \alpha\rangle \equiv N_j(\alpha)|j - 1, \alpha\rangle, \quad (5.11)$$

dove  $N_j(\alpha) = \sqrt{j} = N_j$  è stato introdotto per mantenere gli stati  $|j - 1, \alpha\rangle$  ortonormali [3]. Di conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned} J^+|j - 1, \alpha\rangle &= \frac{1}{N_j}J^+J^-|j, \alpha\rangle \\ &= \frac{1}{N_j}[J^+, J^-]|j, \alpha\rangle \\ &= \frac{j}{N_j}|j, \alpha\rangle = N_j|j, \alpha\rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} J^-|j - k, \alpha\rangle &= N_{j-k}|j - k - 1, \alpha\rangle \\ J^+|j - k + 1, \alpha\rangle &= N_{j-k}|j - k, \alpha\rangle, \end{aligned} \quad (5.13)$$

con [3]

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \quad (5.14)$$

Abbiamo così definito l'azione degli operatori di innalzamento e abbassamento sugli stati in modo tale che non cambino le variabili  $\alpha$ . Questa azione corrisponde a dividere lo spazio in sottogruppi invarianti, uno per ogni valore di  $\alpha$  e di conseguenza la rappresentazione in rappresentazioni irriducibili. Poichè abbiamo supposto la nostra rappresentazione irriducibile,  $\alpha$  non è necessario ad etichettare gli stati. La rappresentazione è finito dimensionale, esiste perciò un numero massimo di operatori di abbassamento che possiamo applicare a  $|j\rangle$ . Chiamiamo questo numero  $l$ .

$$J^-|j - l, \alpha\rangle = 0 \quad (5.15)$$

e di conseguenza

$$N_{j-l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2j-l)(l+1)} = 0. \quad (5.16)$$

Affinchè la (5.16) si annulli si deve avere  $l = 2j$  ovvero  $j = l/2$  per qualche intero  $l$ . Concludiamo che  $j$  può assumere solo valori semi-interi!

### 5.1.2 Rappresentazioni irriducibili $SU(2)$

Gli stati di una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$ , sono generalmente scritti

$$|j, m\rangle, \quad (5.17)$$

dove  $j$  indica il massimo autovalore di  $J_3$  ed identifica la rappresentazione irriducibile, mentre  $m$  indica l'autovalore proprio dello stato. Le matrici dei generatori  $J_a$  si ricavano nel seguente modo:

$$[J_a^j]_{m'm} = \langle m' | J_a | j, m \rangle, \quad (5.18)$$

sapendo che

$$\begin{aligned} \langle m' | J_3 | j, m \rangle &= m \delta_{m'm} \\ \langle m' | J^+ | j, m \rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2} \delta_{m',m+1} \\ \langle m' | J^- | j, m \rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2} \delta_{m',m-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

e tenendo conto della (5.7). Se ad esempio fissiamo  $j = 1/2$  ritroviamo la rappresentazione defnente

$$J_a = \frac{\sigma_a}{2},$$

mentre ponendo  $j = 1$  costruiamo l'importante rappresentazione spin 1

$$J_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

## 5.2 $SO(3)$

Il gruppo  $SO(3)$  è il gruppo delle matrici  $R$  reali  $3 \times 3$  con determinante uguale a 1. I generatori della rappresentazione defnente sono [1]

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

L'algebra di Lie dei generatori è la stessa di  $SU(2)$ . La differenza tra i gruppi risiede nelle caratteristiche globali, le quali costringono gli autovalori massimi delle rappresentazioni irriducibili, denominati con  $j$ , ad assumere solo valori interi, per non avere rappresentazioni a due valori. Le rappresentazioni irriducibili hanno dimensione  $2j+1$  perciò la più piccola non banale è quella defnente. Questo gruppo è associato all'operatore momento angolare  $J$  tramite la relazione

$$J_i = \hbar T_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.22)$$

Si possono costruire anche rappresentazioni di  $SO(3)$  a spin semintero, ma queste saranno rappresentazioni a due valori. Con ciò si intende che una rotazione di  $2\pi$  è rappresentata dalla matrice  $-\hat{1}$ , mentre per ritornare allo stato iniziale è necessaria una rotazione di altri  $2\pi$ .

## 5.3 Tensori

Prendiamo due differenti sistemi fisici, il primo descritto da stati  $|x\rangle$  appartenenti ad uno spazio  $m$  dimensionale, il secondo descritto da stati  $|i\rangle$  appartenenti ad uno spazio  $n$  dimensionale. Possiamo costituire lo spazio  $m \times n$  dimensionale, che racchiude tutte le possibili combinazioni di questi stati. Tale spazio è detto **spazio prodotto tensoriale**. Indichiamo i nuovi vettori di base con

$$|i, x\rangle \equiv |i\rangle|x\rangle. \quad (5.23)$$

Se  $|x\rangle$  trasforma secondo la rappresentazione  $D_1$  e  $|i\rangle$  secondo la rappresentazione  $D_2$ , definiamo la rappresentazione prodotto tensoriale  $D_{1\otimes 2}$ , i cui elementi di matrice sono il prodotto di quelli di  $D_1$  e  $D_2$

$$\langle j, x|D_{1\otimes 2}|k, y\rangle \equiv \langle j|D_1|f\rangle\langle k|D_2|y\rangle \quad (5.24)$$

Allora lo stato  $|i, x\rangle$  trasforma nel seguente modo

$$D(g)|i, x\rangle = |j, y\rangle[D_{1\otimes 2}]_{jyix} \\ (|j\rangle[D_1(g)]_{ji})(|y\rangle[D_2(g)]_{yx}) \quad (5.25)$$

In altre parole i due stati trasformano indipendentemente ognuno secondo la propria rappresentazione. Il prodotto tensoriale dei generatori risulta [3]

$$[J_a^{1\otimes 2}(g)]_{jyix} = [J_a^1]_{ji}\delta_{yx} + \delta_{ji}[J_a^2]_{yx} \quad (5.26)$$

e la loro azione sugli stati

$$J_a(|j\rangle|x\rangle) = (J_a|j\rangle)|x\rangle + |j\rangle(J_a|x\rangle). \quad (5.27)$$

### 5.3.1 Esempio: somma degli autovalori

Consideriamo il prodotto tensoriale di due autostati  $|j_1, m_1\rangle$  e  $|j_2, m_2\rangle$ . Calcoliamo l'autovalore di  $J_3$  del loro prodotto tensoriale utilizzando la formula (5.27)

$$J_3(|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle) = (m_1 + m_2)(|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle). \quad (5.28)$$

In questo esempio vogliamo calcolare, dato un certo peso massimo frutto di un prodotto tensoriale, le rappresentazioni irriducibili utilizzando l'operatore di abbassamento. Consideriamo il prodotto di una rappresentazione di spin  $1/2$  con una di spin  $1$ . Lo stato di peso massimo della rappresentazione prodotto tensoriale è  $|3/2, 3/2\rangle = |1/2, 1/2\rangle|1, 1\rangle$ . Applichiamo l'operatore abbassamento:

$$J^-|3/2, 3/2\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle + \sqrt{1}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \quad (5.29)$$

o equivalentemente  $|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle$ . Applichiamo nuovamente l'operatore abbassamento, considerando che annichila lo stato  $|1/2, -1/2\rangle$  e troviamo

$$|3/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, -1\rangle$$

e successivamente

$$|3/2, -3/2\rangle = |1/2, -1/2\rangle|1, -1\rangle$$

Questi stati formano una rappresentazione spin  $= 3/2$  di dimensione 4. Vi sono altri due stati ortogonali allo spazio generato dai primi

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, 0\rangle \\ & \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2, -1/2\rangle|1, 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, 1/2\rangle|1, -1\rangle \end{aligned}$$

ai quali, osservando il valore di  $(m_1 + m_2)$ , associamo gli stati  $|1/2, 1/2\rangle$ ,  $|1/2, -1/2\rangle$ . Essi formano una rappresentazione irriducibile spin  $= 1/2$  bidimensionale. In generale vale la formula [3]

$$\{j\} \otimes \{s\} = \sum_{\oplus l=|s-j|}^{s+j} \{l\} \quad (5.30)$$

### 5.3.2 Operatori tensoriali

Un operatore tensoriale che trasforma secondo la rappresentazione di spin  $s$ , è un set di operatori  $O_l^s$ , con  $1 \leq l \leq 2s + 1$  tali che

$$[J_a, O_l^s] = O_m^s [J_a^s]_{ml} \quad (5.31)$$

dove  $J_a^s$  sono i generatori relativi alla rappresentazione di spin  $s$ . Vediamo per prima cosa che il prodotto  $O_l^s|j, m, \alpha\rangle$  trasforma nello stesso modo di un prodotto tensoriale  $s \otimes j$  tra stati di spin  $s$  e  $j$

$$\begin{aligned} J_a O_l^s |j, m, \alpha\rangle &= [J_a, O_l^s] |j, m, \alpha\rangle + O_l^s J_a |j, m, \alpha\rangle \\ &= O_{l'}^s |j, m, \alpha\rangle [J_a^s]_{l'l} + O_l^s |j, m', m\alpha\rangle [J_a^j]_{m'm} \end{aligned} \quad (5.32)$$

In particolare notiamo che se  $J_a$  è scritto in forma diagonale, come potrebbe essere  $J_3$  in un'opportuna base, abbiamo

$$J_3 O_l^s |j, m, \alpha\rangle = (l + m) O_l^s |j, m, \alpha\rangle \quad (5.33)$$

perciò l'autovalore dello stato  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  è semplicemente la somma dell'autovalore dell'operatore e quello dello stato  $|j, m, \alpha\rangle$ . Possiamo applicare agli stati  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  la costruzione del massimo peso esattamente come si trattasse di un normale prodotto tensoriale ricavando tutte le rappresentazioni irriducibili di dimensione  $|j - s| \leq n \leq j + s$ . Indichiamo gli autostati di tali rappresentazioni con  $|J, M\rangle$ , dove  $J$  indica la particolare rappresentazione e  $M$  l'autovalore dell'operatore  $J_3$ . Pensiamo ciascuno di questi stati come combinazione lineare degli stati  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  nel seguente modo

$$\sum_l O_l^s |j, M - l, \alpha\rangle \langle s, j, l, M - l | J, M \rangle = k_J |J, M\rangle \quad (5.34)$$

dove  $k_J$  è una costante che come vedremo dipende solo da  $J$  e i coefficienti  $\langle s, j, l, M - l | J, M \rangle$  si determinano analizzando il prodotto tensoriale  $|s, l\rangle |j, m\rangle$ . Infatti possiamo scrivere il vettore  $|J, M\rangle$  attraverso la base  $|s, l\rangle |j, m\rangle$

$$\sum_l |s, l\rangle |j, M - l, \alpha\rangle \langle s, j, l, M - l | J, M \rangle = |J, M\rangle. \quad (5.35)$$

Osserviamo che i coefficienti sono gli stessi in entrambi i casi, infatti  $J^+ |J, J\rangle$  deve essere nullo e questa condizione determina i coefficienti  $\langle s, j, l, J - l | J, J \rangle$  a meno di una costante moltiplicativa comune a tutti. Poichè le proprietà di trasformazione di  $O_l^s |j, m\rangle$  e  $|s, l\rangle$  sono le stesse, allora tutti i coefficienti devono essere proporzionali. L'unica differenza risiede nel coefficiente di proporzionalità  $k_J$  che come abbiamo visto dipende solo da  $J$ . Viceversa possiamo scrivere gli stati  $O_l^s |j, m, \alpha\rangle$  come combinazione lineare degli stati  $|J, M\rangle$  nel seguente modo

$$O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \sum_{J=|j-s|}^{j+s} \langle J, l + m | s, j, l, m, \rangle k_J |J, l + m\rangle. \quad (5.36)$$

I coefficienti  $\langle J, l + m | s, j, l, m, \rangle$  non dipendono dal particolare operatore tensoriale, ma sono determinati utilizzando le sole proprietà di gruppo e si chiamano **coefficienti di Clebsch-Gordan**. Esprimiamo infine gli stati  $k_J |J, l + m\rangle$  come combinazione lineare di  $|J, l + m, \beta\rangle$ , dove abbiamo introdotto la variabile  $\beta$  che rappresenta gli altri parametri fisici necessari ad identificare univocamente lo stato. Abbiamo infine [3]

$$\langle J, m', \beta | O_l^s |j, m, \alpha\rangle = \delta_{m', l+m} \langle J, l + m | s, j, l, m, \rangle \cdot \langle J, \beta | O^s |j, \alpha\rangle. \quad (5.37)$$

La fisica del sistema è contenuta solo nei coefficienti  $\langle J, \beta | O^s |j, \alpha\rangle$ , i quali dipendono, oltre che dalle variabili  $\alpha$  e  $\beta$ , solo dai numeri quantici  $j$  e  $J$  (e quindi dalle rappresentazioni) e non da  $m$  e  $m'$ . L'equazione (5.37) è nota come teorema di **Wigner-Eckart**.

