Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

# PERCEZIONE APTICA E APPRENDIMENTO IN GEOMETRIA: IMMAGINI MENTALI, OSTACOLI E MISCONCEZIONI IN PRESENZA DI DEFICIT VISIVO

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIORGIO BOLONDI

Presentata da:
AGNESE DEL ZOZZO

I Sessione
Anno Accademico 2009/2010

# Introduzione

La matematica è un'*esperienza emotiva* che tutti hanno il *diritto* di poter vivere. L'esperienza matematica permette a chi la vive un'elaborazione critica e profonda della realtà, ed anche questo è un *diritto* di tutti.

Partendo da questi presupposti, il progetto iniziale di questa tesi era di fare un lavoro sui disturbi di apprendimento in collaborazione con una logopedista, con l'obiettivo di preparare delle attività a carattere matematico da fare con gruppi di ragazzi con vari tipi di difficoltà. Tra i ragazzi seguiti da questa logopedista vi era anche qualcuno con deficit visivo, così si è aperta una strada alternativa: creare una sorta di "percorso tattile" come proposta didattica per affrontare un argomento di geometria, magari insolito rispetto a quelli che solitamente vengono trattati a livello scolastico.
Questa tesi è quindi il risultato di un percorso ricco di esperienze ed episodi significativi avvenuti durante l'osservazione e il colloquio con persone non vedenti di diverse età e con differenti forme di cecità.
Tutta la fase sperimentale, è stata condotta insieme ad Elisa Cortesi, la cui tesi è da considerarsi complementare alla presente trattazione. Questo lavoro ed il lavoro della Cortesi si completano a vicenda, rappresentando un'unica ricerca volta all'approfondimento del ruolo dell'esperienza tattile nell'apprendimento della geometria. L'analisi dei vari episodi, tuttavia, non sarà equivalente nelle due tesi, perchè le osservazioni verranno fatte alla luce dei due percorsi complementari scelti. La fase sperimentale comprende:

- Alcune visite all'Istituto dei Ciechi "Francesco Cavazza" di Bologna. In particolare abbiamo fatto riferimento al Servizio di Consulenza Educativa che offre consulenze tiflopedagogiche gratuite, proponendosi come un affidabile punto di riferimento informativo ed orientativo per tutti coloro che si occupano della disabilità visiva. Durante un importante colloquio avvenuto proprio al Cavazza erano presenti Vito Lapietra (addestramento tifloinformatico), Paola Gamberini (coordinamento organizzativo servizi tiflodidattici) e Vincenzo Bizzi (coordinamento servizi tiflodidattici). Sempre al Cavazza, abbiamo visitato il Museo Tattile "Anteros" e avuto due colloqui con Loretta Secchi (curatrice museo Anteros).

- Una visita al Museo Tattile "Omero" di Ancona, in occasione della quale c'è stata la possibilità di parlare con alcuni responsabili.

- Un laboratorio di dieci incontri con Anna[1], una ragazza di III superiore. Anna ha avuto da sempre una condizione visiva significativamente compromessa, ha perso la vista molto gradualmente, passando da una grave ipovisione al vedere ombre e luci, in un lungo arco di tempo durante il quale ha subito numerosi interventi oculistici. L'ipovisione è una condizione ambigua, in cui spesso le speranze di recuperare la vista portano a non seguire i percorsi specifici per non vedenti in cui viene esercitata la manualità (ad esempio imparare il Braille). Quindi, quando poco tempo fa si è trovata a perdere la vista quasi completamente, ha dovuto iniziare il suo percorso di riorganizzazione delle modalità conoscitive. La sua storia clinico-sanitaria e quello psico-emotiva ad essa associata, non le hanno permesso di frequentare la scuola con continuità e fiducia in sè stessa, per cui Anna non ha potuto sviluppare gli apprendimenti scolastici come il resto della sua classe. Il laboratorio è stato per lei uno dei primi veri approcci con il mondo della geometria; questa è una delle due principali ragioni per cui abbiamo deciso di impostare il laboratorio introducendo il piano a partire dallo spazio. Infatti, è stata un'esperienza utile anche per farsi un'idea di ciò

[1] Per la tutela dell'anonimato il nome è di fantasia

che è importante tenere presente facendo una scelta didattica di questo tipo con una persona che ha un deficit visivo. C'è una seconda motivazione che ci ha spinto a fare questa scelta: il fatto che le percezioni tattili siano esclusivamente tridimensionali fà si che, come vedremo nel Capitolo 3, il passaggio dal 3D al 2D sia un po' delicato, quindi un approccio geometrico di questo tipo potrebbe essere fondamentale per una persona che non vede.

- Due incontri con Marco[2], uno studente di V Liceo Scientifico. In queste due occasioni abbiamo avuto l'opportunità di parlare anche con alcuni dei suoi insegnanti ed è stato molto significativo il confronto con il suo professore di disegno tecnico e storia dell'arte. Marco ha perso la vista nei primi anni di vita (intorno ai due anni) e non ha alcuna memoria visiva. La precocità del deficit gli ha permesso di essere seguito e stimolato sin da piccolo ed è un ragazzo completamente autonomo con un rendimento scolastico superiore alla media.

Nel momento in cui nel processo di insegnamento-apprendimento viene presentato, in una qualche sua rappresentazione, un concetto matematico, nella mente dello studente viene a crearsi un' *immagine mentale*. Ma che cos'è un'immagine mentale? In D'Amore (1999)[3] si legge che le caratteristiche che sembrano predominanti in un'immagine mentale sono:

- La "debolezza", cioè non è del tutto possibile definire l'immagine esplicitamente;
- La soggettività, cioè si tratta di un prodotto individuale, quindi strettamente legata alle caratterisctiche e alle esperienze individuali;
- L'assenza di un "adeguato" input sensoriale produttivo;
- L'essere parte di un atto di pensiero, cioè le immagini mentali non esistono in sè, come enti unici;

[2]Anche in questo caso, per la tutela dell'anonimato, il nome è di fantasia

[3]cfr. D'Amore (1999), p. 146.

- L'essere sensoriale, nel senso che è legata ai sensi.

In questa trattazione si vuole delineare una risposta per le seguenti domande:

- In che modo uno studente non vedente costruisce immagini e modelli mentali per i concetti geometrici?

- Uno studente non vedente, corre lo stesso rischio dei suoi colleghi vedenti di incappare nelle tipiche misconcezioni geometriche studiate in letteratura?

- Nel caso in cui non fosse così, studiare i processi di apprendimento di individui non vedenti può portare a dei risultati che migliorano la comprensione dei processi di apprendimento della matematica?

- E' sensato considerare il deficit visivo un ostacolo ontogenetico all'apprendimento della matematica oppure è fuorviante?

Le risposte a queste domande si snoderanno nell'arco di 5 capitoli, strutturati nel seguente modo:

- Nel Capitolo 1 verrà presentato un panorama teorico di didattica della matematica. Si parlerà principalmente di misconcezioni geometriche, lette e interpretate in termini di Concetti Figurali, Ostacoli e da un punto di vista semiotico.

- Nel Capitolo 2 parleremo di deficit visivo, verrà fatto un confronto tra la percezione tattile e quella visiva e cercheremo di capire che cosa si intende per "immagine mentale" quando ci si riferisce ad una persona che non vede.

- Nel Capitolo 3 cercheremo di delineare il rapporto che intercorre tra il deficit visivo e l'apprendimento della matematica, riprendendo in analisi le misconcezioni presentate nel capitolo 1, esaminando in che modo il "non vedere" si relaziona con "l'apprendere concetti geometrici".

- Nel Capitolo 4 verranno descritti i principali risultati che riguardano i poliedri convessi e le sezioni del cubo, argomenti che saranno trasposti, in parte, nel laboratorio fatto.

- Nel Capitolo 5 verranno descritti alcuni aspetti del laboratorio tra cui degli episodi rilevanti, rispetto a quanto trattato nei capitoli precedenti e la parte dedicata al sezionamento di un solido, presentando i vari artefatti utilizzati e le metodologie proposte.

L'Appendice A, infine, rappresenta una sorta di raccolta dei materiali prodotti e utilizzati ai fini del lavoro svolto. Ci saranno le foto delle strumentazioni prodotte per il laboratorio, i diari completi dei dieci incontri e alcuni dei disegni fatti da Marco.

# Indice

**Introduzione** **i**

**1 Concetti figurali, ostacoli e misconcezioni** **1**

**1**

1.1 Teoria dei concetti figurali . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
1.2 Teoria degli ostacoli . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.2.1 Ostacoli ontogenetici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.2.2 Ostacoli epistemologici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2.3 Ostacoli didattici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
1.2.4 Caratteristiche generali di un ostacolo . . . . . . . . . . 7
1.2.5 Considerazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.3 Misconcezioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.3.1 Misconcezioni inevitabili . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
1.3.2 Misconcezioni evitabili . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.4 Interpretazione semiotica delle misconcezioni . . . . . . . . . . 12
1.5 Esempi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.5.1 Il rombo e il quadrato . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.5.2 Il rettangolo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
1.5.3 L'altezza delle figure geometriche . . . . . . . . . . . . . 18
1.5.4 Alcune considerazioni finali . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**2 Immagini mentali in presenza di deficit visivo** **23**

23

2.1 Introduzione . . . . . 23

2.2 Immagini mentali nei non vedenti . . . . . 25

2.2.1 Rotazione mentale di oggetti bidimensionali nei ciechi congeniti . . . . . 27

2.2.2 Rotazione mentale di oggetti tridimensionali . . . . . 29

**3 Deficit visivo e apprendimento della matematica 37**

**4 Poliedri e Sezioni del cubo 49**

**49**

4.1 Preliminari . . . . . 49

4.2 Poliedri . . . . . 50

4.2.1 Poliedri regolari . . . . . 59

4.3 Sezioni del cubo . . . . . 72

4.3.1 Premessa . . . . . 72

4.3.2 Sezioni . . . . . 74

**5 Laboratorio 79**

**79**

**93**

**Conclusioni 93**

**A Appendice: Documentazione 95**

A.1 Diari Laboratorio . . . . . 95

A.2 Foto di alcuni strumenti del laboratorio e alcuni disegni di Marco 137

**Bibliografia 145**

A.3 Capitolo 1 . . . . . 145

A.4 Capitoli 2 e 3 . . . . . 148

A.5 Capitolo 4 . . . . . 152

# Elenco delle figure


1.1 Quadrato in posizione insolita . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.2 Problema rettangolo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
1.3 Alcune risoluzioni del problema sul rettangolo . . . . . . . . . 16
1.4 Rettangolo "in piedi" . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
1.5 Altezza del triangolo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
1.6 Altezza del poligono . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
1.7 Trapezio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

2.1 Primo cubo disegnato da Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
2.2 Secondo cubo disegnato da Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
2.3 Diagramma di Schlegel del cubo . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
2.4 Piramide disegnata da Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
2.5 Seconda piramide disegnata da Marco . . . . . . . . . . . . . . . 34

3.1 Parallelogramma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
3.2 Problema rettangolo Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
3.3 Problema rombo/quadrato Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

4.1 "Negazione sperimentale" del teorema di Cauchy per i poligoni 56
4.2 Tetraedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
4.3 Ottaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61
4.4 Icosaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
4.5 Cubo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
4.6 Dodecaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63

4.7 Solidi Platonici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63
4.8 Dualità Cubo e Ottaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67
4.9 Icosaedro nell'ottaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68
4.10 Dualità Icosaedro e Dodecaedro . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
4.11 Tetraedro Autoduale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71
4.12 Sezione quadrata del cubo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74
4.13 Sezione rettangolare del cubo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
4.14 Triangolo equilatero ed esagono regolare come sezioni del cubo 76
4.15 Triangolo isoscele e trapezio isoscele come sezioni del cubo . . 78
4.16 Parallelogramma come sezione del cubo . . . . . . . . . . . . . 78

5.1 Classificazione Anna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
5.2 Sezione esagonale dallo sviluppo . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
5.3 Sezione quadrata Anna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
5.4 Sezione triangolare Anna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 85
5.5 Sezione rettangolare Anna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
5.6 Sezione triangolare cubo in creta Anna . . . . . . . . . . . . . 89
5.7 Sezioni in creta Anna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90

A.1 Alcuni poliedri scheletrati e in cartoncino . . . . . . . . . . . . 137
A.2 Esempio di cubo senza sviluppo e sviluppo ottenuto . . . . . . 138
A.3 Sezioni parallelogrammica e rettangolare in cartoncino . . . . 138
A.4 Sezione triangolare in cartoncino . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
A.5 Sezione esagonale in cartoncino . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139
A.6 Sezione quadrata in cartoncino . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140
A.7 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140
A.8 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141
A.9 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 141
A.10 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142
A.11 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 142
A.12 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143
A.13 Alcuni disegni di Marco . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

# Elenco delle tabelle

4.1 Tabella V, S, F . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

# Capitolo 1

# Concetti figurali, ostacoli e misconcezioni

L'apprendimento è un fenomeno di adattamento in risposta ad una qualche esperienza. E' quindi un cambiamento che, in quanto tale, necessita l'attuarsi di fenomeni di assestamento, quali ad esempio: conflitti cognitivi, assimilazione ed accomodamento di concetti e immagini, modifica di modelli intuitivi e di linguaggi, introduzione e controllo di registri semiotici opportuni e loro trasformazioni.

In questo capitolo, presenterò alcuni aspetti dell'apparato teorico della Didattica della Matematica che più si legano all'aspetto visivo dell'apprendimento. Vedremo come alcune difficoltà che gli studenti incontrano nell'apprendimento di alcuni concetti geometrici siano in qualche modo legate e accumunate, paradossalmente, alla percezione visiva.

## 1.1 Teoria dei concetti figurali

Come osserva Duval [1], gli oggetti di cui si occupa la matematica non possono essere percepiti con i sensi, non sono oggetti "reali" ma concetti ideali, a cui è possibile accedere soltanto attraverso rappresentazioni semi-

[1] Duval R. (1993)

otiche. D'altra parte, lo stesso Autore sottolinea il fatto che, nonostante l'impossibilità di rinvii ostensivi tipica degli oggetti matematici, è l'oggetto che si vuole rappresentare l'obiettivo della conoscenza, non le sue possibili rappresentazioni semiotiche. Proprio per questo motivo, un punto nodale per la comprensione della matematica sta nella consapevolezza della distinzione tra l'oggetto che si vuole rappresentare e la sua rappresentazione.
Nel caso particolare della geometria, questa distizione risulta eccezionalmente ostica poichè, tra le varie rappresentazioni semiotiche degli oggetti geometrici, quelle appartenenti al registro figurale risultano privilegiate. Questo fenomeno è legato al fatto che la geometria ha con la realtà un legame molto intimo. La geometria, infatti, è quel settore della matematica che si occupa delle proprietà spaziali e molti suoi spunti partono dal mondo fisico. Le immagini mentali associate ad un concetto geometrico tendono ad essere molto vicine alle immagini mentali di un oggetto reale. Inoltre, le rappresentazioni figurali trovano una corrispondenza diretta con gli aspetti percettivi sensoriali e cinestetici che caratterizzano la cognizione. Il legame stretto che intercorre tra percezione e movimento è confermato da risultati di numerose ricerche in ambito neuroscientifico (e.g., Rizzolatti Sinigaglia (2006), Gentilucci(2003), McNeill(1992), Ito(1993), Goldin-Meadow(2003)). Tuttavia, gli elementi fondamentali del pensiero geometrico hanno un carattere astratto, ideale, generale, quindi carattere concettuale, regolato e definito dalle "regole assiomatiche" del quadro teorico di riferimento.

Consideriamo ad esempio il concetto di quadrato e una sua rappresentazione grafica. Nella rappresentazione, siamo di fronte solo ad una particolare istanza dell'elemento geometrico Quadrato, che però condivide con esso alcuni aspetti, come ad esempio la forma.

