Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

NUMERI ORDINALI E CARDINALI

Tesi di Laurea in Matematiche Complementari

Relatore: Chiar.mo Prof.
PIERO PLAZZI

Presentata da:
MARIALISA SIBILANO

Sessione I

Anno Accademico 2009 – 2010

INDICE

INTRODUZIONE

Questa tesi è incentrata sullo studio dei numeri ordinali e cardinali, argomenti che hanno affascinato i più grandi matematici dell'ultimo secolo. Ovviamente però affrontando lo studio dei numeri cardinali ed ordinali transfiniti, non si può non parlare della Teoria degli Insiemi e perlomeno esplicare tutti i suoi assiomi. Si può giustamente affermare che senza ordinali e cardinali non ci sarebbe la teoria degli insiemi; e questo per tre motivi. In primo luogo storicamente questi concetti e la teoria nascono insieme, secondariamente sono insiemi significativi per i fondamenti della Matematica ed infine svolgono il ruolo di quella che si potrebbe definire la spina dorsale dell'universo della teoria degli Insiemi. La Teoria degli Insiemi dovrebbe essere la base di tutte le matematiche: é la disciplina inquadra prima di tutte le altre che dovrebbero avvantaggiarsi del suo linguaggio e dei suoi concetti. Purtroppo, dopo l'entusiasmo iniziale, dagli inizi del 1900 l'importanza della teoria degli insiemi è stata molto ridimensionata: da un lato i paradossi di Russell e la teoria dei sistemi formali hanno mostrato i limiti della teoria in particolare e della matematica formale in generale e dall'altro lato gli assiomi di Peano e i teoremi di Gödel hanno posto l'aritmetica al centro della matematica. Comunque, pur ridimensionata, l'importanza della Teoria degli Insiemi è sempre fondamentale per fornire solide basi a tutte le discipline matematiche, come si può vedere dalle esposizione di logica matematica (come ad esempio [M], che però presenta una diversa assiomatizzazione).

All'inizio dei suoi *Principi della matematica* , Russell diede la seguente forse troppo precisa definizione della matematica:

" la matematica pura è la classe di tutte le proposizioni avente la forma **p implica q** dove **p** e **q** sono proposizioni contenenti una o più variabili, le quali sono le stesse in entrambe le proposizioni, e né **p** né **q** contengono alcuna costante a eccezione delle costanti logiche". [R1, pag. 3 citato in [B]]

Questa definizione mette in evidenza il fatto che la caratteristica essenziale della matematica è costituita dalla sua struttura logica , ma in più Russell afferma che la matematica non è distinguibile dalla logica. Più in generale, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, c'era accordo nel fatto che la matematica è una forma di pensiero assiomatico, in cui a partire da premesse arbitrariamente si traggono conclusioni valide.

Attualmente, l'evoluzione del pensiero matematico, pur accettando la formalizzazione logica a cui tanto ha contribuito Russell ha portato a sfumare questa e molte altre affermazioni "logiciste" nel senso di affermare una interdipendenza nella diversità tra logica (formale) e matematica.

In questa tesi, dunque, dopo aver esposto in linea generale gli assiomi che costituiscono tale teoria, per cui si veda [A] e [Ha] per presentazioni equivalenti, ho trasferito la mia attenzione sui numeri ordinali, sulla loro formalizzazione e soprattutto sull'aritmetica ordinale; in seguito poi ho enunciato le definizioni di numero e di aritmetica cardinali.

Ecco però quanto affermava Russell sugli ordinali e sui cardinali :

"L'aritmetica degli ordinali transfiniti fu sviluppata da Cantor prima dello sviluppo dell'aritmetica dei cardinali transfiniti; l'uso di certe tecniche matematiche ve lo portarono. Ma, dal punto di vista della filosofia matematica, l'aritmetica degli ordinali transfiniti è meno importante e fondamentale della teoria dei cardinali transfiniti. I cardinali sono sostanzialmente più semplici degli ordinali ed il fatto che essi si siano presentati prima come un'astrazione degli altri e che si sia proceduto gradualmente a studiarli per la loro intrinseca importanza è solo una curiosa coincidenza storica. Tutto questo non vale per il lavoro di Frege, nel quale i cardinali, finiti e transfiniti, sono trattati del tutto indipendentemente dagli ordinali; fu però il lavoro di Cantor a far conoscere l'argomento, mentre quello di Frege rimase pressoché ignoto, probabilmente per la difficoltà del suo simbolismo. E i matematici, come tutti, provano maggiore difficoltà nel comprendere e nell'usare nozioni che sono «semplici» in senso logico che nel manipolare nozioni più complesse ma più vicine alla pratica ordinaria. Per queste ragioni, fu riconosciuta solo in modo graduale l'importanza reale dei cardinali nella filosofia matematica. L'importanza del concetto di ordinale, certo non piccola, è nettamente minore di quella di numero cardinale."[R2, pag.102 citato in [B]]

Invece attualmente, dato lo sviluppo del pensiero sui fondamenti della matematica, si tende a fondare la teoria dei numeri cardinali su quella degli ordinali, impostazione che è stata sistematizzata da J. Von Neumann.

Dopo aver esposto l'aritmetica cardinale, mi sono soffermata su un altro grande argomento enunciato da Cantor, ossia **l'ipotesi del continuo**. Anche questo argomento ha suscitato grande interesse da parte dei matematici di inizio XX secolo, uno tra questi è Hilbert. Infatti al Congresso di Parigi del 1900, nella lista di problemi matematici presentata da Hilbert il primo dei problemi era il ***problema di Cantor della potenza del continuo :***

"Le indagini di Cantor [. . .] rendono molto verisimile un teorema la cui dimostrazione peraltro non è ancora stata ottenuta da nessuno nonostante gli sforzi più assidui; questo teorema dice: Ogni sistema di infiniti numeri reali, cioè ogni insieme infinito di numeri o di punti, è equivalente o all'insieme dei numeri interi naturali 1; 2; 3; … oppure all'insieme di tutti i numeri reali e quindi del continuo [. . .] perciò, nel senso dell'equivalenza, ci sono solo due insiemi di numeri, gli insiemi numerabili e il continuo." [Bo, pag. 344]

Hilbert prosegue ricordando anche un'altra affermazione, assai notevole, fatta da Cantor, che sta in strettissima connessione con il teorema precedente:

“Presentata la definizione di insieme bene ordinato, sorge ora la questione: non si può ordinare la totalità di tutti i numeri in un altro modo, cosicchè ogni sottoinsieme abbia un elemento che viene prima di tutti gli altri, ossia non si può concepire anche il continuo come un insieme bene ordinato? Cantor crede che si debba rispondere affermativamente. Mi sembra altrettanto desiderabile ottenere una dimostrazione diretta di questa notevole asserzione di Cantor [H].”

Benchè Hilbert ponga la questione del buon ordine solo per il continuo, i due problemi sono quelli che abbiamo visto essere rimasti irrisolti per la teoria di Cantor.
Al termine di questa tesi il mio interesse si è volto sui grandi cardinali, riassumendone i principali teoremi.

CAPITOLO 1

1.1 TEORIA DEGLI INSIEMI :cenni storici

La teoria degli insiemi svolge un ruolo importante per i fondamenti della matematica.
Prima della metà del XIX secolo la nozione di insieme veniva considerata solo come qualcosa di intuitivo e generico. Essa è stata inizialmente sviluppata nella seconda metà del XIX secolo proprio da Cantor; egli però sviluppò una teoria degli insiemi ancora in termini "ingenui", nel senso che non aveva una precisa assiomatizzazione in mente. In retrospettiva possiamo dire che Cantor usava implicitamente l'assioma di estensione, l'assioma dell' infinito e l'assioma di comprensione. Tuttavia l'ultimo porta al paradosso di Russell, mediante la costruzione del non-insieme a:={x;x non è elemento di x} degli insiemi che non appartengono a se stessi. Il proliferare di paradossi portò alla revisione della teoria seguendo l'idea che i paradossi fossero dovuti alla possibilità di formare "insiemi" troppo grandi. Infatti allo scopo di evitare il paradosso di Russell e altri simili, Ernst Zermelo nel 1908 fece uso di un sistema di assiomi per la teoria degli insiemi come teoria del primo ordine con uguaglianza e con il predicato binario $\in$, e nessun altro simbolo specifico. Incluse in questo sistema l'assioma della scelta,molto controverso, che gli fu necessario per la dimostrazione del teorema del buon ordinamento. Questo sistema è

stato successivamente raffinato da Adolf Fraenkel e Thoralf Skolem.

1.2 GLI ASSIOMI DI ZF (Zermelo- Fraenkel)

Ogni oggetto della teoria è un insieme.

ASSIOMA 1 DI ESTENSIONE [E]

“ Due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi
$\forall a \forall b (a = b \Leftrightarrow \forall z (z \in a \Leftrightarrow z \in b))$”

L'assioma di estensione è generalmente considerato non controverso, e appare in questa forma o in una forma equivalente in praticamente tutte le assiomatizzazioni della teoria degli insiemi.

Il principio di estensione indica quali sono le relazioni fondamentali tra insiemi: l’appartenenza e l’uguaglianza. Questo principio comporta che differenti descrizioni degli elementi di a, loro ripetizioni ed enumerazioni in ordine diverso non cambino l’insieme.