# Capitolo 6

## Algebre compatte e semisemplici, radici e pesi

### 6.1 Operatori di Cartan

Nell'analisi delle rappresentazioni irriducibili di un'algebra compatta generica, è utile trovare il più grande set di generatori commutanti per poterli diagonalizzare. In questo modo utilizzeremo i loro autovalori per etichettare gli stati. I restanti generatori saranno utilizzati per definire gli operatori di alzamento e abbassamento. Il set di generatori hermitiani commutanti più ampio possibile è detto **sottoalgebra di Cartan**. Una tale sottoalgebra è unica, poiché qualsiasi scelta è equivalente. Il numero  $m$  di generatori di Cartan indipendenti è detto **rango** dell'algebra, ed è quindi una proprietà dell'algebra, non della rappresentazione. In una particolare rappresentazione irriducibile,  $D$ , ci saranno un numero  $m$  di generatori hermitiani  $H_i$ , corrispondenti alla sottoalgebra di Cartan, che soddisfano

$$H_i = H_i^\dagger, \quad [H_i, H_j] = 0. \quad (6.1)$$

I generatori di Cartan commutano fra di loro, è perciò possibile diagonalizzarli simultaneamente. Questo ci permette di scegliere una base di autostati che possiamo classificare attraverso i relativi autovalori. Attuiamo perciò un cambiamento di base in modo che

$$Tr(H_i H_j) = k_D \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots m. \quad (6.2)$$

Dopo la diagonalizzazione, gli stati della rappresentazione  $D$  saranno  $|\mu, x, D\rangle$ , con

$$H_i |\mu, x, D\rangle = \mu_i |\mu, x, D\rangle \quad (6.3)$$

dove  $x$  indica ogni altro parametro necessario a descrivere lo stato. I  $\mu_i$  sono detti pesi, il vettore formato dalle  $m$  componenti  $\mu_i$  è detto vettore peso. Definiamo **positivo** un vettore la cui prima componente non nulla è positiva, e **negativo** un vettore la cui prima componente è negativa.

## 6.2 Radici

L'analisi dei pesi degli stati della rappresentazione aggiunta è molto importante. Gli stati di tale rappresentazione sono infatti i generatori stessi, in questo modo associamo un vettore peso ad ognuno di essi. I pesi vengono chiamati in questo caso **radici**. Ogni algebra di Lie ha le sue radici, che sono molto utili nella ricostruzione delle rappresentazioni irriducibili, poichè permettono di ricavare le rappresentazioni fondamentali dell'algebra (vedremo in seguito quali sono queste rappresentazioni).

Denotiamo gli stati della rappresentazione aggiunta con  $|X_a\rangle$ , una combinazione lineare di essi corrisponde alla combinazione lineare dei generatori. Introduciamo ora il prodotto scalare

$$\langle X_a|X_b\rangle = \lambda^{-1}Tr(X_a^\dagger X_b) \quad (6.4)$$

Questo è l'analogo della (3.26) valida per le algebre compatte e semisemplici. L'azione di un generatore su uno stato risulta:

$$X_a|X_b\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \quad (6.5)$$

Si vede subito che gli stati corrispondenti ai generatori di Cartan hanno peso nullo. Possiamo calcolare l'azione di un generatore su un generico stato come segue:

$$\begin{aligned} X_a|X_b\rangle &= X_c\langle X_c|X_a|X_b\rangle = |X_c\rangle[T_a]_{cb} = -if_{acb}|X_c\rangle \\ if_{abc}|X_c\rangle &= |if_{abc}X_c\rangle = |[X_a, X_b]\rangle \end{aligned} \quad (6.6)$$

Gli stati della rappresentazione aggiunta, quelli che non appartengono al sottospazio di Cartan, hanno in generale vettore peso non nullo, poichè non commutano con gli operatori di Cartan.

$$H_i|E_\alpha\rangle = \alpha_i|E_\alpha\rangle \quad (6.7)$$

e quindi i corrispondenti generatori soddisfano

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (6.8)$$

Gli operatori  $E_\alpha$  appartengono allo spazio generato dai generatori dell'algebra, ma non sono i generatori. Sono stati scelti in modo da essere autostati degli operatori di Cartan. Questo si può notare dal fatto che non sono hermitiani, infatti

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger \quad (6.9)$$

e quindi

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}. \quad (6.10)$$

Stati con diversi pesi devono essere ortonormali, perchè hanno diversi autovalori di almeno un operatore di Cartan. Scegliamo quindi la normalizzazione degli stati nella rappresentazione irriducibile in modo che

$$\langle E_\alpha|E_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} = \lambda^{-1}Tr(E_\alpha^\dagger E_\beta) \quad (6.11)$$

Questi operatori vengono chiamati operatori di innalzamento e abbassamento.

### 6.3 Metodo generale: innalzamento e abbassamento

Gli operatori  $E_{\pm\alpha}$  sono detti rispettivamente di **innalzamento** e **abbassamento**, poichè gli stati  $E_{\pm\alpha}|\mu, D\rangle$  hanno pesi  $(\mu \pm \alpha)$ :

$$H_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle = [H_i, E_{\pm\alpha}] |\mu, D\rangle + E_{\pm\alpha} H_i |\mu, D\rangle = (\mu \pm \alpha)_i E_{\pm\alpha} |\mu, D\rangle. \quad (6.12)$$

Essi permettono il passaggio da un autostato all'altro delle rappresentazioni. In particolare conoscendo il peso di uno stato, è conoscendo le radici di un'algebra, possiamo conoscere i pesi degli altri stati, ricostruendo in questo modo l'intero sistema.

L'equazione (6.12), se applicata allo spazio della rappresentazione aggiunta, porta alla seguente equazione:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H, \quad (6.13)$$

infatti  $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$  è combinazione lineare di generatori di Cartan

$$E_\alpha |E_{-\alpha}\rangle = \beta_i |H_i\rangle = |\beta_i H_i\rangle = |[E_\alpha, E_{-\alpha}]\rangle \quad (6.14)$$

e possiamo calcolare  $\beta_i$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} \beta_i &= \langle H_i | E_\alpha | E_{-\alpha} \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i [E_\alpha, E_{-\alpha}]) = \lambda^{-1} \text{Tr}(E_\alpha [H_i, E_{-\alpha}]) \\ \lambda^{-1} \alpha_i \text{Tr}(E_{-\alpha} E_\alpha) &= \alpha_i \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'equazione (6.13) è il punto chiave del nostro studio, ed è stata ricavata utilizzando l'ortonormalità degli stati aventi pesi diversi e la proprietà delle costanti di struttura di una algebra compatta e semisemplice di essere completamente antisimmetriche [3].

Ad ogni coppia di vettori radice non nulli  $E_{\pm\alpha}$  è sempre possibile associare un terzo operatore, che chiamiamo  $E_3$ , in modo tale che

$$E^\pm \equiv |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} \quad (6.16)$$

$$E_3 \equiv |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H \quad (6.17)$$

formino una sotto algebra  $SU(2)$  dell'intera algebra. Per vederlo notiamo che

$$\begin{aligned} [E_3, E^\pm] &= |\alpha|^{-3} [\alpha \cdot H, E_{\pm\alpha}] \\ &= |\alpha|^{-3} \alpha (\pm\alpha) E_{\pm\alpha} = \pm |\alpha|^{-1} E_{\pm\alpha} = \pm E^\pm; \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} [E^+, E^-] &= |\alpha|^{-2} [E_\alpha, E_{-\alpha}] \\ &= |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H = E_3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Gli stati della rappresentazione aggiunta di un'algebra semisemplice possono sempre essere decomposti in sottoalgebre  $SU(2)$ , che possiamo utilizzare per ricavare la struttura generale delle rappresentazioni irriducibili.

### 6.3.1 Condizioni sulle radici

Siccome conosciamo l'algebra di  $SU(2)$ , ricaviamo molte informazioni sui vettori radice  $\alpha$ . Per esempio si trova una corrispondenza biunivoca tra vettori radice e generatori, quindi, per la rappresentazione aggiunta, non vi è necessario nessun altro parametro per descrivere gli stati (come  $x$  nella 6.3).

*Dimostrazione.* Siano  $E_\alpha$  e  $E'_\alpha$  due generatori ortonormali a cui è associata la stessa radice  $\alpha$ ,  $\langle E_\alpha, E'_\alpha \rangle = \lambda^{-1} \text{Tr}(E_\alpha^\dagger E'_\alpha) = \lambda^{-1} \text{Tr}(E_{-\alpha} E'_\alpha) = 0$ . Lo stato  $E^-|E'_\alpha\rangle$  ha peso zero ed è quindi combinazione lineare di generatori di Cartan. Ma

$$\begin{aligned} \langle H_i | E^- | E'_\alpha \rangle &= \lambda^{-1} \text{Tr}(H_i [E_\alpha^\dagger, E'_\alpha]) \\ &= -\lambda^{-1} \text{Tr}(E^- [H_i, E'_\alpha]) = -\alpha_i \lambda^{-1} \text{Tr}(E'_\alpha E^-) = 0 \end{aligned}$$

Di conseguenza  $E^-|E'_\alpha\rangle = 0$ . Abbiamo anche  $E_3|E'_\alpha\rangle = |\alpha|^{-2} \alpha \cdot H |E'_\alpha\rangle = |E'_\alpha\rangle$ . Allora  $|E'_\alpha\rangle$  ha autovalore di  $E_3$  uguale ad 1, ma è lo stato con minimo autovalore di  $E_3$  e questo è impossibile.  $\square$

Un altro importante risultato [3] che deriva da quello precedente, ma che non dimostriamo è che se  $\alpha$  è una radice, allora non esistono altre radici non nulle multiple di  $\alpha$ , tranne  $-\alpha$ .

Prendiamo una terna  $E^\pm, E_3$  per un fissato  $\alpha$ . L'autovalore di  $E_3$  per uno stato con peso  $\mu$  di una rappresentazione  $D$  è

$$E_3 |\mu, x, D\rangle = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} |\mu, x, D\rangle. \quad (6.20)$$

Poichè l'autovalore di  $E_3$  può essere solo intero o sem-intero,

$$\frac{2\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} \quad (6.21)$$

è un intero.