Per riassumere, usando le parole di M.A. Mariotti:

" Ad un livello puramente formale le figure geometriche sono controllate da un sistema di definizioni che godono dell'astrattezza, universalità, coerenza proprie di ogni sistema formalizzato. A livello psicologico gli oggetti del ragionamento geometrico sembrano conservare proprietà, provenienti dalla loro origine reale, che non rientrano invece nella sistemazione teorica che se ne vuole dare." [2]

Questa intima e profonda connessione, peculiare della geometria, tra aspetti concettuali e aspetti figurali viene descritta nella *Teoria dei Concetti Figurali.*

Questa teoria è stata introdotta e presentata da Efraim Fischbein in un articolo nel 1993 [3].
Nell'introduzione, l'Autore mette in evidenza il fatto che in psicologia si tende a distinguere tra ciò che è un *concetto* e ciò che è un' *immagine mentale*. Un concetto è caratterizzato dal fatto che esprime quell' "idea", astratta e generale, che accomuna una classe di oggetti, sulla base di alcune caratteristiche comuni. Un'immagine mentale è invece una rappresentazione interna, di natura sensoriale, di un oggetto o di un fenomeno. Le figure geometriche si comportano, come già visto, in modo diverso: hanno una natura concettuale ma, allo stesso tempo, hanno anche una natura figurale intrinseca. Per capire cosa intenda Fischbein per concetti figurali, riporto una parte dell'articolo del 1993:

"Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate da definizioni nel contesto di un certo sistema assiomatico. Da questo punto di vista una figura geometrica ha una natura concettuale. Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale) [...] Una figura geometrica può allora essere descritta come avente *intrinsecamente* proprietà concettuali. Tuttavia una figura geometrica *non* è un puro concetto. E' un'immagine, un'immagine visiva. Possiede una proprietà che i concetti usuali non possiedono, cioè include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali. [...] Gli oggetti di studio e di manipolazione nel ragionamento geometrico sono allora entità mentali, da noi chiamate *concetti figurali*, che riflettono proprietà spaziali (forma, posizione, grandezza) e, allo stesso tempo, possiedono qualità concettuali - come

[2] Mariotti M.A. (1992), p. 873

[3] Fischbein E. (1993). In realtà, l'idea di concetto figurale era già stata presentata nel 1963 dallo stesso Fischbein in Fischbein E. (1963); tuttavia, fu l'articolo del 1993 che permise la diffusione effettiva della sua teoria.

idealità, astrattezza, generalità, perfezione. Non intendo affermare che la rappresentazione che abbiamo in mente, quando immaginiamo una figura geometrica, sia priva di ogni qualità sensoriale (come il colore) eccetto le proprietà spaziali; ma affermo che, mentre operiamo con una figura geometrica, noi agiamo come se *nessun'altra qualità contasse*."[4]

Pertanto, nel dominio della geometria non abbiamo più a che fare soltanto con i concetti e le immagini mentali, ma con una terza entità mentale: il concetto figurale. Nell'esempio del quadrato fatto in precedenza, si potrebbe dire che la rappresentazione grafica del quadrato condivide con l'oggetto geometrico Quadrato la componente figurale. Coerentemente con l'ipotesi di Fischbein, il ragionamento geometrico sarà caratterizzato dall' interazione tra l'aspetto concettuale e quello figurale. Il concetto figurale sarà il limite ideale di questo processo di interazione e di fusione tra i due. E' chiaro quindi il motivo per cui le rappresentazioni grafiche rivestono un ruolo così rilevante nell'ambito della geometria: si collocano nel processo dialettico tra le due componenti dei concetti figurali, costituendo un importante e diretto supporto alla componente figurale.

L'interazione tra componente concettuale e figurale dovrebbe, in linea di principio, essere caratterizzata da una perfetta armonia.
Il processo di costruzione dei concetti figurali, tuttavia, non è un processo spontaneo negli studenti. Come spiega lo stesso Fischbein:

"L'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei limiti concettuali rispetto a quelli figurali, non è un processo naturale." [5]

Quello che spesso accade, se non con opportuni interventi da parte dell'insegnante, è che i due aspetti entrano in conflitto e dal prevalere di un aspetto sull'altro, possono emergere degli errori e difficoltà, di cui daremo alcuni esempi in seguito.

[4] D'Amore B. (1999), p. 188
[5] *ivi*, p.191

## 1.2 Teoria degli ostacoli

Durante il processo di insegnamento-apprendimento, vi sono dei fenomeni evidenti di resistenza all'apprendimento della matematica che possiamo chiamare *ostacoli*. Questo "qualcosa" che si frappone all'apprendimento viene descritto nella *Teoria degli ostacoli* di Guy Brousseau. Questa teoria inizia a prendere forma nel 1976 [6] e viene sistemata in modo definitivo negli anni successivi. [7]
Brousseau distingue tre tipologie di ostacoli (con intersezioni reciproche non vuote), in base alla loro origine:

- Ostacoli ontogenetici;
- Ostacoli epistemologici;
- Ostacoli didattici

### 1.2.1 Ostacoli ontogenetici

Il soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze consone alla sua età mentale. Se nella costruzione di un certo concetto matematico le capacità e conoscenze di cui lo studente dispone sono insufficienti, allora queste costituiscono un ostacolo ontogenetico. Questa prima categoria di ostacoli può essere raffinata in:

- *Ostacoli genetici*, che sono legati al corredo cromosomico dell'individuo e che possono pertanto anche essere insuperabili;
- *Ostacoli ontogenetici*, che si legano allo sviluppo dell'intelligenza, dei sensi e dei sistemi percettivi, che possono anche avere una durata limitata nel tempo.

L'ostacolo ontogenetico è quindi legato allo studente e alla sua natura e può avere anche una durata limitata nel tempo.

[6] Brousseau G. (1976-1983). L'ispirazione filosofica dell'idea di ostacolo si può far risalire a Bachelard G. (1938)

[7] Perrin-Glorian M.-J. (1994).

### 1.2.2 Ostacoli epistemologici

Qualunque argomento a carattere matematico ha un preciso statuto epistemologico che dipende da vari fattori: dalla storia della sua creazione da parte di un individuo, dalla sua evoluzione all'interno della comunità matematica, dalla sua accettazione critica nell'ambito della matematica, dal linguaggio con cui è espresso. Ci sono pertanto degli oggetti matematici che per la loro natura, oltre che rappresentare un ostacolo nell'apprendimento, sono stati problematici da accettare nella comunità scientifica. Questi tipi di ostacoli possono essere quindi ritrovati nella storia dei concetti stessi.
Siamo di fronte ad un ostacolo epistemologico se si verificano entrambe le condizioni seguenti:

- Facendo un'analisi storica di una certa conoscenza, si individua una frattura, un cambio radicale di concezione nel suo sviluppo;

- A livello didattico, si manifestano errori ricorrenti e persistenti, in diverse classi e stabili negli anni, che si raggruppano attorno ad alcune concezioni.

L'ostacolo epistemologico è quindi legato alla natura stessa dell'argomento.

### 1.2.3 Ostacoli didattici

Gli ostacoli di natura didattica sono quelli che hanno origine soltanto da una scelta o da un progetto del sistema educativo o dell'insegnante: sono legati alla trasposizione didattica (cioè quei processi attraverso cui l'insegnante trasforma un sapere accademico in sapere da insegnare) e all'ingengeria didattica (cioè all'organizzazione delle attività d'aula sia a livello metodologico che di contenuti).
Gli ostacoli didattici hanno quindi origine nella scelta strategica del docente.

### 1.2.4 Caratteristiche generali di un ostacolo

Brousseau individua, nell'arco delle varie ricerche fatte, alcune caratteristiche generali degli ostacoli:

- Non bisogna intendere un ostacolo come una mancanza di conoscenza, ma come una conoscenza vera e propria;
- Lo studente usa questa conoscenza per cercare di dare risposte in un contesto a lui già noto, che ha già incontrato;
- Se l'allievo tenta di usare questa conoscenza in un contesto diverso, nuovo, fallisce proponendo risposte scorrette; in questo modo ci si rende conto che servono punti di vista diversi;
- L'ostacolo produce delle contraddizioni alle quali lo studente fa resistenza; bisogna rendere lo studente consapevole del fatto che è necessaria una conoscenza più generale ed approfondita che comprenda sia la situazione nota che la nuova situazione;
- L'ostacolo tende a riaffiorare sporadicamente durante il percorso cognitivo dello studente, anche se è stato superato.

### 1.2.5 Considerazioni

E' possibile classificare gli ostacoli all'apprendimento della matematica anche in un altro modo:

- Ostacoli genetici
- Ostacoli ontogenetici
- Ostacoli epigenetici

Gli ostacoli epigenetici sono quelli legati alla comunicazione, comprendono quindi sia gli ostacoli didattici che quelli epistemologici. A causa delle molte conseguenze che i problemi di comunicazione hanno nel processo di insegnamento-apprendimento, negli ultimi anni molte ricerche in didattica della matematica si sono mosse in questa direzione.

## 1.3 Misconcezioni

Durante il processo di insegnamento-apprendimento di un certo concetto C, lo studente riceve una serie di informazioni su C che lo portano a costruirsi, internamente e in modo più o meno cosciente, delle immagini mentali di tale concetto. Se ad un certo punto della sua storia cognitiva, lo studente riceve delle informazioni su C che non sono compatibili con l'immagine mentale di cui dispone, dovrà costruirsi una nuova immagine che, allo stesso tempo, contenga le informazioni precedenti e accolga quelle nuove. Lo studente deve perciò superare un *conflitto cognitivo* che si viene a creare tra l'immagine mentale vecchia e quella nuova di uno stesso concetto C (o tra un'immagine e un concetto). Questo processo si innesca ad ogni nuova informazione che lo studente riceve del concetto C e, quando l'immagine mentale costruita si rivela sufficientemente solida rispetto a stimoli successivi riguardanti C, per tale immagine si introduce il termine *modello* di C.
Quindi, un modello di un concetto è quell'immagine, forte e stabile, che racchiude il massimo delle informazioni riguardanti C. Questa forte stabilità fà si che una volta che lo studente si è creato un modello di un certo concetto, questo sia molto difficile da distruggere, qualora le nuove informazioni contrastino con esso.

Nel processo di concettualizzazione che a partire da immagini provvisorie conduce alla formazione di modelli stabili, possono manifestarsi delle *misconcezioni*, cioè, seguendo l'interpretazione costruttiva proposta da D'Amore:

" Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione." [8]

In generale, possiamo affermare che le misconcezioni sono legate a immagini o modelli che si formano durante il processo di apprendimento.
Le misconcezioni che sono legate ad immagini deboli ed instabili non rappresentano un ostacolo all'apprendimento futuro, anzi possono addirittura essere dei passaggi obbligati in attesa di sistemazione cognitiva più critica ed elaborata. La situazione è radicalmente diversa, e a volte molto ostica, se la misconcezione è legata ad un forte e stabile modello che si è formato del concetto in questione.
Riguardo la formazione del modello di C, possono infatti verificarsi due casi:

- *Il modello si forma al momento giusto*, cioè il modello è proprio quello previsto dal Sapere matematico; l'azione didattica ha quindi avuto esito positivo e lo studente ha costruito il modello corretto di C;

- *Il modello si forma troppo presto*, cioè un'immagine che avrebbe dovuto essere ancora ampliata diventa modello di C. In questo caso, quando la misconcezione si radica in un modello stabile, diventa molto difficile per l'insegnante far acquisire correttamente il concetto C.

Entrando più nello specifico, è possibile fare una distinzione tra due tipi di misconcezioni, cercando anche di creare un parallelismo con la Teoria degli Ostacoli precedentemente esposta.

### 1.3.1 Misconcezioni inevitabili

L' "inevitabilità" di una misconcezione può dipendere da due fattori, che non sono necessariamente indipendenti tra loro.

**Necessaria gradualità del sapere:**
Non è possibile introdurre all'improvviso e in un colpo solo tutte le informazioni necessarie a caratterizzare completamente un concetto matematico.

[8] D'Amore (1999), p. 124

E' necessaria un'introduzione dei saperi graduale che, ad ogni stadio, presenta un quadro limitato e non esaustivo del concetto che si vuole trasmettere. Questo fattore sembra essere legato da un lato agli ostacoli ontogenetici, dall'altro ad ostacoli di tipo epistemologico.

**Necessità di dover fare uso di rappresentazioni:**
Questo punto è legato al fatto che non è possibile accedere direttamente agli oggetti di dominio della matematica. Come accennato nell'introduzione alla Teoria dei Concetti Figurali, questa non accessibilità si lega intimamente al pensiero di Duval, per il quale, ricordiamo, *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e le rappresentazioni semiotiche rappresentano la sola via di accesso agli oggetti matematici.
Le misconcezioni inevitabili possono essere inquadrate anche all'interno della Teoria dell'Oggettivazione di Luis Radford che considera l'apprendimento come processo intenzionale che trasforma oggetti culturali in oggetti di coscienza. Il termine *oggettivazione* si riferisce etimologicamente all'atto che permette di rendere qualcosa accessibile alla coscienza ponendolo davanti. Secondo questa prospettiva, l'apprendimento è possibile grazie a opportuni mediatori che Radford chiama *mezzi semiotici di oggettivazione* che hanno una natura sociale e culturale e sono costitutivi delle pratiche didattiche compartita in aula.
I mezzi semiotici di oggettivazione ampliano la nozione di segno generalmente accettata a tutto ciò che rende visibile un'intenzione e che permette di condurre a termine un'azione e comprendono ad esempio: tutte le attività cinestetiche e sensoriali del corpo come i gesti e il movimento corporeo, artefatti come oggetti o strumenti tecnologici e i registri semiotici tipici della matematica (registro figurale, algebrico, ecc.).
Possiamo legare la nozione di misconcezione inevitabile alla rottura cognitiva che Radford individua nei processi di oggettivazione quando lo studente deve passare da mezzi semiotici tipici della sua esperienza percettiva e sensoriale

a mezzi semiotici più astratti che si utilizzano quando è necessario accedere a livelli superiori di generalizzazione.
Gli insegnanti sono *obbligati*, nella fase iniziale dell'apprendimento, a fare ricorso a mezzi semiotici di oggettivazione che però non riescono a cogliere la generalità tipica degli oggetti matematici. Di qui l'inevitabilità delle misconcezioni che ne derivano. E' chiaro però che, se l'insegnante ha una spiccata sensibilità didattica, allora può favorire il superamento di tali misconcezioni ricorrendo a una grande varietà di mezzi semiotici dello stesso concetto, per far sì che lo studente non identifichi l'oggetto matematico con la sua rappresentazione e ne colga il carattere astratto e generale. Purtroppo, come vedremo più avanti in alcuni esempi, questo non avviene sempre, soprattutto per quanto riguarda la geometria; in tali casi le misconcezioni che ne derivano non sono più inevitabili, ma rientrano nella categoria che tratteremo in seguito.

### 1.3.2 Misconcezioni evitabili

Sono misconcezioni evitabili perchè dipendono strettamente dalle scelte fatte dall'insegnante per effettuare la trasposizione didattica del Sapere. Questa seconda categoria di misconcezioni, legata alle decisioni didattiche dell'insegnante, sembra essere collegata agli Ostacoli Didattici di Brousseau. A volte, quindi, è la stessa prassi scolastica a rendere ancora più complicato per gli studenti l'apprendimento dei concetti matematici. Un esempio di prassi scolastica fonte di misconcezioni evitabili è la ripetitività della rappresentazione semiotica proposta dall'insegnante per un certo oggetto matematico, poichè si rischia, in questo modo, che gli studenti non effettuino l'importante distinzione tra il concetto e la sua rappresentazione.

## 1.4 Interpretazione semiotica delle misconcezioni

In Santi G. e Sbaragli S. (2008) viene proposta un'interessante interpretazione semiotica delle misconcezioni. Riprendendo il pensiero di Duval, abbiamo visto come la particolare natura degli oggetti matematici fà si che il processo cognitivo che sta alla base del "fare matematica" è caratterizzato da una complessa attività semiotica in cui è necessaria la coordinazione di almeno due sistemi seiotici diversi. Duval (1995) identifica la concettualizzazione di oggetti matematici con le seguenti attività di tipo semiotico-cognitivo:

- *Formazione* di una rappresentazione semiotica dell'oggetto, rispettando i limiti del sistema semiotico;
- *Trattamento*, cioè la trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione, all'interno dello stesso registro semiotico;
- *Conversione*, cioè la trasformazione di una rappresentazione in un certo registro semiotico in un'altra rappresentazione in un registro semiotico diverso.

