

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Lensing gravitazionale sulla radiazione cosmica di fondo

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Giovanni Pecci

Anno Accademico 2015/2016

*Alla mia famiglia con affetto,
ai miei amici e a B. per il supporto
e la pazienza dimostrata*

Sommario

Lo scopo di questa trattazione è lo studio dell'effetto di lensing gravitazionale in approssimazione di campo debole, finalizzato ad un'analisi statistica delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo. Questo approccio permette di valutare l'autocorrelazione delle fluttuazioni di temperatura in funzione dell'angolo di deflessione a cui sono soggetti i fotoni della radiazione e, di conseguenza, in funzione del potenziale di lensing, ovvero della proiezione del potenziale gravitazionale sulla superficie dove avviene la deflessione.

L'approssimazione a campo debole risulta essere la più efficace per lo studio della radiazione cosmica, in quanto l'analisi effettuata per valori piccoli dell'angolo di deflessione è in accordo con la necessità di confrontarsi con le grandi scale cosmologiche, dove le anisotropie di temperatura possono essere considerate come piccole oscillazioni attorno al valore medio, favorendo l'approccio statistico nell'analisi delle stesse.

Indice

1	Introduzione	3
2	Background cosmologico	6
2.1	Redshift gravitazionale	7
2.2	Parametri cosmologici	7
3	Lensing Gravitazionale	11
3.1	Approccio generale	11
3.2	Approssimazione delle lenti sottili	14
3.3	Distorsione della sorgente	17
4	Radiazione cosmica di fondo	21
4.1	Effetto Sachs-Wolfe	23
5	Lensing debole sulla radiazione cosmica di fondo	26
5.1	Funzione di correlazione e spettro di potenza	26
5.2	Funzione di autocorrelazione di temperatura	27
5.3	Funzione di autocorrelazione: angolo di deflessione	30
A	Deflessione da massa puntiforme	33
B	Scattering Thomson: parametri di Stokes	35
	Bibliografia	38

Elenco delle figure

1.1	Schema esemplificativo del fenomeno di lensing gravitazionale	3
3.1	Schema di lensing gravitazionale nell'approssimazione di lenti sottili	16
4.1	Arno Penzias e Robert Wilson, nobel per la fisica nel 1978	21
4.2	Spettro della radiazione cosmica di fondo	22
B.1	Direzioni di polarizzazione durante lo scattering Thomson	36

Capitolo 1

Introduzione

Il lensing gravitazionale è il fenomeno cosmologico per il quale i corpi massivi posizionati lungo il percorso ottico di un raggio di luce emesso da una sorgente luminosa ne deviano la traiettoria: tale processo di deflessione dà luogo ad effetti quali lo sdoppiamento della sorgente luminosa o a deformazioni della stessa. Previsto anche nella formulazione classica della teoria della gravitazione di Newton, il lensing gravitazionale fu rielaborato all'interno della teoria della relatività generale di Albert Einstein (1915) e in seguito misurato da Arthur Eddington e dai suoi collaboratori in occasione dell'eclissi solare del 1919. Tale fenomeno, infatti, permise di osservare stelle la cui immagine fosse abbastanza vicina al sole da subire una distorsione apprezzabile. Le misure effettuate portarono a dei risultati numerici doppi rispetto a quelli previsti dalla teoria classica di Newton e in linea con quelli attesi dalla relatività generale.



Figura 1.1: *Schema esemplificativo del fenomeno di lensing gravitazionale: si noti la deflessione subita dai raggi luminosi nell'avvicinarsi al corpo massivo [1]*

Grazie alla sua dipendenza dalla sola geometria dello spaziotempo, il lensing gravitazionale ricopre un ruolo fondamentale nelle misure cosmologiche. L'angolo di deflessione di un raggio di luce misurato da un osservatore è univocamente determinato dal cam-

po gravitazionale generato dalla distribuzione di massa lungo il suo percorso; non vi è dunque necessità di porre ipotesi aggiuntive circa lo stato o la natura della materia coinvolta. Inoltre, una volta misurato tale angolo è possibile determinare la distribuzione di massa lungo il percorso del raggio tramite considerazioni puramente geometriche. I fenomeni di lensing vengono suddivisi in base all'intensità del campo gravitazionale che li causa: distinguiamo infatti il lensing gravitazionale *forte* da quello *debole*. Il primo è provocato da galassie o da cluster di galassie, in grado di distorcere la traiettoria dei raggi di luce sino a generare immagini multiple della sorgente, il secondo è invece una perturbazione debole della traiettoria dei raggi luminosi, nella cui trattazione è possibile dunque applicare approssimazioni lineari valide solo per valori molto piccoli dell'angolo di deflessione. Quest'ultimo fenomeno si presenta soprattutto quando si considerano grandi scale cosmologiche e dunque le deflessioni subite dai raggi di luce possono essere considerate stocastiche.

Una delle più importanti applicazioni del lensing gravitazionale debole è lo studio delle anisotropie nella radiazione cosmica di fondo: originata nella fase calda dell'universo, essa conserva nel suo spettro informazioni circa le cause che hanno portato alla cosiddetta fase dell'inflazione, ovvero quell'epoca in cui, in seguito a fluttuazioni quantistiche seguite da fenomeni di scattering Thomson, l'universo ha iniziato un'espansione di carattere esponenziale. Determinando la deflessione subita dalle traiettorie dei raggi di luce della radiazione cosmica è possibile ricostruire le perturbazioni di densità che sono collegate alle fluttuazioni di temperatura primordiali misurate oggi tramite analisi spettrale della radiazione.

Nella presente trattazione, dopo una presentazione del modello cosmologico utilizzato e delle relative relazioni più importanti, viene affrontata compiutamente l'analisi del fenomeno di lensing gravitazionale debole: prima viene valutata la relazione fra deviazione trasversale e angolare subita da un raggio di luce a partire dall'equazione di deviazione geodetica, poi viene applicata l'approssimazione delle lenti sottili, considerando la deflessione subita da un raggio di luce in seguito all'interazione con una distribuzione di massa la cui estensione risulta molto inferiore sia alla distanza fra essa e l'osservatore che alla distanza fra essa e la sorgente. Tale approssimazione è accurata in quanto rappresenta fedelmente molte delle situazioni più rilevanti in astrofisica. Una volta ricavata l'equazione delle lenti per l'angolo di deflessione, la quale mette in relazione la posizione angolare originale della sorgente luminosa con quella osservata in seguito a lensing gravitazionale, viene studiata la distorsione a cui è soggetta l'immagine tramite decomposizione dello jacobiano della trasformazione subita dalla sorgente originale. Quest'operazione mostra come la distorsione sia dovuta a due contributi che si trasformano indipendentemente fra loro: lo *shear* che induce una deformazione lungo una componente preferenziale e la *convergenza*, la quale opera un ridimensionamento isotropo o un'inversione della sorgente. Viene inoltre costruita, sempre a partire dall'equazione delle lenti, una funzione di ritardo temporale che esprime il ritardo nella ricezione di due raggi luminosi appartenenti allo stesso fascio di luce, ma soggetti ad angoli di deflessione diversi. Tale funzione

viene costruita in modo da soddisfare il principio di Fermat e permette dunque, tramite l'analisi dei punti stazionari, di individuare le posizioni angolari in cui si localizzano le immagini.

In seguito viene trattata la radiazione cosmica di fondo, presentandone le caratteristiche generali ed effettuando un'analisi approfondita dell'effetto Sachs-Wolfe integrato e non integrato, il quale costituisce il legame fra fluttuazione di temperatura e di densità. Infine, nell'ultimo capitolo, dopo la definizione degli oggetti matematici utilizzati, vengono affrontati quantitativamente gli effetti del lensing gravitazionale sulla radiazione cosmica di fondo tramite analisi statistica delle fluttuazioni di temperatura attorno al valore medio. Viene infatti considerata la distribuzione della temperatura della radiazione cosmica come un campo isotropo ed omogeneo dal valore medio fissato e ne viene calcolata la funzione di autocorrelazione angolare in funzione della dispersione dell'angolo di deflessione, ovvero in funzione dello spostamento locale fra due raggi di uno stesso fascio luminoso. Effettuando poi tale analisi sulle trasformate di Fourier delle funzioni considerate, piuttosto che sulle funzioni stesse, è possibile introdurre la dipendenza dell'autocorrelazione angolare del campo di temperatura dal potenziale di lensing e dunque dalla geometria dello spaziotempo lungo il percorso dei fotoni della radiazione. Sono inoltre presenti due appendici di cui la prima ha come scopo il ricavare la relazione dell'angolo di deflessione causato da una massa puntiforme, mentre la seconda presenta un approfondimento sulle polarizzazioni che si generano in seguito a scattering Thomson, trattate attraverso i parametri di Stokes relativi alle radiazioni elettromagnetiche.

In tutto l'elaborato si è posta la velocità della luce nel vuoto $c = 1$ e si sono utilizzate la convenzione sulla segnatura della metrica $(-, +, +, +)$ e la notazione di Einstein sulla somma degli indici ripetuti.

Capitolo 2

Background cosmologico

La relatività generale descrive lo spaziotempo come una varietà pseudo-riemanniana ¹ quadridimensionale descritta da un tensore metrico $g_{\mu\nu}$, il quale rappresenta un campo dinamico che determina l'interazione gravitazionale. Nella presente trattazione verrà utilizzato un modello cosmologico che descrive un universo omogeneo, isotropo e in espansione. Queste proprietà si traducono nella richiesta dell'esistenza, mediando su grandi scale, di un moto medio di materia e radiazione rispetto al quale tutte le proprietà dei valori medi degli osservabili siano isotrope. Inoltre si deve avere che tutti gli osservatori solidali a tale moto, detti comoventi, misurino le stesse proprietà medie degli osservabili. Tali condizioni pongono dunque delle restrizioni sulla forma del tensore metrico. Definendo l'elemento di metrica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, la forma più generale che esso può assumere soddisfacendo tali proprietà è quella di Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dw^2 + f_k(w)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

dove (t, w, θ, ϕ) rappresentano le coordinate comoventi, $a(t)$ è il fattore cosmico di scala relativo all'espansione dell'universo e la funzione radiale $f_k(w)$ dipende dallo scalare di curvatura K ed è nella forma:

$$f_k(w) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}w) & \text{se } K > 0 \\ w & \text{se } K = 0 \\ -K^{-1/2} \sinh(-K^{1/2}w) & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Lo scalare di curvatura K può assumere i valori $0, 1, -1$ e determina la forma dell'ipersuperficie generata dalle tre coordinate spaziali della metrica:

- Universo piatto: $K = 0$, l'ipersuperficie risulta piatta;

¹Si definisce varietà pseudo-riemanniana una varietà differenziabile con associato un tensore metrico non degenere in ogni punto.