ASSIOMA 2 DI ***SEPARAZIONE (O SPECIFICAZIONE) [SS]***

"Dato un insieme a ed una condizione S esiste l'insieme che ha per elementi esattamente gli y∈a per cui vale S
$\forall a\ \exists b\ \forall y\ (y \in b \Leftrightarrow y \in a \wedge S)$"

qui S indica una fbf con y ed eventualmente altre variabili libere (ma non b),$\forall$ a $\exists$ b $\forall$y (y $\in$ b $\Leftrightarrow$ y $\in$ a $\wedge$ y $\notin$ b) permette l'esistenza del <u>solo</u> $\varnothing$,questo è uno schema di infiniti assiomi; in base a questo assioma ed ad [E] è possibile introdurre $\varnothing$. Si ha :

$\exists$ x (x = x), e quindi esiste almeno un insieme b e
$\varnothing = \{ x \in b;\ x \neq x \}$

ASSIOMA 3 DELLA ***COPPIA [C]***

"Dati due insiemi c'è sempre un insieme che li contiene come elementi.(Esiste un insieme che ha per elementi x e y)
$\forall x\ \forall y\ \exists c\ (x \in c \wedge y \in c)$"

Come conseguenza :
$\{x ; y\} = \{ z \in c ;\ z = x \ \vee\ z = y \}$

- l'esistenza di $\{x\} = \{x;x\}\ \forall x$
- la possibilità per ogni x,y di costruire la coppia ordinata

$\langle x , y \rangle = \{ \{x\} ; \{x,y\} \}$, non è ancora possibile costruire $a \times b$

- una relazione è un insieme di coppie ordinate , e una funzione una relazione univoca
- si può definire l'inclusione in questo modo

$a \subseteq b$ sta per $\forall z (z \in a \Rightarrow z \in b)$

$a \subset b$ sta per $a \subseteq b \wedge a \neq b$

si dice che a è un sottoinsieme (eventualmente proprio) di b

- proprietà dell' $\subseteq$:

Per ogni a , b, c

$(a \subseteq b \wedge b \subseteq a) \Leftrightarrow a = b$,

$a \subseteq b \Rightarrow (b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c)$,

$\emptyset \subseteq a$, $a \subseteq a$.

ASSIOMA 4 DELL'UNIONE [U]

"Dato un insieme a, esiste un insieme b che contiene (come elementi) tutti gli elementi di elementi di a:

$\forall a \, \exists b \, \forall z (\exists w (z \in w \wedge w \in a) \Rightarrow z \in b)$"

[E] , [S] determinano poi univocamente l'insieme

$\bigcup a = \{x \in b; \exists \, y \in a , x \in y \}$

una notazione più usuale per $\bigcup a$ è :

$\bigcup_{y\in a} y$ dove y è una variabile apparente.

Se c = {a ; b} si ha

$\bigcup\{a,b\}=\{z;\ z\in a \vee z\in b\}$ che si scrive $a\cup b$

L'intersezione non richiede un assioma specifico potendosi costruire direttamente per specificazione (almeno se $a\neq\emptyset$): ad esempio $b_1\cap b_2=\{z\in b_1, z\in b_2\}$ è individuato come sottoinsieme di b_1.

Se $\exists$ a P(a) si può definire $\bigcap_{P(x)} x=\{y\in a;\ \forall x\ (P(x)\Rightarrow y\in x)\}$ anche se P non individua un insieme.

Usando l'assioma della coppia e dell'unione si ha che dati $x_1,\ldots,x_n$ esiste l'insieme $\{x_1;\ldots;x_n\}$:

$\{x_1;\ x_2;\ x_3\}=\{x_1\ ;\ x_2\}\cup\{x_3\}$ ecc.

ASSIOMA 5 DELLA POTENZA [P]

"Dato a, esiste un insieme che ha tra i suoi elementi tutti i sottoinsiemi di a:

$$\forall a\ \exists b\ \forall x(x\subseteq a\Rightarrow x\in b)"$$

si può determinare $\{x;\ x\subseteq a\}$ che è l'insieme potenza p(a). Si ha subito $\emptyset$, $a\in p(a)$; se $x\in a$, $y\in b$ $(x,y)\in p(p(a\cup b))$;

con SS, P, C , U si può definire il prodotto cartesiano:

$a \times b=\{z\in p(p(a\cup b));\ \exists x\ \exists y(x\in a\wedge y\in b\wedge z=\langle x;y\rangle\}$

di conseguenza si possono introdurre nel solito modo relazioni e funzioni tra insiemi.

Quindi l' assioma di estensione, lo schema di separazione, gli assiomi di coppia, unione e potenza.

Questi assiomi descrivono una teoria generale degli insiemi senza riferimento specifico alla matematica, questi assiomi sono consistenti e formano una teoria consistente, ma non permettono di giustificare l'esistenza di insiemi infiniti, infatti da questo modello si vede che sulla base di questi assiomi non si può giustificare l'esistenza di N.

Dati $S(a)= a \cup \{a\}$

applichiamo questo procedimento a partire da $\varnothing$

$0 := \varnothing$ (usando $\cup$)

$1 : =S(0)=\varnothing \cup \{\varnothing\} =\{0\}$

$2 :=S(1)=1\cup\{1\}=\{0;1\}$

"

"

"

$S(n) := n \cup \{n\}=\{0,.....,n\}$ rimane definito per ogni numero naturale n; senza ulteriori assiomi nulla ci garantisce che questi singoli insiemi siano contenuti in un insieme.

Chiamiamo INDUTTIVO un insieme a tale:

$$\forall x\ (x \in a \Rightarrow S(x) \in a \quad \wedge \ \varnothing \in a\ )$$

o a, si introduce con [U] e [C] Se la teoria degli insiemi ci serve per la matematica vorrà dire che dovremo inserire nuovi assiomi, per garantire l'esistenza di N.

In realtà ne basta uno:
ASSIOMA DELL'INFINITO E SCHEMA DI RIMPIAZZAMENTO

Assioma dell'INFINITO [I]

"*Esiste un insieme a induttivo*
$\exists a\ (\varnothing \in a \wedge \forall x\ (x \in a \Rightarrow x^+ \in a))$"

E' ora facile introdurre N come il minimo sottoinsieme induttivo
Intuitivamente $0 \in N, 1 \in N$ ecc. e nessun altro elemento di a appartiene ad N :
$N = \cap$ {a, a insieme induttivo}
E' facile vedere che $\{0,....,n\} \subseteq N\ \forall\ n \in N$,

si pone $n < m \iff n \in m$ cosa del tutto non intuitiva, ma comoda, perché permette di introdurre la relazione naturale < come la $\in$ pura e semplice ristretta ad N.

ponendo $n+0=n$;
$n+m^+=(n+m)^+$
si ottiene una definizione di + che permette di sviluppare via via tutta l'aritmetica sulla base degli assiomi di Peano.

Con questo assioma non possiamo più dimostrare che la teoria ZF è consistente, perché se lo fosse dovrebbe anche esserlo l'aritmetica, ma sappiamo che la teoria degli insiemi non può dimostrare che essa stessa è consistente e questo la rende soggetta al secondo teorema di incompletezza.

Questa teoria non ha permesso di formulare i paradossi conosciuti e non ha mostrato altre contraddizioni quindi è accettata anche se non è dimostrabile la consistenza nel suo stesso ambito.
L'assioma dell'infinito deve il suo nome al fatto che garantisce l'esistenza di un insieme (ben ordinato) infinito; esso però permette anche con lo stesso tipo di costruzioni,come vedremo meglio più avanti, di costruire gli ORDINALI oltre N (ricordiamo che si pone $\omega = N$, come ordinale).

L'assioma [I] permette di formare

$\omega+1= S(\omega)$,

$\omega+2 = SS(\omega)$,……..,ω+n,…….

ma in generale permette di procedere alla costruzione di ordinali transfiniti, ma non di tutti quelli “definiti” da Cantor.

Infatti l’assioma dell’infinito ci garantisce solo l’esistenza di ω perché definisce un qualsiasi insieme induttivo.

Vediamo la difficoltà in un caso semplice in cui sarebbe possibile ottenere lo stesso risultato senza ulteriori assiomi.

Si è tentati di porre:

$$\omega+\omega=\bigcup_{n\in N}(\omega+n) \qquad ^{(*)}$$

così come $\omega=\bigcup_{n\in N} n$, ma non è detto che $^{(*)}$ esista come insieme, se non lo è $\{ \omega + n \; ; \; n = 0,1,....\}$

Per poter formare $\omega+\omega$ si può adoperare un nuovo assioma (schema di assiomi), si può pensare ad un rimpiazzamento

$$\begin{array}{ccccccc} \{\omega, & \omega+1, & \ldots, & \omega+n, & \ldots\} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ \{0, & 1, & \ldots, & n, & \ldots\}=\omega \end{array}$$

se ho un insieme e ad ogni suo elemento ne sostituisco un altro ben preciso, la nuova collezione ottenuta con il rimpiazzamento è ancora un insieme, dunque così facendo posso enunciare:

SCHEMA DI ASSIOMI DI ***RIMPIAZZAMENTO [R]***

Dato un insieme a, se ad ogni suo elemento x si sostituisce, in maniera univoca, un elemento F(x), si può formare l'insieme $\{F(x);\ x \in a\}$.