La costruzione di conoscenza in matematica si ha attraverso la combinazione di queste tre attività cognitive su un concetto. La coordinazione di sistemi semiotici attraverso queste tre azioni, tuttavia, non è un processo spontaneo. La mancanza di riferimenti ostensivi tipica della matematica rende problematica l'attività semiotica in termini di produzione, trasformazione ed interpretazione di segni. Questa questione porta a quello che viene chiamato il *paradosso cognitivo di Duval*: è possibile agire sugli oggetti matematici solo tramite le loro rappresentazioni semiotiche ma nello stesso tempo l'apprendimento in matematica non può che essere un apprendimento di tipo concettuale. Come possono quindi gli studenti non confondere gli oggetti mnatematici con le loro rappresentazioni? E come possono dominare le attività semiotiche fatte sugli oggetti matematici se non possiedono la concettualizzazione dell'oggetto? (Duval (1993))

Grazie agli approcci di Duval e Radford, possiamo guardare al processo che trasforma immagini mentali deboli in modelli forti come ad un'interiorizzazione di una complessa attività semiotica; da un punto di vista semiotico, un'immagine è un insieme temporaneo di rappresentazioni che deve essere ampliato e lo studente ha un modello corretto di un certo concetto quando riesce a dominare la coordinazione di un insieme di rappresentazioni di quel concetto in diverse circostanze matematiche. In questi termini, una misconcezione è un insieme di rappresentazioni che è stato adeguato in un certo numero di situazioni ma che si rivela inappropriato in un contesto nuovo. Per rappresentazioni intendiamo sia i sistemi semiotici di Duval sia l'estensione della nozione di segno introdotta da Radford come i mezzi semiotici di oggettivazione. Nel processo di costruzione di un concetto matematico possono crearsi delle misconcezioni in tre momenti cruciali:

- Il primo approccio di uno studente con un certo oggetto matematico sarà tramite una delle sue rappresentazioni. L'allievo, per il paradosso cognitivo di Duval, identificherà la rappresentazione con l'oggetto e troverà delle difficoltà a mettere in relazione due diverse rappresentazioni dello stesso oggetto per raggiungere un maggior livello di generalità.

- I mezzi semiotici di oggettivazione possono essere molto diversi tra loro, sia per quanto riguarda le loro caratteristiche che per il modo in cui possono essere usati. Lo studente deve gestire una complessità semiotica che potrebbe portare a delle misconcezioni legate al coordinamento di diversi mezzi semiotici.

- Come abbiamo già accennato, una fonte di misconcezioni è individuabile nella la rottura proposta da Radford nel passaggio tra mezzi semiotici tipici dell'esperienza percettiva dello studente e mezzi semiotici più astratti usati nella matematica.

Questa interpretazione semiotica non è in contrasto con quella proposta da D'Amore (1999) ma permette di precisare la nozione di immagine e di modello specifica per la matematica e fornisce strumenti interpretativi e didattici più ampi per analizzare le difficoltà degli studenti.

## 1.5 Esempi

Vorrei presentare alcune esperienze, tratte da ricerche sperimentali o da episodi in classe, che possano essere lette in chiave teorica secondo quanto ho finora esposto. Sono tutti esempi di misconcezioni rigurdanti questioni geometriche e accomunati dalla stessa origine: *la posizione della figura geometrica*. Naturalmente, il quadro teorico finora presentato e gli esempi che fornirò non vogliono essere una trattazione esaustiva di tutti gli argomenti toccati. In questo lavoro, non si vuole descrivere una situazione didattica generale ma alcuni particolari aspetti, che riguardano l'apprendimento della geometria, legati alla percezione visiva.

### 1.5.1 Il rombo e il quadrato

**Episodio:**[9]

In occasione di una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria di Mirano (Ve), sono stati costruiti dei fogli di carta quadrati e ne sono state evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali. Il ricercatore ha disposto il proprio modello nella seguente "insolita" posizione:

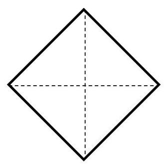


Figura 1.1: Quadrato in posizione insolita

[9]Tratto da D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), pp. 79-80.

I bambini invece avevano optato per la posizione “classica”, con due lati paralleli al pavimento.
A questa provocazione il commento dei bambini è stato: “*Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato*”
Alla richiesta di spiegazioni da parte del ricercatore, i bambini hanno risposto: “*Perchè la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique*”.

**Commenti:**
In questa situazione, la misconcezione dei bambini ha origine da due fattori. Il primo, è legato al fatto che il quadrato *deve essere obbligatoriamente* disegnato con le diagonali orizzontali e verticali, quindi ad una ripetitività di rappresentazione proposta dall’insegnante e, molto spesso, dai libri di testo. Il secondo fattore è l’istituzionalizzazione verbale di tale scelta per la posizione del quadrato da parte dell’insegnante.
Leggendo questo episodio in termini di concetti figurali, potremmo dire che la componente figurale è sfuggita al controllo concettuale che risponde ai vincoli formali della definizione di quadrato.
La “posizione standard” del quadrato risulta intuitiva per gli allievi, di immediata percezione ma, allo stesso tempo, non mette in evidenza le caratteristiche distintive dell’oggetto matematico Quadrato. In più, oltre ad essere una preferenziale rappresentazione semiotica appartenente al registro figurale, tipico della geometria, è anche una *particolare* rappresentazione, vincolata da una precisa posizione della figura, come se i termini “orizzontale”, “verticale” e “obliquo” avessero una qualche connotazione matematica formale o facessero parte della definizione di quadrato.
Questo caso mette in evidenza la rottura cognitiva proposta da Radford, in cui gli aspetti percettivi e sensoriali contrastano con la natura generale degli oggetti matematici.

### 1.5.2 Il rettangolo

**Episodio 1:**[10]

L'obiettivo della ricerca era di analizzare la strutturazione dei modelli mentali posseduta dagli studenti e la loro utilizzazione in situazione di risoluzione di un problema.
Il problema proposto a studenti di 14-15 anni era il seguente:
Disegna il rettangolo $ABCD$ che ha il lato $AB$ sulla retta $r$:

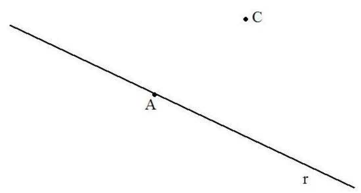



Figura 1.2: Problema rettangolo

Sul foglio di ciascun ragazzo, veniva replicata quattro volte la stessa figura iniziale come sopra, in modo che, in caso di non soddisfazione del risultato, potevano rifare il disegno. Ai ragazzi viene anche chiesto di non cancellare quanto disegnavano e di non disegnare su un precedente disegno se ritenevano di dover cambiare risposta. Tra le varie risposte fornite dai ragazzi, troviamo ad esempio disegni di questo tipo:

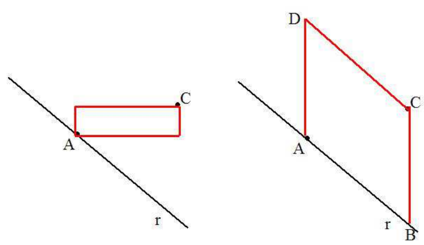



Figura 1.3: Alcune risoluzione del problema sul rettangolo

[10]Gallo E. (1994) ed anche in D'Amore B. (1999), pp. 162-166

**Episodio 2:**[11]
In una prima elementare (6-7 anni) di fronte al seguente disegno:

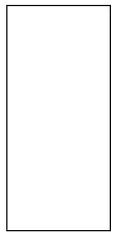


Figura 1.4: Rettangolo "in piedi"

uno dei bambini ha dato spontaneamente alla figura una definizione molto suggestiva, chiamandolo "*rettangolo in piedi*".

**Commenti:**
Entrambi gli episodi presentati mostrano come in molti casi, indipendentemente dall'età degli studenti, di fronte ad un' "abitudine visiva" come il vedere il rettangolo nella posizione standard, possibilmente con la "base" più lunga dell' "altezza", sia più forte di qualsiasi controllo concettuale.
Nel primo caso, oltre lo stereotipo del rettangolo, la posizione della retta $r$ richiama alla mente (o magari si potrebbe dire all'occhio) un altro modello molto forte, che è quello del parallelogramma. Anche la consegna, infatti, gioca un ruolo importante. Si basa sull'uso di tre registri (verbale, figurale e simbolico) che concorrono singolarmente e con le loro associazioni a stimolare il modello mentale dello studente.
Molti studenti leggono questa consegna non come un'unica richiesta ma come una sequenza del tipo:

1) Disegna il (un) rettangolo;

2) Chiamalo $ABCD$;

[11] D'Amore B. (1999), pp. 125-126

3) Il lato $AB$ deve stare sulla retta $r$.

che a volte può essere ulteriormente spezzata in:

- Un lato deve stare sulla retta $r$;
- Quel lato si deve chiamare $AB$.

Con questa lettura, è possibile interpretare i disegni come quello di sinistra della Figura 1.3, in cui si esegue il punto 1) e si ignorano i punti 2) e 3).
Anche in questi due episodi, la misconcezione presentata può essere vista come uno scivolamento del controllo concettuale sulla componente figurale.
Come ultima osservazione, nel caso del secondo episodio, il "rettangolo" nella mente del bambino era ancora un'immagine debole, in via di sistemazione e il conflitto che si è venuto a creare tra questa misconcezione e il rettangolo proposto si è risolta in modo positivo.

### 1.5.3 L'altezza delle figure geometriche

**Episodio:**[12]
In una sperimentazione in una V primaria è stato chiesto ai bambini se un'altezza di un triangolo non verticale dal punto di vista del lettore, è un'altezza o no:

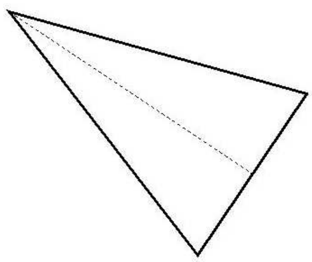


Figura 1.5: Altezza del triangolo

[12]D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), pp. 92-99

Uno dei bambini ha risposto: "*No, perchè non è in piedi*". Poi continua dicendo: "*In questo momento non è un'altezza; se voglio che diventi un'altezza, devo girare il foglio e rimetterla in piedi*, e gira il foglio in modo da avere il segmento tratteggiato verticale.
Successivamente, è stato chiesto all'allievo di disegnare un'altezza in un poligono posizionato nel foglio in maniera tale che nessuna delle sue altezze risultasse parallela ad un qualche margine, ottenendo il seguente disegno:

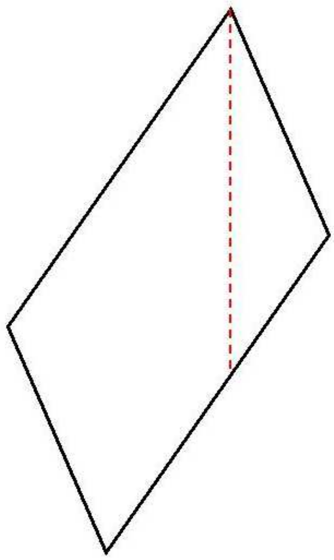


Figura 1.6: Altezza del poligono

**Commenti**
Questo episodio è emblematico di una diffusissima misconcezione del tipo "l'altezza di una figura geometrica *deve* essere verticale", che è riscontrabile in studenti di qualsiasi età.
Il concetto di altezza è stato citato in geometria tra le misconcezioni che derivano dalle incoerenze dei libri di testo e quelle che derivano dalla posizione.
In molti testi scolastici, l'altezza viene definita come quel segmento che "parte" da un vertice e "cade" perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento. Definire l'altezza di una figura geometrica in questo

modo è fuorviante perchè non fornisce l'importante caratterizzazione dell'altezza come una *grandezza*, ma la si identifica con un segmento che deve *per forza* partire da un vertice e arrivare *per forza* al lato opposto a tale vertice.
Come conseguenza, ad esempio, alcuni bambini di V primaria, che per calcolare l'area di un quadrato usavano la formula $b \times h$, hanno detto che "*Un quadrato non può avere un'altezza perchè non c'è un vertice opposto alla base della figura*"[13].
Sempre nei libri di testo, viene spesso fornita non un'unica definizione di altezza, ma una definizione "diversa" per ogni poligono affrontato, fino ad arrivare addirittura a non definirla affatto per poligoni con più di quattro lati, non essendo più necessaria per calcolare l'area.

Riguardo all' obbligatoria verticalità dell'altezza, questa può essere spiegata come una misconcezione derivante dalla contrapposizione tra l'anisotropia dello spazio fisico (ci sono direzioni privilegiate: orizzontale e verticale) e l'isotropia dello spazio geometrico euclideo (in cui non ci sono cioè direzioni privilegiate, sono tutte equivalenti).

Il punto è che la specifica posizione dell'altezza non è un elemento caratterizzante per il concetto matematico di altezza di un poligono rispetto ad un suo lato, che va concepita come la distanza massima individuata dai punti della figura rispetto alla retta che contiene quel lato. E' chiaro poi che in certi casi alcune altezze sono più "comode" di altre ma è molto importante non dare a questo aspetto un carattere "formale" che non ha.

### 1.5.4 Alcune considerazioni finali

Gli esempi presentati sono solo alcuni dei moltissimi che potrebbero essere proposti per mostrare misconcezioni derivanti dal posizionamento privilegiato delle figura geometriche.
Sono misconcezioni inizialmente inevitabili ma che si rivelano poi ostacoli didattici nel momento in cui si rimane confinati su *specifiche* posizioni.
Si potrebbe andare ancora più nello specifico e analizzare l'uso "indiscrimi-

[13] *ivi*, p.93

nato" di termini limitanti come orizzontale, verticale, obliquo, laterale, che vincolano le posizioni delle varie figure definite.
Tirosh e Stavy, ad esempio, sostengono che:

" E' stato affermato che le linee verticali e orizzontali costituiscono le direzioni fondamentali su cui gli oggetti possono essere orientati in relazione alla gravità. Evidentemente, la percezione delle linee verticali e orizzontali è programmata nel sistema visivo dei mammiferi."[14]

Ci si riferisce spesso, in contesti scolastici, alla "base" di un poligono (ma anche di un poliedro) come quel lato (faccia) su cui il poligono (poliedro) si "appoggia", quindi come qualcosa di necessariamente orizzontale (rispetto all'osservatore).

Per fare un altro esempio, la presenza della formula linguistica "lato obliquo" quando ci si sta riferendo ad un trapezio, comunemente usata in quasi tutto il mondo della scuola, potrebbe portare gli allievi a non riuscire a riconoscere un trapezio nella figura seguente:

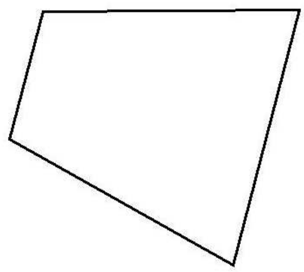


Figura 1.7: Trapezio

In questi e in molti altri casi, usando particolari scelte linguistiche e particolari rappresentazioni, si sposta l'attenzione su proprietà relative, circostanziali piuttosto che sulle proprietà matematiche invarianti rispetto alla posizione assunta. Queste scelte, inoltre, potrebbero non essere accessibili a

[14] *ivi*, p.82, da Stavy R. e Tirosh D. (2000)

tutti gli individui.
Nel processo di insegnamento-apprendimento della geometria quindi, bisognerebbe favorire il riconoscimento del concetto al di là della specifica immagine, ripristinare il controllo concettuale sulla componente figurale.

In questo capitolo abbiamo presentato gli strumenti teorici che serviranno per analizzare la fase sperimentale di cui si parlerà sia in alcune parti del prossimo capitolo che nel Capitolo 4. Per gli allievi non vedenti, la componente figurale non assume, naturalmente, carattere visivo ma come vedremo dovrà ricorrere ad altri canali sensoriali.
E' estremamente interessante analizzare, nel caso di soggetti non vedenti, la relazione tra ostacolo ontogenetico e gli ostacoli epistemologici e didattici, tra misconcezioni inevitabili ed evitabili.
Come vedremo più avanti, l'osservazione di persone non vedenti apre una nuova prospettiva, rispetto ai risultati già acquisiti dalla ricerca, nei confronti di questi strumenti classici della didattica della matematica.

Occorre però prima approfondire il significato di deficit visivo e le sue possibili implicazioni per l'apprendimento della matematica.

"In geometria sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perchè le loro concezioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni. A mio avviso questo è dovuto al fatto che i supporti visivi sono spesso usati nella geometria in una maniera non soddisfacente. A volte i modelli utilizzati sono inadatti a rappresentare la nozione che si tratta e così gli allievi acquisiscono un'idea sbagliata per quanto riguarda il senso del vocabolario geometrico" (Maier H.)[15]

"La geometria non consiste nel descrivere ciò che si vede ma nello stabilire ciò che *deve* essere visto. (Brousseau) [16]

[15] *ivi, p.78* tratto da Maier H. (1993)
[16] *ivi, p. 87* tratto da Brousseau G. (2005)

# Capitolo 2

# Immagini mentali in presenza di deficit visivo

Come anticipato nella conclusione del capitolo precedente, è importante cercare di capire che cosa vuol dire "*essere ciechi*" e in che modo avvengono alcuni processi cognitivi, come ad esempio la formazione di immagini mentali, in presenza di deficit visivo.