- Universo chiuso: $K = -1$, l'ipersuperficie risulta una sfera tridimensionale;
- Universo aperto: $K = 1$, l'ipersuperficie risulta un iperboloide;

Le misure effettuate sul nostro universo evidenziano uno scalare di curvatura prossimo allo zero, ovvero un universo piatto su grandi scale.

2.1 Redshift gravitazionale

Si consideri un segnale emesso ad un tempo t_e che raggiunge un osservatore comovente all'istante t_0 nella coordinata comovente $w = 0$. La distanza fra sorgente e osservatore è costante se misurata in tale coordinata ed essendo $ds = 0$ per la luce si avrà che il raggio si propagerà con traiettoria $dt = adw$. Si ha dunque:

$$w_{eo} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = cost \implies \frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_e}{a(t_e)} \quad (2.2)$$

Esprimendo ora gli intervalli di tempo $dt = \nu^{-1}$ con ν frequenza del segnale emesso o ricevuto si ottiene la relazione per il redshift a cui sono soggetti i fotoni che compongono il segnale:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.3)$$

Si ha dunque che la frequenza misurata da un osservatore comovente risulta essere inferiore a quella del segnale emesso in origine: un raggio di luce è dunque soggetto a redshift causato dall'espansione dell'universo durante la sua propagazione. Essendo tale relazione valida per ogni coppia di valori t_e e t_0 si ha che il prodotto fra fattore di scala e frequenza è costante nel tempo. È inoltre possibile esprimere la relazione fra frequenza e fattore di scala in funzione del relativo cambio di lunghezza d'onda tramite la relazione $(1 + z) = \lambda_0 \lambda_e^{-1} \implies (1 + z) = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}$

2.2 Parametri cosmologici

Le equazioni di Einstein per il campo gravitazionale descrivono la dinamica della metrica dello spaziotempo in funzione della materia contenuta nell'universo, divisa in pressione di radiazione e densità di energia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Dove :

- $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, di rango (0,2) e simmetrico su una varietà pseudo-riemanniana. Viene definito come contrazione del tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma};$$

- $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, simmetrico, non degenere e di rango (0,2);
- R è lo scalare di curvatura, corrisponde alla traccia del tensore di Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$;
- Λ è la costante cosmologica, termine introdotto per spiegare l'espansione accelerata dell'universo;
- G è la costante gravitazionale di Newton;
- $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso, in funzione della densità di energia e della pressione di radiazione.

Queste equazioni posso anche essere riscritte attraverso la definizione del tensore di Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}$ come:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

Inserendo in tali equazioni la metrica (2.1) si ottengono le equazioni di Friedmann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

con condizione al contorno $a(t_0) = 1$, con t_0 epoca presente. Applichiamo ora alcune approssimazioni per semplificare la forma di tali equazioni: assumiamo innanzitutto che l'universo sia riempito completamente da un fluido perfetto di materia e radiazione; otteniamo che il tensore energia impulso può essere diagonalizzato nella forma $T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$, con ρ densità di energia e p pressione di radiazione, entrambe in funzione solo del tempo a causa dell'omogeneità. Tale fluido ideale soddisferà anche l'equazione di continuità:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) \quad (2.7)$$

Con condizione al contorno $\rho(t_0) = \rho_0$, dove il punto indica la derivata fatta rispetto alla coordinata temporale. Assumiamo ora una generica equazione di stato per tale fluido che metta in relazione pressione e densità nella forma $p = w\rho$, dove w è una costante. Sostituendola all'interno della relazione (2.7) otteniamo una relazione fra densità e fattore di scala:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w) \implies \rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (2.8)$$

Si considerino ora separatamente le componenti del fluido ideale in esame: per quel che riguarda la materia si ha che la pressione di radiazione è nulla, $p = 0$ e dall'equazione di stato si ricava che $w = 0$. Nel caso della radiazione invece si ha che la traccia del tensore energia impulso si annulla identicamente, dunque fra pressione e densità si ha la relazione:

$$p = \frac{1}{3}\rho \implies w = \frac{1}{3} \quad (2.9)$$

In base all'equazione di stato scelta si ottengono tre diverse descrizioni dell'universo, a seconda della componente del fluido cosmico che predomina sulle altre:

- **Materia:** La pressione p è nulla, la relazione (2.8) stabilisce che $\rho = a^{-3}\rho_0$, la massa propria dei costituenti del fluido cosmico è invariante;
- **Radiazione:** Dalle relazioni (2.9) e (2.8) si ottiene che $\rho = a^{-4}\rho_0$. In un universo così costituito non è possibile scegliere un sistema di riferimento comovente con il fluido, inoltre si ha che l'energia dei fotoni è soggetta a redshift inversamente proporzionale al fattore di scala $a(t)$;
- **Energia oscura:** Modello derivante dall'equazione di stato $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Tale universo è vuoto e in espansione accelerata dovuta ad un'energia del vuoto positiva legata alla costante cosmologica Λ . Questo modello è stato teorizzato proprio per spiegare l'accelerazione dell'espansione dell'universo, non contestualizzabile negli altri due modelli.

Si definiscono ora:

- $\frac{\dot{a}}{a} = H(a)$ con $H_0 = H(a(t_0))$ *parametro di Hubble*;
- $\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ *densità critica dell'universo*, ovvero quella densità ρ per cui radiazione e materia si equivalgono;
- $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{cr}}$ *parametro di densità di energia*;
- Ω_R *parametro di densità di materia relativistica*
- $\Omega_\lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$

Sostituendo questi parametri nelle equazioni (2.6) si ottiene un'espressione alternativa per le equazioni di Friedmann :

$$H^2(t) = H_0^2 \left(a^{-4}(t)\Omega_R + a^{-3}(t)\Omega_0 - a^{-2}(t)\frac{K}{H_0^2} + \Omega_\lambda \right) \quad (2.10)$$

Tramite questa espressione è risalire ad un'espressione integrale per l'età dell'universo, ottenibile invertendo la definizione del parametro di Hubble:

$$t = \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} \frac{da}{aH(t)} \quad (2.11)$$

Dove t_e corrisponde all'origine dell'universo e t_0 è l'età odierna.

Distanze cosmologiche

Provando a definire l'usuale distanza euclidea su uno spazio curvo, ci si rende conto di come questa non sia più adatta a descrivere univocamente la separazione fra due punti. È dunque utile definire diverse scale di distanza che si basano su quantità misurabili in uno spazio euclideo, da utilizzare a seconda del fenomeno analizzato. Esse mettono in relazione un evento di emissione con un evento di osservazione, ovvero due linee di mondo in un comune cono di luce, e sono di conseguenza caratterizzate dagli istanti di tempo t_e e t_o o, equivalentemente, dai relativi valori della funzione di scala $a(t)$ e dal corrispondente parametro di redshift z .

Definiamo dunque:

- *Distanza comovente*: distanza misurata sulla ipersuperficie spaziale $t = t_0$ fra le linee di mondo di una sorgente e di un osservatore entrambi comoventi con il fluido cosmico. Per definizione $dD_{com} = dw$. Per un raggio di luce essa è definita dalla relazione $ds = 0 \implies dt = -adw \implies dD_{com} = -\frac{dt}{a} = -da(a\dot{a}^{-1})$. Introducendo il parametro di Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$ la distanza comovente può essere scritta come $dD_{com} = -da(a^2H)^{-1}$.
- *Distanza angolare*: distanza definita a partire dall'angolo solido che sottende un certo oggetto corrispondente ad un valore $a(t_e)$ rispetto ad un osservatore posto in $a(t_o)$. È data dalla relazione $D_{ang}(t_e, t_o) = a(t_e)f_k(w) = a(t_e)f_k(D_{com}(t_e, t_o))$.
- *Distanza propria* : distanza misurata a partire dal tempo di propagazione di un segnale da una sorgente posta a z_e ad un osservatore in $z_o < z_e$. Si ha $dD_{prop} = -dt = -da(aH)^{-1}$. Il segno meno deriva dal fatto di centrare il sistema di coordinate nella posizione dell'osservatore, facendo in modo che la distanza aumenti allontanandosi da esso, ma in verso opposto rispetto al fattore di scala $a(t)$ e al tempo dt .

Capitolo 3

Lensing Gravitazionale

3.1 Approccio generale

In questa sezione verrà ricavata la deviazione di un raggio di luce dalla sua abituale traiettoria in un universo descritto dalla metrica Friedmann-Robertson-Walker. Consideriamo la propagazione di un fascio luminoso in tale spaziotempo e scegliamo un raggio di riferimento: il suo moto sarà determinato dall'equazione delle geodetiche e la sua traiettoria sarà contraddistinta da un parametro affine γ_0 fissato.

Posizioniamo ora un osservatore in un punto O , scelto arbitrariamente grazie dell'omogeneità dell'universo considerato, con quadrivelocità $\mathbf{U}^\mu \mathbf{U}_\mu = -1$. A partire dal vettore d'onda \mathbf{k}^μ del fascio definiamo un vettore d'onda adimensionale $\mathbf{k}'^\mu = -\omega_0^{-1} \mathbf{k}^\mu$. Tale vettore d'onda è diretto negativamente lungo l'asse temporale ed è indipendente dalla frequenza della radiazione ω_0 misurata dall'osservatore.