Se $\forall x \in a\ \exists!\, y\ P(y)$ *allora si può formare l'insieme*
$\{y\ ;\ \exists x \in a\ \cap P(y)\ \}$ *[P è una fbf con variabili libere x,y* $(\varphi(x,y))$*]*

Una forma alternativa di [R] è:

"L'IMMAGINE, TRAMITE UN PREDICATO UNIVOCO, DI UN INSIEME E' UN INSIEME"
Nel caso degli ordinali, l'assioma del rimpiazzamento ci garantisce che :

$n \rightarrow \omega+n$ è una funzione, allora l'immagine tramite una funzione di un insieme è ancora un insieme.

Gli assiomi visti finora possono bastare per sviluppare una "teoria elementare generale" sufficiente per inquadrare la matematica classica, ma per ottenere risultati più profondi (o per studiare le capacità o i limiti di ZF) possono essere introdotti ulteriori assiomi di interesse logico matematico.

ASSIOMA DI FONDAZIONE [FA]

"Ogni insieme è ben fondato".

L'assioma di Fondazione esclude tra le altre cose che ci siano insiemi elementi di se stessi.

"UN INSIEME b E' BEN FONDATO SE NON AVVIENE CHE $b = a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni a_3 \ni \ldots \ni a_n \ni a_{n+1} \ldots$"

[FA] ha per conseguenza l'impossibilità di autoriferimenti ciclici del tipo $a \in a$ oppure $a_1 \in a_2 \in a_3 \in \ldots \in a_1$

$\emptyset \in \{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\} = I$ è ben fondato;

$a = \{a\}$ non è ben fondato : ……..$a \in a \in a$

L'assioma di fondazione permette di trovare un modello della teoria degli insiemi che è molto semplice: a partire da un insieme vuoto si può ottenere qualsiasi insieme.

[FA] viene spesso visto come conseguenza di un assioma di regolarità [REG] (che è di fatto più forte dell'assioma di fondazione).

ASSIOMA DI REGOLARITA' [REG]

Dato $a \neq \emptyset$ c'è un suo elemento disgiunto da esso

$\forall a \ (a = \emptyset \vee \exists b \in a \ (a \cap b = \emptyset))$

REG $\Rightarrow$ FA

FA o REG aggiunti a ZF non cambiano la teoria , infatti questa rimane consistente se lo era prima. Negando l'assioma di regolarità si può ottenere una teoria consistente.

1.3 Assioma della SCELTA [AC]

Questo assioma formalizza un principio liberamente usato già da Cantor, ma criticato da altri matematici dell'epoca come Peano e Poincaré per citarne alcuni.

Cantor dava per scontato che quando abbiamo infiniti insiemi $\neq\emptyset$ possiamo costruire un nuovo insieme "scegliendo" un singolo elemento da ciascuno di quelli di partenza. Se il numero di insiemi di partenza è finito gli altri assiomi della teoria degli insiemi sono sufficienti a garantire la possibilità di questa scelta; nel caso di un numero infinito di insiemi invece occorre introdurre nella teoria l'assioma della scelta; tale assioma deve dunque il suo nome al fatto che si postula di poter sempre effettuare un numero ,anche infinito, di scelte simultanee di un elemento da ciascun insieme di una certa famiglia, anche senza che si possa specificare un particolare algoritmo di scelta.

"Dato $a \neq \emptyset$ esiste una "funzione di scelta" F di dominio a ,tale che $F(x)\in x \quad \forall x\in a\ ,\ x \neq \emptyset$"

In molti casi ZF viene enunciato considerando tra i suoi assiomi quello della scelta: allora più precisamente dobbiamo parlare di ZFC.

Nella matematica contemporanea l'assioma della scelta ha molte importanti conseguenze in tutti i rami e ciò ha senz'altro contribuito a far sì che fosse diffusamente accettato.

Alcuni risultati per i quali è indispensabile l'assioma della scelta:

Ogni spazio vettoriale $\neq \{ 0 \}$ ammette una base,
Ogni anello unitario ammette ideali massimali,
Il teorema di compattezza per la logica dei predicati,
Il teorema di Hahn-Banach.

Se da un lato l'assioma della scelta consente di dimostrare dei risultati importanti, dall'altro porta anche alla costruzione di oggetti matematici controintuitivi, come sottoinsiemi di R non misurabili secondo Lebesgue (vedi l'insieme di Vitali) o come partizioni finite della sfera che riassemblate con congruenze opportune diventano due sfere di uguale raggio (paradosso di Banach-Tarski).

Esistono molte altre formulazioni che si possono dimostrare equivalenti all'assioma della scelta: vale a dire che accettando come assiomi una qualunque di esse si può dimostrare in ZF, AC, e viceversa , accettando AC esse sono tutte dimostrabili in ZF.

Le più comuni tra esse sono:

- LEMMA DI ZORN

Dato un insieme $\neq \emptyset$ parzialmente ordinato, se ogni catena ha un maggiorante (è sup.lim.) esiste un elemento massimale.

- TEOREMA DEL BUON ORDINAMENTO (DI ZERMELO)

Ogni insieme è ben ordinabile.

- ASSIOMA MOLTIPLICATIVO

Il prodotto cartesiano di una famiglia $\neq \emptyset$ di insiemi non vuoti è non vuoto.

- TEOREMA DI HARTOGS

Due cardinalità si possono sempre confrontare .

Nel 1938 Kurt GÖDEL ha dimostrato che se il sistema assiomatico di Zermelo- Fraenkel è consistente allora rimane consistente anche con l'aggiunta dell'assioma della scelta.
Il risultato di Gödel è stato ottenuto costruendo un modello per la teoria degli insiemi in cui l'assioma della scelta era valido (il modello è noto come " universo degli insiemi costruibili").
Tuttavia l'assioma della scelta non si può dimostrare a partire dagli altri assiomi, come è stato provato da P.J. Cohen nel 1963. La dimostrazione di P.J. Cohen si basa sulla costruzione di un modello alternativo di ZF in cui AC non vale ed ha quindi dimostrato che AC è indipendente da ZF.

IPOTESI DEL CONTINUO [CH]

In matematica, l'ipotesi del continuo è un'ipotesi avanzata da Georg Cantor che riguarda le dimensioni possibili per gli insiemi infiniti$\subseteq$R. Cantor introdusse il concetto di cardinalità e di numero cardinale (che possiamo immaginare come una "dimensione" dell'insieme) per confrontare tra loro insiemi transfiniti, e dimostrò l'esistenza di insiemi infiniti di cardinalità diversa, come ad esempio i numeri naturali e i numeri reali. L'ipotesi del continuo afferma che:

"Non esiste nessun insieme $\subseteq$ R la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri naturali e quella dei numeri reali."

Dato che la cardinalità degli interi $|Z|$ e dei razionali $|Q|$ è $\aleph_0$ (*aleph-zero*) cioè la cardinalità di ω e la cardinalità dei numeri reali $|R|$ è $2^{\aleph_0}$, l'ipotesi del continuo afferma che non esiste alcun cardinale intermedio tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$.

Il nome di questa ipotesi deriva dal nome tradizionale della retta dei numeri reali, chiamata appunto il *continuo*. Vi è anche una generalizzazione dell'ipotesi del continuo, denominata **ipotesi generalizzata del continuo**, e che afferma che se $\aleph$ è un cardinale infinito, non vi è alcun cardinale intermedio tra $\aleph$ e $2^{\aleph}$ (dove $2^{\aleph}$ è il numero cardinale di un qualsiasi insieme potenza p(A), se card A $=\aleph$).

Gli studi di Gödel e Cohen hanno permesso di stabilire che nella teoria degli insiemi (di Zermelo - Fraenkel comprensiva dell'assioma di scelta ZFC) l'ipotesi del continuo risulta *indecidibile*.

Cantor era convinto della verità dell'ipotesi del continuo, e tentò invano per molti anni di dimostrarla. Essa divenne la prima nella lista dei problemi (oggi noti come *Problemi di Hilbert*) che il grande matematico David Hilbert presentò al Congresso Matematico Internazionale di Parigi nell'anno 1900.

Nel 1938-1940, Kurt Gödel fece un passo in avanti, dimostrando che l'ipotesi del continuo non può essere dimostrata falsa usando il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, neppure con l'aggiunta dell'assioma della scelta. D'altra parte, nel 1963 Paul Cohen dimostrò che CH non può essere neppure dimostrata vera a partire da quegli assiomi. Il risultato complessivo è che CH è *indipendente* dal sistema di assiomi di ZFC. Occorre tenere conto che entrambi questi risultati partono dall'assunto che gli assiomi di Zermelo-Fraenkel non siano tra loro contradditori, cosa che si suppone generalmente essere vera.

Il risultato per cui un'affermazione non possa essere né provata né refutata in un certo insieme di assiomi non è sorprendente: il teorema di incompletezza di Gödel afferma esattamente che se un ragionevole sistema di assiomi è abbastanza potente e senza contraddizioni esisteranno sempre al suo interno affermazioni di questo tipo. L'indipendenza di CH è però ugualmente disturbante, perché è stato il primo esempio concreto di una affermazione interessante e importante a cui si è potuto dire con sicurezza che era impossibile rispondere con un "sì" o un "no" a partire dal gruppo di assiomi universalmente accettati per costruire la nostra matematica.