## 2.1 Introduzione

Non è possibile caratterizzare in modo univoco la cecità perchè ci sono moltissimi fattori da considerare e sono possibili molti approcci al problema. E' possibile definire la cecità in modo letterale, legislativo, medico, pedagogico, sociologico ed è possibile che queste definizioni siano in contraddizione o contrasto tra loro. Per deficit visivo si intende la compromissione o la mancanza del senso della vista. Ma *di quanta* compromissione stiamo parlando e *quando* è avvenuta? Bisogna distinguere tra *cecità totale* (totale assenza di residuo visivo), *cecità parziale*, *ipovisione* (una condizione ambigua, la risultante operativa di fattori quali la patologia, la prognosi, l'acuità visiva, il campo visivo, l'età, l'educazione ricevuta, il tipo di lavoro svolto, le aspirazioni personali di vita, le strategie adattive usate) ma an-

che tra *cecità congenita* (si verifica dalla nascita o nella prima infanzia) e *cecità tardiva* (sopraggiunge dopo i 3-4 anni). Quest'ultima distinzione è particolarmente importante, infatti, chi ha avuto modo di vedere possiede una memoria visiva che può supportare e integrarsi con le nuove modalità conoscitive. D'altra parte però, nei casi di cecità tardiva è necessaria una difficile riorganizzazione delle proprie conoscenze, un adattamento alle nuove modalità di esplorazione del mondo che, ovviamente, sarà tanto più difficile quanto più tardi sarà avvenuta la perdita della vista. A questo proposito bisognerebbe anche capire se la perdita della vista è stata graduale o improvvisa e se vi erano speranze di recupero o meno.
Bisogna considerare quindi la storia familiare, cognitiva, ambientale, medica, in una parola, tutta la storia personale del soggetto per poter instaurare relazioni consapevoli e attuare progetti pedagogici adeguati.

In mancanza della percezione visiva (in una qualche sua forma), la conoscenza del mondo deve, e può, avvenire attraverso l'integrazione di tutte le percezioni ottenute con i sensi vicarianti della vista: tatto, udito, olfatto, gusto, senso termico, senso anemestico (ventosità/immobilità dell'aria), la cinestesia (percezione che una persona ha del movimento e della posizione del corpo e delle sue parti), la sensibilità muscolare e plantare ma anche la memoria associativa, la capacità associativa e l'immaginazione. In particolare, molte delle informazioni che ad un vedente pervengono tramite la vista, ad un non vedente sono accessibili (sotto alcune condizioni) tramite il tatto o, più precisamente, tramite la *percezione aptica* [1]. E' chiaro, infatti, che per la conoscenza della realtà oggettuale, non basta parlare semplicemente di tatto inteso come contatto ma è necessario un *tatto attivo*, integrato al movimento. E' necessaria quindi una percezione aptica, tattilo-cinestetica: solo attraverso il movimento delle mani sull'oggetto è possibile ricavare informazioni utili alla sua conoscenza o identificazione.

[1] Il termine *aptico* deriva dalla forma medio passiva, *àptomai*, del verbo greco *àpto* che significa *tocco, afferro*

Ma quali sono le differenze fondamentali tra la percezione tattile e quella visiva? La vista è un senso sintetico ed istantaneo, permette il cosiddetto *colpo d'occhio*, è il senso della simultaneità, della visione d'insieme e a distanza. Il tatto è invece un senso analitico e successivo, la visione d'insieme è possibile solo dopo una sintesi mentale di una sequenza di esplorazioni, necessita del contatto e quindi della relativa vicinanza, manca di campo periferico. D'altra parte, le informazioni che pervengono dalla vista possono essere illusorie e superficiali mentre quelle raggiunte tramite un'esplorazione tattile sono più "ragionate", realistiche.
Il mondo è sempre lo stesso, indipendentemente da come viene percepito, tuttavia ogni organo di senso percepisce qualità specifiche. La percezione quindi è regolata da leggi comuni che riguardano i vari sensi, tuttavia il mondo sensoriale del tatto è autonomo rispetto a quello della vista. Ora, mentre in un vedente si ha la collaborazione tra percezione visiva e tattile, nel senso che i dati che pervengono dall'una e l'altra si integrano e completano a vicenda, in un non vedente la percezione aptica è, per così dire, allo stato puro.
E' chiaro, infine, che per poter sfruttare tutte le potenzialità dei sensi vicarianti della vista è necessario un adeguato allenamento. E' molto importante un'esplorazione aptica fine e consapevole che non è qualcosa di innato ma che può essere imparato, con il giusto esercizio. Per ricavare il massimo delle informazioni uditive disponibili è necessaria una grande capacità di concentrazione e di ascolto.
Il fatto che la vista porti circa il 75% delle informazioni sulla realtà non vuol dire che un non vedente si relazioni con il mondo solo usando il restante 25%, ma si verifica un accrescimento qualitativo degli altri quattro sensi che, grazie al lungo esercizio e all'allenamento, diventano più fini e sviluppati.

## 2.2 Immagini mentali nei non vedenti

La vista ha importanza fondamentale nella formazione delle immagini mentali, ci si potrebbe quindi chiedere: come si formano le immagini mentali

in un non vedente? In cosa sono simili e in cosa sono diverse, rispetto a quelle di un vedente? Che rilevanza ha, se è presente, il residuo visivo nella formazione di immagini mentali? A queste domande sono state dedicate molte ricerche, alcune tutt'ora in corso.
Sembra possibile suggerire che un'immagine mentale non sia singolarmente collegata ad una specifica modalità sensoriale, ma che sia una funzione cognitiva eterogenea e complessa. Concepire le immagini mentali come semplici riproduzioni di dati percettivi sembra quindi essere una visione riduttiva di un processo che in realtà coinvolge una serie di meccanismi percettivi, attentivi e mnestici; di questa complessità si deve tener conto nonostante avvenga che a volte la rappresentazione può mantenere alcune caratteristiche dello stimolo sensoriale da cui l'immagine è stata derivata (e.g., Cornoldi, Vecchi, 2000).

Ad esempio, i ciechi tardivi possiedono una memoria visiva che può essere più o meno nitida a seconda del periodo in cui è sopraggiunto il deficit. Varie ricerche provano che i ciechi tardivi possiedono e creano immagini mentali con caratteristiche visive (Hollins, 1989). Queste immagini mentali possono riferirsi a:

- oggetti o scene vista prima della perdita della vista;
- oggetti o scene percepiti apticamente in condizione di cecità;
- oggetti o scene ricostruiti sulla base di descrizioni verbali.

Questa ed altre ricerche di Hollins (Hollins (1985), (1986)) porterebbero alla conclusione che la natura (visiva o aptico-spaziale) delle immagini mentali nei ciechi tardivi dipende sia dalla quantità di tempo trascorso dalle ultime esperienze visive, che dalla quantità di tempo in cui il soggetto ha avuto una vista normale.
Per quanto riguarda i ciechi congeniti, vi sono numerosi studi che attestano la loro capacità di generare e manipolare immagini mentali anche in assenza di stimoli visivi. Le moderne tecnologie di rilevamento dell'attività neuronale, come ad esempio la risonanza magnetica funzionale (fRMI), hanno permesso

di appurare che certe aree della corteccia visiva si attivano quando i ciechi sono impegnati durante un compito tattile o acustico (e.g., Amedi et al., 2004; Sadato et al. 1996).
Tra le molte ricerche rivolte allo studio delle immagini mentali in soggetti con deficit visivo, ne verranno presentate due che hanno una forte relazione con le immagini mentali legate ad oggetti matematici. La prima ricerca riguarda la rotazione mentale di oggetti bidimensionali nei ciechi congeniti; la seconda, riguarda la rotazione mentale di oggetti tridimensionali in soggetti con differenti caratteristiche visive.

### 2.2.1 Rotazione mentale di oggetti bidimensionali nei ciechi congeniti

Shepard e Metzler (1971) proposero una procedura sperimentale basata sulla rotazione mentale di oggetti bidimensionali, rivolta a soggetti vedenti, per esplorare le caratteristiche cognitive delle immagini mentali. Ai soggetti veniva presentata una coppia di figure, che potevano essere identiche o speculari, disposte una su un certo asse del campo percettivo e l'altra ruotata di un certo angolo (in senso orario o antiorario). La richiesta era di determinare se le due figure erano sovrapponibili attraverso una rotazione o no. Lo stesso tipo di procedura, con esplorazione aptica della situazione, venne proposta da Marmor e Zaback (1976) a tre gruppi di 16 soggetti ciascuno, in cui vi erano ciechi congeniti, ciechi tardivi e vedenti bendati. Le due sagome usate erano in plastica e disposte in modo che la figura di sinistra fosse sempre allineata sul piano fronto-parallelo mentre quella di destra poteva essere ruotata in senso orario (sullo stesso piano) di un angolo di 0°, 30°, 60°, 120°, 150°. In accordo con i risultati raggiunti precedentemente da Shepard e Meltzer, il tempo impiegato nella risposta era direttamente proporzionale all'ampiezza dell'angolo, suggerendo che la risposta dei soggetti a questo tipo di richiesta è il risultato di una rotazione mentale da loro effettuata. Tuttavia, osservarono anche che i tempi di risposta e le percentuali di errore erano maggiori nei soggetti con cecità congenita rispetto a quelli dei ciechi tardivi e vedenti

bendati, che invece erano praticamente gli stessi. I tempi minori furono quelli osservati nell'esperimento originale su soggetti vedenti.
Queste osservazioni porterebbero a concludere che dall'esplorazione aptica degli oggetti scaturiscono delle immagini mentali di carattere spaziale ma di natura non necessariamente visiva; nonostante questo, a chi vede, o comunque ha una memoria visiva, gli aspetti visivi dell'immagine mentale permettono un'esecuzione della rotazione in tempi minori.
L'indagine è stata ripresa anche da Carpenter ed Eisenberg (1978) riprendendo un esperimento di Cooper e Shepard (1973). In questo caso, veniva proposta una sola sagoma di una lettera dell'alfabeto, che poteva essere identica o speculare rispetto all'originale, ruotata di un angolo di 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°. La richiesta era analoga al caso precedente, con la differenza che lo stimolo esterno era unico e il confronto doveva essere fatto con la canonica lettera dell'alfabeto proveniente dalla memoria semantica del soggetto. L'esperimento fu ripetuto tre volte.
La prima volta vi parteciparono 12 studenti di scuola superiore ciechi congeniti. Questi riferirono di essersi prima rappresentati la sagoma esplorata apticamente, di averla poi ruotata mentalmente per verificare l'eventuale coincidenza con lettere dell'alfabeto.
Nel secondo esperimento furono coinvolti soggetti vedenti, a cui lo stimolo veniva presentato visivamente; il terzo esperimento venne fatto con soggetti vedenti bendati ed esplorazione aptica della sagoma.
In tutti e tre i casi si è osservato un tempo di risposta direttamente proporzionale all'ampiezza dell'angolo di rotazione, elemento che confermerebbe la natura spaziale, non necessariamente visiva, delle immagini mentali impiegate per svologere questo genere di esercizio.
Un dato interessante è emerso dall'esperienza di Carpenter ed Eisenberg: nel terzo esperimento un fattore influente è sembrato essere la posizione della mano rispetto alla sagoma esplorata. Questo fatto venne approfondito in un quarto esperimento, arrivando a concludere che il tempo di risposta per i soggetti vedenti bendati dipendeva anche dalla posizione della mano rispetto

a quella della sagome, elemento che risultava ininfluente nei risultati relativi ai soggetti ciechi, più abili a decodificare gli stimoli aptici indipendentemente dalla posizione della mano.

### 2.2.2 Rotazione mentale di oggetti tridimensionali

A meno che non venga richiesta rapidità di esecuzione, nel quale caso si riscontra un maggior tempo di risposta nei soggetti con deficit visivo, anche nella rotazione mentale di oggetti tridimensionali, i processi usati da vedenti, vedenti bendati e ciechi sono molto simili. E' stato però ipotizzato che potrebbero esserci delle differenze qualitative riguardo all'elaborazione di immagini mentali in soggetti con differenti caratteristiche visive. A questo proposito è stata condotta un'indagine sperimentale con la seguente consegna:

"Immagina una struttura rigida di metallo composta da tre lati. Il lato inferiore, il cui estremi sinistro chiamo $A$ e il cui estremo destro chiamo $B$, appoggia sulla superficie del tavolo, di fronte a te. Dall'estremo $B$ parte il secondo lato, lungo come il primo: esso si innalza in verticale perpendicolarmente alla superficie del tavolo, formando quindi un angolo retto con il segmento $AB$; questo secondo lato termina in $C$. Dall'estremo $C$ parte il terzo lato, lungo come ciascuno dei precedenti, il quale, formando con il segmento $BC$ un angolo retto, si prolunga in profondità raggiungendo il punto $D$. Ora immagina di tenere il punto $A$ fermo e, facendo perno su di esso, di ruotare la struttura in modo che l'estremo $D$ sia allineato con l'estremo $A$ lungo la perpendicolare al piano del tavolo. Indica con l'indice della mano sinistra il punto in cui immagini si trovi l'estremo $D$ dopo la rotazione. Con l'indice dell'altra mano indica la posizione degli estremi $A$, $B$ e $C$ nella posizione in cui immagini si vengano a trovare dopo la rotazione."[2]

Gli intervistati fornivano prima una risposta spontanea, poi venivano invitati a ricostuire i loro processi mentali con l'aiuto di una riproduzione

[2]Hinton G. (1979), p. 235

reale della struttura metallica descritta nella consegna. Tutto lo svolgimento veniva videoregistrato e poi esaminato (da una giuria con alcune particolari caratteristiche[3]) in base ai seguenti criteri:

- Accuratezza della visione:
  *Rotazione tridimensionale*: gli estremi della struttura dopo la rotazione mentale si trovano su differenti piani di profondità, con buona approssimazione rispetto a quello che accadrebbe con una rotazione reale;
  *Rotazione con appiattimento sulle due dimensioni*: dopo la rotazione, gli estremi della struttura indicati si trovano sullo stesso piano perpendicolare al piano del tavolo.

- Modalità di rotazione:
  *Rotazione olistica*: viene fatta ruotare mentalmente l'intera struttura e la risposta viene data in base alla nuova posizione degli estremi;
  *Rotazione sequenziale*: viene immaginata la rotazione di un lato alla volta e quindi viene localizzato un estremo alla volta.

A questa indagine sperimentale hanno partecipato 26 studenti universitari normovedenti[4] (di età compresa tra i 19 e i 25 anni e nessuno iscritto a psicologia o scienze matematiche) e 12 ciechi (di età compresa tra i 19 e i 29 anni, tutti con diploma di scuola superiore, e qualcuno studente all'università. Cinque di loro erano ciechi dalla nascita, gli altri sette dai primi anni di vita). Un primo gruppo di 14 persone era formato da normovedenti che hanno eseguito il compito ad occhi aperti. Un secondo gruppo era formato da 12 vedenti che hanno eseguito il compito bendati. I ragazzi con deficit visivo rappresentavano il terzo gruppo.
I risultati dell'esperimento hanno messo in evidenza i seguenti elementi:

- Ancora un volta, le informazioni di natura visiva non si sono rivelate indispensabili per la formazione e la manipolazione delle immagini mentali coinvolte nell'esecuzione della richiesta;

[3]La giuria era composta da tre membri indipendenti che discutevano eventuali disaccordi fino al raggiungimento di una decisione unanime.

[4]Inteso come sinonimo di vedente.

- I ragazzi con deficit visivo riescono ad effettuare la rotazione mentale anche sulla base di informazioni spaziali date verbalmente, senza esplorazione aptica;

- I ragazzi non vedenti dimostrano una maggiore abilità nella manipolazione mentale di immagini di oggetti tridimensionali, nel senso che la tridimensionalità viene mantenuta in ogni momento durante la rotazione, cosa che non sempre è accaduta invece nelle performance dei ragazzi normovedenti.