Fissiamo un parametro affine λ per i raggi di luce del fascio passanti per O con le proprietà di annullarsi in tale punto, di aumentare lungo il cono di luce dell'osservatore, nella direzione negativa dell'asse temporale e tale da soddisfare la relazione $U^\mu k'_\mu = -1$. Si ha dunque $\mathbf{k}'^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ con λ che sotto tali condizioni misura la distanza propria di un evento dall'osservatore lungo i raggi di luce passanti per O . Definiamo ora una funzione $\gamma^\mu(\theta, \lambda)$, ove θ rappresenta l'angolo fra un generico raggio del fascio e il raggio di riferimento. Possiamo definire il vettore che congiunge due raggi, in funzione dello stesso parametro affine, come

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^\mu &= |\gamma^\mu(\theta, \lambda) - \gamma^\mu(0, \lambda)| \\ &= \left[\frac{\partial \gamma^\mu(\theta, \lambda)}{\partial \theta_k} \right] \theta_k \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il vettore \mathbf{Y}^μ può essere decomposto in due componenti, una diretta lungo \mathbf{k}'^μ che simboleggia la separazione lungo la direzione di propagazione del raggio e una sul piano

bidimensionale perpendicolare a \mathbf{k}'^μ e \mathbf{U}^μ , che simboleggia la separazione trasversale tra i due raggi. Definiti \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 vettori di base di tale piano possiamo dunque scrivere

$$\mathbf{Y}^\mu = -\xi_1(\theta, \lambda)\mathbf{e}_1 - \xi_2(\theta, \lambda)\mathbf{e}_2 - \xi_0(\theta, \lambda)\mathbf{k}'^\mu \quad (3.2)$$

Abbiamo quindi che la separazione trasversale fra i due raggi è data dal vettore $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Considerando θ molto piccolo, ovvero applicando la condizione di campo debole, possiamo considerare la relazione fra tale angolo e il vettore ξ lineare. Inoltre, dalle proprietà di λ si ha che $\frac{d\xi}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \theta$. Da queste due proprietà discende che :

$$\xi = D\theta = D\frac{d\xi}{d\lambda}|_{\lambda=0} \quad (3.3)$$

con D opportuna matrice di linearità, la cui azione consiste nel mappare la separazione angolare infinitesima fra due geodetiche in quella trasversale. Si ha che il vettore ξ soddisfa l'equazione di deviazione geodetica

$$\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} = T\xi \quad (3.4)$$

con T matrice ottica, simmetrica per definizione. Si hanno inoltre le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \xi(\lambda = 0) &= 0 \\ \dot{\xi}(\lambda = 0) &= \theta \end{aligned}$$

Dove in questo caso con il punto si indica la derivazione fatta rispetto a λ . Si noti che la prima condizione al contorno esprime la richiesta che i due raggi di luce considerati passino entrambi per il punto O . Sostituendo l'equazione (3.3) nell'equazione (3.4) si ottiene una relazione per determinare la matrice di linearità D :

$$\frac{d^2D}{d\lambda^2} = TD \quad (3.5)$$

Con le corrispondenti condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} D(\lambda = 0) &= 0 \\ \dot{D}(\lambda = 0) &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

Si ha che le componenti della matrice T dipendono dalla metrica utilizzata ed, in particolare, dalle componenti del tensore di Riemann associativi. Tale equazione può essere risolta in un universo con metrica di Friedmann-Robertson-Walker. A causa dell'isotropia, dunque della non esistenza di direzioni preferenziali in tale spaziotempo, la matrice ottica T è proporzionale all'identità $T = R\mathbb{1}$ e di conseguenza tale proporzionalità sarà

valida anche per la matrice D . Dalla definizione di matrice ottica si ha che il coefficiente di proporzionalità R dipende dal tensore di Ricci valutato in $\gamma^\mu(0, \lambda)$:

$$R = R_{\mu\nu}(\lambda)\mathbf{k}^{\mu}\mathbf{k}^{\nu} \quad (3.6)$$

Dalla definizione di tensore di Ricci si nota come questo differisca dal tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$ per due termini proporzionali alla metrica $g_{\mu\nu}$, il primo tramite lo scalare di curvatura R e il secondo tramite la costante cosmologica. Questi due termini non danno alcun contributo in quanto il vettore k'^{μ} è un vettore di tipo luce. Possiamo dunque, attraverso le equazioni di campo di Einstein, sostituire nell'espressione (3.6) il tensore energia impulso, moltiplicato per un opportuna costante. Si ha inoltre che il vettore d'onda originale del fascio $k^0 = (1+z)\omega_0$, ove il fattore $(1+z)$ è definito nella sezione (2.1), ponendo $a(t_0) = 1$. Si avrà dunque $k'^0 = -(1+z)$, mentre le componenti spaziali di tale vettore dovranno soddisfare la condizione $k'^i k'_i = (1+z)^2$, proprietà sempre derivante dal fatto che k'^{μ} è vettore di tipo luce. Utilizzando l'espressione del tensore energia impulso per un fluido perfetto definita nella sezione (2.2) si ottiene:

$$R = -4\pi G(\rho + p)(1+z)^2 \quad (3.7)$$

In un universo dominato dalla materia si ha $p = 0$ e l'equazione (3.7) diventa:

$$\begin{aligned} -4\pi G\rho(1+z)^2 &= -4\pi G\rho_{cr}\Omega_0 a^{-3}(t_e)(1+z)^2 = \\ &= -4\pi G\frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_0 a^{-3}(t_e)(1+z)^2 = -\frac{3}{2}H_0^2\Omega_0(1+z)^5 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dove si è fatto uso delle definizioni dei parametri riportate nella sezione (2.2). L'espressione relativa alla matrice D diventa dunque :

$$\frac{d^2 D}{d\lambda^2} = -\frac{3}{2}H_0^2\Omega_0(1+z)^5 D \quad (3.9)$$

Si procede ora a mostrare che la soluzione a tale equazione in uno spaziotempo Friedmann-Robertson-Walker sia data dalla distanza angolare, come definita nel Capitolo 2. Si noti innanzitutto che tale distanza soddisfa la relazione differenziale:

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{D_{ang}}{a(t)} \right) = -K \left(\frac{D_{ang}}{a(t)} \right) \quad (3.10)$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} D_{ang}(0) &= 0 \\ \frac{dD_{ang}}{dw}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Partendo dalla relazione $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k'^\mu$ si ottiene che $dx^0 = k'^0 d\lambda \implies dt = -(1+z)d\lambda \implies d\lambda = -adt$. Sostituendo tale relazione nella metrica di Friedmann si ricava che $dt = -adw \implies d\lambda = a^2 dw$. Otteniamo dunque:

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{D}{a} \right) = a^2 \frac{d}{d\lambda} \left(a^2 \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{D}{a} \right) \right) = -a^2 D \frac{d^2 a}{d\lambda^2} + a^3 \frac{d^2 D}{d\lambda^2} \quad (3.11)$$

Essendo $\frac{da}{d\lambda} = \frac{da}{dt} a^{-1}$ possiamo riscrivere la relazione

$$\frac{d^2 a}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left(\frac{da}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{da} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{da} H^2(a) \quad (3.12)$$

Dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della definizione di $H(a)$. Sostituendo le equazioni (3.9) e (3.12) nell'equazione (3.11) si ottiene:

$$\frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{D}{a} \right) = - \left(\frac{a^2}{2} \frac{dH^2}{da} + \frac{3}{2} H_0^2 a^3 \Omega_0 (1+z)^5 \right) D \quad (3.13)$$

Utilizzando ora l'equazione di Friedmann nella forma (2.10) e derivandola rispetto ad a è possibile riscrivere l'equazione (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dw^2} \left(\frac{D}{a} \right) &= - \left[\frac{a^3}{2} \left(-3a^{-4} H_0^2 \Omega_0 + 2a^{-3} H_0^2 \frac{K}{H_0^2} \right) + \frac{3}{2} H_0^2 a^4 \Omega_0 (1+z)^5 \right] \frac{D}{a} = \\ &= -K \frac{D}{a} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Si ottiene quindi che la matrice di linearità D soddisfa la stessa relazione differenziale della distanza angolare, con le medesime condizioni al contorno. Si può affermare che, nella metrica utilizzata, le due funzioni coincidano se applichiamo l'approssimazione di campo debole: la distanza angolare rappresenta dunque la mappa fra deflessione angolare e trasversale di un dato raggio di luce.

3.2 Approssimazione delle lenti sottili

Consideriamo inizialmente la deflessione provocata da una distribuzione di massa M puntiforme su un raggio di luce in approssimazione di campo debole, ovvero tale che il parametro di impatto del raggio R sia molto maggiore del raggio di Schwarzschild della lente: $R \gg 2GM$. Il calcolo esplicito dell'angolo di deflessione è eseguito in Appendice A e porta al risultato:

$$\alpha = \frac{4GM}{R} \quad (3.15)$$

Si consideri ora una distribuzione di massa con estensione molto inferiore della distanza fra sorgente luminosa e osservatore: essa può essere approssimata ad una distribuzione planare. Definiamo tale piano come il piano della lente. In regime di campo debole le equazioni di campo possono essere linearizzate, ottenendo che l'angolo di deflessione per un insieme di masse puntiformi è dato dalla sovrapposizione delle deflessioni causate dalle singole masse. Considerata una distribuzione di massa con densità ρ , possiamo dividerla in infinitesime celle di volume dV , tali che la massa totale della distribuzione sia $M = \rho dV$. Ponendoci in coordinate cartesiane, si ha che la traiettoria del raggio sarà descritta da una funzione di (x, y, z) costruita in modo che la propagazione avvenga lungo l'asse z . Ciò comporta che il vettore di impatto relativo ad un elemento di massa posto a $\mathbf{R} = (x', y', z')$ sia, posti $\mathbf{v} = (x, y)$ e $\mathbf{v}' = (x', y')$, pari a $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$. L'angolo di deflessione risulta quindi:

$$\alpha = 4G \int d\mathbf{v}' \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \int dz' \rho(x', y', z') \quad (3.16)$$

Definendo ora la superficie di densità come la proiezione di ρ sul piano perpendicolare alla propagazione del raggio, ovvero

$$\Sigma(\mathbf{v}') = \int dz' \rho(x', y', z') \quad (3.17)$$

Si ottiene un angolo di deflessione nella forma:

$$\alpha = 4G \int d\mathbf{v}' \Sigma(\mathbf{v}') \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \quad (3.18)$$

Esiste inoltre un valore critico Σ_{cr} della superficie di densità per il quale tale equazione integrale ha più di una soluzione: in tal caso si ha lo sdoppiamento dell'immagine luminosa. Definiamo dunque la *convergenza* come $k = \frac{\Sigma_{cr}}{\Sigma}$. Possiamo inoltre porre:

$$\alpha = \nabla\psi(\mathbf{v}) \quad (3.19)$$

Dove si è introdotto il *potenziale di deflessione* ψ , proiezione bidimensionale del potenziale newtoniano, che soddisfa l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2\psi(\mathbf{v}) = 2k(\mathbf{v}) \quad (3.20)$$

Equazione delle lenti

Vogliamo ricavare una relazione fra la reale posizione della sorgente e quella misurata in seguito al fenomeno di lensing. Sia dato un raggio di luce che si propaga in direzione di un osservatore O perpendicolarmente sia al piano della sorgente luminosa che al piano

della lente. L'intersezione di tale raggio con quest'ultimo piano sarà data da un vettore bidimensionale ξ sul piano della lente. Tale vettore rappresenta la posizione originale della sorgente sul piano della lente. Denotiamo inoltre con η il vettore posizione della sorgente sul proprio piano.