Sia ora  $j$ , l'autovalore di  $E_3$ . Poichè  $E_3, E^\pm$  formano un'algebra di  $SU(2)$ , esistono due numeri interi che chiamiamo  $p$  e  $q$  tali che

$$(E^+)^p |\mu, x, D\rangle \neq 0, \quad (6.22)$$

che ha peso  $\mu + p\alpha$ , sia lo stato con autovalore di  $E_3$  pari a  $j$ , perciò

$$(E^+)^{p+1} |\mu, x, D\rangle = 0, \quad (6.23)$$

$$\frac{\alpha \cdot (\mu + p\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} + p = j \quad (6.24)$$

Allo stesso modo lo stato

$$(E^-)^q |\mu, x, D\rangle \neq 0 \quad (6.25)$$

con peso  $\mu - q\alpha$  sia lo stato più basso autovalore di  $E_3$ , ossia

$$(E^-)^{q+1}|\mu, x, D\rangle = 0, \quad (6.26)$$

$$\frac{\alpha \cdot (\mu - q\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} - q = -j. \quad (6.27)$$

Sommando la (6.24) e la (6.27) si ottiene

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p - q), \quad (6.28)$$

relazione nota come **master formula**. Essa permette una classificazione geometrica delle algebre di Lie compatte. Ad esempio possiamo applicare tale formula per calcolare l'angolo tra due vettori radice  $\alpha$  e  $\beta$ .

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{(p - q)(p' - q')}{4}. \quad (6.29)$$

### 6.3.2 Radici semplici

Alcune radici positive possono essere ricavate da altre. Definiamo **radici semplici** quelle radici positive che non possono essere scritte come somma di altre radici positive. Le radici semplici sono ovviamente linearmente indipendenti, e hanno alcune proprietà che rendono le algebre di Lie semisemplici facilmente classificabili.

1. la differenza di radici semplici non è una radice. Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due radici, supponendo  $\alpha - \beta$  positiva, avremmo  $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$  e non sarebbe una radice semplice. Viceversa se  $\alpha - \beta$  fosse negativa sarebbe  $\beta$  a non essere semplice.
2. ogni radice positiva può essere scritta somma di radici semplici con coefficienti non negativi interi  $k^\alpha$ . Se esistesse una radice senza questa proprietà, essa sarebbe una radice semplice.
3. le radici semplici formano un set completo. Supponiamo per assurdo che esista qualche vettore  $\xi$  ortogonale a tutte le radici semplici e perciò ortogonale a tutte le radici. Allora

$$[\xi \cdot H, E_\phi] = 0 \quad \forall \phi \quad (6.30)$$

Poichè  $\xi \cdot H$  commuta anche con tutti i generatori di Cartan, allora commuta con tutti i generatori e l'algebra non è semi semplice.

Il numero di  $E_3$  e quindi di radici semplici eguaglia perciò il numero di generatori di Cartan, nonchè il rango dell'algebra. Poichè le radici semplici formano un set completo, possiamo esprimere ogni peso in funzione di esse. Vediamo come farlo attraverso i pesi fondamentali. Sottraendo la (6.24) e la (6.27) ricaviamo

$$p + q = 2j, \quad (6.31)$$

perciò se conosciamo  $p$  e  $q$  conosciamo la rappresentazione di massimo spin.

### 6.3.3 Trovare tutte le radici

Ad ogni peso  $|\mu\rangle$ , possiamo associare un valore  $q^i - p^i$  per ogni radice. Gli elementi  $q^i - p^i$ , corrispondono al doppio degli autovalori associati all' $E_3$  relativo alla radice  $\alpha^i$  :  $2E_3|\mu\rangle = \frac{2\mu \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}}|\mu\rangle = (q^i - p^i)|\mu\rangle$  . Poichè le  $\alpha^i$  sono complete, i valori  $q^i - p^i$  dei vettori peso, contengono le stesse informazioni delle loro componenti, perciò li utilizziamo per etichettare i pesi. Ad ogni radice semplice  $\alpha^j$ , associamo i valori  $q^i - p^i$  che rappresentano l'azione di  $\alpha^i$  su  $\alpha^j$ , attraverso la **matrice di Cartan**

$$A_{ji} \equiv \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{\alpha^{i2}} \quad (6.32)$$

La  $j$ -esima riga della matrice di Cartan consiste nei valori  $q^i - p^i$  associati alla radice semplice  $\alpha^j$ . Notiamo che tutti gli elementi della diagonale sono uguali a 2. Infatti ogni radice  $\alpha^i$  rappresenta lo stato di massimo spin di una rappresentazione  $SU(2)$  di spin 1. Di conseguenza tutti i valori della diagonale sono associati a  $q^i = 2$  e  $p^i = 0$ . Ricordiamo che non esiste nessuna radice uguale a  $2\alpha^i$ . Viceversa, per le altre componenti della matrice di Cartan,  $q^i=0$ , perchè  $\alpha^j - \alpha^i$  non è una radice, di conseguenza  $p^i = -A_{ji}$ . La costruzione di tutte le radici avviene sommando, per ogni  $p^i$  non nullo delle componenti di  $\alpha^j$ , le componenti di  $\alpha^j$  con quelle di  $\alpha^i$ . Il risultato di una singola somma sarà una nuova radice.

**Esempio 6.1.** Supponiamo di avere la seguente matrice di Cartan (come vedremo corrisponde alla matrice di Cartan di  $SU(3)$  )

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

Indicando le radici semplici attraverso le loro componenti  $q^1 - p^1$  abbiamo

$\alpha^1 = \boxed{2-0} \ \boxed{0-1} = \boxed{2-1}$  ,  $\alpha^2 = \boxed{0-1} \ \boxed{2-0} = \boxed{-1 \ 2}$  . Possiamo applicare a ciascuna delle due radici l'altra solo una volta e, in entrambi i casi troviamo la radice non semplice  $\alpha = \boxed{1 \ 1}$ , alla quale non si può applicare nessuna radice semplice poichè essa ha  $p^1 = p^2 = 0$ . Possiamo applicare lo stesso ragionamento per trovare tutte le radici negative. Si trova che le radici di  $SU(3)$  sono :  $\boxed{1 \ 1}$  ,  $\boxed{2-1}$  ,  $\boxed{-1 \ 2}$  ,  $\boxed{0 \ 0}$  ,  $\boxed{1 -2}$  ,  $\boxed{-2 \ 1}$  ,  $\boxed{-1 -1}$  .

### 6.3.4 Pesì fondamentali

Supponiamo che le radici semplici di qualche algebra semi-semplce siano  $\alpha^j$  , con  $j = 1, \dots, m$ . Sia  $\mu_{Max}$  il massimo peso per una rappresentazione irriducibile  $D$ . Allora

$$E_{\alpha^j}|\mu_{Max}\rangle = 0 \quad \forall j \quad (6.34)$$

ovvero tutte le radici positive annichilano lo stato. È valido anche il viceversa: le rappresentazioni irriducibili possono essere costruite applicando operatori di abbassamento ad

ogni stato con questa proprietà. Ovvero se vale la (6.34), allora  $\mu_{Max}$  è il massimo peso di una rappresentazione irriducibile. Quindi per ogni  $E_{\alpha^j}$  che agisce su  $|\mu_{Max}\rangle$ ,  $p=0$  e

$$\frac{2\alpha^j \cdot \mu_{Max}}{\alpha^{j^2}} = q^j. \quad (6.35)$$

Poichè gli  $\alpha^j$  sono linearmente indipendenti e completi, gli interi  $q^j$  determinano completamente  $\mu_{Max}$ . Possiamo etichettare un generico peso massimo  $\mu$  con i suoi coefficienti  $q^j$ . Questi interi sono chiamati **coefficienti di Dynkin**. Essi corrispondono al doppio degli autovalori dell' $E_3$  associato a  $\alpha^j$ . È utile considerare i vettori peso  $\mu^j$  che soddisfano

$$\frac{2\alpha^j \cdot \mu^k}{\alpha^{j^2}} = \delta_{jk}. \quad (6.36)$$

I vettori  $\mu^j$  sono chiamati **pesi fondamentali**. Ogni peso fondamentale, corrisponde allo stato massimo ( $p^i = 0 \forall \alpha^i$ ), per una certa trasformazione irriducibile, più piccola possibile ( $q^j=1, q^i = 0 \forall i \neq j$ ). Per ogni peso fondamentale abbiamo inoltre una radice ed una terna  $E^\pm, E_3$  associata, con autovalore di  $E_3$  uguale, per definizione, a  $1/2$ , mentre l'autovalore dell'operatore  $E_3$  associato a qualunque altra radice è 0. Possiamo costruire, attraverso gli operatori di abbassamento una rappresentazione irriducibile per ognuno di essi. Le  $m$  rappresentazioni irriducibili che hanno questi massimi pesi sono dette **rappresentazioni fondamentali**  $D^j$ . Il numero di rappresentazioni fondamentali, equivale perciò al numero di etichette del sistema. Nel caso di  $SU(2)$  ho un solo operatore di Cartan, perciò ho una sola rappresentazione fondamentale, che è quella associata alle matrici di Pauli. Ogni massimo peso,  $\mu$ , può essere scritto in modo unico come

$$\mu = \sum_{j=1}^m q^j \mu^j. \quad (6.37)$$

Possiamo costruire la rappresentazione con peso massimo  $\mu$ , attraverso il prodotto tensoriale di  $q^1$  rappresentazioni di massimo peso  $\mu^1$ ,  $q^2$  rappresentazioni di massimo peso  $\mu^2$  e così via. Questa rappresentazione sarà generalmente riducibile.

I coefficienti di Dynkin di un generico peso  $\mu$  sono l'analogo degli elementi della matrice di Cartan calcolati per le radici semplici. Possiamo costruire i pesi di una rappresentazione irriducibile utilizzando lo stesso metodo adoperato per le radici.

## 6.4 SU(3)

$SU(3)$  è il gruppo delle matrici 3 x 3 unitarie, con determinante uguale a 1. È generato da matrici 3 x 3 hermitiane senza traccia. La condizione di avere generatori con traccia

nulla è necessaria affinché il determinante delle matrici del gruppo sia 1. Gli otto generatori infinitesimi di  $SU(3)$  nella rappresentazione fondamentale sono definiti tramite le **matrici di Gell-Mann** [3].