L'ultimo punto, che era già stato osservato da Revesz (1950), è estremamente interessante. In generale infatti la rappresentazione dello spazio in persone normovedenti è di tipo prospettico; questo è dovuto al fatto che i dati percepiti visivamente sono predominanti nella formazione di immagini mentali di tipo spaziale. In persone con deficit visivo invece il canale sensoriale che permette la percezione dell'ambiente circostante è il tatto, senso della tridimensionalità per eccellenza, quindi in questo caso si assiste ad una maggiore abilità di manipolazione di rappresentazioni spaziali tridimensionali dovuta ad una maggiore familiarità con la tridimensionalità in sè.

Alcuni episodi rappresentativi riguardo alle immagini mentali associate ad oggetti geometrici di un non vedente sono avvenuti durante le varie ricerche fatte per la stesura di questa trattazione. Uno è accaduto in occasione del primo incontro con Marco. Alla richiesta di disegnare un cubo sul piano in gomma lui, d'istinto, lo ha disegnato come in Figura 2.1[5].

Si tratta del classico sviluppo piano a croce, ha raccontato infatti che alle medie glielo facevano disegnare sempre in questo modo. La richiesta successiva è stata di cercare di visualizzare un cubo nella mente e di cercare di disegnarlo "chiuso", proprio così come lo stava immaginando. Si è fermato un attimo a riflettere, poi ha iniziato disegnando il quadrato centrale (come se il cubo si trovasse davanti a lui) ma non sembrava particolarmente a suo

[5] E' una foto del disegno originale

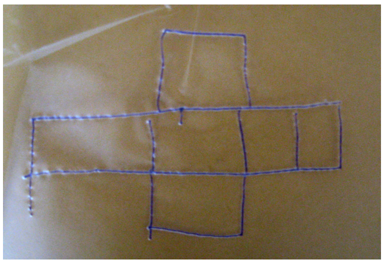


Figura 2.1: Primo cubo disegnato da Marco

agio con questa richiesta, come se non fosse una cosa facile, e controllava attentamente ogni linea aggiunta. Il disegno finale è questo:

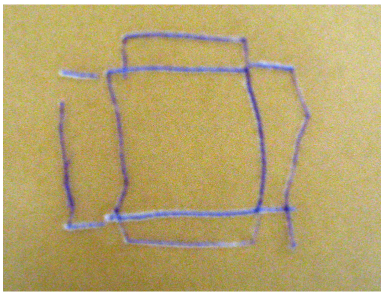


Figura 2.2: Secondo cubo disegnato da Marco

Ha precisato che la sesta faccia non l'ha rappresentata perchè si trova "*dietro*". Questa rappresentazione colpisce molto, anche per la somiglianza che presenta con il diagramma di Schlegel[6] del cubo, se ne può vedere un esempio in Figura 2.3, ma Marco ha detto di non averne mai sentito parlare.

Si è discusso di questi due disegni anche durante un incontro al Cavazza per avere un confronto con loro. E' stato estremamente interessante perchè di fronte al secondo disegno, P., non vedente dalla nascita, si è chiesta perchè ci sono dei "*rettangolini piccoli*" (domandandosi se Marco avesse un qualche residuo visivo) e dove fosse l'altra faccia (quella che Marco ha chiamato *faccia dietro*). E' molto eloquente il discorso che ci ha fatto P. su come avrebbe

[6]Per i dettagli su questo argomento si veda 4.2

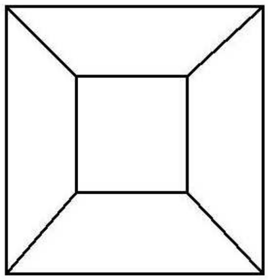


Figura 2.3: Diagramma di Schlegel del cubo

disegnato lei il cubo e perchè: "[...]*se mi chiedi di disegnare un cubo ti disegno un cubo più o meno come questo* [indicando lo sviluppo del cubo di Fig. 2.1]*con le facce perfettamente uguali, stando molto attenta che siano ugualissime*[...]*Per me un oggetto 3D ha una faccia dietro, una faccia davanti, due facce di lato ecc.*[mimando con le mani le varie facce del cubo]*e per me sono tutte ugualmente percepibili, perchè io basta che con le mie mani lo giri sopra e sotto. Per me non c'è nessuna differenza percettiva, quindi nella mia testa non c'è questo discorso*[...]*Se mi dicessi disegna quello che pensi io non saprei cosa disegnare*[qualcuno le appoggia una scatolina di fronte] *Se mi dicessi disegna questo, non saprei cosa disegnare.*"
Un'altra persona presente all'incontro ha ipotizzato la possibilità che Marco, nel fare questa rappresentazione, potrebbe aver usato un ricordo di un qualche cubo in prospettiva che magari gli era stato proposto in un'attività tecnico-geometrica, tuttavia in un incontro successivo Marco ha detto di non aver fatto questo tipo di esperienza.
E' stato chiesto il loro parere anche su un altro disegno interessante di Marco, in cui gli era stato proposto lo stesso iter del cubo. La prima domanda era stata di disegnare una piramide (a sua scelta) e d'istinto ha rappresentato le proiezioni ortogonali di una piramide a base quadrata:

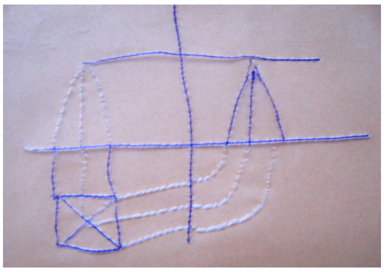


Figura 2.4: Piramide disegnata da Marco

Quindi, come per il cubo, gli è stato chiesto di visualizzare la piramide nella mente e di cercare di disegnarla così. Cercando di riproporre la stessa strategia del cubo, ha fatto il seguente disegno:

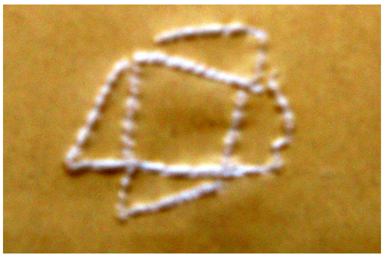


Figura 2.5: Seconda piramide disegnata da Marco

Ma non era assolutamente soddisfatto, quella per lui non era una piramide ed ha concluso che non sapeva come fare, non sapeva cosa disegnare.
La discussione al Cavazza è andata avanti a lungo e ci sono state moltissime osservazioni interessanti. La conclusione tratta è che probabilmente l'immagine mentale che si forma in una persona che non vede (e in particolare di una persona che non ha memoria visiva) di una certa figura solida non è in corrispondenza biunivoca con la sua rappresentazione su un foglio, nel senso che bisogna *specificare* cosa si vuole che venga disegnato (e non tutto è "disegnabile"). L'impressione è stata che, se ci si riferisce all'immagine di un oggetto bidimensionale, allora in un non vedente c'è corrispondenza tra l'immagine pensata e quella disegnata. Ma se si vuole disegnare qualcosa di

tridimensionale è *necessario* che questo qualcosa venga aperto o schiacciato (e in questo caso il disegno può essere un utile strumento), altrimenti questo qualcosa nel foglio non c'entra, non è possibile rappresentare sul piano ciò che viene visualizzato nella mente.

Molto interessanti sono anche altri due episodi avvenuti durante il laboratorio, in particolare nella parte dedicata agli sviluppi piani di un solido. Dopo aver analizzato, con diversi approcci, vari sviluppi del cubo è stato proposto ad Anna un falso sviluppo del cubo in cartoncino. La richiesta era di cercare di capire, senza effettuare la chiusura, di che solido potesse avere uno sviluppo del genere. Lei ne ha percorso il perimetro, per poterne individuare la forma globale, poi ha analizzato le pieghe interne, intuendo che si trattava di una configurazione di sei quadrati. Dopo una lunga analisi, durante la quale continuava ad esplorare la sagoma, ha detto: "*Non capisco cosa potrebbe diventare. Forse come cubo non si chiude però...secondo me non può diventare un cubo.*"
Questo primo episodio è interessante perchè rivela che Anna ha visualizzato la sagoma con le pieghe interne e ha tentato mentalmente di effettuare la chiusura, rendendosi conto che qualcosa non andava, che non riusciva a trovare le giuste corrispondenze. Si è resa conto, manipolando l'immagine mentale associata all'oggetto che stava esplorando, che pur *sembrando* lo sviluppo di un cubo *non poteva esserlo* perchè la chiusura non era possibile.
Il secondo episodio riguarda la composizione di una configurazione di quadrati in modo che risultasse essere uno sviluppo di un cubo. Aveva a disposizione sei quadrati in cartoncino tutti congruenti. All'inizio ne ha disposti tre a forma di $T$ e un quarto in modo da formare un quadrato e si è accorta subito *senza verifica* che non poteva essere chiuso; così ha completato la sistemazione fino ad ottenere il classico sviluppo a croce. Il particolare interessante è che, nonostante lo sviluppo a croce fosse quello con cui lei ha maggior familiarità, non lo ha ottenuto per imitazione ma cercando di immaginare in ogni momento le conseguenze della posizione scelta per ciascun quadrato incollato. Infatti, la sistemazione dell'ultimo quadrato ha richiesto

più tempo, l'ha decisa solo dopo un'attenta e consapevole analisi per evitare sovrapposizioni o "blocchi della chiusura".
Anche a Marco è stato proposto di cercare di risalire ai possibili sviluppi diversi di un cubo (cosa che lo ha molto stupito perchè non sapeva ce ne fossero più di uno) e lui, con solo un cubo di cartoncino in mano, lo poggiava sul banco e, con le mani, simulava una "sbucciatura" del cubo una faccia alla volta, probabilmente seguendo con la gestualità ciò che faceva con la mente. Alla fine è riuscito ad ottenere tre nuovi sviluppi.

Appurato quindi che la formazione di immagini mentali non è una prerogativa dei vedenti, tutte le considerazioni e gli episodi presentati aiutano a delineare una risposta alla domanda "che cos'è un'immagine mentale di un non vedente?" E' sicuramente qualcosa di estremamente *personale*, nel senso che dipende strettamente dal "tipo" di cecità e quindi, come abbiamo puntualizzato nel capitolo precedente, dipende dalla storia personale. E' anche qualcosa di "tridimensionale", il risultato di una complessa interazione tra attività senso-percettiva tattile, motoria, memoria visiva (se è presente) e memoria "tattile", che si forma passo dopo passo. Nel prossimo capitolo cercheremo di delineare una risposta alla seguente domanda: che legame c'è tra questo tipo di immagini mentali e l'apprendimento della matematica?

# Capitolo 3

# Deficit visivo e apprendimento della matematica

E' fondamentale sottolineare che deficit visivo non significa di per sè deficit cognitivo o disturbo di apprendimento.

In letteratura, il deficit visivo rientra tra gli ostacoli ontogenetici proposti da Brousseau. Tuttavia, il legame che si viene a creare tra i diversi tipi di ostacoli nel caso dei processi di apprendimento di uno studente con minorazioni visive è peculiare di questa situazione. Ad esempio, un insegnante che fa ampio uso della lavagna senza sufficienti spiegazioni verbali sta facendo una scelta che per l'alunno cieco rappresenta un ostacolo didattico. Infatti, la lavagna in sè è un sussidio didattico praticamente inutile per una persona che non vede. Tuttavia, la funzione svolta dalla lavagna, cioè quella di supportare la spiegazione verbale attraverso alcune rappresentazioni semiotiche, è la stessa che per un cieco svolge il computer o il piano in gomma. Quindi, se l'insegnante fornisce tutte le informazioni verbali necessarie, l'alunno che non vede le potrà tradurre attivamente con l'uso di specifiche strumentazioni.

Come fa notare Del Campo (2000), le vie di comunicazione della matematica sono principalmente tre: visiva, uditiva e aptica. E' chiaro che nel processo di apprendimento, all'alunno non vedente, a meno che non abbia un residuo visivo didatticamente sfruttabile (e in questo caso, sono necessarie delle strumentazioni e accortezze particolari[1]), è precluso l'accesso alla maggior parte dei mezzi semiotici di oggettivazione disponibili, perché il più delle volte richiedono l'uso della vista. Tuttavia può usare con efficacia i mezzi semiotici di oggettivazione legati alla percezione tattile come oggetti, artefatti, strumenti. E la domanda è: *quanto* di ciò che viene comunicato per via visiva potrebbe essere comunicato in altro modo? E comunicando in altro modo, quali potrebbero essere i vantaggi o gli svantaggi per l'apprendimento?

Come abbiamo ripetuto più volte, la matematica si occupa di oggetti che non esistono nella realtà e che, per questa ragione, non sono direttamente percepibili. Il fatto di dover fare obbligatoriamente ricorso a delle rappresentazioni semiotiche grazie alle quali si formano delle immagini mentali può essere fonte di misconcezioni, che possono essere evitabili o inevitabili. Queste misconcezioni sono legate a qualche ostacolo all'apprendimento della matematica e abbiamo visto alcuni esempi di misconcezioni legate ad ostacoli didattici. Abbiamo anche evidenziato come un'immagine mentale possa essere pensata come un insieme di rappresentazioni semiotiche e che i risultati sperimentali di molte ricerche confermano che le immagini mentali di tipo spaziale non devono necessariamente contenere caratteristiche visive.

Entriamo ora nel dominio della geometria e immaginiamo la seguente situazione: un insegnante entra in classe con una rappresentazione di cubo in cartoncino. Lo appoggia sulla cattedra e comunica agli studenti: "*Guardate, questo è un cubo*". I ragazzi, ciascuno dal suo banco, vedranno il cubo deformato secondo le regole che la prospettiva prevede per un punto di vista collocato nella loro posizione, e in base a questa informazione percettiva iniziano a formarsi un'immagine mentale. Ovviamente ognuno di loro ha già visto un oggetto di forma cubica di uso comune, probabilmente gli è capitato di vederlo da ogni angolazione; sa che "è sempre uguale" indipendentemente dalla posizione dell'osservatore. Tuttavia, se si chiede loro di immaginare un

[1]Ausili ottici, come ad esempio videoingranditori, particolari illuminazioni o contrasti cromatici.

cubo, lo immaginano comunque deformato perchè visto da una certa angolazione. L'immagine mentale associata all'oggetto Cubo è, probabilmente in tutte le persone normovedenti, una rappresentazione visiva, e in quanto tale in prospettiva, della figura solida cubo.
Immaginiamo ora che in questa classe ci sia una ragazza non vedente congenita. Il "*Guardate, questo è un cubo*" con lei non funziona, quindi l'insegnante le porge il modello in cartoncino tra le mani. Se le dimensioni del modellino sono adatte a tenerlo tra le due mani, una prima globale esplorazione la farà accorgere che si tratta di un oggetto tridimensionale, con un certo peso e una certa consistenza, chiuso, di cartoncino e le darà l'intuizione della simmetria. Quando entrerà nei dettagli, potrà rendersi conto che è composto da sei facce e che sono tutte uguali, che hanno tutte quattro lati e così via. Tutte queste informazioni andranno ad interagire e integrarsi tra loro fino ad una sintesi finale che costituirà la sua immagine mentale.
A questo punto ci si potrebbe chiedere: la componente figurale del concetto figurale Cubo è un'immagine visiva? Ovviamente no. E la rappresentazione grafica del cubo in prospettiva, quanto condivide con la componente figurale dell'oggetto geometrico?
Ovviamente, questo è solo un esempio, quello che è interessante è però il diverso approccio alla rappresentazione proposta, che determina un diverso "stile" di apprendimento, un diverso "stile" di formazione dell'immagine mentale.
Riprendendo il discorso sulla lavagna, potremmo immaginare la seguente situazione nella stessa classe di prima. L'insegnante prende libro di testo e legge "*Un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli*" e intanto disegna alla lavagna la seguente figura:

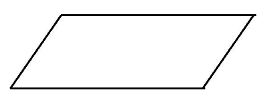


Figura 3.1: Parallelogramma

Gli studenti provvedono subito a riprodurre l'immagine sul loro quaderno, probabilmente facendo un'associazione parallelogramma-disegno. La ragazza che non vede è *costretta* a seguire le istruzioni date dall'insegnante, nel senso che per poter riprodurre il disegno *deve* seguire la definizione. Il controllo concettuale per poter rappresentare graficamente il parallelogramma è, in un certo senso, obbligato. Di conseguenza, non ci sono le informazioni "parassite" che possono derivare dalla specifica posizione del disegno e insediarsi nella costruzione dell'immagine mentale.