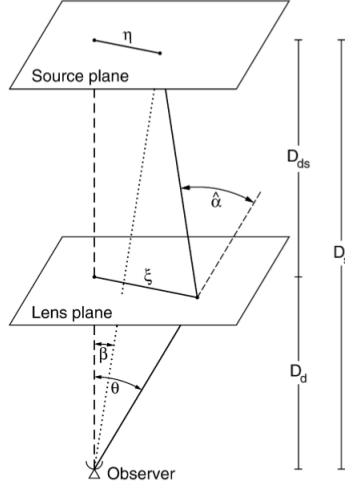


Figura 3.1: *Schema di lensing gravitazionale nell'approssimazione di lenti sottili [1]*

Definiamo ora:

- D_d distanza angolare fra osservatore e piano della lente;
- D_s distanza angolare fra osservatore e piano della sorgente;
- D_{ds} distanza angolare fra piano della lente e piano della sorgente

Si ha che il vettore η sarà dato dalla differenza fra il vettore ξ e lo spostamento trasversale del raggio dovuto al lensing, pari a $D_{ds}\alpha$, dove α è l'angolo di deflessione:

$$\eta = \xi - D_{ds}\alpha \implies \beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha \quad (3.21)$$

Dove si sono definiti gli angoli β e θ , corrispondenti alle posizioni angolari rispettivamente della sorgente originale e della sorgente misurata, entrambe relative all'osservatore. Riscalando l'angolo $\alpha_r = \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha$ otteniamo la relazione (3.15) nella più comoda forma:

$$\beta(\theta) = \theta - \alpha_r(\theta) \quad (3.22)$$

Quando l'equazione (3.22) ha più di una soluzione, vengono prodotte immagini multiple della sorgente. Ciò accade in corrispondenza di un valore della superficie di densità critica

di $\Sigma_{cr} = \frac{1}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}}$, il che implica che l'angolo di deflessione in funzione della convergenza può essere scritto tramite la relazione (3.18) come:

$$\alpha_{\mathbf{r}} = \frac{1}{\pi} \int d\theta' k(\theta') \frac{\theta - \theta'}{|\theta - \theta'|^2} \quad (3.23)$$

Mentre il potenziale di deflessione diviene:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi} \int d\theta' k(\theta') \ln|\theta - \theta'| \quad (3.24)$$

3.3 Distorsione della sorgente

Il lensing gravitazionale è un fenomeno che non coinvolge assorbimento o emissione di fotoni, dunque la luminosità intrinseca della sorgente rimarrà invariata. Nonostante ciò si verificano degli effetti di distorsione dell'immagine che fanno sì che la luminosità apparente possa variare. Tale distorsione, se valutata in campo debole e mediata su grandi scale, può essere localmente linearizzata. Consideriamo quindi lo Jacobiano della trasformazione bi-dimensionale subita dalla sorgente, data dall'equazione (3.22):

$$\mathbf{J}_{ij}(\theta) = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (3.25)$$

È dunque possibile esprimere lo Jacobiano in funzione delle derivate seconde del potenziale di deflessione. Si consideri ora la componente simmetrica di \mathbf{J} :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{J} - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{J}) \mathbf{1} \right)_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} + 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) \delta_{ij} = \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tale componente simmetrica e a traccia nulla è detta matrice di *shear*. Definendo uno pseudovettore sul piano della lente $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ di componenti:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) \\ \gamma_2 &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \end{aligned} \quad (3.27)$$

è possibile riscrivere la matrice di shear esplicitamente come:

$$\begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$$

Calcolando poi il polinomio caratteristico di tale matrice si ha che i corrispondenti autovalori sono $\pm\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = |\gamma|$. La matrice di shear, in quanto simmetrica e reale, può essere diagonalizzata tramite matrici ortogonali. Il teorema spettrale infatti ci permette di scrivere

$$\begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} = |\gamma| R M R^T \quad (3.28)$$

Ove R è una matrice ortogonale e si è posta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Scegliendo come matrice ortogonale R la realizzazione fondamentale del gruppo $SO(2)$ agente sui vettori bidimensionali, dunque ponendo $R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ e sviluppando il prodotto fra matrici (3.28) si ottiene:

$$\mathbf{J} - \frac{1}{2} Tr(\mathbf{J}) \mathbf{1} = |\gamma| \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Rimane ora da esaminare la componente mancante dello Jacobiano:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} Tr(\mathbf{J}) \right]_{ij} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} + 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} \right) \delta_{ij} = \left(1 - \frac{1}{2} \nabla_{\theta}^2 \psi \right) \delta_{ij} = \\ &= (1 - k) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.31)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso dell'equazione (3.20). Lo Jacobiano della trasformazione subita dalla sorgente luminosa in seguito a fenomeno di lensing può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left(\mathbf{J} - \frac{1}{2} Tr(\mathbf{J}) \mathbf{1} \right) + \frac{1}{2} Tr(\mathbf{J}) \mathbf{1} = \\ &= |\gamma| \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & \sin(2\phi) \\ \sin(2\phi) & -\cos(2\phi) \end{pmatrix} + (1 - k) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tale decomposizione mette in luce i contributi separati della matrice di shear e della convergenza: il primo consiste in una deformazione della sorgente lungo una direzione preferenziale, il secondo contributo è invece isotropo e produce un ridimensionamento dell'immagine. È ora possibile definire il tensore di ingrandimento $\mathbf{I} = \mathbf{J}^{-1}$, da cui possiamo ricavare l'ingrandimento dell'immagine:

$$\mu = det(\mathbf{I}) = \left(det(\mathbf{J}) \right)^{-1} = \left((1 - k)^2 - \gamma^2 \right)^{-1} \quad (3.33)$$

Tale quantità può assumere valori negativi, in corrispondenza dei quali, oltre alla distorsione della sorgente, si verifica anche un'inversione della stessa. Calcolando il polinomio

caratteristico di \mathbf{J} è inoltre possibile ricavarsi i suoi autovalori, pari a $1 - k \pm |\gamma|$. Gli autovalori del tensore di ingrandimento sono di conseguenza

$$\begin{aligned}\mu_r &= (1 - k - |\gamma|)^{-1} \\ \mu_t &= (1 - k + |\gamma|)^{-1}\end{aligned}\tag{3.34}$$

e indicano l'ingrandimento della sorgente luminosa lungo due assi principali sul piano della lente.

Occorrenza dell'immagine

La deflessione dei fasci luminosi per effetto di lensing causa un ritardo nella ricezione della radiazione luminosa. Esso sarà causato da due effetti indipendenti, uno dovuto alla differenza di cammino fra raggi del fascio con diverso angolo di deflessione, l'altro dovuto alla perturbazione del moto dei fotoni nei pressi della lente. Il primo contributo dipende dunque dall'angolo di deflessione e dal parametro di impatto di ogni raggio, mentre il secondo dipende dalla presenza della lente, di conseguenza dal potenziale di deflessione.

Partendo dall'equazione (3.21) possiamo dunque scrivere:

$$\theta - \beta - \frac{D_{ds}}{D_s}\alpha = 0 \implies \frac{D_s}{D_{ds}}\left((\theta - \beta) - \nabla_\theta\psi\right) = 0\tag{3.35}$$

che può anche essere riscritta come:

$$\frac{D_s}{D_{ds}}\nabla_\theta\left(\frac{1}{2}(\theta - \beta)^2 - \psi(\theta)\right) = 0\tag{3.36}$$

Moltiplicando tale relazione per una costante in modo da correggerne la dimensione si ottiene una funzione di ritardo temporale per una lente posta a redshift $(1+z)$:

$$t(\theta) = (1+z)\frac{D_l D_s}{D_{ds}}\left(\frac{1}{2}(\theta - \beta)^2 - \psi(\theta)\right)\tag{3.37}$$

Tale funzione rispetta il principio di Fermat per costruzione: le immagini della sorgente in seguito al lensing si localizzeranno nei punti θ tali per cui $t(\theta)$ è stazionaria. Si noti come, in assenza di lensing, tale funzione risulti essere una parabola, quindi con uno solo punto stazionario: in tal caso infatti si formerà una sola immagine in $\theta = \beta$.

È possibile differenziare le immagini in base alla tipologia dei punti stazionari della funzione di ritardo temporale: per far ciò è necessario esaminare l'Hessiana:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}t(\theta) \propto \delta_{ij} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\tag{3.38}$$

Essa è proporzionale allo Jacobiano \mathbf{J} , così come definito nella (3.25). Essendo l'ingrandimento dell'immagine definito come l'inverso del determinante di \mathbf{J} , si ha che le immagini corrispondenti ai minimi e ai massimi di $t(\theta)$, ovvero quelle per cui il determinante di τ è positivo, saranno soggette a ingrandimento positivo; mentre quelle corrispondenti ai punti di sella della funzione di ritardo, ovvero $\det\tau < 0$, saranno soggette ad inversione dell'immagine.