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Si nota che le prime tre matrici contengono le matrici di Pauli, le quali agiscono su un sottospazio. Vale la relazione

$$Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (6.40)$$

Calcolando esplicitamente l'algebra di Lie si possono trovare le costanti di struttura che identificano il gruppo  $SU(3)$ . Evidentemente, per  $a = 1, 2, 3$ , le  $T_a$  generano un sottogruppo  $SU(2)$  di  $SU(3)$ . È conveniente porre  $T_3$  nell'algebra di Cartan. C'è solo un altro generatore,  $T_8$  che commuta con  $T_3$  e lo inseriamo nell'algebra di Cartan.

$$H_1 = T_3 \quad H_2 = T_8 \quad (6.41)$$

Un generico peso di questa rappresentazione avrà due etichette. Il calcolo dei pesi risulta immediato, poiché sia  $T_3$  che  $T_8$  sono in forma diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \quad (6.42)$$

Le radici devono essere differenza di pesi, poiché i corrispondenti generatori hanno la funzione di trasformare un peso in un altro.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) &= E_{\pm 1,0} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) &= E_{\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) &= E_{\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

Le radici semplici di  $SU(3)$  sono

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= (1/2, \sqrt{3}/2) \\ \alpha^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/2)\end{aligned}\tag{6.44}$$

e hanno coefficienti di Dynkin  $\boxed{2 \ -1}$ ,  $\boxed{-1 \ 2}$  che possiamo calcolare dalla (6.35). Imponendo la condizione  $\mu^i \alpha^j = 0$ , per  $i \neq j$ , e la normalizzazione (6.36) si trovano i pesi fondamentali.

$$\begin{aligned}\mu^1 &= (1/2, \sqrt{3}/6) \\ \mu^2 &= (1/2, -\sqrt{3}/6)\end{aligned}\tag{6.45}$$

La prima corrisponde a quella generata dalle matrici di Gell-Mann (è facile verificare, attraverso le (6.43), che  $E_{\alpha^{1,2}}$  annichilano lo stato). Per costruire la seconda, notiamo innanzitutto che si tratta, come ci aspettiamo per analogia con la precedente, di una rappresentazione  $SU(2)$  spin 1, che ha quindi tre autostati. Il peso  $\mu^2$  è associato ai coefficienti  $\boxed{0 \ 1}$ . Appliciamo ora l'operatore  $E_{-\alpha^2}$  e ricaviamo il primo stato abbassato con peso  $|\mu^2 - \alpha^2\rangle = (0, -\sqrt{3}/3)$ . Non possiamo applicare altre volte questo generatore, perchè i coefficienti di Dinkin relativi alla radice  $\alpha^2$  per il peso  $\mu^2$  sono  $p^2 = 0$ ,  $q^2 = 1$ . Il nuovo peso ha coefficienti  $\boxed{1 \ -1}$ , perchè ho sottratto la radice  $\boxed{-1 \ 2}$ . Si vede che  $p^2=1$ ,  $q^2=0$ . A questo stato non possiamo applicare  $E_{\alpha^1}$ , altrimenti avremo una radice uguale ad una differenza di altre radici. Osservando che il coefficiente di Dinkin relativo ad  $\alpha^1$  è uguale ad 1, ricaviamo  $p^1=0$ ,  $q^1=1$ . Possiamo applicare  $E_{-\alpha^1}$  ed ottenere lo stato  $|\mu^2 - \alpha^2 - \alpha^1\rangle = (1/2, -\sqrt{3}/3)$ , con coefficienti  $\boxed{-1 \ 0}$ . Abbiamo così ottenuto tutti i nostri autostati della rappresentazione 3-dimensionale.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{6}\right)\tag{6.46}$$

Queste due rappresentazioni fondamentali le indichiamo, utilizzando i coefficienti di Dinkin, con  $(1,0)$  e  $(0,1)$ . Notiamo che i tripletti di autostati sono in relazione tra loro, poichè sono uno l'opposto dell'altro. Questa relazione si manifesta nei generatori delle rappresentazioni. Se  $T_a$  sono i generatori di una certa rappresentazione  $D$ , di qualche algebra di Lie, allora gli oggetti  $-T_a^*$  soddisfano le stesse regole di commutazione. La rappresentazione  $\bar{D}$  è chiamata **complesso coniugata**. I generatori di Cartan di  $\bar{D}$  sono  $-H_i^*$ . Poichè  $H_i$  è hermitiano, allora  $H_i^*$  ha i suoi stessi autovalori, perciò se  $\mu$  sono i pesi di  $D$ ,  $-\mu$  sono i pesi di  $\bar{D}$ . In particolare lo stato massimo di  $\bar{D}$  è lo stato minimo di  $D$ . In generale se  $D = (m, n)$  allora  $\bar{D} = (n, m)$ . Un'altra notazione per scrivere le rappresentazioni è quella di indicarne la dimensione e la relazione di coniugazione complessa.

$$(1, 0) \equiv 3 \quad (0, 1) \equiv \bar{3}\tag{6.47}$$

Una rappresentazione equivalente alla sua rappresentazioni coniugata si dice **reale**. Altri esempi di rappresentazioni di  $SU(3)$ , che possiamo costruire attraverso i massimi pesi e gli operatori di abbassamento sono la  $6 \equiv (2, 0)$ , con peso più alto  $2\mu^1 = (1, 1/\sqrt{3})$ , la  $\bar{6} \equiv (0, 2)$ , la  $8 \equiv (1, 1)$  reale, la  $10 \equiv (3, 0)$  e la  $\bar{10} \equiv (0, 3)$ .

**Esempio 6.2.** Possiamo individuare facilmente i pesi della rappresentazione 8 dimensionale, osservando che si tratta della rappresentazione aggiunta. Di conseguenza gli otto pesi corrisponderanno alle 8 radici del gruppo

radice	$H_1$	$H_8$
$\alpha^1 + \alpha^2$	1	0
$\alpha^1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\alpha^2$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\alpha_{H_1}, \alpha_{H_8}$	0	0
$-\alpha^2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\alpha^1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\alpha^1 - \alpha^2$	-1	0

Tabella 6.1: rappresentazione 8 dimensionale di  $SU(3)$ .

## 6.5 Indici alti e indici bassi

Indichiamo i vettori appartenenti allo spazio vettoriale della rappresentazione definente attraverso le loro componenti  $v^a$ , con  $a = 1, 2, \dots, n$ . Essi sono trasformati dalle matrici  $[D(g)]^a_b$ . Il primo indice,  $a$ , è quello di riga il secondo,  $b$ , è indice di colonna. Sono convenzionalmente posti il primo in alto e il secondo il basso. Indici ripetuti due volte sono sommati su tutti i possibili valori e si usa la convenzione che nella somma un indice sia posto in alto e uno in basso.

$$v^a \rightarrow v'^a = [D(g)]^a_b v^b \quad (6.48)$$

Abbiamo inoltre

$$([D(g)]^a_b v^b)^T = v^b [D(g)^T]_b^a \quad (6.49)$$

Nel caso di rappresentazioni unitarie, indichiamo i vettori dello spazio complesso coniugato con  $v_a$  ed essi trasformano secondo  $[D(g)^*]_a^b v_b$  nel seguente modo

$$v_a \rightarrow v'_a = [D(g)^*]_a^b v_b \quad (6.50)$$

La convenzione pone il primo indice, quello di riga, in basso ed il secondo in alto. Abbiamo, per lo spazio complesso coniugato

$$([D(g)^*]_a{}^b v_b)^T = v_b [D(g)^\dagger]^b{}_a \quad (6.51)$$

e infine

$$[D(g)^\dagger]^b{}_a [D(g)]^a{}_b = \hat{1} \quad (6.52)$$

Notiamo che la contrazione di un indice alto con uno basso produce uno scalare. Il prodotto  $v_a w^a$  equivale al prodotto di due vettori, ossia  $v^T w$ .

$$\begin{aligned} v_a w^a &\rightarrow v'_a w'^a = v'^T w = ([D(g)^*]_a{}^b v_b)^T [D(g)]^a{}_b w^b \\ &= v_b [D(g)^\dagger]^b{}_a [D(g)]^a{}_b w^b = v_b w^b = v_a w^a \end{aligned} \quad (6.53)$$

Studiamo ora la forma di un generico prodotto tensoriale e il modo in cui trasforma.

$$F^{ab}{}_c \equiv v^a w^b x_c \quad (6.54)$$

rappresenta un elemento di uno spazio vettoriale  $n^3$  dimensionale che sotto l'azione del gruppo si trasforma come

$$F^{ab}{}_c \rightarrow F'^{ab}{}_c = [D(g)]^a{}_d [D(g)]^b{}_e [D(g)^*]_c{}^f F^{de}{}_f. \quad (6.55)$$

Vediamo che  $\delta^a{}_b$  è uno scalare, mentre non lo è  $\delta_{ab}$ :

$$\begin{aligned} \delta^a{}_b &\rightarrow \delta'^a{}_b = [D(g)]^a{}_c [D(g)^*]_b{}^d \delta^c{}_d = [D(g)]^a{}_c [D(g)^*]_b{}^c \\ &= [D(g)]^a{}_c [D(g)^\dagger]^c{}_b = [D(g)D(g)^\dagger]^a{}_b = \delta^a{}_b \end{aligned} \quad (6.56)$$

dove il primo passaggio viene dalla legge di trasformazioni di un generico tensore. Il secondo passaggio equivale al prodotto  $[D(g)^*]_b{}^d [\delta^T]_d{}^c$  e nel terzo passaggio abbiamo trasposto la matrice  $[D(g)^*]_b{}^c$  ed invertito l'indice di riga con quello di colonna per mantenere lo stesso risultato. Viceversa se consideriamo  $\delta_{ab}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \delta_{ab} &\rightarrow \delta'_{ab} = [D(g)^*]_a{}^c [D(g)^*]_b{}^d \delta_{cd} = [D(g)^*]_a{}^c [D(g)^*]_{bc} \\ &= [D(g)^* D(g)^\dagger]_{ab} \neq \delta_{ab} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Vi sono altri due tensori invarinanti per  $SU(N)$ :  $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 \dots i_n}$ , definiti come

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i_1, \dots, i_n) \text{ è una permutazione pari di } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (i_1, \dots, i_n) \text{ è una permutazione dispari di } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{altrimenti i.e due indici si ripetono uguali} \end{cases} \quad (6.58)$$

Vediamo per prima cosa che in  $SU(3)$

$$\det[D(g)^*] = [D(g)^*]_1{}^{i_1} [D(g)^*]_2{}^{i_2} [D(g)^*]_3{}^{i_3} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \quad i_1 = i_2 = i_3 = 1, 2, 3 \quad (6.59)$$

perchè è la somma di tutti i prodotti formati con elementi presi da colonne e righe tutte diverse tra loro, con il segno dato da  $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$  o equivalentemente

$$\det[D(g)^*]_{\epsilon_{j_1, j_2, j_3}} = [D(g)^*]_{j_1}^{i_1} [D(g)^*]_{j_2}^{i_2} [D(g)^*]_{j_3}^{i_3} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \quad (6.60)$$

e poichè  $\det[D(g)^*] = 1$ ,  $\epsilon_{ijk}$  è un tensore invariante. Questo risultato si può generalizzare ad uno spazio  $N$  dimensionale. I tensori invarianti sono molto utili, infatti pur restando invariati essi si trasformano come veri e propri tensori e possiamo utilizzarli per ridurre il rango di altri tensori. Vogliamo ora studiare i tensori allo scopo di individuare le rappresentazioni irriducibili di una certa rappresentazione tensoriale. Lo facciamo studiandone le proprietà di simmetria. Ad esempio il tensore  $T^{ab}$  può essere separato nella sua parte simmetrica ( $S^{ab} = S^{ba}$ ) e antisimmetrica ( $A^{ab} = -A^{ba}$ ) nel seguente modo:

$$T^{ab} = \frac{1}{2}(T^{ab} + T^{ba}) + \frac{1}{2}(T^{ab} - T^{ba}), \quad (6.61)$$

dove il primo termine indica la parte simmetrica, mentre il secondo la parte antisimmetrica. Questa scomposizione è utile perchè la parte simmetrica e antisimmetrica non si mescolano fra loro sotto l'azione del gruppo ed identificano perciò rappresentazioni irriducibili :

$$\begin{aligned} S^{ab} \rightarrow S'^{ab} &= [D(g)]^a_c [D(g)]^b_d S^{cd} \\ &= [D(g)]^a_c [D(g)]^b_d S^{dc} \\ &= [D(g)]^b_d [D(g)]^a_c S^{dc} = S'^{ba} \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} A^{ab} \rightarrow A'^{ab} &= [D(g)]^a_c [D(g)]^b_d A^{cd} \\ &= [D(g)]^a_c [D(g)]^b_d (-A^{dc}) \\ &= -[D(g)]^b_d [D(g)]^a_c A^{dc} = -A'^{ba}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Per un generico prodotto tensoriale  $N \otimes N$  del gruppo  $SU(N)$  si ha in questo modo

$$N \otimes N = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2} \quad (6.64)$$