CAPITOLO 2

2.1 GLI ORDINALI

Un numero ordinale è ,per definizione, un tipo speciale di insieme ben ordinato.

Un numero naturale può essere usato per due scopi: per descrivere la *grandezza* di un insieme, o per descrivere la *posizione* di un elemento in una successione. Mentre nel mondo finito questi due concetti coincidono, quando si ha a che fare con insiemi infiniti è necessario distinguerli. La nozione di grandezza porta ai numeri cardinali, anch'essi scoperti da Cantor, mentre la nozione di posizione è generalizzata dai numeri ordinali che studieremo in questo capitolo.

Il concetto di ordinale è legato,come dice il nome al tipo d’ordine che si può dare ad un insieme, mettendo in fila, in maniera ordinata, i suoi elementi. L’idea intuitiva di mettere in fila, si traduce , matematicamente nel concetto di buon ordinamento (o buon ordine).

DEFINIZIONE 2.1.1.(RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE E TOTALE

Una relazione definita in un insieme non vuoto X, si dice di ordine parziale(definita col $\leq$) in X se gode delle proprietà:

antisimmetrica $\forall x,y \text{ e } z \in X$, $x \leq y \text{ e } y \leq x \Rightarrow x = y$

transitiva $\forall x,y \text{ e } z \in X$, $x \leq y \text{ e } y \leq z \Rightarrow x \leq z$

riflessiva $\forall x,y \text{ e } z \in X$, $x \leq x$

Se per tutti gli x e y in X è $x \leq y$ oppure $y \leq x$, $\leq$ si chiama un ordine totale.

Un insieme parzialmente ordinato è una coppia ordinata $(X, \leq)$, dove X è un insieme e $\leq$ un ordine parziale in X.

$x < y$ si definisce come $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$ (Ordine stretto)

DEFINIZIONE 2.1.2.(DI BUON ORDINAMENTO*)*

Un insieme parzialmente ordinato$(X, \leq)$ si dice ben ordinato (ed il suo ordinamento si chiama un buon ordinamento) se ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette elemento minimo.

Di conseguenza, X è totalmente ordinato. Conviene utilizzare più spesso al posto del $\leq$ la correlata relazione di <.

(X ,<) è ben ordinato se e solo se < è irriflessiva, transitiva e dotata delle proprietà di minimo.

DEFINIZIONE 2.1.3.(RELAZIONE DI EQUIPOTENZA)

Diremo che due insiemi A e B sono equipotenti se esiste una funzione bigettiva tra di loro.

L'assioma della scelta (AC) ci assicura che ogni insieme possa essere bene ordinato, gli ordinali si possono pensare come rappresentanti dei possibili "tipi di ordine" di insiemi che siano stati bene ordinati, ma questa è una definizione vaga e non corretta. Prima di definire che cosa sia un ordinale, bisogna spiegare cosa si intende per insieme transitivo.

DEFINIZIONE 2.1. 4.(DI INSIEME TRANSITIVO)

Un insieme si dice transitivo se ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme, in simboli, $b\in A \Rightarrow b \subseteq A$, cioè $a\in b\in A \Rightarrow a\in A$.

Ad esempio la seguente successione comprende solo insiemi transitivi :

$\varnothing$; $\{\varnothing\}$; $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

invece

$\{\{\varnothing\}\}$, $\{\{\{\varnothing\}\}\}$

non sono transitivi.

In generale, se a è transitivo lo è $S(a) = a \cup \{ a \}$

Possiamo dunque dare una prima definizione di numero ordinale:

DEFINIZIONE 2.1.5. (di numero ordinale)

Un numero ordinale (o, più brevemente, un ordinale) è un insieme X tale che X sia transitivo e ben ordinato dall'$\in$. (Come relazione stretta : $x \in y \in X$ verrà scritto anche $x < y$, $x,y \in X$.)

Dalla nostra definizione di ordinale possiamo già esplicare una proprietà elementare ossia:

1) *"Ciascun elemento di un numero ordinale X è un numero ordinale."*

Ricordando che un <u>segmento iniziale</u>, indicato con s(a) è l'insieme $\{x \in X; x<a\}$ con X insieme parzialmente ordinato ed $a \in X$, possiamo dire che:

2) *"Ogni segmento iniziale di un $a \in X$, con X numero ordinale è un numero ordinale = a."*

Più precisamente $s(a)=a \quad \forall a \in X$

3) *Poiché S(x) è un numero ordinale se lo è x,*

"Ogni numero ordinale è un segmento iniziale di qualche numero ordinale"

LEMMA 1.

Nessun numero ordinale è un elemento di se stesso. Inoltre, se a è un numero ordinale, allora a $\cup$ {a} è un numero ordinale distinto da a.

Dimostrazione

Sia a un numero ordinale, allora per (3) non è possibile che $a \in a$. Così in particolare $a \neq a \cup \{a\}$. □

Si ha anche:

TEOREMA 1. [ABIAN]

Un insieme X è un numero ordinale se e solo se :

1) Ogni elemento di X è un sottoinsieme di X (transitività),

2) X è ben ordinato da $\subset$, tra sottoinsiemi di X,

3) Nessun elemento di X è un elemento di se stesso.

Dimostrazione

$\Rightarrow$) Sia X un insieme ben ordinato da $\subset$, e valgono 1 e 3;

per ogni elemento x di X si ha che $x \subset X$, quindi X è transitivo da (1),

in base alla definizione di segmento iniziale e alla def. 5.2 per tutti gli elementi x e y di X si ha :

$(x \in y) \Leftrightarrow (s(x) \subset s(y))$ e quindi $\in$ è un buon ordinamento per X

Quindi X è un ordinale (vedi def. 1).

$\Leftarrow$) Il viceversa è immediato dalla definizione 2.1.4. □

DEFINIZIONE 2.1.6.(SUCCESSIVO)

Il successivo immediato di ogni numero ordinale a è il numero ordinale $a \cup \{a\}$.

Denotiamo con S(a) il successivo immediato di un ordinale v, dunque

$$S(a) = a \cup \{a\}$$

Sia b un numero ordinale. Allora

b = S(a) se e solo se a è l'ultimo elemento (il massimo)di b .

Diremo che un ordinale *a* e *l'antecedente immediato* di un ordinale *b* se e solo se *b* è il successivo immediato di *a* e tale antecedente è unico e si indica con b^-.

Se un numero ordinale *a* ha un antecedente immediato *b*, questo significa che *a=S(b)*. Ciascun numero ordinale finito (diverso da 0) ha un antecedente
immediato. Non ogni numero ordinale transfinito ha un antecedente immediato. Quelli che non lo hanno si chiamano *numeri limite.*

DEFINIZIONE 2.1.7.(ORDINALE LIMITE)

Un numero ordinale non nullo si dice limite e lo indichiamo con λ *(o numero limite) se non è un successore.*

Ogni insieme di ordinali ha un *estremo superiore*, che è l'ordinale ottenuto prendendo l'unione di tutti gli ordinali dell'insieme; nel caso di un ordinale limite λ si ha che :

$$\bigcup_{\beta \prec \lambda} \beta = \lambda$$

(Si noti che $\bigcup_{\beta \prec \lambda} \beta \neq \lambda$ se $\lambda = S(\alpha)$)

Dunque possiamo affermare che ci sono tre tipi di ordinali :

- 0 zero
- S(*a*) successivo
- λ limite

Si può porre:

$0 := \varnothing$

$1 := \{0\} = \{\varnothing\} = S(0)$

$2 := \{0,1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = S(1)$

$3 := \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = S(2)$

$4 := \{0,1,2,3\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = S(3)$

……………………………………………

E così via, abbiamo così costruito i numeri naturali come insiemi, in modo tale che ogni numero naturale sia l'insieme di tutti i numeri naturali elementi di esso.

Quindi:

Ogni numero naturale è un ordinale.

Si osservi che NON ESISTE UN INSIEME DI TUTTI I NUMERI ORDINALI. Se supponiamo per assurdo che questo insieme X esista poiché per ogni numero ordinale ne esiste uno strettamente più grande,il successivo S(X) , e si avrebbe X $\in$ S(X) , contro la (3)del teorema 1. La contraddizione basata sull'ipotesi che questo insieme esista , si chiama PARADOSSO DI BURALI-FORTI.

Nella teoria degli insiemi importanza essenziale assumono le dimostrazioni e definizioni per *induzione transfinita* che è l'analogo dell'induzione matematica applicata agli insiemi ben ordinati.

Se si vuole dimostrare che una proprietà P vale per tutti gli ordinali si può applicare l'induzione transfinita coi seguenti passi:

Dimostrare che, per ogni ordinale b, se P(a) vale per tutti gli ordinali $a<b$ allora vale anche P(b)

L'ultimo passo viene spesso diviso in due casi: il caso di ordinale successore, dove si può applicare il ragionamento induttivo classico (mostrare che P(a) implica P(a+1)) e il caso di ordinale limite, che non ha predecessore e quindi non può essere trattato con quel ragionamento.

Tipicamente il caso di ordinale limite viene affrontato notando che un ordinale limite b è, l'unione di tutti gli ordinali $a<b$ e usando poi questo fatto per dimostrare che, supponendo che P(a) valga per tutti gli $a<b$, vale anche P(b).