Capitolo 4

Radiazione cosmica di fondo

La radiazione cosmica di fondo è una radiazione elettromagnetica risalente, secondo il modello cosmologico del Big Bang, all'epoca del ricombinamento, quando l'universo era composto da plasma di fotoni e particelle elettricamente cariche, ovvero protoni ed elettroni. Tale configurazione impediva la propagazione della radiazione elettromagnetica generata tramite scattering Thomson, derivante dall'interazione fra cariche libere e fotoni, in quanto il libero cammino medio dei fotoni prima di incontrare un'altra carica libera era molto breve. In seguito all'espansione dell'universo il plasma iniziò a raffreddarsi, sino al punto da permettere ad elettroni e protoni di legarsi in atomi neutri di idrogeno, incapaci di assorbire quella che oggi è detta radiazione cosmica di fondo. I fotoni furono dunque liberi di propagarsi nel cosmo partendo dalla cosiddetta superficie di ultimo scattering, ovvero quella superficie posta ad una distanza, rispetto alla terra, tale da aver potuto emettere all'epoca del ricombinamento i fotoni osservati oggi.

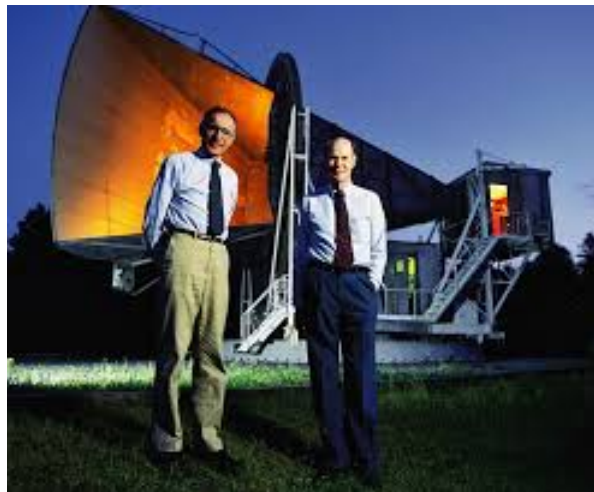


Figura 4.1: *Arno Penzias e Robert Wilson, nobel per la fisica nel 1978 [3]*

Teorizzata dai cosmologi Ralph Alpher e Robert Herman nel 1948, la radiazione cosmica fu misurata con successo solo diversi anni dopo, nel 1964, dagli astronomi americani Arno Penzias e Robert Wilson, premiati in seguito con il premio Nobel per la fisica nel 1978. Essa presenta uno spettro termico di corpo nero ad una temperatura di $T = (2.7260 \pm 0.0013)K$ ([5]) e delle frequenze di emissione che rientrano nel range delle microonde. Essa risulta essere inoltre quasi omogenea ed isotropa, a meno di leggere anisotropie dovute ad effetti verificatisi nell'epoca del ricombinamento oppure in seguito, durante il percorso dei fotoni fra superficie di ultimo scattering e l'osservatore.

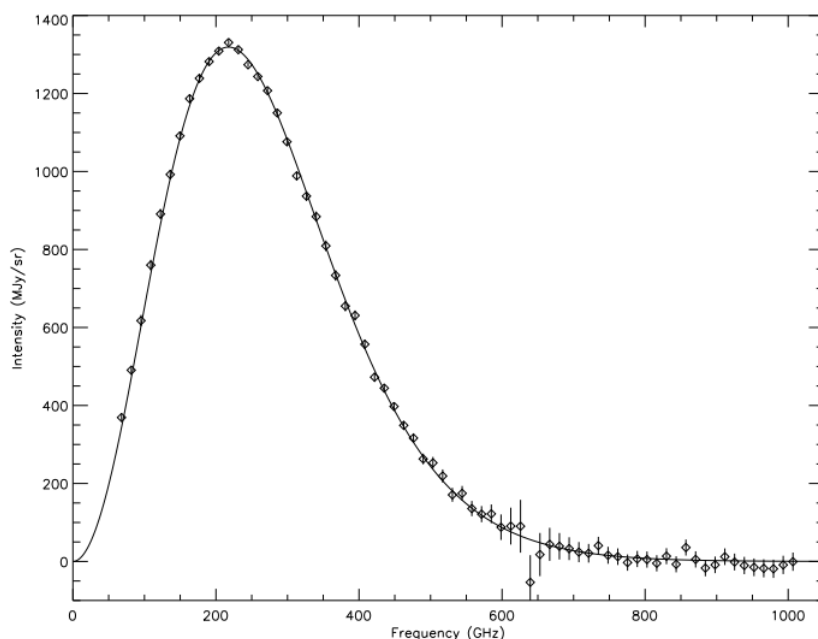


Figura 4.2: Spettro della radiazione cosmica di fondo: l'intensità si misura in mega jansky su steradiante. [5]

Un'altra importante caratteristica della radiazione cosmica di fondo è la polarizzazione lungo due direzioni ortogonali fra loro, \mathbf{E} e \mathbf{B} : la prima deriva dallo scattering Thomson e risale dunque all'era della formazione della radiazione, la seconda invece nasce o in seguito a lensing gravitazionale agente sulla polarizzazione \mathbf{E} oppure dalle onde gravitazionali generate all'epoca dell'inflazione. La polarizzazione \mathbf{B} è estremamente difficile da misurare, per questo motivo è stata scoperta solo diversi anni dopo la polarizzazione \mathbf{E} , la quale viene approfondita attraverso analisi dello scattering Thomson effettuata tramite parametri di Stokes in appendice B.

4.1 Effetto Sachs-Wolfe

Si è visto come la radiazione cosmica di fondo presenti delle perturbazioni di temperatura nel suo spettro legate a fluttuazioni di densità. Tale legame è causato dall'effetto Sachs-Wolfe. Questo, visibile su grandi scale, è costituito da due contributi indipendenti e coinvolge i fotoni generati sulla superficie di ultimo scattering che giungono fino alla Terra. Il primo dei due contributi, detto effetto Sachs-Wolfe non integrato, introduce delle perturbazioni di temperatura sui fotoni soggetti a redshift sulla superficie di ultimo scattering. Tali fluttuazioni attorno al valor medio di temperatura della radiazione cosmica di fondo sono proporzionali alle perturbazioni spaziotemporali a cui è soggetta la metrica.

Il secondo contributo è detto effetto Sachs-Wolfe integrato e si verifica fra la superficie di ultimo scattering e la terra, dunque non ha legami con le anisotropie primordiali della radiazione cosmica. I fotoni, durante la loro propagazione, attraversano fluttuazioni spaziotemporali dovute a grosse concentrazioni di materia. Queste generano buche di potenziale gravitazionale da cui essi possono uscire solo perdendo energia tramite redshift. La proporzionalità fra energia media e temperatura fa sì che le regioni da cui provengono i fotoni sembrano più fredde ad un osservatore esterno; inoltre il fenomeno della dilatazione temporale comporta che i fotoni paiano arrivare da ipersuperfici spaziotemporali diverse da quelle effettive. Dalla relazione $a(t)\nu = cost$ ricavata nella sezione (2.1) si ottiene che anche il prodotto fra temperatura e fattore di scala rimarrà costante nel tempo. Ciò comporta che:

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \frac{\Delta a}{a} \quad (4.1)$$

Effetto Sachs-Wolfe non integrato

L'effetto Sachs-Wolfe non integrato è il responsabile della maggior parte delle anisotropie nello spettro della radiazione cosmica di fondo. È possibile stimare l'intensità delle fluttuazioni di temperatura in funzione delle perturbazioni della metrica a cui sono soggetti i fotoni durante la propagazione dalla superficie di ultimo scattering a noi. Consideriamo infatti la seguente relazione di conservazione dell'energia:

$$\frac{\Delta T}{T} \Big|_f = \frac{\Delta T}{T} \Big|_i - \Phi \quad (4.2)$$

Essa afferma che la perturbazione di temperatura a cui sono soggetti i fotoni è pari alla differenza fra le fluttuazioni di temperatura primordiali e l'effetto della perturbazione spaziotemporale sulla loro temperatura. Quest'ultimo termine sarà legato all'energia necessaria ai fotoni per uscire dalle buche di potenziale generate sulla superficie di ultimo scattering. Si noti che in tale espressione si è trascurato l'effetto doppler dovuto al moto relativo fra emettitore e sorgente e si è assunta la perturbazione Φ costante su grandi

scale. Ci si ponga dunque nel sistema di coordinate a riposo con il fluido cosmico, in modo che il tempo proprio e la coordinata temporale coincidano. Per ricavare un'espressione per le fluttuazioni di temperatura primordiali si consideri il modello di universo di Einstein - De Sitter, costruito a partire dall'universo di Friedmann-Robertson-Walker, ponendo la costante cosmologica Λ e la costante di curvatura K entrambe uguali a zero. Tale modello descrive dunque un universo piatto in moto di espansione dovuto unicamente al Big Bang ed approssima efficacemente il cosmo nell'era dell'inflazione. Si noti inoltre come l'annullarsi dello scalare di curvatura comporti un valore di densità pari a quello critico.

Ponendo dunque le due condizioni $\Lambda = K = 0$ e sostituendole nella prima delle equazioni di Friedmann (2.6) si ottiene che:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho \implies H(t) \propto \sqrt{\rho} \quad (4.3)$$

Sostituendo nella relazione (2.11) relativa all'età dell'universo si ha:

$$t = \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} \frac{da}{a\sqrt{\rho}} \quad (4.4)$$

Si può ora sostituire ora l'equazione di stato generica (2.8):

$$t = \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da = a^{\frac{3}{2}(1+w)} \quad (4.5)$$

Da quest'ultima relazione si può ricavare che:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{3(1+w)}{2} a^{\frac{(1+3w)}{2}} da \implies \frac{da}{dt} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{a}{t}, \\ \frac{da}{a} &= \frac{2}{3(1+w)} \frac{dt}{t} \implies \frac{2}{3(1+w)} \frac{\Delta t}{t} \propto \frac{\Delta T}{T} \Big|_i \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della relazione (4.1). Richiamando ora il fatto che il potenziale gravitazionale induce perturbazioni nella componente temporale della metrica che corrispondono a

$$\frac{\Delta t}{t} = \Phi \quad (4.7)$$

Possiamo riscrivere l'espressione (4.6) come:

$$\frac{\Delta T}{T} \Big|_f = \frac{2}{3(1+w)} \Phi - \Phi = -\frac{1+3w}{3(1+w)} \Phi \quad (4.8)$$

Al variare dell'equazione di stato scelta per il fluido cosmico si ottiene la corrispondente costante di proporzionalità fra intensità delle perturbazioni e potenziale gravitazionale.