Se è possibile si può ulteriormente scomporre il prodotto tensoriale, separandone la traccia. In questo caso non è lecito perchè  $\delta_{ab}$  non è un tensore invariante per  $SU(N)$ . Viceversa se consideriamo il prodotto tensoriale  $N \otimes \bar{N}$  possiamo isolare la parte di traccia da quella senza traccia attraverso lo scalare  $\delta^a_b$

$$T^a_b = \frac{1}{N} \delta^a_b T + \hat{T}^a_b, \quad (6.65)$$

dove  $T \equiv T^a_a$  e  $\hat{T}^a_b \equiv T^a_b - \frac{1}{N} \delta^a_b T$ . Da questa scomposizione ricaviamo

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus (N^2 - 1). \quad (6.66)$$

Nel caso di  $SU(3)$  possiamo calcolare il prodotto

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}, \quad (6.67)$$

dove la rappresentazione 6 viene dal prodotto di due vettori con indici alti e ha peso massimo (2,0). Mentre la rappresentazione di dimensione 3 è quella complesso coniugata, poichè il tensore antisimmetrico  $A^{ab}$  può essere scritto come  $\epsilon^{abc}\epsilon_{cij}T^{ij} = \epsilon^{abc}v_c$ , che trasforma come un vettore dello spazio complesso coniugato, dato che  $\epsilon^{abc}$  è un tensore invariante per  $SU(3)$ . Inoltre

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8. \quad (6.68)$$

Nel caso di  $SU(2)$  abbiamo

$$2 \otimes 2 = 3 \oplus 1, \quad 2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3, \quad (6.69)$$

perciò i due prodotti tensoriali sono equivalenti. Infatti, la rappresentazione 2 equivale alla rappresentazione  $\bar{2}$ . Si ha anche

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10. \quad (6.70)$$

Per vederlo pensiamo  $3 \otimes 3$  come  $6 \oplus \bar{3}$  e dunque  $3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3)$ . Inoltre possiamo scomporre  $6 \otimes 3$  nel seguente modo

$$\begin{aligned} T^{abc} = & \frac{1}{6}(T^{abc} + T^{bca} + T^{cab} + T^{bac} + T^{cba} + T^{acb}) \\ & + \frac{1}{6}(T^{abc} + T^{bca} + T^{cab} - T^{bac} - T^{cba} - T^{acb}). \end{aligned} \quad (6.71)$$

La dimensione della parte simmetrica è data dalle combinazioni con ripetizione di  $n$  oggetti di classe  $k$   $\binom{n+k-1}{k}$ , dove  $n$  è la dimensione dello spazio e  $k$  il numero di indici. Infatti il numero di gradi di libertà del tensore simmetrico, è uguale a tutti i gruppi di  $k$  elementi che differiscono almeno per un elemento. Il numero di elementi è uguale alla dimensione dello spazio, e possono ovviamente essere ripetuti. Il calcolo della dimensione della parte antisimmetrica è simile, ma bisogna eliminare la ripetizione. Gli elementi con una coppia di indici uguali devono essere nulli, altrimenti lo scambio di tali indici non porterebbe alcuna variazione e il tensore non sarebbe antisimmetrico. La dimensione del tensore antisimmetrico si ricava perciò dalla combinazione di  $n$  elementi di classe  $k$  senza ripetizione:  $\binom{n}{k}$ . Nel nostro caso  $6 \otimes \bar{3} = 10 \oplus 8$ .

# Capitolo 7

## Il gruppo di Lorentz

Consideriamo due sistemi di coordinate spazio temporali  $S$  e  $S'$ , in moto relativo, le cui coordinate coincidano per  $t = t' = 0$ . La trasformazione che lega i due sistemi è chiamata trasformazione di Lorentz. Dalla teoria della Relatività sappiamo che la grandezza  $s^2$  definita come

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (7.1)$$

si conserva nel cambiamento di coordinate ( $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  è il valore della velocità della luce nel vuoto). Utilizziamo la seguente notazione per identificare eventi nello spaziotempo:

$$x^\mu \equiv (x^0 = ct, x, y, z) = (x^0, x^k) \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.2)$$

L'invarianza di  $s^2$  è espressa da

$$x^\mu x_\mu \equiv x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \equiv x'^2, \quad (7.3)$$

con

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono omogenee e continue, per le proprietà dello spazio tempo, di conseguenza descritte da un operatore lineare

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (7.5)$$

La costanza di  $s^2$  si può esprimere perciò come una condizione sulle sole trasformazioni, ovvero

$$x'^\mu x'_\nu = x^T g x = x'^\mu x'_\mu \quad x' = \Lambda x \quad g = \Lambda^T g \Lambda \quad (7.6)$$

o in modo equivalente

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma \quad (7.7)$$

L'equazione (7.6) mostra che le matrici del gruppo di Lorentz sono matrici 4 x 4, con l'usuale prodotto tra matrici. Inoltre deve valere la seguente condizione

$$\det g = \det(\Lambda^T g \Lambda) \implies \det \Lambda = \pm 1 \quad (7.8)$$

che è equivalente alla condizione di ortogonalità, e conferma la proprietà dell'esistenza dell'elemento inverso del gruppo. Abbiamo un'ulteriore condizione sugli elementi di matrice di  $\Lambda$  data da

$$1 = g_{00} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_0\Lambda^\nu{}_0 = [\Lambda^0{}_0]^2 - \Lambda^k{}_0\Lambda^k{}_0 \implies |\Lambda^0{}_0| \geq 1. \quad (7.9)$$

La (7.9) divide la matrice di Lorentz in quattro categorie delle quali solo la prima è un sottogruppo

- proprio ed ortocrono  $L_+^\uparrow = \{\Lambda \in L | \det \Lambda = 1 \cap \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$
- improprio ed ortocrono  $L_-^\uparrow = \{\Lambda \in L | \det \Lambda = -1 \cap \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$
- proprio non ortocrono  $L_+^\downarrow = \{\Lambda \in L | \det \Lambda = 1 \cap \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$
- improprio non ortocrono  $L_-^\downarrow = \{\Lambda \in L | \det \Lambda = -1 \cap \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$

Si vede che solamente il gruppo proprio ed ortocrono è connesso con l'identità. L'intero gruppo di Lorentz è denotato solitamente con  $O(1, 3)$  e quello proprio ed ortocrono con  $SO(1, 3)$ , dove il 3 indica le componenti spaziali e l'1 quella temporale. Ogni classe è ottenibile moltiplicando le matrici di  $SO(1, 3)$  per una matrice rappresentativa della classe: l'inversione spaziale, l'inversione temporale, l'inversione spazio-temporale. Dall'equazione definente il gruppo si ricava che la matrice  $\Lambda$  ha 6 gradi di libertà ed è perciò descrivibile da 6 parametri. L'algebra di Lie del gruppo di Lorentz ha quindi dimensione 6. La condizione di essere proprio ed ortocrono non restringe il numero di parametri. Studiamo ora le trasformazioni relativamente ad  $SO(1, 3)$ . Tre parametri descrivono le rotazioni spaziali, che vengono descritte dalle matrici

$$(R)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & (R)^\mu{}_\nu & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

dove  $(R)^\mu{}_\nu$  denotano le ordinarie rotazioni nello spazio tridimensionale. Le altre trasformazioni agiscono sia sulle coordinate temporali che su quella spaziale. Sono trasformazioni relative a sistemi con velocità relativa diversa da 0. La più semplice di queste è

quella in cui il sistema  $S'$  si muove con velocità  $v \geq 0$  rispetto a  $S$ , diretta lungo un asse coordinato, ad esempio l'asse  $x$ .

$$(L_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

con  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{(1-\beta^2)}$  e

$$\begin{aligned} \sinh\xi &= \beta\gamma \\ \cosh\xi &= \gamma. \end{aligned} \quad (7.12)$$

La scrittura (7.11) enfatizza l'analogia tra rotazioni e trasformazioni speciali di Lorentz. Una generica trasformazione di  $SO(1,3)$  si ricava moltiplicando una trasformazione di velocità, con una rotazionale. I parametri che descrivono il gruppo sono i tre angoli di rotazione attorno agli assi cartesiani indicati con  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) e i parametri iperbolici  $\xi_k \equiv \text{Arsh}(\beta_k(1 - \beta_k^2)^{-1/2})$   $k = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}$ , che rendono il gruppo di Lorentz non compatto. Possiamo scegliere i generatori del gruppo di Lorentz nel seguente modo [8]:

$$I_k \equiv -i \frac{d\Lambda}{d\alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0} \quad \text{e} \quad J_k = -i \frac{d\Lambda}{d\xi_k} \Big|_{\xi_k=0} \quad (k = 1, 2, 3).$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -i \\ & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & I_2 &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & 0 & i \\ & 0 & 0 & 0 \\ & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -i & 0 \\ & i & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & & & \\ 0 & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} & J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & & & \\ i & & 0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} & J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & & & \\ 0 & & 0 & \\ i & & & \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ed ottenere la parametrizzazione esponenziale  $\Lambda = e^{(i\alpha_k I_k + i\xi_k J_k)}$ , con le regole di commutazione

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k \quad [I_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \quad [J_i, J_k] = -i\epsilon_{ijk} I_k \quad j, k, l = 1, 2, 3. \quad (7.14)$$

Si vede che  $J_i$  non sono hermitiani, mentre lo sono  $I_i$ . Per trovare gli altri gruppi basta aggiungere a questo le trasformazioni  $P$ ,  $T$  e  $PT$ . La trasformazione di parità  $P$  è elemento del gruppo  $L_-^\uparrow$ , l'inversione temporale  $T$  del gruppo  $L_-^\downarrow$ , mentre l'inversione totale  $PT$  appartiene a  $L_+^\downarrow$ .

Poichè non è compatto, il gruppo di Lorentz possiede sia rappresentazioni finito dimensionali, che infinito dimensionali, ma quest'ultime non sono unitarie. I generatori delle rappresentazioni infinito dimensionali possono essere scelti hermitiani.

## 7.1 Rappresentazioni finito dimensionali del gruppo di Lorentz

Le rappresentazioni dell'algebra descritta nelle equazioni (7.14) forniscono anche rappresentazioni dell'algebra di  $SL(2, \mathbb{C})$  che è un ricorpimento del gruppo di Lorentz ed è definito come il gruppo delle matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi con determinante uguale ad 1. L'algebra  $SL(2, \mathbb{C})$  si ricava da una complessificazione dell'algebra di  $SU(2)$ , che è invece un'algebra reale di dimensione 3. In particolare denotando l'algebra di  $SL(2, \mathbb{C})$  con  $sl(2, \mathbb{C})$  e con  $su(2)$  l'algebra di  $SU(2)$  si ottiene la seguente relazione

$$sl(2, \mathbb{C}) = su(2) \oplus i su(2). \quad (7.15)$$

La (7.15) verrà resa esplicita studiando le rappresentazioni di Weyl. Vediamo come utilizzare il gruppo  $SU(2)$  di cui sappiamo costruire le rappresentazioni irriducibili per identificare le rappresentazioni finito dimensionali di  $SL(2, \mathbb{C})$ . A questo scopo è conveniente introdurre le combinazioni

$$A_i \equiv \frac{1}{2}(I_i + iJ_i) \quad B_i \equiv \frac{1}{2}(I_i - iJ_i) \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.16)$$

I nuovi operatori sono tutti hermitiani e formano la seguente algebra:

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k \quad [A_i, B_j] = 0. \quad (7.17)$$

Le relazioni di commutazione per gli operatori  $A_i$  sono le stesse del gruppo  $SU(2)$ , così come quelle dei  $B_i$ . Possiamo scegliere due operatori che denominiamo  $A_3$  e  $B_3$ , diagonalizzarli simultaneamente ed associare a ciascuna delle due sottoalgebre una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$ . Infine ricostruiamo i generatori  $I_i$  e  $J_i$  invertendo le (7.16).