Si può anche sfruttare la condizione di minimo e considerare il minimo ordinale *a* per cui P non vale, allora se ciò conduce ad ad un assurdo P vale per ogni ordinale. Questi tipi di procedimento si possono anche applicare agli elementi di un numero ordinale.

***DEFINIZIONE 2.1.8.*(INSIEMI SIMILI)**

Dire che due insiemi parzialmente ordinati X e Y sono simili (X ≈Y) significa che esiste una corrispondenza biunivoca, che chiameremo f, da X su Y, tale che, se a e b sono in X, condizione necessaria e sufficiente perché f(a)≤f(b)(in Y) è che a ≤ b(in X).
Una corrispondenza come f si chiama talvolta <u>similitudine</u> se X ≈Y e X è ben ordinato, la similitudine f è unica e Y è ben ordinato.
TEOREMA 2.

Se due ordinali a e b sono simili allora sono uguali.
In simboli, $a \approx b \Rightarrow a = b$

Dimostrazione

Consideriamo *a* e *b* numeri ordinali e sia *f* una similitudine dall'ordinale *a* all'ordinale *b* . Vogliamo far vedere che

$$x = f(x) \quad \text{per ogni } x \in a$$

la dimostrazione è una semplice induzione transfinita . Scriviamo

$S = \{ x \in a : f(x) = x \}$. Per ogni x in a , il più piccolo elemento di a che non appartiene ad $s(x)$ è lo stesso x. Poiché f è una similitudine, ne segue che il più piccolo elemento di b che non appartiene all'immagine di $s(x)$ mediante f è $f(x)$. Questi enunciati implicano che , se $s(x) \subset S$, $f(x)$ e x sono numeri ordinali aventi gli stessi segmenti iniziali e quindi che $f(x) = x$. Abbiamo così dimostrato che $x \in S$ ogni volta che $s(x) \subset S$. Il principio di induzione transfinita implica che $S = a$ e da ciò segue che $a = b$. □

TEOREMA 3. (LEGGE DI TRICOTOMIA)

Dati comunque due numeri ordinali a e b, uno ed uno dei tre casi seguenti si può presentare:

$a = b$,
a è uguale a un segmento iniziale di b,
b è uguale ad un segmento iniziale di a.

Dimostrazione

Essendo i numeri ordinali a e b insiemi ben ordinati, allora uno ed uno solo dei tre casi seguenti si può presentare:

$a \approx b$ per il teorema 2 , $a = b$,

$a \approx s(b)$ allora per la (2) e il teorema 2 $a = s(b)$,

$b \approx s(a)$ allora per la (2) e il teorema 2 $b = s(a)$,

Dunque se *a* e *b* sono numeri ordinali, in particolare essi sono insiemi ben ordinati e ,per conseguenza, sono simili, oppure uno è simile ad un segmento iniziale del'altro. Se *b* è simile ad un segmento iniziale di *a*, *b* è simile ad un elemento di *a.* Poiché ogni elemento di *a* è un ordinale , ne segue che *b* è un elemento di *a*, o, in altre parole, *b* è un segmento iniziale di *a*.

A questo punto affermiamo che :

OSSRVAZIONE 2.1

Se a e b sono numeri ordinali distinti, gli enunciati:

$b \in a$,

$b \subset a$, $b \neq a$

$b \in S(a)$ in $S(a)$

sono tutti equivalenti fra loro.

COROLLARIO (LEGGE DI TRICOTOMIA)

Per tutti i numeri ordinali a e b , uno ed uno solo dei tre casi seguenti si può presentare:

$a = b$ o $a \in b$ o $b \in a$

TEOREMA 4.

Per ogni insieme ben ordinato X esiste un unico numero ordinale a simile a X (a è il tipo d'ordine di X) .

Dimostrazione

Osserviamo che X non può essere simile a ordinali distinti *a* e *b*. Se infatti fosse $X \approx a$ e $X \approx a$, allora ne seguirebbe che $a \approx b$, il che implicherebbe $a = b$, contraddicendo il fatto che *a* e *b* sono due ordinali distinti. Ne segue che X può essere simile al più ad un numero ordinale.

Supponiamo ora che X sia un insieme ben ordinato, e supponiamo che un elemento *a* di X sia tale che il segmento iniziale determinato da ciascun antecedente di *a* sia simile ad un unico numero ordinale.

L'assioma di sostituzione implica l'esistenza di un insieme che consiste esattamente dei numeri ordinali simili ai segmenti iniziali determinati dagli antecedenti di *a*. Ne segue che s(*a*)è simile ad un ordinale. A questo punto possiamo applicare il principio di induzione transfinita ; la conclusione è che ciascun segmento iniziale di X è simile a qualche numero ordinale. Questo fatto giustifica un'altra applicazione dell'assioma di sostituzione e la conclusione finale è che X è simile a qualche numero ordinale, come volevasi dimostrare.

2.2 L'ARITMETICA ORDINALE

ADDIZIONE DI NUMERI ORDINALI

DEFINIZIONE 2.2.1. Per definire la somma $a + b$ dei due ordinali a e b si procede come di seguito: per prima cosa gli elementi $x \in a$, $y \in b$ sono rinominati come coppie $(x;1)$e $(y;2)$ in modo tale che a e b risultino disgiunti, poi l'insieme bene ordinato $a \times \{1\}$ viene scritto"alla sinistra" dell'insieme bene ordinato $b \times \{2\}$; questo significa che si definisce un ordinamento su $a \times \{1\} \cup b \times \{2\}$; in cui ogni elemento di $a \times \{1\}$ risulta essere < di ogni elemento di $a \times \{1\}$. Gli insiemi $a \times \{1\}$ e $b \times \{2\}$ mantengono l'ordinamento derivato da a,b. In questo modo viene formato un nuovo insieme bene ordinato che è simile rispetto all'ordine ad un unico ordinale, che viene chiamato $a + b$. Questa addizione è associativa e generalizza l'addizione dei numeri naturali. Detto in altri termini meno rigorosi, per sommare due ordinali v e w basta mettere gli elementi di a prima di quelli di b e "ricontare".

In maniera analoga potremmo definire la somma di ordinali in questo modo

DEFINIZIONE ***2.2.1.***

Il tipo d'ordine associato all'ordinale a+b è quello di $(a\times\{1\} \cup b\times\{2\})$ con la relazione $R = \{\langle\langle x;1\rangle , \langle y;1\rangle\rangle \ / \ x< y\} \cup \{ \langle\langle x;2\rangle\rangle ,\langle y;2\rangle\rangle \ / \ x< y \} \cup \{\langle x;y\rangle \ ; \ x\in a, y\in b\}$

PROPRIETA' DELL'ADDIZIONE

1) Prendiamo a,b numeri ordinali,allora:

$a + 0 = a$
$a + 1 = S(a)$
$a + S(b) = S(a + b)$

2)*PROPRIETÀ ASSOCIATIVA*

Dati comunque gli ordinali a,b e c,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

l'addizione tra ordinali è *associativa* e pertanto non c'è ambiguità se si scrive

$a + b + c$ invece di $(a + b) + c$ o di $a + (b + c)$

3) La somma di ordinali non gode della proprietà commutativa,

$1+ a \neq a + 1$

infatti, se a è infinito

$$a + 1 = a \cup \{a\}$$

$$1 + a = a$$

Intuitivamente fare infiniti passi e poi farne ancora uno è diverso che farne uno e poi infiniti, che come si vede equivale a farne infiniti.

Naturalmente se $a,b \in \omega$ (sono numeri naturali) , $a + b = b + a$

4) ***LEGGE DI CANCELLAZIONE A SINISTRA***

Dati comunque i numeri ordinali a,b e c, si ha:

$c + a = c + b$ se e solo se $a = b$

OSSERVAZIONE:

A destra la legge non vale :

$1 + a = 2 + a$ ma $1 \neq 2$ se a è infinito

DEFINIZIONE 2.2.1'.(DEFINIZIONE DI ADDIZIONE PER RICORRENZA)

L'addizione di numeri ordinali si può definire per ricorrenza. Possiamo introdurla così :

Dati comunque i numeri ordinali a e b ,

a + 0 = a

a + S(b) = S(a + b)

a + b = $\bigcup_{c \prec b} a + c$, se b è un ordinale limite.

MOLTIPLICAZIONE DI NUMERI ORDINALI

Per moltiplicare i due ordinali *a* e *b* si deve scrivere l'insieme bene ordinato *b* sostituendo ogni suo elemento con una diversa copia dell'insieme bene ordinato *a*. Questa operazione produce un nuovo insieme bene ordinato, che definisce un ordinale, indicato con $a{\cdot}b$. Anche in questo caso si ha una operazione associativa che generalizza la moltiplicazione tra numeri naturali.

Facciamo un esempio, consideriamo ora gli ordinali

$2 = \{0, 1\}$ e $3 = \{0, 1, 2\}$.

Il prodotto ordinato $2 \cdot 3$ si definisce come l'insieme

$2 \times 3 = \{(x ; y) ; x \in 2 \wedge y \in 3\}$

ordinato antilessicograficamente in questa maniera :

$(0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2)$

$2 \cdot 3$ è un insieme ben ordinato ed è simile ad un unico numero ordinale che è 6, ossia " due contato tre volte".

DEFINIZIONE 2.2.2.