Effetto Sachs Wolfe integrato

L'effetto Sachs-Wolfe integrato trova la sua maggiore applicazione nell'indagine cosmologica circa l'esistenza e la natura dell'energia oscura. Infatti, in aggiunta alle anisotropie dovute a perturbazioni primordiali, ve ne possono essere altre formate durante la propagazione dei fotoni dalla superficie di ultimo scattering alla terra. Dalla relazione (4.8) ricaviamo che un fotone che debba passare attraverso una buca di potenziale gravitazionale, sarà soggetto a fluttuazioni di temperatura tali che:

$$\frac{\Delta T}{T} \propto \int \frac{d\Phi}{d\tau} d\tau \quad (4.9)$$

Dove τ è il tempo conforme, ovvero tale che $d\tau = a^{-1}(t)dt$ e l'integrale è esteso a tutta la traiettoria del fotone. Se quest'ultimo cade in una buca di potenziale, acquisterà energia che verrà persa in seguito per uscire da tale buca; è evidente che se il potenziale rimane costante nel tempo allora tali effetti si cancellano a vicenda e non viene misurata alcuna fluttuazione di temperatura. Se invece il potenziale evolve mentre il fotone attraversa la buca, allora si avrà effetto Sachs-Wolfe integrato. In un universo dominato dalla materia e a curvatura nulla si ha che il potenziale rimane costante, dunque $\frac{d\Phi}{d\tau} = 0$. Considerando però l'esistenza dell'energia oscura e le conseguenti perturbazioni sul potenziale, si genererebbero ulteriori anisotropie nello spettro della radiazione cosmica. L'osservazione dell'effetto Sachs-Wolfe integrato dunque è da considerare come una prova a supporto dell'esistenza dell'energia oscura, nonché uno dei metodi di ricerca più efficaci per studiarne le proprietà. Le difficoltà in tal senso sorgono a causa della bassa intensità delle perturbazioni causate da tale effetto in confronto a quelle primordiali, circa 10 volte più intense. Un'altra era in cui è possibile collocare l'effetto Sachs-Wolfe integrato è quella corrispondente alla predominanza della radiazione sulla materia: essendo che tale epoca precede di poco quella di ultimo scattering, è molto difficile separare questo contributo dalle anisotropie primordiali.

Capitolo 5

Lensing debole sulla radiazione cosmica di fondo

Le perturbazioni mediate su grandi scale della radiazione cosmica di fondo sono dovute in parte ad effetto Sachs-Wolfe ed in parte all'alternanza fra materia e radiazione come elemento costitutivo predominante nell'universo. Le perturbazioni dovute alla radiazione sono limitate nel tempo, in quanto sono cessate quando la materia ha preso il sopravvento, nella cosiddetta era del ricombinamento. Esse si manifestano come dei picchi ben distinti nello spettro della radiazione.

Trascurando il lensing gravitazionale debole, lo spettro della radiazione cosmica dovrebbe dunque apparire omogeneo su grandi scale ed esibire dei picchi in corrispondenza delle perturbazioni precedenti all'era del ricombinamento. Si noti inoltre che se la radiazione cosmica fosse completamente isotropa, il lensing gravitazionale non avrebbe effetto poiché esso conserva la luminosità intrinseca delle superfici e dunque la loro temperatura. Inoltre, dato lo scopo dell'analisi spettrale della radiazione cosmica, è importante studiare lo spostamento locale fra due raggi vicini e non la deflessione generale. In altri termini, la grandezza di maggiore importanza nella trattazione di tali perturbazioni è la dispersione dell'angolo di deflessione e non l'angolo in sé.

5.1 Funzione di correlazione e spettro di potenza

Vengono ora definiti alcuni oggetti matematici che verranno utilizzati nella trattazione del lensing debole su grandi scale, dove le deflessioni subite dai raggi di luce possono essere viste come fenomeni statistici. Consideriamo un generico campo $g(x)$ definito su un dominio \mathbb{D} complesso il cui valor medio è nullo quasi ovunque, ovvero $\langle g(x) \rangle = 0$ q.o. Per i campi che non soddisfano tale proprietà si consideri una traslazione del campo tale da spostare il valor medio nell'origine. Un campo di questo tipo è omogeneo se soddisfa la relazione $g(x) = g(x + y) \forall x, y \in \mathbb{D}$, mentre viene detto isotropo se $g(x) = g(Rx)$, con

R matrice di rotazione arbitraria. Definiamo la funzione di autocorrelazione due punti del campo come il valore di aspettazione della quantità:

$$\xi_g(y) = \langle g(x)g^*(x+y) \rangle \quad (5.1)$$

Dove l'asterisco indica il complesso coniugato. Tale funzione rappresenta la correlazione statistica fra i valori assunti dal campo nei punti x e y . Se il campo è omogeneo e isotropo la funzione di autocorrelazione dipenderà solo dalla distanza fra x e y , ovvero:

$$\langle g(x)g^*(x+y) \rangle = C(|y|) \quad (5.2)$$

Con $C(x)$ funzione reale. Applicando la trasformata di Fourier al campo $g(x)$ e utilizzando l'equazione (5.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}(k)\tilde{g}^*(k') \rangle &= \int_{\mathbb{D}} d^n x \quad e^{ikx} \int_{\mathbb{D}} d^n x' \quad e^{-ik'x'} \langle g(x)g^*(x') \rangle \implies \\ &\implies \int_{\mathbb{D}} d^n x \quad e^{ikx} \int_{\mathbb{D}} d^n y \quad e^{-ik'(x+y)} C(|y|) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dove nell'ultimo passaggio è stata effettuata la trasformazione $x' = x + y$. Utilizzando poi la rappresentazione integrale della delta di Dirac si ha:

$$\langle \tilde{g}(k)\tilde{g}^*(k') \rangle = (2\pi)^n \delta(k - k') \int_{\mathbb{D}} d^n y \quad e^{ik'y} C(|y|) \quad (5.4)$$

Definendo lo spettro di potenza di $g(x)$ come:

$$P_g(k') = \int_{\mathbb{D}} d^n y \quad e^{ik'y} C(|y|) \quad (5.5)$$

si ottiene la relazione finale:

$$\langle \tilde{g}(k)\tilde{g}^*(k') \rangle = (2\pi)^n \delta(k - k') P_g(k') \quad (5.6)$$

Si noti come lo spettro di potenza del campo corrisponda alla trasformata di Fourier della funzione di correlazione.

5.2 Funzione di autocorrelazione di temperatura

In assenza di lensing si osserverebbe, ad una certa posizione θ nell'universo, una distribuzione di temperatura della radiazione cosmica di fondo $T(\theta)$ di valor medio $\langle T(\theta) \rangle = (2.7260 \pm 0.0013)K$. Poste le fluttuazioni attorno a tale valore come $\tau(\theta) = \frac{\Delta T}{\langle T \rangle}$, esse

possono essere statisticamente descritte dalla funzione di autocorrelazione a due punti definita nella precedente sezione:

$$\xi_t(\phi) = \langle \tau(\theta) \tau^*(\theta + \phi) \rangle \quad (5.7)$$

Grazie all'isotropia del modello cosmologico considerato si ha che tale funzione non dipenderà né da θ né dalla direzione di ϕ , ma solo dal modulo $|\phi|$ della distanza fra i due punti. Consideriamo quindi un raggio di luce che raggiunge l'osservatore partendo dalla superficie di ultimo scattering, che in tal caso coincide con la superficie della sorgente. Lungo il suo percorso esso subirà delle perturbazioni tali da intersecarla in una posizione β data dall'equazione (3.22). La temperatura osservata sarà dunque:

$$T(\beta) = T(\theta - \alpha(\theta)) \quad (5.8)$$

La corrispondente funzione di autocorrelazione può essere scritta come:

$$\xi'_t = \langle \tau(\theta - \alpha(\theta)) \tau^*(\theta + \phi - \alpha(\theta + \phi)) \rangle \quad (5.9)$$

Posto ora $\alpha(\theta + \phi) = \alpha'$ è possibile riscrivere l'equazione (5.9) tramite la trasformata di Fourier:

$$\tau(\theta) = \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \tilde{\tau}(l) e^{i\theta l} \quad (5.10)$$

Dove si è introdotto il vettore d'onda l . Sostituendo tale valore si ha:

$$\xi'_t = \left\langle \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} \tilde{\tau}(l) e^{i l(\theta - \alpha)} \left(\int \frac{d^2 l'}{(2\pi)^2} \tilde{\tau}(l') e^{i l'(\theta + \phi - \alpha')} \right)^* \right\rangle \quad (5.11)$$

Passando in coordinate polari (l, γ) si ottiene una funzione di autocorrelazione nella forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty l dl \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty l' dl' \int_0^{2\pi} d\gamma' \frac{1}{(2\pi)^4} \langle \tilde{\tau}(l) e^{i l(\theta - \alpha)} \tilde{\tau}^*(l') e^{-i l'(\theta - \alpha' + \phi)} \rangle = \\ = \int_0^\infty l dl \frac{P_t(l)}{2\pi} J_0(l\phi) \langle e^{i l(\alpha - \alpha')} \rangle \end{aligned} \quad (5.12)$$

Con $J_0(x)$ funzione di Bessel di ordine zero. Nell'ultimo passaggio si sono utilizzate le relazioni:

- $e^{i l' \phi \cos \eta} = \sum_{j=0}^\infty J_j(l' \phi) e^{i j \eta} = J_0(l' \phi) + \sum_{j=1}^\infty J_j(l' \phi) e^{i j \eta} \approx J_0(l' \phi) ;$
- $\langle \tilde{\tau}(l) \tilde{\tau}^*(l') \rangle = (2\pi)^2 \delta(l - l') P_t(l)$

Dove sono stati definiti η angolo compreso fra l e ϕ e $P_t(l)$ spettro di potenza delle fluttuazioni di temperatura.