**rappresentazioni di Weyl** Le rappresentazioni di dimensione più bassa, dopo la scalare, sono le rappresentazioni spinoriali di Weyl  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ . La rappresentazione  $(1/2, 0)$  è

$$A_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad B_i = 0 \quad (7.18)$$

da cui segue

$$I_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad J_i = \frac{i}{2}\sigma_i \quad (7.19)$$

viceversa  $(0, 1/2)$  è

$$A_i = 0 \quad B_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad (7.20)$$

da cui si ottiene

$$I_i = \frac{1}{2}\sigma_i \quad J_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \quad (7.21)$$

Le matrici che rappresentano gli elementi del gruppo nelle rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  sono quindi

$$\begin{aligned} R_{(1/2,0)} &= e^{(\frac{i}{2}\theta_i\sigma_i - \frac{1}{2}\xi_i\sigma_i)} \\ R_{(0,1/2)} &= e^{(\frac{i}{2}\theta_i\sigma_i + \frac{1}{2}\xi_i\sigma_i)} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Lo spinore  $\chi_R$  chiamato spinore destro con chiralità positiva trasforma secondo la rappresentazione  $(1/2, 0)$ , viceversa lo spinore  $\chi_L$  chiamato spinore sinistro con chiralità negativa trasforma con la rappresentazione  $(0, 1/2)$ . Gli spinori  $\chi_R$  e  $\chi_L$  sono dei campi, cioè funzioni che occupano tutto lo spaziotempo dipendenti dalle coordinate  $x^\mu$ .

**parità** Sotto una trasformazione di parità

$$x^0 \rightarrow x^0 \quad x^i \rightarrow -x^i \quad (7.23)$$

i generatori di Lorentz trasformano come

$$\begin{aligned} I_i &\rightarrow I_i & J_i &\rightarrow -J_i \\ A_i &\rightarrow B_i & B_i &\rightarrow A_i \end{aligned} \quad (7.24)$$

Per trasformazioni di parità, la rappresentazione  $(j_A, j_B)$ , viene mandata nella rappresentazione  $(j_B, j_A)$ . Essa rimane invariante per parità solo se  $j_A = j_B$  ed in tal caso si dice non chirale, altrimenti si dice chirale. Osserviamo che le due rappresentazioni di Weyl si scambiano per parità.

$$\chi_R(x^0, x^i) \rightarrow \chi_L(x^0, -x^i) \quad \chi_L(x^0, x^i) \rightarrow \chi_R(x^0, -x^i) \quad (7.25)$$

**coniugazione** Le matrici di Pauli godono delle seguenti proprietà

$$(\sigma^1)^* = \sigma^1 \quad (\sigma^2)^* = -\sigma^2 \quad (\sigma^3)^* = \sigma^3 \quad (7.26)$$

Introducendo la matrice unitaria  $(i\sigma^2)$ , che soddisfa  $(i\sigma^2)^{-1} = -(i\sigma^2)$  abbiamo

$$(i\sigma^2)(i\sigma^a)^*(i\sigma^2)^{-1} = \sigma^a = (i\sigma^2)^{-1}(i\sigma^a)(i\sigma^2) \quad (7.27)$$

da cui segue che

$$(i\sigma^2)R_{(1/2,0)}^*(i\sigma^2)^{-1} = R_{(0,1/2)} \quad (i\sigma^2)R_{(0,1/2)}^*(i\sigma^2)^{-1} = R_{(1/2,0)} \quad (7.28)$$

L'equazioni (7.29) esprimono le relazioni di complesso coniugazione tra le due rappresentazioni fondamentali ed implicano che, dato uno spinore sinistro  $\chi_L$  si può costruire uno spinore destro  $\chi_R = \chi_L^C$  chiamato spinore C-coniugato e viceversa

$$\chi_L = \chi_R^C = (i\sigma^2)^{-1}\chi_R^* \quad \chi_R = \chi_L^C = (i\sigma^2)^{-1}\chi_L^*. \quad (7.29)$$

Le rappresentazioni di Weyl sono le due rappresentazioni fondamentali del gruppo di Lorentz. Per descrivere uno spinore appartenente all'intero gruppo di Lorentz, bisogna considerare la somma diretta  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$  che forma una rappresentazione di dimensione 4 chiamata **rappresentazione di Dirac**. Osserviamo infine che la generica rappresentazione  $(j_A, j_B)$  può essere decomposta nel prodotto diretto

$$(j_A, j_B) = (j_A, 0) \otimes (0, j_B). \quad (7.30)$$

# Capitolo 8

## Applicazioni: simmetrie nell'interazione forte

### 8.1 Isospin

La prima simmetria dell'interazione forte ad essere stata osservata riguarda il protone e il neutrone, poichè questi sono i blocchi fondamentali costituenti la materia. Protone e neutrone possono essere considerati come due diversi stati di una stessa particella chiamata nucleone. Questa idea proviene dall'evidenza sperimentale che la forza forte che agisce tra le coppie  $p-p$ ,  $p-n$  e  $n-n$  è la stessa, in modo totalmente indipendente dalla diversità di carica elettrica. Inoltre le due particelle presentano caratteristiche simili tra le quali, ad esempio, stesso numero di spin e masse vicine<sup>1</sup> ( $m_p \simeq 938.28 MeV/c^2$ ,  $m_n \simeq 939.57 MeV/c^2$ ). Una trasformazione che muta  $p$  in  $n$  o viceversa è perciò una simmetria dell'interazione forte. Osserviamo che il passaggio di stato non è descritto da una trasformazione nello spazio-tempo, poichè è relativo ad un cambiamento delle caratteristiche interne del sistema le quali vengono descritte dalle coordinate nello spazio di isospin.

#### 8.1.1 Spazio di Isospin

Protone e neutrone sono particelle descritte da funzioni d'onda  $\psi$  definite nello spazio complesso  $\mathbb{C}$ . Perciò lo spazio in cui vive un nucleone, che è una sovrapposizione dei due stati, è  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ . Il protone ed il neutrone corrispondono ai vettori di base

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad (8.1)$$

---

<sup>1</sup>altre caratteristiche sono stesso numero barionico, ipercarica e parità intrinseca [2]

Lo stato generico del nucleone è descritto dalla combinazione lineare  $\alpha p + \beta n \in \mathbb{C}^2$ , con  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  rappresentanti le probabilità di trovare il nucleone negli stati  $p$  o  $n$ . Affinchè si possa parlare di probabilità il vettore deve essere unitario. Di conseguenza una generica trasformazione di simmetria in questo spazio sarà rappresentata da matrici  $2 \times 2$  a coefficienti complessi unitarie e a modulo unitario, i.e. dal gruppo  $SU(2)$ . La rappresentazione  $2 - dimensional$  del gruppo  $SU(2)$  è quella definita dalle matrici di Pauli e si tratta della rappresentazione spin  $1/2$ . Indichiamo i generatori con le lettere  $I_j$ . Associamo al protone lo stato di autovalore  $I_3=1/2$  e lo chiamiamo stato di **isospin up**, mentre al neutrone associamo lo stato di autovalore  $I_3=-1/2$  e lo chiamiamo stato di **isospin down**. Nella notazione standard si scrive

$$p = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad n = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (8.2)$$

Possiamo definire in questo spazio l'operatore carica elettrica come

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

e dall'algebra di  $SU(2)$  si deduce subito che la carica non si conserva per trasformazioni di Isospin.

### 8.1.2 Rottura della simmetria di isospin

Il comportamento indipendente dell'interazione forte dallo stato di carica comporta che, se siamo in presenza di sola forza forte, il sistema risulta invariante per rotazioni nello spazio di isospin. Questo fatto è espresso da

$$[H_f, \vec{I}] = 0 \quad (8.4)$$

con  $H_f$  hamiltoniana dell'interazione forte. Se ci fosse solo la forza forte la simmetria sarebbe esatta e protone e neutrone avrebbero la stessa massa. L'interazione elettromagnetica rompe l'isotropia dello spazio di isospin

$$[H_f + H_{e.m.}, \vec{I}] \neq 0 \quad (8.5)$$

Tuttavia la legge di conservazione della carica elettrica implica la conservazione del valore di aspettazione  $\langle Q \rangle$  e la commutazione dell'operatore di carica con l'hamiltoniana [2]

$$[H_f + H_{e.m.}, Q] = 0 \quad (8.6)$$

L'operatore di carica elettrica  $Q$  è legato alla terza componente dell'isospin dalla (8.3), di conseguenza

$$[H_f + H_{e.m.}, I_3] = 0 \quad (8.7)$$

e la terza componente di isospin viene conservata anche in presenza dell'interazione elettromagnetica. Ricordiamo che il vettore di isospin  $\vec{I}$  non vive nello spazio-tempo e non va quindi associato a nessuna direzione spaziale. Allo stesso modo la sua terza componente  $I_3$  non identifica un asse spaziale, ma è invece legata ad un osservabile: la carica elettrica. Come vedremo il legame tra  $Q$  e  $I_3$  non è una peculiarità dei nucleoni, ma si può generalizzare a tutti gli adroni. I generatori  $I_1$  e  $I_2$  non corrispondono a nessuna quantità fisica misurabile, tuttavia assumono significato gli operatori  $I^\pm$  che alzano e abbassano il valore di  $I_3$ .

Particelle che derivano da uno stesso stato di isospin  $I$  sono dette **multipletti di isospin** e costituiscono un insieme di  $2I + 1$  elementi che, in assenza di interazione elettromagnetica, possiedono la stessa massa. I diversi membri di un multipletto rappresentano stati diversi di una stessa particella associati a una diversa orientazione del vettore  $\vec{I}$  nello spazio di isospin. L'interazione elettromagnetica elimina la degenerazione separando i livelli energetici con diversa componente di  $I_3$  e provoca una variazione delle masse (contribuisce anche la differenza di massa tra i quark up e down [2]).

### 8.1.3 I pioni

Affinchè si possa parlare di passaggio di stato deve esistere un processo fisico il cui risultato sia questo passaggio. La trasformazione di un protone in un neutrone avviene in quanto vi è una particella, il pione, di massa circa 200 volte quella dell'elettrone, mediatrice della forza forte. L'interazione forte agisce attraverso lo scambio di questa particella tra i  $p$  ed  $n$ . Il nucleo non è perciò da pensare come una collezione di due tipi di particelle distinti e immutabili, ma come una collezione di protoni e neutroni in continuo cambiamento legati tra loro dallo scambio di pioni. Vi sono inoltre tre varietà di pioni: uno con carica positiva denominato  $\pi^+$ , uno con carica neutra denominato  $\pi^0$  ed uno con carica negativa denominato  $\pi^-$ . L'esistenza di questi tre tipi di pioni spiega la differenza di carica tra neutrone e protone, poichè vi è un trasferimento di carica dovuto al loro assorbimento ed emissione. Il processo di base che descrive lo scambio di pioni è il seguente

$$N \rightarrow N' + \pi \tag{8.8}$$

dove  $N$  e  $N'$  indicano due nucleoni. Da questo processo ricaviamo i numeri quantici indicati nella Tabella 8.1.

particella	I	$I_3$	Q
$\pi^+$	1	1	1
$\pi^0$	1	0	0
$\pi^-$	1	-1	-1

Tabella 8.1: Isospin e carica  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ .

### 8.1.4 Altre simmetrie di Isospin

Vi sono altre particelle che possiedono la simmetria di isospin oltre ai protoni i neutroni e ai pioni:

- i mesoni  $\eta, \eta'$  sono due singoletti di isospin, hanno spin 0 e carica elettrica nulla;
- i mesoni  $K$  sono un doppietto di isospin, hanno spin 0 e carica elettrica 1,-1 ;
- i barioni  $\Sigma$  sono un tripletto di isospin, hanno spin 1/2 e carica elettrica 1,0,-1;
- il barione  $\Lambda$  è un singoletto isospin, ha spin 1/2 e carica elettrica 0;
- i barioni  $\Xi$  sono un doppietto di isospin, hanno spin 1/2 e carica elettrica -1, 0;

I mesoni e i barioni incontrati fino ad ora sono quelli più leggeri. Esiste un numero elevato di stati eccitati nei quali si possono presentare che possono essere prodotti attraverso la collisione di particelle, ma decadono molto velocemente negli stati più leggeri. Il primo adrone risonanza ad essere stato scoperto è l'adrone  $\Delta$ , che costituisce un quartetto di isospin 3/2 di carica elettrica 2,1,0,-1.

## 8.2 Eightfold way

Le particelle adroniche subiscono processi di creazione e distruzione a causa dell'interazione forte analogamente a ciò che accade al pione, al protone e al neutrone. Questo fenomeno ha portato all'introduzione di un nuovo numero quantico, chiamato stranezza ( $S$ ), che è conservato nei processi forti nei quali le particelle vengono create o distrutte. La stranezza è legata alla carica, al numero barionico  $B$  e all'isospin  $I_3$  attraverso la seguente formula

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) + I_3 \quad (8.9)$$

dove la combinazione  $B + S$  è chiamata **ipercarica** e indicata da  $Y$ . Protone e neutrone hanno stranezza  $S = 0$ , il singoletto  $\Lambda$  e il tripletto  $\Sigma$  hanno stranezza  $S = -1$ , il doppietto  $\Xi$  ha stranezza  $S = -1$ . Se prendiamo uno spazio nel quale  $I_3$  e  $\sqrt{3}Y/2$  sono generatori di Cartan, vediamo che gli autovalori relativi ai barioni sopra considerati corrispondono a quelli delle radici di  $SU(3)$ , e le particelle vanno a costituire gli autostati di una rappresentazione 8 dimensionale.

$$H_1 = I_3 \quad H_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y \quad (8.10)$$

Un discorso analogo si può fare per i mesoni considerando che il doppietto di isospin  $K^+$  e  $K^0$  ha stranezza  $S=1$ , il tripletto  $\pi$  e il singoletto  $\nu$  hanno stranezza 0 e il doppietto

$\bar{K}^0$  e  $K^-$  ha stranezza  $S = -1$ .

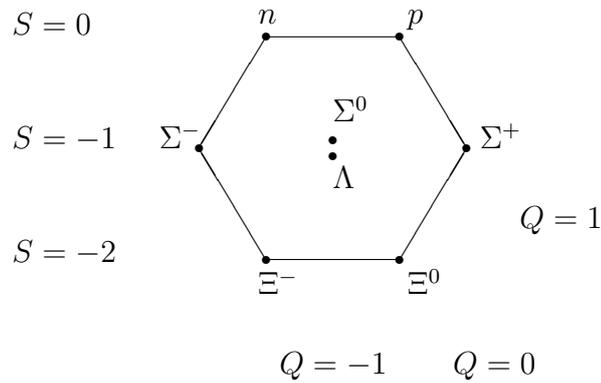


Figura 8.1: Ottetto barionico, le particelle sulla stessa linea orizzontale hanno stessa stranezza, mentre quelle sulla linea obliqua hanno stessa carica.

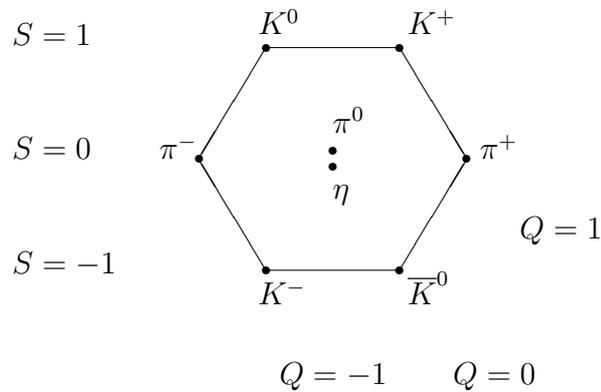


Figura 8.2: Ottetto mesonico, le particelle sulla stessa linea orizzontale hanno stessa stranezza, mentre quelle sulla linea obliqua hanno stessa carica.

La rappresentazione di dimensione 8 non è l'unica possibile, per esempio possiamo creare una rappresentazione di dimensione 10 utilizzando 10 adroni più pesanti. Quando Gell-Mann raggruppò quest'ultime 10 particelle solo nove di esse erano già state trovate sperimentalmente, mentre la particella  $\Omega^-$  di carica -1 e stranezza -3 non era ancora stata scoperta. Gell-Mann predette l'esistenza di questa particella e individuò la procedura sperimentale per trovarla. Inoltre, grazie a queste rappresentazioni riuscì a calcolarne la massa ed altre proprietà.

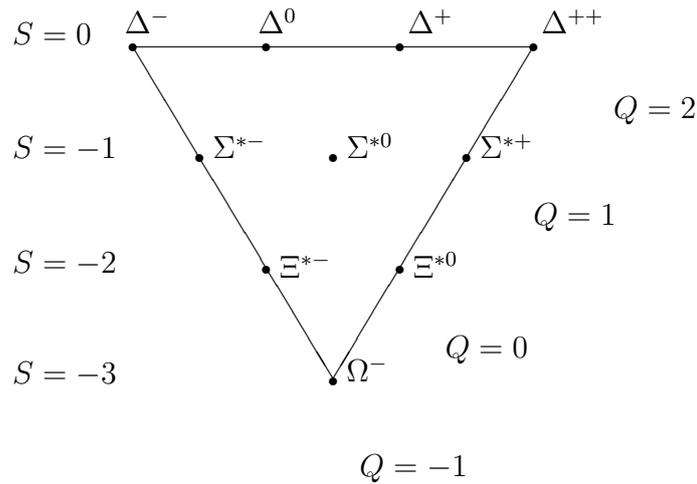


Figura 8.3: Decupletto barionico, le particelle sulla stessa linea orizzontale hanno stessa stranezza, mentre quelle sulla linea obliqua hanno stessa carica.

### 8.3 Quark

L'introduzione del modello a quark riuscì a spiegare perché gli adroni si raggrupparono nelle rappresentazioni della **eightfold way**. Venne ipotizzata l'esistenza di tre quark di tipo diverso chiamati **up**  $u$ , **down**  $d$  e **strange**  $s$  che formano un tripletto di  $SU(3)_{F(lavour)}$ , dando luogo alla simmetria di **sapore**.  $u d s$  si dividono in un doppietto di isospin ( $u, d$ ) e un singoletto ( $s$ ). La loro carica è rispettivamente 1, -1, 0, perciò si nota che costituiscono i vettori della rappresentazione definita di  $SU(3)_F$  se prendiamo, come in precedenza,  $H_1 = I_3$  e  $H_8 = \sqrt{3}Y/2$ . A ciascun quark è associato un **anti-quark** ( $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ ) con stesso spin e massa, ma numeri quantici opposti, che costituiscono i vettori della seconda rappresentazione fondamentale di  $SU(3)$  i.e.  $\bar{3}$ . I pesi fondamentali sono identificati da  $u$  e  $\bar{d}$ . Si può ora notare che l'ottetto di mesoni si ricava dal prodotto tensoriale  $3 \otimes 3 = 1 \oplus 8$ , nel quale è presente anche un singoletto che rappresenta il mesone  $\eta'$ . Le rappresentazioni dei barioni si ricavano viceversa dal prodotto  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ . Dopo lo sviluppo di questa teoria vennero scoperti altri tre sapori di quark e anti-quark associati. Questi quark sono più pesanti rispetto ai primi e generano adroni pesanti. Se

quark	$I_3$	$\sqrt{3}Y/2$
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$
$d$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$
$s$	$0$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$
$\bar{s}$	$0$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Tabella 8.2: Peso dei quark  $u, d, s, \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ .

vogliamo estendere l'analisi della struttura degli adroni a tutti i tipi di sapore conosciuti dobbiamo perciò studiare il gruppo di simmetria  $SU(6)_F$ .

## 8.4 Struttura dei mesoni leggeri

Consideriamo i mesoni costituiti unicamente dai quark leggeri ( $u, d, s$ ), ed in particolare concentriamoci sullo stato fondamentale. Abbiamo nove possibili combinazioni di quark e anti-quark che decomponiamo nelle rappresentazioni irriducibili attraverso la costruzione del massimo peso [4] come indicato in tabella.

stato	$I_3$	$\sqrt{3}Y/2$
$u\bar{d}$	$1$	$0$
$u\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	$0$	$0$
$d\bar{s}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$s\bar{u}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$d\bar{u}$	$-1$	$0$

Tabella 8.3: Stati e pesi dei mesoni che costituiscono l'ottetto.

stato	$I_3$	$\sqrt{3}Y/2$
$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + s\bar{s} + d\bar{d})$	$0$	$0$

Tabella 8.4: Stato e peso del mesone che costituisce il singoletto.

Possiamo ora associare i mesoni con i relativi stati osservando i numeri quantici. La possibile ambiguità nello stabilire a quale stato corrisponda il pione  $\pi^0$  e a quale stato corrisponda il mesone  $\eta$  è risolta notando che i pioni  $\pi$ , che formano un tripletto di isospin, sono ricavati dal prodotto  $2 \otimes \bar{2}$  di  $u$  e  $d$  nel seguente modo<sup>2</sup> [4]

$$\begin{aligned}\pi^+ &= |1, 1\rangle = u\bar{d} \\ \pi^0 &= |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \pi^- &= |1, -1\rangle = d\bar{u}\end{aligned}\tag{8.11}$$

Il singoletto di isospin  $|0, 0\rangle = (u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$  si compone invece con i quark  $s$ ,  $\bar{s}$  per formare il secondo stato  $|0, 0\rangle$  dell'ottetto a cui corrisponde il mesone  $\eta$  e lo stato di singoletto di sapore a cui corrisponde il mesone  $\eta'$ . Gli altri stati dell'ottetto corrispondono ai mesoni  $K^+ = u\bar{s}$ ,  $K^0 = d\bar{s}$ ,  $\bar{K}^0 = s$ ,  $K^- = s\bar{u}$ .