Nel corso del primo incontro all'Istituto Cavazza, durante una conversazione sulla tipica misconcezione sulla verticalità dell'altezza (cfr. 1.5.3), Vito Lapietra accompagnava il parlare di altezza del triangolo con una gestualità molto significativa: le sue mani si muovevano come se stessero verificando la perpendicolarità, come se ci fossero due segmenti che si intersecano e lui andasse a sentire l'angolo che si forma tra loro. Questo episodio è stato un ottimo spunto di riflessione: sembra banale a dirsi ma, senza vedere, l'unico modo per verificare se un certo segmento individua un'altezza di un poligono, rispetto ad un certo lato, è andare a toccare gli angoli che si formano tra quel segmento e il lato; detto in altri termini, è andare a verificare che la situazione risponda alle richieste formali per le quali un certo segmento possa essere individuato come altezza rispetto ad un certo lato. Tenendo a mente questa interessante osservazione, sono state proposte a Marco, durante uno degli incontri, un paio di situazioni che avrebbero permesso un approfondimento. La prima richiesta è stata di risolvere il problema del rettangolo descritto nel primo episodio dell'Esempio 1.5.2. Di fronte al piano in gomma con disegnata la retta $r$ e i due punti $A$ e $C$ come nella sperimentazione originale, gli è stata esposta la consegna verbalmente; lui ha disegnato *immediatamente* e *senza alcun dubbio* ciò che è visibile nella seguente figura[2]:

[2]E' una foto del disegno originale.

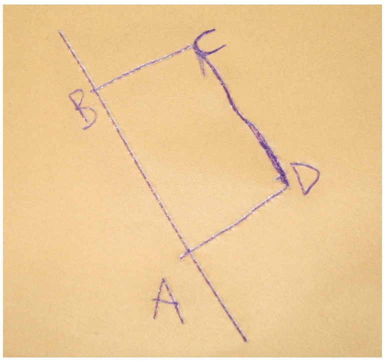



Figura 3.2: Problema rettangolo Marco

La cosa che colpisce di più è il fatto che il dover disegnare un rettangolo "storto" non gli ha richiesto nessun momento di riflessione, la situazione "insolita" proposta dal problema non lo ha distratto ma, da subito, si è solo preoccupato del parallelismo dei lati opposti, controllando istante per istante che venisse mantenuto, e della perpendicolarità dei lati consecutivi. Detto in poche parole, si è solo preoccupato che quello che stava disegnando rispettasse, contemporaneamente, la definizione di rettangolo e la richiesta del problema. Gli è stato quindi proposto, sempre sul piano in gomma, il disegno di due quadrati identici ma messi in posizioni diverse rispetto a lui, in analogia con l'episodio 1.5.1:

Figura 3.3: Problema rombo/quadrato Marco

La richiesta era di individuare di che poligoni si trattasse. Li ha esaminati uno alla volta: prima ne ha percorso il permetro, poi ha controllato il parallelismo (mettendo di volta in volta due dita su una coppia di lati opposti per

stabilire se la distanza restava costante o no) e ha stimato l'ampiezza degli angoli (ci ha detto che per regolarsi usa il polpastrello di un dito). Dopo l'esplorazione, con sicurezza, ha detto che si trattava dello *stesso quadrato*. Per approfondire gli è stato chiesto se il fatto che fossero posizionati in modo diverso lo avesse in qualche modo indotto a pensare che uno dei due fosse un rombo ma ha detto di non aver neanche pensato a questa possibilità. Se proprio doveva trovare una differenza tra le due figure, ed era riluttante a farlo, questa consisteva nel fatto che una aveva un vertice più vicino a lui e l'altra un lato.
E' naturale che con questi tre episodi non si dimostra nulla, quello che tuttavia può essere motivo di riflessione è il forte controllo concettuale che la percezione tattile comporta ed "obbliga" a mantenere in ogni momento.

Ci sono delle conseguenze propriamente legate al deficit visivo, che possono rivelarsi fonte di difficoltà nell'apprendimento della matematica: la difficoltà di trattare il passaggio dal tridimensionale al bidimensionale e la difficoltà nella visione di insieme. Quest'ultimo punto, ad esempio, si manifesta spesso nell'algebra di fronte ad espressioni frazionarie particolarmente complicate. Infatti un'espressione di questo tipo:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{4+\frac{7}{8}}$$

per essere scritta in Braille matematico o sullo schermo di un computer, per poi essere letta sulla barra Braille o dalla sintesi vocale, dovrà essere adattata ad una lettura analitica e sequenziale:

$$(1/2 + 1/3)/(4 + 7/8)$$

di meno immediata comprensione.

Un discorso un po' più approfondito va fatto per il delicato passaggio dal tridimensionale al bidimensionale, e in particolare riguardo la difficoltà per i non vedenti congeniti a relazionarsi con le rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali (ad esempio le rappresentazioni in prospettiva). Come abbiamo già detto, la prospettiva è un modo per rappresentare la realtà vista dall'occhio e non c'è modo di averne percezione tramite il tatto[3].

A questo proposito, durante un incontro al Cavazza è stato raccontato un aneddoto molto significativo. Un ragazzo di 11 anni non vedente congenito ha sentito l'insegnante dire che la prospettiva si può immaginare come se i lati della strada si toccassero. Il suo commento a questo paragone è stato "*E' come un triangolo isoscele, io sto al centro della base e mi guardo davanti e lì ho il vertice*". L'insegnante è stata molto colpita dall'osservazione del ragazzo, fino a che lui non ha continuato dicendo "*Se vado verso il vertice, cammino cammino e arrivo al vertice, mi giro e vedo la base*". Anche provando a fare un paragone "uditivo" basato sul fatto che la voce è sempre più flebile mano a mano che aumenta la distanza, il ragazzo ha commentato "*Ma se io mi allontano mica divento più piccolo*". E chi può biasimarlo?

Quindi la prospettiva, come questo racconto testimonia molto bene, è qualcosa di "strano" per chi non vede. Paola Gamberini del Cavazza ha ammesso di avere "*un'immagine angosciante della prospettiva. Ho un'immagine come se tutto venisse risucchiato là in fondo.*"

Durante la discussione sulla piramide fatta con Marco, di cui si è parlato nel capitolo precedente, gli è stato anche proposto un disegno sul piano in gomma di una piramide in prospettiva, chiedendogli se lui riconoscesse in quel disegno una piramide o no. Lo ha analizzato a lungo ma per lui non era assolutamente intellegibile, non rappresentava affatto una piramide. L'ha definita incompleta, una *piramide a metà*. La piramide (disegnabile sul foglio) per lui era quella di Fig.2.4.
La difficoltà nell'"accettare" la prospettiva, al di là dell'aspetto scolastico, ha una conseguenza in ambito estetico-artistico. Non poter ammirare delle opere su tela è sicuramente una grande perdita. Il Museo Tattile di pittura Antica e Moderna "Anteros" nasce proprio con l'intento di "tradurre" tattilmente capolavori pittorici rappresentativi delle età comprese tra classicità

[3] In questo è rivoluzionaria l'idea su cui si basa il Museo "Anteros"

e contemporaneità. Abbiamo visitato questo museo ed è stata un'esperienza veramente illuminante; è incredibile ciò che, con creatività e consapevolezza, può essere tradotto tattilmente. In un'opera viene addirittura presentato l'equivalente tattile di una donna che si sta specchiando[4]. In fondo, non sarebbe una cattiva idea pensare di mettere in atto un museo tattile anche per la matematica.

In conclusione, il deficit visivo, che viene generalmente considerato un ostacolo ontogenetico, sembra non essere veramente vincolante ai fini dell'apprendimento della matematica, anzi per certi aspetti e in alcune situazioni potrebbe addirittura essere una risorsa. Il problema nasce dall'uso di artefatti (nella sua accezione più ampia che comprende anche i mezzi semiotici di oggettivazione) inadeguati che possono andare a rappresentare degli ostacoli didattici o essere fonte di misconcezioni. Anche Villey sottolineò che:

"L'ostacolo non è nella natura delle idee, ma nella scarsità dei mezzi di cui dispone il cieco per assimilarle. Il vedente assimila le idee soprattutto attraverso la vista, e non vi è strada che conduca allo spirito con maggiore rapidità e precisione di questa."[5]

Tuttavia, come sostiene anche Del Campo, non c'è oggetto matematico che non possa essere trasmesso per via tattile perchè "alla Matematica bastano il tatto (in senso lato, il sistema aptico) e qualche parola."[6]
Pertanto le immagini mentali associate ad oggetti matematici non sono prerogative della sola percezione visiva, nonostante quest'ultima rappresenti il mezzo più immediato affinchè esse si determinino. Inoltre, se da una parte è vero che l'esplorazione tattile richiede tempi maggiori, è anche vero che proprio questi tempi permettono allo studente di elaborare l'informazione in modo più profondo.
Ci si potrebbe chiedere: esistono delle misconcezioni tipiche degli studenti

[4]Traduzione plastica della stampa giapponese "*Okita*", opera di Kitagawa Utamaro.
[5]Villey P., (1946), p.15
[6]Del Campo J.E.F., (2000), p. 163.

non vedenti oppure presentano, in generale, le stesse difficoltà dei normovedenti? Alla luce di quanto è stato detto finora si potrebbe ipotizzare che alcune frequenti misconcezioni in geometria, come ad esempio quelle presentate con gli esempi visti nel capitolo precedente, non avrebbero motivo di crearsi. Ma potrebbero crearsene altre?
Per poter dare risposte valide a questo tipo di domande bisognerebbe preparare delle sperimentazioni su larga scala che coinvolgano un grande numero di soggetti con differenti caratteristiche visive; bisognerebbe studiare in modo approfondito e con consapevolezza matematica ogni artefatto accessibile per via tattile, che potrebbe essere proposto come mezzo semiotico di oggettivazione di un qualche oggetto matematico, per capire bene i vantaggi e gli svantaggi che potrebbe presentare. Quello che è importante sottolineare è anche che rispondere a domande di questo tipo non darebbe apporto solo ad una didattica speciale dedicata al deficit visivo ma alla didattica della matematica nel suo complesso.
Infatti l'esplorazione aptica è qualcosa di cui quasi tutti possono usufruire e se in qualche misura può contribuire ad evitare che si vengano a creare delle misconcezioni che ostacolano l'apprendimento allora perchè non farne un uso generalizzato? Inoltre questa osservazione è supportata da numerose ricerche, come ad esempio quella dell'embodiment in campo neuroscientifico (e.g., Rizzolatti Sinigaglia (2006), Gentilucci(2003), McNeill(1992), Ito(1993), Goldin-Meadow(2003)), la teoria dell'oggettivazione di Radford e l'approccio multimodale all'apprendimento proposto da Arzarello (e.g., Arzarello (2005), (2006)) che evidenziano il ruolo decisivo giocato dall'attività senso-motoria (gesti, movimenti del corpo, attività cinestetica, uso di artefatti, tatto, ecc.) nell'apprendimento della matematica.

Quindi, l'analisi dell'apprendimento della matematica da parte di alunni non vedenti, da un lato costringe ad ampliare le risorse semiotiche a cui l'alunno può accedere, dall'altro fornisce delle risorse didattiche che permettono di migliorare l'apprendimento anche degli alunni normovedenti. Essi possono così avere accesso a modalità di apprendimento che di solito gli ven-

gono precluse. Infatti, è come se si venisse a creare una doppia barriera: da una parte a chi non vede è precluso ciò che è visivo ma a chi vede è precluso ciò che può essere toccato perchè spesso si dà alla vista un'importanza eccessiva. L'apprendimento è un processo che richiede l'attivazione di più canali sensoriali.
Si può dire, quindi, che l'ostacolo ontogenetico non esiste in sè ma lo diventa solo in relazione alla prassi didattica e quindi agli ostacoli didattici. Si potrebbe fare un parallelo con la relazione che c'è tra deficit ed handicap. Il deficit è dell'individuo, diventa un handicap solo se l'individuo viene immerso in una realtà che gli è ostile, in cui non riesce a districarsi agevolmente secondo quelle che sono le sue potenzialità. L'handicap è qualcosa di esterno alle persone, è un problema sociale. Il legame che intercorre tra gli ostacoli ontogenetici e quelli didattici è forse molto più stretto e sottile di quello che può sembrare. In letteratura si tende spesso ad associare le misconcezioni inevitabili agli ostacoli ontogenetici e a quelli epistemologici e le misconcezioni evitabili agli ostacoli didattici. Nel caso particolare del deficit visivo però questo tipo di associazione potrebbe essere fuorviante; si potrebbe rischiare di legare una certa difficoltà alla cecità, e considerare le misconcezioni che ne potrebbero derivare come inevitabili, quando in realtà il problema potrebbe dipendere solo da scelte didattiche inadeguate.

Come è stato detto nell'introduzione, è parte integrante di questa trattazione anche un laboratorio di geometria di dieci incontri con Anna, una ragazza non vedente di III superiore. La scelta degli argomenti trattati in questo laboratorio è stata fatta seguendo un approccio suggerito in letteratura da molti autori, tra cui ricordiamo Arrigo G. Sbaragli S.(2004), cioè quello di studiare la geometria passando dallo spazio tridimensionale al piano bidimensionale. Questo modo di "fare geometria" ha una valenza didattica molto forte perchè ci si avvicina alla geometria attraverso un passaggio che è molto più naturale, rispetto a quello tradizionale che va dal piano allo spazio. Nel capitolo seguente, quindi, verrà descritta la teoria matematica che sta dietro alcuni degli argomenti affrontati durante questa attività laboratoriale e nel Capitolo 5 parleremo in dettaglio della parte del laboratorio dedicata alle sezioni dei poliedri.

# Capitolo 4

# Poliedri e Sezioni del cubo

In questo capitolo verranno presentate le principali definizioni e i più importanti risultati che riguardano i poliedri convessi, in particolare quelli regolari e le sezioni del cubo.

## 4.1 Preliminari

Un **politopo** è una figura geometrica delimitata da porzioni di linee, piani o iperpiani in $\mathbb{R}^n$.
Un politopo in $\mathbb{R}^2$ è un **poligono**, in $\mathbb{R}^3$ è un **poliedro**.
In particolare si ha che:

**Definizione 4.1.** Un **poligono** ad n lati o **n-agono** è una poligonale chiusa e non intrecciata ottenuta unendo le coppie consecutive di $n$ punti. Gli $n$ punti si chiamano **vertici** del poligono, i segmenti sono i **lati**.

Si parlerà di **poligono piano** se i vertici sono tutti complanari, di poligono **non piano** altrimenti. Nel seguito per poligono si intenderà sempre un poligono piano.

Un poligono, essendo un particolare tipo di curva semplice chiusa, per il teorema di Jordan divide il piano in due regioni: una interna e finita, l'altra esterna.
Si parlerà di **poligono convesso** quando nessuno dei prolungamenti dei lati

interseca la regione interna, altrimenti sarà un **poligono concavo**.
Un n-agono convesso può essere descritto, in termini di coordinate cartesiane, da un sistema di $n$ disequazioni in due incognite del tipo:

$$a_k x + b_k y \leq c_k \quad con \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Introducendo la seguente nozione:

**Definizione 4.2.** Dato un insieme di punti in $\mathbb{R}^n$, si chiama **inviluppo convesso** di tale insieme il più piccolo convesso che lo contiene.

è possibile pensare all'n-agono convesso come l'inviluppo convesso di $n$ punti in $\mathbb{R}^2$.
Nel seguito con poligono si intenderà un poligono piano e convesso.

**Definizione 4.3.** Un poligono si dice **regolare** se è equilatero ed equiangolo.

In generale, per indicare un politopo regolare si usano i **simboli di Schläfli**.
Il simbolo di Schläfli per un n-agono regolare è $\{n\}$.

**Definizione 4.4.** La **figura al vertice** O di un poligono è il segmento che unisce i punti medi dei due lati che contengono O.

Se si accostano tra di loro dei poligoni tutti complanari, si fa cioè in modo che abbiano uno spigolo in comune a due a due, si ottengono le tassellazioni del piano; se invece questo accostamento avviene tra poligoni non complanari, e quindi si passa, almeno, in $\mathbb{R}^3$, e se vengono rispettate certe condizioni, si ottengono i poliedri, che verranno studiati nella prossima sezione. In tale caso i lati e i vertici dei poligoni si chiameranno **spigoli** e **vertici** del poliedro.

## 4.2 Poliedri

Nel seguito, si intenderà con *struttura combinatoria* di un poliedro, l'insieme dei suoi vertici, spigoli e facce e le relazioni di incidenza e appartenenza tra questi.