Per calcolare ora il valor medio dell'esponenziale nella relazione (5.12) si procede tramite sviluppo in serie di Taylor. Posto $\delta\alpha = \alpha - \alpha'$ come la differenza di deflessione fra due raggi vicini e inizialmente separati da un vettore ϕ si ha:

$$\langle e^{il(\alpha-\alpha')} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle (il\delta\alpha)^j \rangle}{j!} \quad (5.13)$$

Considerando le fluttuazioni iniziali di densità come approssimativamente gaussiane, per effetto Sachs-Wolfe si avrà che lo saranno anche le deflessioni sulle superficie di ultimo scattering e di conseguenza i campi α . Ciò comporta che i momenti dispari, ovvero i termini dispari della serie (5.13), siano nulli. Tale relazione si può dunque riscrivere come:

$$\langle e^{il(\alpha-\alpha')} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j l^{2j} \frac{\langle \delta\alpha^{2j} \rangle}{(2j)!!} = e^{-\frac{1}{2}l^2 \frac{1}{2} \langle \delta\alpha^2 \rangle} = e^{-\frac{1}{2}l^2 \sigma^2(\phi)} \quad (5.14)$$

Dove nell'ultimo passaggio si è definita la dispersione $\sigma^2 = \frac{1}{2} \langle \delta\alpha^2 \rangle$. La funzione di autocorrelazione (5.12) si può dunque scrivere:

$$\xi'_t = \int_0^{\infty} l dl \frac{P_l}{2\pi} J_0(l\phi) \exp\left\{-\frac{1}{2}l^2 \sigma^2(\phi)\right\} \quad (5.15)$$

Dalla definizione di spettro di potenza si ha inoltre che esso rappresenta, a meno di un fattore di normalizzazione, la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione originale:

$$P_l = \int d^2\phi \xi_t(\phi) e^{-il\phi} = 2\pi \int_0^{\infty} \phi d\phi J_0(l\phi) \xi_t \quad (5.16)$$

Sostituendo tale relazione nella (5.14) si ottiene un'espressione che confronta le due funzioni di autocorrelazione, prima e dopo l'azione del lensing:

$$\xi'_t = \int_0^{\infty} \phi' d\phi' \xi_t(\phi') K(\phi, \phi') \quad (5.17)$$

con:

$$K(\phi, \phi') = \int_0^{\infty} l dl J_0(l\phi) J_0(l\phi') \exp\left\{-\frac{1}{2}l^2 \sigma^2(\phi)\right\} \quad (5.18)$$

Tramite l'integrale notevole (6.66)(3.2) Gradshteyn and Ryzhik ([7]) l'espressione (5.18) diventa:

$$K(\phi, \phi') = \frac{1}{\sigma^2(\phi)} \exp\left\{-\frac{\phi^2 + \phi'^2}{2\sigma^2(\phi)}\right\} I_0\left(\frac{\phi\phi'}{\sigma^2(\phi)}\right) \quad (5.19)$$

Dove $I_0(x)$ è la funzione di Bessel modificata. Applicando l'approssimazione per cui $\sigma \ll \phi$, l'argomento di $I_0(x)$ sarà molto grande. Dalla proprietà per la quale $I(x) \approx$

$(2\pi x)^{-1/2}e^x$ per valori di x molto grandi si ricava che la funzione di autocorrelazione diviene:

$$\xi_t' = \frac{1}{(2\pi\phi)^{1/2}\sigma(\phi)} \int_0^\infty d\phi' \phi'^{1/2} \xi_t(\phi') \exp\left\{-\frac{(\phi - \phi')^2}{2\sigma^2(\phi)}\right\} \quad (5.20)$$

Quest'ultima scrittura della funzione di autocorrelazione permette di notare ciò che accade per dispersioni molto piccole: partendo infatti dalla relazione:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\phi - \phi')^2}{2\sigma^2}\right\} = \delta(\phi - \phi') \quad (5.21)$$

e sostituendo all'interno della (5.20) si trova:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \xi_t' = \frac{1}{\phi^{1/2}} \int d\phi' \phi'^{1/2} \xi_t(\phi') \delta(\phi - \phi') = \xi_t(\phi) \quad (5.22)$$

Ovvero per dispersioni σ molto piccole la funzione di autocorrelazione di temperatura in presenza di lensing si riduce all'autocorrelazione in assenza di lensing.

5.3 Funzione di autocorrelazione: angolo di deflessione

Si procede ora alla valutazione della dispersione degli angoli di deflessione. Sia dunque $\alpha = \alpha(\theta)$ l'angolo di deflessione subito da un raggio di luce osservato alla posizione angolare θ , mentre $\alpha' = \alpha(\theta + \phi)$ sia l'angolo di deflessione subito da un raggio di luce osservato alla posizione angolare $\theta + \phi$. La corrispondente funzione di autocorrelazione a due punti può essere scritta come:

$$\xi_\alpha(\phi) = \langle \alpha \alpha'^* \rangle \quad (5.23)$$

Dalla definizione di dispersione effettuata nella sezione (5.1) si ha che:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\phi) &= \frac{1}{2} \langle (\alpha - \alpha')^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle (\alpha(\theta) - \alpha(\theta + \phi)) (\alpha(\theta) - \alpha(\theta - \phi)) \rangle = \\ &= \xi_\alpha(0) - \xi_\alpha(\phi) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dunque data la funzione di autocorrelazione dell'angolo di deflessione è possibile risalire alla sua dispersione. Riscrivendo ora la relazione fra convergenza e angolo α :

$$k(\theta) = \frac{1}{2} \nabla_\theta \alpha(\theta) \quad (5.25)$$

tramite trasformate di Fourier si ottiene la relazione integrale:

$$\int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} e^{i\theta l} \tilde{k}(l) = \frac{1}{2} \nabla_\theta \int \frac{d^2 l}{(2\pi)^2} e^{i\theta l} \tilde{\alpha}(l) \quad (5.26)$$

che, una volta sviluppata, diventa:

$$\tilde{k}(l) = \frac{1}{2}(il)\tilde{\alpha}(l) \implies \tilde{\alpha} = -\frac{2i\tilde{k}(l)}{|l|^2}l \quad (5.27)$$

Si ha quindi che lo spettro di potenza di $\alpha(\theta)$ può essere scritto in funzione dello spettro di potenza della convergenza $P_k(l)$:

$$\langle \tilde{\alpha}(l), \tilde{\alpha}(l') \rangle = (2\pi)^2 \delta(l - l') P_\alpha(l) = \frac{4}{|l|^2} \langle \tilde{k}(l) \tilde{k}^*(l') \rangle \implies \frac{4}{|l|^2} P_k(l) = P_\alpha(l) \quad (5.28)$$

La funzione di autocorrelazione dell'angolo di deflessione può dunque essere scritta in funzione dello spettro di potenza della convergenza:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(\phi) &= \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} e^{i\phi l} P_\alpha(l) = \int_0^\infty l dl \int_0^{2\pi} d\gamma \frac{e^{i\phi l}}{(2\pi)^2} \frac{4}{|l|^2} P_k(l) = \\ &= 2\pi \int_0^\infty l dl \frac{J_0(l\phi)}{(\pi l)^2} P_k(l) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Partendo dall'equazione di Poisson (3.20) che mette in relazione convergenza e potenziale di deflessione è possibile reiterare il procedimento descritto sopra ed esprimere:

$$P_k(l) = \frac{l^4}{4} P_\psi(l) \quad (5.30)$$

Sostituendo tale relazione si ottiene una funzione di autocorrelazione per l'angolo di deflessione nella forma:

$$\xi_\alpha(\phi) = 2\pi \int_0^\infty l dl \frac{J_0(l\phi)}{(\pi l)^2} \frac{l^4}{4} P_\psi(l) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty l^3 dl J_0(l\phi) P_\psi(l) \quad (5.31)$$

Dove si è esplicitata la dipendenza di ξ_α rispetto al potenziale di lensing.

Conclusioni

L'analisi effettuata ha permesso di esprimere la funzione di autocorrelazione angolare del campo di distribuzione della temperatura della radiazione cosmica in funzione della dispersione dell'angolo di deflessione dovuto a lensing debole. Tramite le trasformate di Fourier di queste funzioni è stato possibile esprimere tale dipendenza anche in funzione dello spettro di potenza della convergenza e del potenziale di lensing, ovvero della trasformata di Fourier delle funzioni di autocorrelazione angolare di tali grandezze. Queste relazioni permettono di collegare le fluttuazioni del valore di temperatura della radiazione cosmica attorno al suo valore medio con la proiezione del potenziale newtoniano sulla superficie in cui avviene il lensing e, di conseguenza, con la distribuzione di materia che ha causato tali fluttuazioni.

Si noti come l'utilizzo del lensing gravitazionale debole come perturbazione del percorso dei fotoni della radiazione cosmica permetta di non dover porre alcuna ipotesi circa la natura della materia coinvolta: ciò comporta che sia possibile determinare le perturbazioni del campo gravitazionale legate alle fluttuazioni di temperatura indipendentemente dalla componente del fluido cosmico che predomina sulle altre, dunque indipendentemente dall'equazione di stato relativa al tipo di universo considerato. L'unica assunzione fatta circa la predominanza di un certo tipo di materia, infatti, ha permesso di identificare la distanza angolare come mappa fra deviazione trasversale e angolare subita da un raggio di luce, relazione utile nell'analisi del lensing gravitazionale debole, ma che non lede la generalità dei risultati ottenuti nell'ultimo capitolo.

Appendice A

Deflessione da massa puntiforme

In questa sezione si procede al calcolo esplicito dell'equazione (3.15) relativa all'angolo di deflessione α causato da una sorgente di massa M puntiforme. Assumendo che non vi siano altre distribuzioni massive oltre a quella considerata e che la massa sia statica, la metrica che descrive il sistema è quella di Schwarzschild (1916) scritta in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.1})$$

dove $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Effettuando la sostituzione $r = R\left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^2$ otteniamo

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{GM}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^4 (dR^2 + R^2 d\Omega^2) \quad (\text{A.2})$$

Essendo $ds = 0$ per i raggi di luce si ottiene, ponendo $dl^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{GM}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^2} dt^2 &= \left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^4 (dR^2 + R^2 d\Omega^2) \implies \\ \implies \frac{dl}{dt} &= \left(1 - \frac{GM}{2R}\right) \left(1 + \frac{GM}{2R}\right)^{-3} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Applicando ora l'approssimazione in campo debole, ovvero $\frac{GM}{2R} \ll 1$ possiamo sviluppare il secondo membro della (A.3) in serie di Taylor, ottenendo:

$$\frac{dl}{dt} \approx 1 - \frac{2GM}{R} \quad (\text{A.4})$$

Effettuando un cambio di coordinate passando da quelle sferiche a quelle cartesiane (x, y, z) e supponendo che il raggio di luce si propaghi nel piano $z = 0$ si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{dl}{dt} \right) = \\ &= 2GM \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

In tale relazione si è supposto che la deflessione del raggio avvenga lungo la direzione x . La coordinata y rappresenta la minima distanza che intercorre fra il raggio di luce e la massa M . Integrando la relazione (A.5) rispetto a x otteniamo l'angolo di deflessione:

$$\alpha = 2GM y \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{-3/2} dx \quad (\text{A.6})$$

effettuando la sostituzione $x = y^2 \tan(u)$, $dx = y^2(1 + \tan^2(u))du$ si ha:

$$= \frac{2GM}{y} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) du = \frac{4GM}{y} \quad (\text{A.7})$$

la quale coincide con la (3.15).