Il tipo d'ordine associato al'ordinale $a \cdot b$ è quello indotto su $(a \times b)$ dalla relazione anti lessicografica(inversa a quella del vocabolario)R.

$\langle x , y \rangle R \langle x' , y' \rangle \Leftrightarrow (y < y' \vee (y = y' \wedge x < x')$

PROPRIETA' DELLA MOLTIPLICAZIONE

1) Prendiamo a, b numeri ordinali, allora:

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot 1 = a$

$a \cdot S(b) = (a \cdot b) + a$

2) ***PROPRIETA' ASSOCIATIVA***

Dati comunque i numeri ordinali a, b e c ,

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

La moltiplicazione tra ordinali è quindi associativa e quindi possiamo scrivere indifferentemente $a \cdot b \cdot c$ invece di $a \cdot (b \cdot c)$ o $(a \cdot b) \cdot c$

2') per la moltiplicazione la legge commutativa non è valida:

$x \cdot y = y \cdot x$ se $x, y \in \omega$ (coincide con la moltiplicazione ordinaria),

allora,

$2\omega = \omega$ (si pensi ad una successione infinita di coppie ordinate)

ma

$\omega 2 \neq \omega$ (si pensi ad una coppia ordinata di successioni infinite)

infatti,

$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega = \omega$

3) ***PROPRIETA' DISTRIBUTIVA*** ***(A DESTRA)***

Dati comunque i numeri ordinali a, b e c ,

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

La proprietà distributiva è valida a destra nell'aritmetica degli ordinali. Ma la proprietà distributiva a sinistra non vale:

$(a + b) \cdot c \neq (a \cdot c) + (b \cdot c)$

in generale:

$(a + a) \cdot b \neq (a \cdot b) + (a \cdot b)$

E per esempio

$(1+1) \cdot \omega = 2\omega = \omega$ mentre $1\omega + 1\omega = \omega + \omega = \omega 2$

DEFINIZIONE 2.2.2'.(DELLA MOLTIPLICAZIONE PER RICORRENZA)

Dati comunque i numeri ordinali a e b:

$a \cdot 0 = 0$

$a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$

$a \cdot b = \bigcup_{c \prec b} ac$ se b è un ordinale limite

ELEVAMENTO A POTENZA DI NUMERI ORDINALI

Così come il ripetersi di un'addizione portava alla definizione di prodotti ordinali , una moltiplicazione ripetuta potrebbe servire per definire esponenti ordinali .

Dunque per esponenti finiti la definizione dovrebbe essere ovvia, per esempio $\omega^2 = \omega\cdot\omega$, perché viene usata la moltiplicazione tra ordinali.

Per definire a^b ossia l'elevamento a potenza di un ordinale *a* per un ordinale *b* usiamo la *definizione per ricorrenza.*

DEFINIZIONE 2.2.3.(DELL'ESPONENZIALE PER RICORRENZA)

Per ogni coppia di numeri ordinali a , b, abbiamo:

I) $a^0 = 1$ (se $a = 0$ allora $0^0 = 1$)

II) $a^{b+1} = a^b \cdot a$

III) $a^b = \bigcup_{c \prec b} a^c$ se u è un ordinale limite

Da questo schema di definizione si ha che :

- $a^1 = a$

- $0^a = 0$ (con $a \geq 1$)

$1^b = 1$ per ogni b

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ per ogni a,b,c

$a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ per ogni a,b,c

Non tutte le leggi usuali degli esponenti restano valide;così per esempio,

$(a \cdot b)^c \neq a^c \cdot b^c$

controesempio:

$(2 \cdot 2)^{\omega} = 4^{\omega} = \bigcup_{a \prec \omega} (4^a) = \omega$ ma

$2^{\omega} \cdot 2^{\omega} = \omega \cdot \omega = \omega^2$ perché $\omega^2 = \omega^{1+1} = \omega^1 \cdot \omega = (\omega^0 \cdot \omega) \cdot \omega = \omega \cdot \omega$

Naturalmente questo vale se $a,b,c \in \omega$

Per ricorrenza si prova che:

I)Per ogni coppia di ordinali a e b

$a > 0$ implica $a^b > 0$

II) Dati comunque gli ordinali a, b e c,

$a > 1$ e $b < c$ implicano $a^b < a^c$

In base a questo enunciato si ha

$< \omega^2 < \omega^\omega$

Chiudiamo questo paragrafo osservando che tutti gli ordinali infiniti nominati esplicitamente in questo paragrafo sono numerabili. Il motivo di questo fatto è che (in base alla definizione di moltiplicazione ordinale e di elevamento a potenza ordinale) ogni ordinale infinito nominato in questo paragrafo si è ottenuto a partire da ω o da ordinali finiti mediante un procedimento che sostanzialmente comporta la formazione di unioni numerabili di insiemi numerabili.

Si può provare che esistono ordinali più che numerabili e lo vedremo nel capitolo successivo.

CAPITOLO 3

I CARDINALI

I cardinali sono un tipo particolare di ordinali. E' bene prima introdurre la nozione di cardinalità di un insieme ; poi applicando questa nozione agli ordinali , ci sarà possibile definire i cardinali.
I numeri cardinali sono definiti scegliendo un particolare rappresentante nelle classi di equivalenza determinate dalla relazione di equipotenza (ricordiamo che due insiemi A e B sono equipotenti se esiste una funzione biettiva tra di loro).
E' bene anche ,per definire i numeri cardinali, tener presente il teorema del buon ordinamento di Zermelo [cap.1], il quale asserisce che "ogni insieme è ben ordinabile".

Un altro importante teorema che ci permette di poterli definire è il seguente:

TEOREMA 3.1.1.(DI SCHRÖDER-BERNSTEIN)

Se $A \leq B$ *e* $B \leq A$*, risulta* $A \approx B$.

Poiché AC assicura che nella classe di equipotenza di ogni insieme c'è almeno un ordinale e poiché la classe degli ordinali è ben ordinata da $\in$,ha senso dare la seguente:

DEFINIZIONE 3.1.1. (CARDINALITA')

Per ogni insieme A, la cardinalità di A (notazione: $|A|$) è il più piccolo ordinale α tale che $A \approx \alpha$.

Perché questa definizione abbia senso, deve essere dimostrato che ogni insieme ha la stessa cardinalità di un qualche ordinale: questa affermazione è il principio di buon ordinamento.
D'ora in poi utilizzeremo senza ricordarlo esplicitamente l'assioma di scelta.
Si dice quindi che due insiemi con la stessa cardinalità sono equipotenti:

OSSERVAZIONE

Per ogni due insiemi A e B si ha

$$|A|=|B| \iff A \approx b$$

Il teorema di Cantor-Bernstein-Schroeder afferma che se $|A|\leq|B|$, $|B|\leq|A| \Rightarrow |A|=|B|$, ovvero esiste una funzione bigettiva tra A e B, e ci garantisce quindi che $|\cdot| \leq |\cdot|$ è effettivamente una relazione d'ordine. Supponendo vero l'assioma della scelta otteniamo poi che dati due insiemi A e B, vale sempre $|A|\leq|B|$ o $|B|\leq|A|$, ovvero la relazione d'ordine è totale.

DEFINIZIONE 3.1.2. (INSIEME NUMERABILE)

L'insieme A è numerabile se $|A|=|N|$

PROPOSIZIONE 3.1.1.

Se l'insieme A è numerabile, allora, per ogni naturale $k > 0$, il prodotto cartesiano A^k è numerabile.

L' insieme Z dei numeri interi può essere immerso in N^2 : all'intero possiamo associare la coppia $(i,0)$ se $i \geq 0$, oppure $(0, -i)$ se $i<0$. Tale corrispondenza è iniettiva e quindi $|Z| \leq |N^2| = |N|$. Abbiamo inoltre banalmente $|N| \leq |Z|$ e quindi per il teorema 3.1.1. anche l'insieme Z è numerabile. Per l'insieme Q si può fare un discorso analogo , osservando che ad ogni razionale possiamo associare una coppia di interi, e quindi anche Q è numerabile.
In generale, se B è un sottoinsieme infinito dell'insieme numerabile A , allora anche B è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.1.2.

Se l'insieme A è numerabile, allora $\bigcup_{k\in N} X^k$ è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.1.3.

Se $\{X_i : i\in I\}$ è una famiglia di insiemi finiti o numerabili indicizzati sull'insieme finito o numerabile I , allora $\bigcup_{i\in I} X_i$ è finito o numerabile.

DEFINIZIONE 3.1.3. (INSIEME PIU' CHE NUMERABILE)

Un insieme A è più che numerabile se $|A|>|$ se $|A|=|N|$.

Per il seguente teorema, un primo esempio di insieme più che numerabile è *P*(N), l'insieme dei sottoinsiemi di N.

TEOREMA 3.1.2.(CANTOR)

Per ogni insieme A, $|A|<|P(A)|$.

Dimostrazione

Ovviamente la funzione $f: a\to\{a\}$ è un'iniezione da A in *P*(A) . Supponiamo per assurdo che esista una biiezione *g* da A in *P*(A). Indichiamo con C il sottoinsieme di A costituito da tutti e soli gli elementi *a* tali che $a\notin g(a)$; cioè : C = $\{ a \in A : a \notin g(a)\}$. Sia a_0=

$g^{-1}(C)$; possiamo considerare questo elemento di A perché abbiamo supposto che g sia biiettiva. Dalla definizione di C abbiamo che $a_0 \in C \Leftrightarrow a_0 \notin g(a_0)$, ma $g(a_0)= C$. □

OSSERVAZIONE

Il Teorema di Cantor e AC implicano l'esistenza di cardinali arbitrariamente grandi.