**Definizione 4.5.** Sia $S$ un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^3$. S è una **superficie poliedrale** se è l'unione di un numero finito di poligoni $P_j$ nello spazio, le **facce** del poliedro, in modo tale che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

i) L'intersezione di due facce o è vuota, o è un lato (lo spigolo del poliedro) oppure è un vertice comune alle due facce;

ii) Ogni spigolo contiene esattamente due facce;

iii) Due facce che si intersecano in uno spigolo (facce adiacenti) non sono complanari;

iv) Comunque si fissi un vertice $v$ e due facce $f$ e $g$ che contengono $v$, esiste una catena di facce $f_1, \ldots, f_n$, tutte contenenti $v$, tali che $f = f_1$, $g = f_n$ ed $f_i$ sia adiacente ad $f_{i+1}$, per ogni $i = 1, \ldots, n-1$.

Se vale inoltre l'ulteriore condizione seguente, la superficie poliedrale S è **semplicemente connessa**:

v) Comunque si fissi una poligonale formata da spigoli di S, questa è il bordo dell'unione di un certo numero di facce di S.

Usando un analogo del teorema di Jordan per spazi di dimensione maggiore di 2, una superficie poliedrale divide lo spazio in una regione interna limitata ed una esterna; possiamo definire un poliedro come segue:

**Definizione 4.6.** Un **poliedro** è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^3$ che ha per bordo una superficie poliedrale.

Useremo il termine poliedro, indifferentemente per "poliedro" e per "superficie poliedrale".

Nel caso in cui nessuno dei piani che contengono le facce della superficie poliedrale interseca la regione interna, si parlerà di **poliedro convesso**, che può essere pensato anche come l'inviluppo convesso di $n$ punti di $\mathbb{R}^3$. Se invece tali piani intersecano la regione interna si parlerà di **poliedro concavo**.

Un poliedro convesso con $n$ facce può essere descritto, in termini di coordinate cartesiane, da un sistema di $n$ disequazioni in tre incognite del tipo:

$$a_k x + b_k y + c_k z \leq d_k \quad con \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Nel seguito, con la parola poliedro si intenderà un poliedro convesso e semplicemente connesso, a meno di diversa indicazione.

Diamo ora alcune notazioni e definizioni utili:

- Se $s$ ed $s'$ sono vertici, o spigoli, o facce di un poliedro, con la notazione $s < s'$ si intenderà la **relazione di incidenza**, sta ad indicare cioè che s (che può essere un vertice o uno spigolo) è contenuto in s' (che sarà o uno spigolo o una faccia);

- Dato un poliedro $P$, una **bandiera** di $P$ è una terna $(v, s, f)$, in cui $v$ è un vertice di P, $s$ è uno spigolo di P, $f$ è una faccia di P, tali che $v < s < f$;

- La **figura al vertice** nel vertice $O$ di un poliedro è il poligono i cui lati sono dati dalle figure al vertice di tutte le facce che contengono $O$;

- La **valenza** di un vertice è il numero degli spigoli (o, equivalentemente, delle facce) che contengono quel vertice;

- Se $P$ e $P'$ sono due poliedri, e se $A$ (e rispettivamente $A'$) è l'insieme di vertici, spigoli e facce di $P$ (rispettivamente $P'$), si chiama **isomorfismo combinatorio** tra $P$ e $P'$ un'applicazione biunivoca $f : A \rightarrow A'$ tale che:

  $$x < y \quad in \quad A \Leftrightarrow f(x) < f(y) \quad in \quad A'$$

  Se esiste un tale isomorfismo, allora $P$ e $P'$ si diranno **combinatoriamente equivalenti**. Si ha, in particolare, che due poliedri combinatoriamente equivalenti hanno lo stesso numero di vertici, spigoli e facce (ma non è vero il viceversa).

Per visualizzare la struttura combinatoria di un poliedro $P$, uno strumento molto utile è il **diagramma di Schlegel** di $P$.
Esso consiste in un *grafo* bidimensionale ottenuto proiettando su un piano i vertici e gli spigoli di $P$ a partire da un punto $x$ scelto in modo tale che sia molto vicino ad una faccia di $P$, e che proietti tale faccia in un poligono che contiene tutti i restanti vertici e spigoli di $P$.
Nel grafo $G$ così ottenuto, il numero di vertici e di spigoli coincide rispettivamente con il numero dei vertici e degli spigoli del poliedro $P$. Il numero di facce di $P$ è invece pari al numero delle componenti connesse del complementare di $G$ nel piano: alla componente connessa illimitata corrisponde la faccia di $P$ vicino alla quale si trova $x$, le componenti limitate si trovano invece in corrispondenza biunivoca con le altre facce del poliedro.

*Osservazione* 1. Contenendo soltanto informazioni di natura combinatoria, il diagramma di Schlegel, ad esempio, di un cubo sarà uguale a quello di un parallelepipedo.

Il teorema che segue è molto interessante e molto forte: esprime infatti una relazione che lega il numero dei vertici $V$, il numero degli spigoli $S$ e il numero delle facce $F$ di un qualunque poliedro semplicemente connesso:

**Teorema 4.2.1** (Formula di Eulero)**.** *Dato $P$ poliedro semplicemente connesso, tra $V$, $S$, ed $F$ di $P$ vale la seguente relazione:*

$$V - S + F = 2$$

*Dimostrazione.* Dimostreremo tale formula usando un diagramma di Schlegel G del poliedro P. In particolare, l'obiettivo è quello di modificare G in modo da lasciare invariata la quantità $V-S+F$, fino a farlo diventare un triangolo, per il quale $V - S + F = 3 - 3 + 2 = 2$.
Osservando che un qualunque n-agono viene diviso in $n - 2$ triangoli dalle $n - 3$ diagonali uscenti da un suo vertice, si può supporre che tutte le componenti connesse del complementare di G siano triangolari. Grazie a questa

osservazione, su ogni componente connessa non triangolare, ad ogni passo si avrà:

$$F' = F + (n-3), \quad V' = V, \quad S' = S + (n-3)$$

che mantiene invariata la quantità $V - S + F$, infatti:

$$V' - S' + F' = V - S - (n-3) + F + (n-3) = V - S + F$$

Eliminiamo ora una di queste componenti connesse triangolari del complementare di G che sia adiacente alla componente illimitata. Sono possibili due casi.
Se il triangolo eliminato ha un solo lato in comune con la componente connessa illimitata, allora:

$$F' = F - 1, \quad V' = V, \quad S' = S - 1$$

ma si conserva ancora $V - S + F$, infatti:

$$V' - S' + F' = V - S + 1 + F - 1 = V - S + F$$

Nel caso in cui il triangolo eliminato ha due lati in comune con la componente connessa illimitata, si ha:

$$F' = F - 1, \quad V' = V - 1, \quad S' = S - 2$$

e anche qui risulta:

$$V' - S' + F' = V - 1 - S + 2 + F - 1 = V - S + F$$

Si può quindi iterare questo procedimento fino a ridursi ad un solo triangolo. Durante l'iterazione ci si potrebbe trovare di fronte ad un terzo tipo di posizione per il triangolo, cioè un triangolo che ha in comune con la componente connessa illimitata un lato e un vertice non adiacente a tale lato, ma poichè non è possibile incontrare tale situazione all'inizio, così come è impossibile che tutti i triangoli del diagramma siano di questo tipo, possiamo procedere con le iterazioni in modo da usare solo le due mosse descritte prima, fino ad arrivare ad un solo triangolo. □

*Osservazione* 2. L'ipotesi di semplice connessione viene introdotta perchè necessaria per poter parlare di diagramma di Schlegel.

Introducendo la nozione di diagramma di Schlegel, viene a crearsi un legame tra i grafi piani e i poliedri, ed è naturale porsi alcune domande, ad esempio:

- E' possibile trovare delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè un grafo piano sia il diagramma di Schlegel di un poliedro?
- Supponendo di aver trovato tali condizioni, cosa bisogna aggiungere per garantire l'unicità (in senso metrico) del poliedro associato ad un certo diagramma?

In risposta alla prima domanda, le seguenti sei condizioni sono sicuramente necessarie affinchè un grafo piano sia diagramma di Schlegel di un qualche poliedro:

1. Ciascuno spigolo deve essere adiacente ad esattamente due facce;
2. Ciascuno spigolo deve contenere esattamente due vertici;
3. Dati due vertici, esiste al più uno spigolo che li contiene entrambi;
4. Date due facce, esiste al più uno spigolo adiacente ad ebntrambe;
5. Ciascun vertice è adiacente ad almeno tre facce;
6. Ciascuna faccia contiene almeno tre vertici.

La sufficienza delle sei condizioni appena elencate è meno evidente, ma spiegata dal seguente:

**Teorema 4.2.2** (Teorema di Steinitz)**.** *Dato un grafo $G$ che soddisfa le sei condizioni sopra, esiste un poliedro convesso che ammette $G$ come diagramma di Schlegel.*

*Dimostrazione.* Si veda [62]. □

La risposta alla seconda domanda è fornita dal:

**Teorema 4.2.3** (Teorema di Cauchy)**.** *Siano $P$ e $P'$ due poliedri convessi combinatoriamente equivalenti e sia $T$ un isomorfismo combinatorio tra $P$ e $P'$; supponiamo inoltre che, per ogni faccia $f$ di $P$, la faccia $T(f)$ di $P'$ sia isometrica ad $f$.*
*Allora, esiste un'isometria tra $P$ e $P'$.*

*Dimostrazione.* Si veda [62]. □

Tale teorema ha un significato intuitivo che verrà ritrovato nel prossimo capitolo, dove viene descritto il laboratorio fatto.
La situazione concreta descritta dal teorema di Cauchy è infatti la seguente: se si costruisce un poliedro in cartoncino, una volta che sono state stabilite le facce (e quindi, formalmente, assegnate le facce a meno di isometrie) e le regole di assemblaggio (e quindi, formalmente, assegnato il tipo di poliedro a meno di isomorfismo combinatorio), non ci sono ambiguità sul poliedro che si otterrà, e quando si arriverà alla "chiusura", il modellino sarà rigido.
Nel piano però, cioè per i poligoni, il teorema di Cauchy è falso, cosa che c'è stata la possibilità di constatare nella costruzione dei poliedri scheletrati di cui si parlerà nel prossimo capitolo.

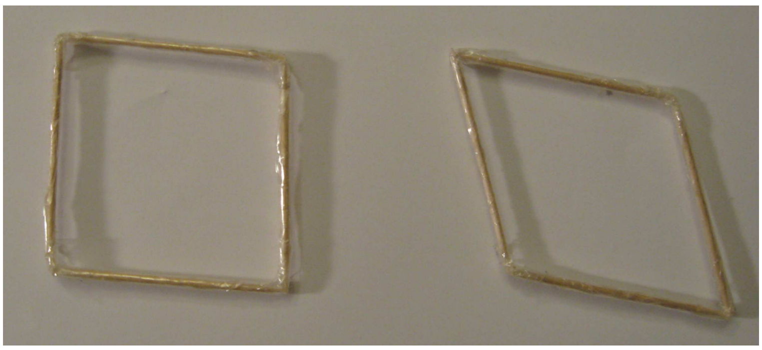


Figura 4.1: "Negazione sperimentale" del teorema di Cauchy per i poligoni

Infatti, tali modelli di poliedri sono estremamente flessibili, a meno che le loro facce non siano triangolari, fatto che ha creato qualche problema in alcuni momenti del laboratorio. Un poligono infatti, non è univocamente determinato assegnando le lunghezze dei lati e la struttura combinatoria, a meno che non si tratti di un triangolo; si può addirittura dimostrare che la rigidità del poliedro scheletrato (i.e. la sua unicità) si ha se e soltanto se le sue facce sono triangolari.

Prima di studiare in dettaglio i poliedri regolari, vediamo alcune conseguenze della relazione di Eulero.

**Teorema 4.2.4.** *Sia $P$ un poliedro qualsiasi con $V$ vertici, $S$ spigoli e $F$ facce. Indicando con $p$ il numero medio di spigoli per ogni faccia e con $q$ la valenza media dei vertici ($p$ e $q$, naturalmente, possono non essere numeri interi), si ha che:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

*Dimostrazione.* Dal momento che ogni spigolo è adiacente a due facce si ha che:

$$p = \frac{2S}{F} \Rightarrow F = \frac{2S}{p}$$

e poichè ogni spigolo contiene due vertici:

$$q = \frac{2S}{V} \Rightarrow V = \frac{2S}{q}$$

applicando la formula di Eulero:

$$V - S + F = \frac{2S}{q} - S + \frac{2S}{p} = 2$$

e quindi, dividendo per $2S$:

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{S} \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S} > \frac{1}{2}$$

□

Da quest'ultimo teorema e dalla relazione di Eulero si possono ricavare i seguenti:

**Corollario 4.2.5.** *Non è possibile che in un poliedro ogni faccia abbia un numero pari di spigoli e ogni vertice abbia valenza pari.*

*Dimostrazione.* Infatti, se così fosse, usando le notazioni del Teorema 3.2.4, si avrebbe che $p \geq 4$ e $q \geq 4$ e dunque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, il che è assurdo per il teorema precedente. □

**Corollario 4.2.6.** *In ogni poliedro c'è almeno un vertice di valenza tre, oppure c'è almeno una faccia triangolare.*

*Dimostrazione.* Se così non fosse, si arriverebbe ad un assurdo analogo a quello incontrato nella dimostrazione del corollario precedente. □

**Corollario 4.2.7.** *In ogni poliedro con $V$ vertici, $S$ spigoli ed $F$ facce valgono le disuguaglianze:*

$$F \leq 2V - 4, \quad V \leq 2F - 4$$

*Dimostrazione.* Utilizzando le notazioni del Teorema 3.2.4 e ricordando che

$$p = \frac{2S}{F}$$

e che

$$q = \frac{2S}{V}$$

si ha, usando anche la formula di Eulero:

$$pF = qV = 2S = 2(V + F - 2)$$

da cui seguono:

$$(p-2)F = 2V - 4, \quad e \quad (q-2)V = 2F - 4$$

La tesi segue dal fatto che $p$ e $q$ sono maggiori o uguali di tre. □

**Corollario 4.2.8.** *Non esiste un poliedro con sette spigoli.*

*Dimostrazione.* Se supponiamo per assurdo che un tale poliedro esista, per Eulero si dovrebbe avere che $V + F = 9$. Dato che $V$ ed $F$ devono essere almeno 4, ne consegue che:

o $V = 4$ e $F = 5$, ma se così fosse allora $2V - 4 = 4 < 5 = F$ il che è assurdo;

oppure, viceversa $V = 5$ e $F = 4$, che porta comunque ad un assurdo, infatti in tal caso: $2F - 4 = 4 < 5 = V$ □

### 4.2.1 Poliedri regolari

*No, nonna, per contarli bastano le dita di una mano.*
Pellegrino, Zuccheri, "Tre in Uno"

E' possibile dare più definizioni di poliedro regolare, ad esempio:

**Definizione 4.7.** Un poliedro convesso è detto **regolare** se le sue facce sono tutte poligoni regolari congruenti e i suoi vertici hanno tutti la stessa valenza.

Oppure:

**Definizione 4.8.** Un poliedro convesso è **regolare** se le sue facce e le sue figure al vertice sono tutte regolari.

Per dare una definizione compatta di poliedro regolare, consideriamo la seguente:

**Definizione 4.9.** Un poliedro convesso $P$ è **regolare** se valgono contemporaneamente tre qualsiasi delle seguenti condizioni:

1. Tutte le facce di $P$ sono poligoni regolari;
2. Tutte le facce di $P$ sono tra loro congruenti;
3. Tutte le figure al vertice di $P$ sono tra loro congruenti;
4. Tutte le figure al vertice sono (il bordo di) poligoni regolari.