Appendice B

Scattering Thomson: parametri di Stokes

Consideriamo un elettrone libero su cui incide un'onda elettromagnetica. Tale carica subirà un'accelerazione ed emetterà una radiazione con una polarizzazione in generale differente da quella della radiazione incidente. Se tale processo avviene a basse energie e a velocità non relativistiche, si può trascurare l'effetto del campo magnetico sulla carica, dunque l'accelerazione della particella sarà dovuta esclusivamente al campo elettrico. Supponendo che l'onda piana incidente sia approssimativamente monocromatica, ovvero richiedendo che la frequenza delle sue componenti non si discosti troppo da un valor medio fissato ω_0 , le due componenti del campo elettrico saranno.

$$E_x = a_x(t) \cos[\omega_0 t - \Theta_x(t)], \quad E_y = a_y(t) \cos[\omega_0 t - \Theta_y(t)] \quad (\text{B.1})$$

Se esiste una certa correlazione fra queste due componenti l'onda incidente risulterà polarizzata.

La sezione d'urto differenziale relativa a tale processo di scattering è data da:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3\sigma_t}{8\pi} |\epsilon' \cdot \epsilon|^2 \quad (\text{B.2})$$

dove:

- σ_t è la sezione d'urto totale;
- ϵ' e ϵ sono vettori unitari che indicano la direzione di polarizzazione rispettivamente dell'onda incidente ed emessa;

Definiamo ora i parametri di Stokes I, Q, U, V tramite le seguenti medie temporali:

$$\begin{aligned} I &= \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle; \\ Q &= \langle a_x^2 \rangle - \langle a_y^2 \rangle; \\ V &= \langle 2a_x a_y \cos(\Theta_x - \Theta_y) \rangle; \\ U &= \langle 2a_x a_y \sin(\Theta_x - \Theta_y) \rangle; \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

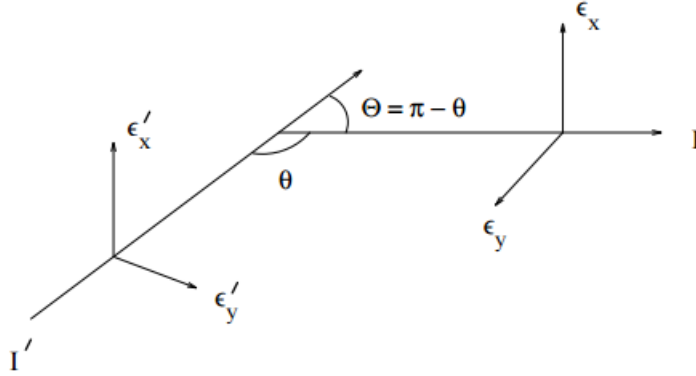


Figura B.1: *Direzione di polarizzazione durante lo scattering Thomson [8]*

Tali parametri determinano la polarizzazione di un'onda elettromagnetica. Si noti come i parametri I e V , relativi rispettivamente all'intensità dell'onda e alla polarizzazione circolare, siano indipendenti dal sistema di riferimento, mentre Q e U dipendano dall'orientazione degli assi x e y . Ruotando dunque le componenti dell'onda elettromagnetica di un angolo ϕ e poi ricalcolando questi ultimi due parametri in funzione delle ampiezze ottenute si ha la legge:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos(2\phi) + U \sin(2\phi) \\ U' &= -Q \sin(2\phi) + U \cos(2\phi) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Si noti come la quantità $Q^2 + U^2$ sia invariante sotto rotazione e, utilizzando la forma di sottrazione della tangente, come l'angolo $\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{U}{Q}\right)$ si trasformi nell'angolo $\alpha - \phi$, definendo dunque una direzione costante. Possiamo ora definire il vettore polarizzazione \mathbf{P} come ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda incidente, di modulo $(Q^2 + U^2)^{\frac{1}{2}}$ e di angolo polare α .

Si consideri ora il seguente processo di scattering: scelta l'asse z come la direzione dell'onda emessa descritta dai quattro parametri di Stokes, la radiazione incidente presenterà nel punto in cui avviene lo scattering un'intensità $I' = I'(\theta, \phi)$. Si definiscano le componenti della polarizzazione della radiazione incidente ϵ_x e ϵ_y in modo che risultino rispettivamente perpendicolare e parallela al piano in cui avviene lo scattering, come in Figura B.1 e si assumano le stesse direzioni per le componenti della polarizzazione della radiazione incidente ϵ'_x e ϵ'_y .

Si descriverà inoltre per comodità di calcolo il fenomeno di scattering attraverso i parametri $I_x = \frac{I+Q}{2}$ e $I_y = \frac{I-Q}{2}$, corrispondenti alle medie temporali delle ampiezze delle componenti \mathbf{E}_x e \mathbf{E}_y della radiazione. Assumiamo che l'intensità della luce incidente fosse uniforme in tutte le direzioni, ovvero che non vi fosse polarizzazione. Ciò comporta

che $Q' = 0$ e di conseguenza:

$$I'_x = I'_y = \frac{I'}{2} \quad (\text{B.5})$$

Lo scattering Thomson, per simmetria, non produce polarizzazioni circolari, quindi possiamo porre $V = 0$. Tramite la relazione fra sezione d'urto differenziale ed ampiezza di diffusione, utilizzando l'equazione (B.2) è possibile ricavarsi i restanti 3 parametri di Stokes:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{3\sigma_t}{8\pi} \left[I'_x (\epsilon'_x \cdot \epsilon_x)^2 + I'_y (\epsilon'_y \cdot \epsilon_x)^2 \right] = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' \\ I_y &= \frac{3\sigma_t}{8\pi} \left[I'_x (\epsilon'_x \cdot \epsilon_y)^2 + I'_y (\epsilon'_y \cdot \epsilon_y)^2 \right] = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Dove si è fatto uso della relazione (B.5) e della definizione dell'angolo θ , compreso fra i vettori ϵ'_y e ϵ_y , rappresentato in Figura B.1. Dalla (B.6) facendo uso delle definizioni dei parametri di Stokes e delle definizioni di I_x e I_y si ottiene:

$$\begin{aligned} I &= I_x + I_y = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' (1 + \cos^2(\theta)) \\ Q &= I_x - I_y = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Si ha che il parametro di Stokes U è ricavabile dalle legge di trasformazione (B.3): da essa si ricava infatti che ruotando di $\frac{\pi}{4}$ il sistema di coordinate i due parametri coincidono. Applicando dunque tale rotazione ai vettori ϵ_x e ϵ_y relativi all'onda diffusa e ripetendo i calcoli (B.6) e (B.7) per il calcolo di Q si otterrà un'espressione per il parametro U nel sistema di coordinate originale:

$$\begin{aligned} I_x^{(R)} &= \frac{3\sigma_t}{8\pi} I' \left[(\epsilon'_x \cdot \epsilon_x^{(R)})^2 + (\epsilon'_y \cdot \epsilon_x^{(R)})^2 \right] = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' \\ I_y^{(R)} &= \frac{3\sigma_t}{8\pi} I' \left[(\epsilon'_x \cdot \epsilon_y^{(R)})^2 + (\epsilon'_y \cdot \epsilon_y^{(R)})^2 \right] = \frac{3\sigma_t}{16\pi} I' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Che comporta $U = 0$.

Il processo di scattering analizzato dunque induce una polarizzazione nella radiazione elettromagnetica, evidenziata dal cambio di valore del suo parametro di Stokes Q , assunto nullo nella radiazione incidente e diverso da zero nella radiazione diffusa. Si noti che tale risultato è comunque dipendente dal sistema di riferimento considerato, nel quale la radiazione incidente è assunta non polarizzata e il parametro U della radiazione diffusa risulta nullo: con un'opportuna rotazione degli assi si otterrebbero dei diversi valori dei parametri di Stokes e dunque una diversa polarizzazione.

Bibliografia

- [1] Bartelmann Mathias, Schneider Peter (1999), *Weak Gravitational Lensing*, Physics Reports 340 (2001) 291-472.
- [2] Casadio Roberto (2015), *Elements of relativity*
- [3] Durrer Ruth (2015), *The Cosmic Microwave Background: The history of its experimental investigation and its significance for cosmology*, arXiv:1506.01907v1 [astro-ph.CO]
- [4] Edwards Don (2007), *Gravitational Bending of Light*, <http://home.fnal.gov/syphers/Education/Notes/lightbend.pdf>
- [5] Fixsen D.J. (2009), *The temperature of the cosmic microwave background*, arXiv:0911.1955 [astro-ph.CO]
- [6] Giannantonio Tommaso, Scranton Ryan, Crittenden Robert G., Nichol Robert C., Boughn Stephen P., Myers Adam D., Richards Gordon T (2008), *Combined analysis of the integrated Sachs-Wolfe effect and cosmological implications*, arXiv:0801.4380 [astro-ph]
- [7] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.(1994), *Gradshteyn and Ryzhik's Table of Integrals, Series, and Products*, Alan Jeffrey (ed.) Fifth edition
- [8] Kosowski Arthur (1999), *Introduction to Microwave Background Polarization*, arXiv:astro-ph/9904102v1
- [9] Lewis Anthony, Challinor Anthony (2008), *Weak Gravitational Lensing of the CMB*, arXiv:astro-ph/0601594
- [10] White Martin, Hu Wayne, *The Sachs-Wolfe effect*, arXiv:astro-ph/9609105v1