## 8.5 Struttura dei barioni leggeri

### 8.5.1 Confinamento

Senza l'introduzione della carica di colore la funzione d'onda dei barioni nello stato fondamentale  $\psi(\text{spaziale})\psi(\text{spin})\psi(\text{sapore})$  risulta essere simmetrica per lo scambio di due quark qualsiasi. Questo si può vedere facilmente per il barione  $\Delta^{++}$ , ma è valido in generale. Il barione  $\Delta^{++}$  è composto da tre quark up con  $s_z = 1/2$ , quindi la parte della sua funzione d'onda relativa a spin e sapore risulta simmetrica. Anche la parte spaziale (allo stato fondamentale) risulta simmetrica poichè  $\vec{L} = 0$ . Ne risulta una funzione totale simmetrica e di conseguenza la violazione del principio di Pauli. Per ovviare a questo problema è stata introdotta la carica di colore, che comporta un termine aggiuntivo completamente antisimmetrico ( $\psi(\text{colore})$ ) alla funzione d'onda dei barioni. Solo in questo modo essi sono descritti da funzioni d'onda antisimmetriche e soddisfano perciò il principio di Pauli. Dobbiamo richiedere al numero quantico di colore di soddisfare due vincoli:

- deve essere possibile costruire stati a colore totale nullo per i composti  $q\bar{q}$ ,  $qqq$ . Questi sono i soli stati fisici possibili perchè non c'è evidenza sperimentale di stati colorati fra mesoni e barioni.
- per gli stati barionici la parte di colore della funzione d'onda deve essere totalmente antisimmetrica per lo scambio di due quark

---

<sup>2</sup>Il segno meno che compare nel calcolo di  $\pi^0$  è in accordo con la convenzione di Condon-Shortley, per la quale  $I^-|\bar{d}\rangle = |-\bar{u}\rangle$  e  $I^+|\bar{u}\rangle = |-\bar{d}\rangle$

Questi vincoli impongono l'esistenza di almeno 3 tipi di **colori** differenti, che chiamiamo  $R(ed)$ ,  $B(lue)$ ,  $G(reen)$  ed i relativi **anti-colori** ( $anti - R$ ,  $anti - B$ ,  $anti - G$ ). I quark sono perciò rappresentati da un vettore nella rappresentazione 3 di  $SU(3)_C$ , mentre gli anti-quark da un vettore appartenente a  $\bar{3}$ . In particolare le funzioni d'onda di colore dei quark saranno descritte dai **singoletti di colore** che ricaviamo dalle solite decomposizioni  $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ ,  $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ . Infatti esse corrispondono a stati di colore bianco inoltre la funzione di singoletto relativa alla decomposizione del prodotto tensoriale  $3 \otimes 3 \otimes 3$  risulta totalmente antisimmetrica. Un'ulteriore ragione per scegliere i singoletti di colore è che, se avessimo preso gli stati di colore nullo appartenenti alle rappresentazioni di dimensione superiore, sarebbero stati possibili dei cambiamenti di stato che avrebbero generato adroni con colore totale non nullo e questo è in disaccordo con l'esperienza.

### 8.5.2 Funzione d'onda dei barioni

Per studiare la struttura a quark dei barioni basta analizzare il prodotto  $3 \otimes 3 \otimes 3$  esattamente come abbiamo fatto per i mesoni. Questa scomposizione porta ad un decupletto di stati simmetrici, un singoletto antisimmetrico e due ottetti a simmetria mista. Gli ottetti a simmetria mista vengono utilizzati attraverso una loro combinazione, prendendo stati con stessi numeri quantici, per identificare le funzioni d'onda dei barioni associati a tali numeri quantici.

La funzione d'onda di sapore dei barioni  $\Delta$  appartiene alla rappresentazione 10 composta di soli stati completamente simmetrici. Per questo motivo sarà moltiplicata per una funzione d'onda di spin completamente simmetrica. Viceversa la funzione d'onda di sapore del protone appartiene alla rappresentazione 8 dimensionale. Questi stati presentano "simmetria mista" ed è necessario combinarli con altri stati a "simmetria mista" di spin per generare una funzione totale completamente simmetrica.

Studiamo ora in dettaglio le funzioni d'onda di questi due tipi di particelle. Per identificarle analizziamo la simmetria di isospin  $SU(2)$ . Denotando i generatori di Cartan delle due algebre di  $SU(2)$  con  $I_3$  (isospin) e  $S_3$  (spin), abbiamo  $I_3 = 1/2$  e  $S_3 = 1/2$ . Il prodotto  $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$  comprende un quartetto e due doppietti come mostrato nelle Tabelle 9.5 e 9.6 in modo totalmente equivalente per isospin e spin.

La prima riga della Tabella 8.5 corrisponde ai diversi stati di carica del barione  $\Delta$ , in particolare scorrendo la tabella da sinistra a destra abbiamo la carica  $Q = 2, 1, 0, -1$ . Le funzioni d'onda di sapore sono in questo caso completamente simmetriche, dobbiamo quindi moltiplicarle con funzioni di spin completamente simmetriche per avere una funzione totale anch'essa completamente simmetrica. Le funzioni di spin da utilizzare sono perciò quelle appartenenti alla rappresentazione 4 dimensionale. Iniziamo la nostra analisi di tali termini studiando la struttura del barione  $\Delta^{++}$ , composto di tre quark up ciascu-

$I_3 = \frac{3}{2}$	$I_3 = \frac{1}{2}$	$I_3 = -\frac{1}{2}$	$I_3 = \frac{3}{2}$
$uuu$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd)$	$ddd$
	$-\frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)u - 2uud]$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(ud + du)d - 2ddu]$	
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$	

Tabella 8.5: Stati formati dal prodotto tensoriale  $2 \otimes 2 \otimes 2$ .

$S_3 = \frac{3}{2}$	$S_3 = \frac{1}{2}$	$S_3 = -\frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{3}{2}$
$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \uparrow\uparrow\downarrow)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\downarrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\downarrow)$	$\downarrow\downarrow\downarrow$
	$-\frac{1}{\sqrt{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow]$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\downarrow - 2\downarrow\downarrow\uparrow]$	
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\downarrow$	

Tabella 8.6: Stati formati dal prodotto tensoriale  $2 \otimes 2 \otimes 2$ .

no con terza componente di spin uguale a  $1/2$ . Indichiamo con  $|\psi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^I\rangle = |uuu\rangle$  la funzione d'onda di isospin, con  $|\psi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^S\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$  la funzione d'onda di spin e con  $|\psi_{\Delta^{++}}\rangle = |\psi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^I\rangle\psi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^S\rangle$  la funzione d'onda relativa ad isospin e spin del barione. Gli stati eccitati del barione  $\Delta^{++}$  si ricavano variando la componente  $S_3$  dello spin, applicando l'operatore  $S^-$  :

$$\begin{aligned}
|\psi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\
|\psi_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}^S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\
|\psi_{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}^S\rangle &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Tutti gli stati di carica del barione  $\Delta$  si ricavano sostituendo alla funzione d'onda  $|\psi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^I\rangle$ , la funzione  $|\psi_{\frac{3}{2},Q-\frac{1}{2}}^I\rangle$ , con  $Q = 2, 1, 0, -1$ .

La seconda riga della Tabella 8.5 ( e della Tabella 8.6) corrisponde ad una rappresentazione 2, i suoi stati sono a "simmetria mista": sono simmetrici per lo scambio  $1 \rightarrow 2$ , ma non sono autostati della permutazione degli oggetti  $2 \rightarrow 3$  e li indichiamo con  $\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(S)$  e  $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(S)$ . La terza riga, relativa alla rimanente rappresentazione 2 è composta anch'essa da stati a "simmetria mista": sono antisimmetrici per lo scambio  $1 \rightarrow 2$ , ma non sono

autostati della permutazione  $1 \rightarrow 3$ . Indichiamo tali stati con  $\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(A)$  e  $\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(A)$ . In particolare

$$\begin{aligned} P_{23}\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(A) &= \frac{1}{2}[\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(A) - \sqrt{3}\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(S)] \\ P_{23}\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(S) &= \frac{1}{2}[\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(A) + \sqrt{3}\psi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(S)] \end{aligned} \quad (8.13)$$

da cui, osservando che il prodotto di due funzioni antisimmetriche per lo scambio  $1 \rightarrow 2$  è una funzione simmetrica per lo scambio  $1 \rightarrow 2$ , posso ricavare la funzione completamente simmetrica

$$|\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^S(S)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^I(S) + \psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^S(A)\psi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^I(A)) \quad (8.14)$$

che rappresenta il protone con spin up. Abbiamo quindi utilizzato due coppie di funzioni a “simmetria mista”, relative a stessi numeri quantici, ma appartenenti a rappresentazioni diverse per costruire una funzione totale comprendente spin e sapore completamente simmetrica. Questa costruzione è necessaria per i barioni perchè, come abbiamo visto in precedenza, solo in questo modo non viene violato il principio di esclusione di Pauli. Esplicitiamo infine la funzione d’onda del protone in termini di quark e spin

$$|p \uparrow\rangle = \sqrt{\frac{1}{18}}[|u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle_{(+permutazioni)} - 2|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle_{(+permutazioni\ pari)}] \quad (8.15)$$

# Conclusioni

Questa tesi cerca di rendere la teoria dei gruppi una materia meno difficoltosa di come si presenta ad un primo impatto. Introduce gli strumenti matematici alla base della teoria e mostra come utilizzarli per classificare gli stati di un sistema. Contiene riflessioni sul concetto di simmetria enfatizzando in particolare il ruolo degli osservabili invarianti. Mostra l'importanza del gruppo  $SU(2)$  e fornisce i metodi per costruirne le rappresentazioni irriducibili. Fornisce le linee guida per l'analisi delle algebre compatte e semisemplici, soffermandosi in particolare su quella di  $SU(3)$ . Nel capitolo conclusivo si vede come la teoria permetta di classificare le particelle e studiarne la funzione d'onda. La classificazione e la ricerca di simmetria è un argomento di fondamentale importanza in fisica ed è in questo che risiede la potenza della teoria dei gruppi. Il tema in esame rimane estremamente vasto nonostante gli argomenti trattati e ricco di numerosi mezzi non utilizzati per la classificazione dei sistemi, come ad esempio le tabelle di Young. Vi sono importanti applicazioni della teoria dei gruppi nella descrizione delle interazioni fondamentali, in particolare di quella forte, debole ed elettromagnetica. È interessante osservare il comportamento di queste interazioni rispetto ai gruppi analizzando i casi in cui le simmetrie sono verificate e quelli in cui sono rotte. È infine possibile studiare la teoria dei gruppi per elaborare una teoria unificata delle tre interazioni utilizzando il gruppo  $SU(5)$ .

# Bibliografia

- [1] F. Bastianelli, *Fisica Nucleare e Subnucleare-Teoria dei gruppi*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2016.
- [2] H. Frauenfelder e E.M. Henley, *Subatomic Physics*, terza edizione, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007
- [3] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, seconda edizione, Cambridge, Westview press, 1999.
- [4] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [5] E. Guadagnini, *Fisica Teorica 1*, Dipartimento di Fisica, Università di Pisa, 2016
- [6] O. Lombardi e S. Fortin, *The role of symmetry in the interpretation of quantum mechanics*, Electronic Journal of Theoretical Physics, 12, n. 34 , (2016), pp. 267-284
- [7] J. Xiangdong, *Nuclear Physics (Physics 741)-Lecture notes*, Dipartimento di Fisica, Università di Maryland, 2012
- [8] R. Soldati, *Teoria dei Campi 1-Introduction to Quantum Field Theory*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2016.
- [9] T. Wu-Ki, *Group Theory in Physics*, Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1985.
- [10] R. Zucchini, *Istituzioni di fisica teorica-Quantum Mechanics*, Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Bologna, 2016.