DEFINIZIONE 3.2. (NUMERO CARDINALE)

Se α è un ordinale, si dice che α è un cardinale se e solo se $\alpha = |\alpha|$

DEFINIZIONE 3.2.1. (NUMERO CARDINALE)

Possiamo definire un numero cardinale come ogni ordinale iniziale, ovvero ogni ordinale α tale che:

$$\forall \beta \text{ ordinale }, \beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|$$

Osserviamo che il primo " < " che compare è l'ordine indotto sugli ordinali, ovvero la semplice inclusione.

Si verifica facilmente che dati due ordinali iniziali α,β, si ha che, se $\alpha > \beta$ oppure $\beta > \alpha$, non vale $|\alpha| = |\beta|$. Infatti se così non fosse avremmo, ad esempio, che $\alpha > \beta$ (il caso opposto è identico) ma $|\alpha| = |\beta|$, e quindi α *non* è un ordinale iniziale.

A questo punto possiamo vedere la relazione $|\cdot| \leq |\cdot|$ come una semplice relazione $\leq$ tra cardinali.

I cardinali finiti sono i numeri naturali, cioè, un insieme X è finito se e solo se $|A| = |n| = n$ per qualche numero naturale n.

Il più piccolo cardinale infinito è l'insieme ω dei numeri naturali. Quando si tratta ω come un cardinale, lo si indica con $\aleph_0$(vedi sotto).

PROPOSIZIONE 3.2.1.

Prendiamo α un ordinale, allora possiamo affermare che le seguenti sono equivalenti:

1) α è un cardinale,

2) esiste un insieme X tale che $\alpha = |X|$,

3) $\alpha = |\alpha|$.

Si ha poi:

TEOREMA 3.2.1.

L'unione di un insieme di cardinali è un cardinale.

Dimostrazione

Sia $\alpha = \bigcup X$,

ove X è un insieme di cardinali. Ogni cardinale è un ordinale , e quindi X è un insieme di ordinali. Pertanto per quanto visto in precedenza $\bigcup X$ è un ordinale, e resta da dimostrare che non è biettivo ad un ordinale minore. Ora , l'ordine fra gli ordinali è $\leq$ e quindi $\beta < \alpha = \bigcup X$ se e solo se $\beta \in \bigcup X$ se e solo se esiste $\gamma \in X$ tale che $\beta \in \gamma$.

Ma se $\gamma \in X$, γ è un cardinale, e quindi $|\beta| < |\gamma| \leq |\bigcup X|$.

È possibile "numerare" i cardinali infiniti facendo uso dei numeri ordinali.

La numerazione si effettua per *ricorsione* e verrà esposta più avanti.

Si ha allora che ogni $\aleph_\gamma$ è un cardinale infinito e che per ogni cardinale infinito α esiste un ordinale γ tale che $\alpha = \aleph_\gamma$. Sia infatti per assurdo δ il minimo cardinale che non è un aleph. Allora, ogni, cardinale minore di δ è un aleph. Sia $\gamma = \{ \alpha : \aleph_\alpha < \delta \}$. Allora, $\delta = \bigcup_{\alpha \prec \gamma} \aleph_\alpha = \aleph_\gamma$, assurdo.

L'utilizzo di tale simbolo per indicare questa successione è stato introdotto direttamente da Georg Cantor.

3.2 L'ARITMETICA CARDINALE

D'ora in poi indicheremo con κ, λ, μ i numeri cardinali.
Come per gli ordinali è possibile definire somma e prodotto (cardinali):

DEFINIZIONE 3.2.1.(SOMMA DI CARDINALI)

Siano κ,λ *cardinali, allora* $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$

L'addizione cardinale è:
commutativa $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$,
associativa $\mu \oplus (\kappa \oplus \lambda) = (\mu \oplus \lambda) \oplus \kappa$..

(per la dimostrazione vedi Abian Cap. pg.704)

DEFINIZIONE 3.2.2.(PRODOTTO DI CARDINALI)

Siano κ,λ *cardinali, allora* $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$

La moltiplicazione cardinale è :
Commutativa $a \otimes b = b \otimes a$;
Associativa $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$;

distributiva rispetto all'addizione

$a \otimes (b \oplus c) =(a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

(per la dimostrazione vedi Abian Cap. pg.708)

LEMMA 3.2.1.

Per $a,b \in \omega$, $a \oplus b = a + b < \omega$ e $a \otimes b = a \cdot b < \omega$, ossia nel caso di cardinali finiti,la somma ed il prodotto coincidono con la somma ed il prodotto usuali di numeri naturali.

DEFINIZIONE 3.2.3 (INSIEME FINITO E INSIEME INFINITO)

Sia A un insieme.
A è finito se $A \approx n$ per qualche (esattamente uno) numero naturale n ovvero se $/A/ = n$,
A è infinito altrimenti.

OSSERVAZIONE 3.2.1.

Sia A un insieme infinito, allora $\aleph_0 \leq | A|$

Mentre le proprietà della somma e del prodotto di cardinali finiti sono molto difficili da studiare (basti pensare che la teoria di ω con somma e prodotto è indecidibile), la somma ed il prodotto di cardinali infiniti sono abbastanza semplici.

Ora considereremo la somma e il prodotto sui cardinali infiniti

***LEMMA* 3.2.2.**

Ogni cardinale infinito (non finito) è un ordinale limite.

***TEOREMA* 3.2.2.**

Per ogni cardinale infinito κ ed ogni numero naturale n si ha $\kappa \oplus n = \kappa$.

Dimostrazione

Siccome κ è infinito, allora $\kappa \geq \omega$.
Ora sia A un insieme, tale che $|A| = \kappa$ e $\omega \subseteq A$. Sia poi B $= \{ b_0,\ldots\ldots\ldots,b_{n-1}\}$ un insieme di cardinalità *n* disgiunto da A. Sia *f* $: A \cup B \to A$ la funzione così definita :

$f(b_1) = i$ per $0 \leq i \leq n-1$

$f(m) = n + m$ per ogni $m \in \omega$

$f_{|A-\omega} = id$ identità

f è iniettiva, quindi $A \cup B \leq A$. Poiché anche $A \leq A \cup B$, per il teorema di Schröder-Bernstein abbiamo che $A \approx A \cup B$, da cui $|A| = |A \cup B|$ ovvero $\kappa = \kappa \oplus n$

TEOREMA ***3.2.2.***

Sia κ un cardinale infinito. Allora $\kappa \oplus \kappa = \kappa$.

Dimostrazione

Sia A un insieme di cardinalità κ. Osserviamo che

$$\kappa \oplus \kappa = |A \times \{0\} \cup A \times \{1\}| = |A \times 2|$$

dove $2 = \{0,1\}$. Dunque sarebbe sufficiente provare che $A \times 2$ è equivalente ad A.

L'idea è quella di approssimare la costruzione della corrispondenza biunivoca richiesta utilizzando sottoinsieme via via più grandi di A.

Sia $F = \{ f$ è una funzione : $\mathrm{dom}(f) = B \times 2$ per qualche $B \subseteq A$ e f è una biiezione tra $B \times 2$ e B $\}$. Osserviamo che $F \neq \varnothing$ perché se $B \subseteq A$ è numerabile allora $B \times 2 \approx B$. La collezione F è ordinata parzialmente per estensione. Poiché una verifica diretta mostra che le ipotesi del Lemma di Zorn sono soddisfatte, ne segue che F contiene un elemento massimale g, con $g : C \times 2 \to C$, per qualche $C \subseteq A$. Affermiamo che $A - C$ è finito. Infatti, se $A - C$ fosse finito, allora $A - C$ conterebbe un sottoinsieme numerabile D. Combinando g con una corrispondenza biunivoca fra $C \times 2$ e C potremmo ottenere un'estensione propria di g, il che contraddirebbe la massimalità.

Dunque $A - C$ è finito e allora per il teorema 3.2.1. si ha

$|A| = |A - C| \oplus |C| = |C|$

D'altra parte $C \times 2 \approx C$, da cui segue immediatamente l'esistenza di una biiezione fra A e $A \times 2$.

COROLLARIO 3.2.1.

Siano κ e λ due cardinali , di cui almeno uno è infinito. Allora

$$\kappa \oplus \lambda = max (\kappa,\lambda)$$

Non è difficile provare che un'unione su una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile .

$\bigcup_{k \le \omega} X_k$, $|X_k| \le \aleph_0$, X_k disgiunti a due a due

$x \in X_k \to (x ; k) \in \omega \times \omega$

$|\omega \times \omega| = \omega$ (vedi 3.1.3.).

Il seguente teorema enuncia uno dei principali risultati dell'aritmetica cardinale moltiplicativa.

TEOREMA ***3.2.3.***

Sia κ un cardinale infinito. Allora $\kappa \otimes \kappa = \kappa$

Dimostrazione

Sia A un insieme di cardinalità *k*. E' sufficiente provare che $A \times A \approx A$.

Sia $F = \{ f : f$ è una biiezione tra B e $B \times B$ per qualche $B \subseteq A\}$. Osserviamo che $F \neq \emptyset$ perché se $B \subseteq A$ è numerabile, allora $B \times B \approx B$. Ordiniamo parzialmente F rispetto all'$\subseteq$. E' facile vedere che F soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Sia C il dominio di un elemento massimale in F. Vogliamo provare che $|C| = |A|$, così $A \approx C \approx C \times C \approx A \times A$.

Supponiamo che $|C| < |A|$, quindi

$|A| = |A - C| + |C|$,

da cui $|A - C| = |A|$. Sia $D \subseteq A - C$ tale che $D \approx C$, ma allora $(C \cup D) \times (C \cup D) = (C \times C) \cup (C \times D) \cup (D \times C) \cup (D \times D) \approx C$

e $C \cup D \approx C$. Esiste allora una funzione biiettiva tra $(C \cup D) \times (C \cup D)$ e $(C \cup D)$. Inoltre $C \subset C \cup D$, contro la massimalità di C. □

COROLLARIO 3.2.2.

Se $1 \leq \lambda$, k sono cardinali di cui almeno uno è infinito , allora

$$\kappa \otimes \lambda = max(\kappa, \lambda)$$

Si può definire anche l'esponenziale, ma si tratta ancora di una operazione diversa rispetto al caso ordinale.

DEFINIZIONE 3.2.3 (ESPONENZIALE)

Siano k e λ cardinali,
k^{λ} = la cardinalità dell'insieme delle funzioni da λ in k.
2^{ω} come ordinale è $\bigcup_{k \in \omega} 2^{k} = \omega$,
mentre $2^{\omega} = |P(\omega)| > \omega$ come ordinale,
salvo che venga indicato il contrario, l'operazione di elevamento a potenza viene effettuata tra numeri cardinali.

Inoltre per l'esponenziale vale il seguente teorema.

TEOREMA 3.2.4.

Siano k e λ cardinali, se $2 \le k \le \lambda$ e almeno uno di essi è infinito, allora

$$2^{\lambda} = k^{\lambda}$$

Dimostrazione

Siano *A* e *B* insiemi di cardinalità k e λ rispettivamente. Allora

$2^B \le A^B \le B^B \le P(B \times B) \approx P(B) \approx 2^B$

concludiamo che $2^B \le A^B \le 2^B$ e quindi , per il teorema di Schröder-Bernstein $2^B \approx A^B$ da cui $2^{\lambda} = k^{\lambda}$.

CONSEGUENZA

$$|N^N| = |2^N| = |P(N)| = |R|$$

cioè le successioni di numeri naturali sono tante quante i numeri reali.

COROLLARIO 3.2.4.1.

Se $2 \le k \le \lambda$ e λ è un cardinale infinito, allora esiste una biiezione tra i seguenti insiemi :

$$2^{\lambda},\ k^{\lambda},\ \lambda^{\lambda}$$

e quindi hanno la stessa cardinalità.

Anche per quanto riguarda i cardinali è possibile definire il concetto di successore.

DEFINIZIONE 3.2.4.(CARDINALE SUCCESSORE)

Si definisce con α^+ *come il più piccolo cardinale > del cardinale* α. *k è detto un cardinale successore se e solo se* $k = \alpha^+$ *per un qualche* α.

Ricordiamo che il successore ordinale di un cardinale non è il suo successore cardinale:
come ordinale $S(\omega) = \omega + 1 \approx \omega$

D'ora in poi k^+ indicherà il ***successore cardinale*** del cardinale k ; il successore ordinale sarebbe indicato con $k+1$ (che è $\neq k \oplus 1 = k$ se k è infinito).

DEFINIZIONE 3.2.5.(CARDINALE LIMITE)

k è un cardinale limite se $k > \omega$ *e non è successore.*

DEFINIZIONE 3.2.6.

Per induzione definiamo

$\aleph_0 = \omega$,

$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,

$\aleph_\gamma$,*con* γ *un ordinale limite, è il sup* $\{ \aleph_\alpha / \alpha < \gamma \}$

Si ha di conseguenza:

$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \ldots\ldots$

dove, in ciascuna successione di disuguaglianze, ogni cardinale è il successivo immediato del cardinale che si trova subito alla sua sinistra.

TEOREMA 3.2.5.

Dati comunque i numeri ordinali α *e* β,
$\alpha < \beta$ *se e solo se* $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(per la dimostrazione si veda [A; pag. 693])

***TEOREMA* 3.2.6.**

Per ogni numero cardinale infinito k, esiste un unico numero ordinale α tale che
$k = \aleph_\alpha$

(per la dimostrazione si veda [A; pag. 695])

Dell'operazione di esponenziazione di cardinali si sa poco a meno che non si ammetta l'ipotesi generalizzata del continuo. Certamente, per il teorema di Cantor, si ha che $k < 2^k$ per ogni cardinale k.

Sappiamo già che $\aleph_0 = |N|$ e che $2^{\aleph_0} = |R|$.

IPOTESI DEL CONTINUO

E' vero che $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? (dove $\aleph_1$ è il più piccolo cardinale $> \aleph_0$).
In altre parole è vero che non esiste nessuna cardinalità strettamente compresa tra $|N|$ e $|R|$?
Come avevamo già anticipato nell'introduzione, non c'è risposta alla domanda precedente se si assumono gli usuali assiomi della teoria degli insiemi .
In più adesso possiamo anche chiederci se $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, cioè

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{+}$. In tal caso non esisterebbero cardinali intermedi tra $\aleph$ e $2^{\aleph}$ e questa è **l'ipotesi generalizzata del continuo.** Tale affermazione è consistente (dimostrazione di K. Gödel) e indipendente dai (dimostrazione di P.J. Cohen) nostri assiomi di teoria degli insiemi di *estensione,* di *rimpiazzamento* , della *potenza*, della *coppia,* dell'*unione*, dell' *infinito* e della *scelta.*

Concludiamo questo capitolo con un ultimo concetto : quello di **cofinalità.**

DEFINIZIONE 3.2.7.

Sia $f: \alpha \to \beta$. *Diciamo che f mappa* α *cofinalmente in* β *se e solo se l'immagine di f è illimitata in* β *(* $\forall \gamma < \beta$ *esiste* $\gamma' < \alpha$ *tale che* $f(\gamma') \geq \gamma$*).*

DEFINIZIONE 3.2.8.(COFINALITA')

Diciamo che la ***cofinalità*** *di* β *è* $\alpha = cf(\beta)$ *se e solo se* α *è il più piccolo ordinale tale che esista una mappa cofinale di* α *in* β*.*

Grazie alla cofinalità possiamo definire i cardinali singolari e regolari.

DEFINIZIONE 3.2.9.

Un ordinale β si dice ***regolare*** *se e solo se β è limite e $\beta = cf(\beta)$.*
Singolare *altrimenti.*
Si dimostra che :

TEOREMA 3.2.7.

Se β è regolare, allora β è un cardinale (transfinito). [K. pag.33]

TEOREMA 3.2.8.

ω è regolare e k^+ è regolare, se k è infinito. [K. pag.33]

A questo punto è possibile dare la definizione di grande cardinale.

DEFINIZIONE 3.2.10. (GRANDE CARDINALE)

k viene detto ***debolmente inaccessibile*** *se e solo se k è un cardinale limite regolare.*
k viene detto ***fortemente inaccessibile*** *se e solo se $k>\omega$ è regolare e*

$\forall \lambda < \kappa\, (2^{\lambda} < \kappa)$ [K. pag.34]

OSSERVAZIONE 3.2.2.

Se *k* è fortemente inaccessibile è anche debolmente inaccessibile.

L’esistenza di grandi cardinali permetterebbe di trovare modelli della teoria degli insiemi, provandone la consistenza: in base ad un teorema di Gödel, non si può perciò dimostrare la loro esistenza in ZFC. [K]

Bibliografia

[A] Abian, Alexander, *La teoria degli insiemi e l'aritmetica transfinita,* Milano, Feltrinelli, 1972.

[B] Boyer, B. Carl, *Storia della matematica,* Milano, Mondadori editore, 1980

[Bo] Bottazzini, Umberto, *Il flauto di Hilbert: storia della matematica moderna e comtemporanea ,* Torino, Utet Libreria, 2003

[G] Gödel, Kurt, *The consistence of the axiom of choise and of generalized Continuum-Hypothesis with the axiom of set theory,* Princeton (NJ), Princeton University Press, 1940

[Ha] Halmos, Paul, *Teoria elementare degli insiemi,* Milano, Feltrinelli Editore, 1970

[Hi] Hilbert, *Sur les Problèmes futures des mathèmatiques,* in *Compte rendu du deuxième congrès international des mathèmaticiens, Paris 1900,* Parigi, Gauthers-Villars, 1901

[K] Kunen, Kenneth, *Set theory: an introduction to independence proofs,* Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1980

[L] Lolli, Gabriele, *Guida alla teoria degli insiemi,* Milano, Springer, 2008

[M] Mendelson, Elliot, *Introduzione alla logica matematica,* Torino, Bollati Boringhieri, 1972.

[R1] Russell, Bertrand, *Principles of mathematics* ristampa, New York, Norton, 1958.

[R2] Russel, Bertrand, *Introduzione alla filosofia matematica,* trad. di E.Carone, Roma, Newton & Compton, 1970