Per indicare un poliedro regolare $P$ le cui facce sono p-agoni e con valenza al vertice $q$ (e quindi $q$ facce attorno ad ogni vertice), il simbolo di Schläfli usato è $\{p, q\}$ e si dice che $P$ è un poliedro regolare di tipo $\{p, q\}$.
Al contrario di quanto accade per i poligoni regolari, che sono infiniti, i poliedri regolari sono decisamente pochi, per dirla alla Lewis Carrol il loro numero è "piccolo in un modo provocante":

**Teorema 4.2.9.** *I tipi di poliedri regolari convessi sono al più cinque.*

*Dimostrazione.* Presento qui solo una delle possibili dimostrazioni di questo fatto.
Sia $P$ un poliedro regolare di tipo $\{p, q\}$. Consideriamo gli angoli delle facce che arrivano in un vertice. Tali facce sono p-agoni regolari, attorno ad un vertice ce ne sono $q$ e, per la convessità del poliedro, la somma degli angoli in questione deve essere minore di $2\pi$, cioè:

$$\frac{q(p-2)\pi}{\pi} < 2\pi$$

e quindi, dividendo per $2\pi q$ ottengo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

ritrovando quanto già visto nel Teorema 3.2.4. Il vincolo $p, q \geq 3$ fa si che le soluzioni intere di questa disuguaglianza siano soltanto cinque. Infatti, almeno uno dei due deve essere 3, altrimenti si avrebbe $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, e le possibilità per l'altro sono solo $3, 4$ o 5, perchè $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Pertanto, i possibili tipi per $P$ sono cinque, cioè:

$$\{3,3\}, \quad \{3,4\}, \quad \{3,5\}, \quad \{4,3\}, \quad \{5,3\}$$

□

Storicamente, già i matematici greci li trovarono tutti e cinque e dimostrarono che non potevano essercene altri. Una dimostrazione di questo fatto si trova nel XIII libro degli *Elementi*. Euclide osserva innanzitutto che,

perchè si abbia un poliedro, gli angoli piani attorno ad ogni vertice devono avere somma inferiore a 360° e in ogni vertice devono incontrarsi almeno tre facce.
Se si vuole quindi costruire un poliedro regolare con dei triangoli equilateri come facce, poichè sei di tali triangoli riempirebbero tutta l'area attorno ad un punto, ci sono solo le tre possibilità seguenti:
Se attorno ad ogni vertice ci sono tre triangoli equilateri, e si ottiene il **tetraedro**:

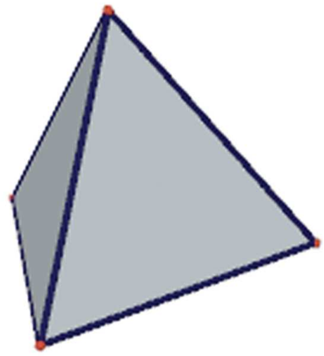


Figura 4.2: Tetraedro

Se attorno ad ogni vertice ci sono quattro triangoli equilateri, si ottiene l'**ottaedro**:

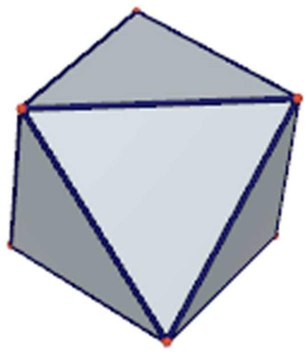


Figura 4.3: Ottaedro

Se attorno ad ogni vertice ci sono cinque triangoli equilateri, si ottiene l'**icosaedro**:

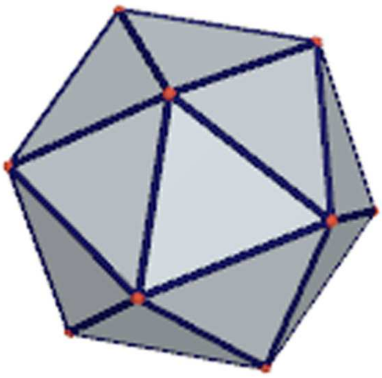


Figura 4.4: Icosaedro

E si esauriscono le possibilità per quanto riguarda le facce triangolari.
Se come poligono regolare si prende il quadrato, l'unica possibilità è averne tre attorno ad ogni vertice, poichè già con quattro si riempie tutta l'area attorno ad un punto, e si ottiene il **cubo**:

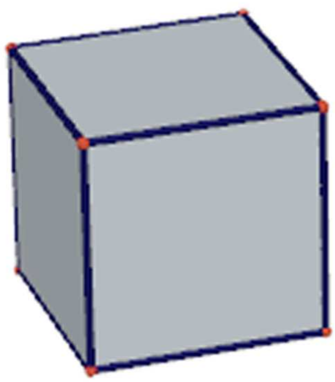


Figura 4.5: Cubo

Osserviamo ora che se già con tre esagoni si raggiungono i 360°, non è possibile per un poliedro regolare avere facce esagonali, nè tantomeno facce che siano n-agoni regolari con $n$ maggiore di sei.
Pertanto, l'ultimo poligono regolare candidato ad essere una faccia di un poliedro regolare è il pentagono, per il quale l'unica possibilità è quella di tre attorno ad ogni vertice, e si ottiene il **dodecaedro**:

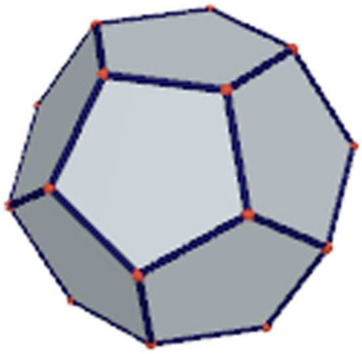


Figura 4.6: Dodecaedro

Ed ecco tutti e cinque i solidi platonici insieme in un'illustrazione di Leonardo Da Vinci:

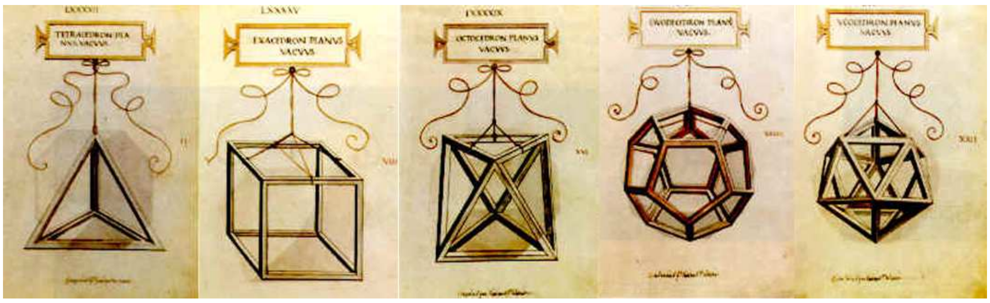


Figura 4.7: Solidi Platonici

La straordinaria regolarità e simmetria che governa questi cinque poliedri ha fatto sì che nella storia essi occupassero un posto di grande rilevanza, e non furono pochi coloro che li associarono a significati misteriosi. Uno tra questi fu Platone che nel “Timeo” associò a quattro di loro un elemento: al tetraedro il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua; nel “Fedone” invece ipotizzò che la forma dell'Universo fosse quella del dodecaedro.

Nella tabella che segue, vengono riassunte alcune caratteristiche dei poliedri regolari; saranno indicati: $V$ (numero di vertici), $S$ (numero di spigoli) ed $F$ (numero di facce) ed il tipo (simbolo di Schläfli $\{p, q\}$).

| Poliedro | V | S | F | Tipo |
|---|---|---|---|---|
| Tetraedro | 4 | 6 | 4 | $\{3, 3\}$ |
| Cubo | 8 | 12 | 6 | $\{4, 3\}$ |
| Ottaedro | 6 | 12 | 8 | $\{3, 4\}$ |
| Dodecaedro | 20 | 30 | 12 | $\{3, 5\}$ |
| Icosaedro | 12 | 30 | 20 | $\{5, 3\}$ |

Tabella 4.1: Tabella V, S, F

Dato un poliedro regolare $P$, la perpendicolare al piano di una faccia nel suo centro e la perpendicolare al piano di una figura al vertice nel suo centro si incontrano in un punto, che indicheremo con $O$, che è il centro di tre sfere molto importanti:

- La **sfera circoscritta** ha centro in $O$ e contiene tutti i vertici di $P$;
- La **sfera medioinscritta** o **sfera media** ha centro in $O$ ed è tangente a tutti gli spigoli di $P$ nel loro punto medio;
- La **sfera inscritta** ha centro in $O$ ed è tangente a tutte le facce di $P$.

Il punto $O$ viene anche chiamato **centro del poliedro** $P$.

### Dualità e Poliedri regolari in coordinate

La dualità è una relazione molto delicata nel caso di poliedri generici ed è molto difficile identificare univocamente il duale di un poliedro dato e non ci soffermeremo su questo in questa tesi.
Ci limiteremo invece ad analizzare la dualità per i poliedri regolari, per i quali il discorso è estremamemente più semplice: il duale di un poliedro regolare, infatti, è ancora un poliedro regolare. Sfrutteremo poi tale relazione di dualità per fornire delle coordinate cartesiane per i cinque solidi platonici.

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con sistema di riferimento $\mathcal{R}$ cartesiano ortogonale con centro in $O$.
Ricordiamo innanzitutto che per *polarità* o *dualità* rispetto a una sfera $S$, si intende una corrispondenza che associa a punti piani ed a piani punti. Più formalmente, se $S$ è la sfera con centro nell'origine $O$ e raggio $r$, che ha equazione rispetto a $\mathcal{R}$:

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ogni punto $(a, b, c)$ diverso dall'origine $O$ ha come piano polare rispetto ad $S$ il piano di equazione:

$$ax + by + cz = r^2 \tag{4.1}$$

che, nel caso in cui il punto giace sulla sfera (viene detto polo), è un piano tangente alla sfera in tale punto.
Una proprietà molto importante della dualità è che se un punto sta sul piano polare di un altro punto, allora a sua volta il secondo punto sarà sul piano polare del primo. Di conseguenza, se tre o più punti stanno su un piano, allora i tre o più piani polari associati si intersecheranno in un punto.

Ora, il duale di un poliedro regolare $P$ di tipo $\{p, q\}$ è il poliedro regolare $P'$ di tipo $\{q, p\}$ tale che sia possibile inscrivere $P'$ in $P$ in modo che per ogni faccia $F$ di $P$ esista un vertice di $P'$ situato nel centro di $F$, e viceversa per ogni vertice $V$ di $P'$ esista una faccia di $P$ che abbia come centro $V$.
Pertanto, i vertici del poliedro duale $P'$ sono i poli delle facce di $P$, le facce del poliedro duale sono i piani polari dei vertici di $P$ e gli spigoli del poliedro

duale sono i duali degli spigoli di $P$, il tutto rispetto alla sfera media definita in precedenza. E' possibile fare il duale di $P$ anche rispetto ad un'altra sfera concentrica a quella media, ad esempio quella inscritta o quella circoscritta, ottendendo un poliedro di tipo $\{q, p\}$ simile a $P'$ (più precisamente, il poliedro duale ottenuto sarà più grande di $P'$ se il raggio della sfera scelta è maggiore del raggio della sfera media e, analogamente, sarà più piccolo se il raggio della sfera scelta è più piccolo del raggio della sfera media). Naturalmente, se $P'$ è il duale di $P$, allora $P$ è il duale di $P'$ e il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce di P' deve essere rispettivamente pari al numero delle facce, degli spigoli e dei vertici di P.

Le relazioni di dualità che legano i cinque poliedri regolari sono:

- Il tetraedro è autoduale, cioè il suo duale è ancora un tetraedro;
- Il duale del cubo è l'ottaedro, e viceversa;
- Il duale del dodecaedro è l'icosaedro, e viceversa.

Proprio sfruttando la dualità, sarà più semplice dare le coordinate dei solidi platonici (sempre nel riferimento $\mathcal{R}$).

**CUBO E OTTAEDRO**:
Gli otto punti di coordinate:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$$

sono i vertici di un cubo che ha centro nell'origine, spigolo lungo 2, i piani delle facce hanno equazione:

$$x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = \pm 1$$

e le figure al vertice sono dei triangoli equilateri.
Con questa scelta di coordinate, la sfera inscritta ha raggio 1, la sfera media ha raggio $\sqrt{2}$ e la sfera circoscritta ha raggio $\sqrt{3}$. Posso individuare i vertici dell'ottaedro sfruttando la dualità ad esempio rispetto alla sfera inscritta.

Infatti, per la scelta fatta, usando la (3.1), segue che i poli dei piani delle facce rispetto alla sfera unitaria sono i sei punti di coordinate:

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$$

che determinano i vertici di un ottaedro regolare di spigolo $\sqrt{2}$ che avrà i piani delle facce di equazione:

$$\pm x \pm y \pm z = 1$$

Per questo ottaedro, la sfera unitaria sarà la sfera circoscritta, la sfera media avrà raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e la sfera inscritta avrà il raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

*Osservazione* 3. I due spigoli non consecutivi che escono da un vertice dell'ottaedro sono fra loro ortogonali.

Nella figura che segue, si visualizza bene la dualità tra cubo e ottaedro:

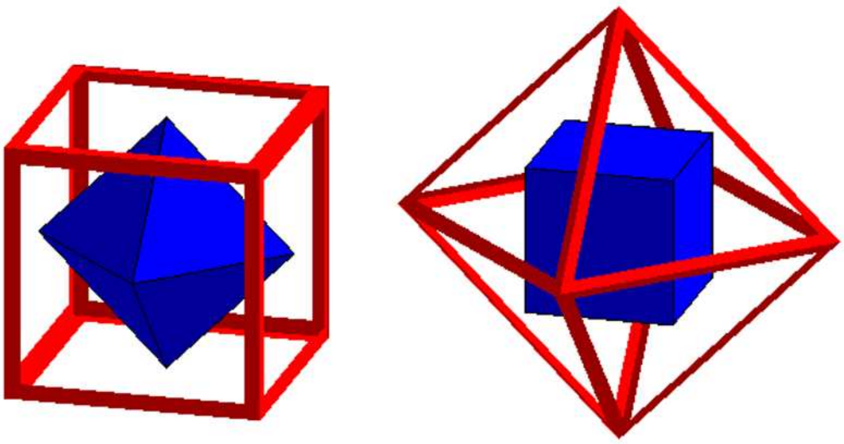


Figura 4.8: Il duale del cubo è l'ottaedro e viceversa

**DODECAEDRO E ICOSAEDRO**:
Consideriamo ancora l'ottaedro, e su ciascuno dei suoi dodici spigoli consideriamo un punto in modo tale che lo spigolo venga diviso in due parti in

rapporto aureo tra loro, cioè nel rapporto $1 : \tau$, dove $\tau$ è il *numero aureo*, radice positiva dell'equazione $x^2 = x + 1$, cioè $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Per ciascuno spigolo sono possibili due scelte; il primo punto può essere scelto indifferentemente, gli altri verranno presi in modo tale che i tre vertici scelti sui tre spigoli di ogni faccia siano i vertici di un triangolo equilatero:

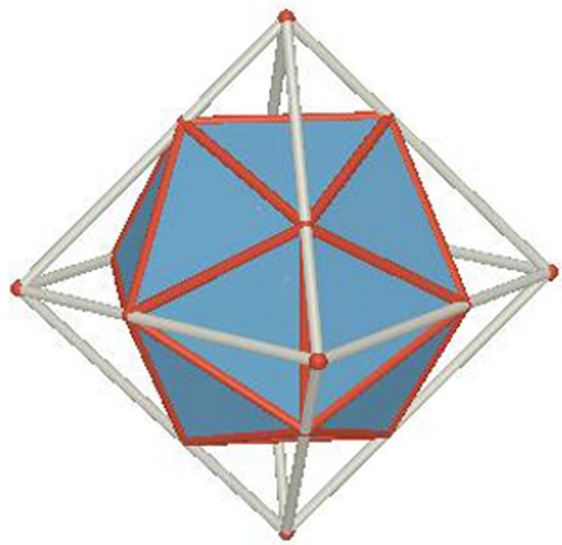


Figura 4.9: Costruzione dell' icosaedro a partire dall'ottaedro

Per i vertici dell'ottaedro scegliamo le seguenti coordinate:

$$(\pm(1+\tau), 0, 0), \quad (0, \pm(1+\tau), 0), \quad (0, 0, \pm(1+\tau))$$

così, i dodici punti vertici di un icosaedro saranno i punti di coordinate:

$$(\pm\tau, \pm 1, 0), \quad (\pm 1, 0, \pm\tau), \quad (0, \pm\tau, \pm 1)$$

Gli spigoli dell'ottaedro hanno lunghezza $\sqrt{2}(1+\tau)$ dobbiamo verificare che l'icosaedro ottenuto sia effettivamente regolare. A priori, gli spigoli dell'icosaedro possono essere di due tipi: quelli sulle facce dell'ottaedro (che sono 24) e gli altri sei in corrispondenza dei vertici dell'ottaedro. I 24 spigoli del primo tipo sono ciascuno il terzo lato di un triangolo in cui gli altri due lati misurano $\sqrt{2}$ e $\tau\sqrt{2}$ e l'angolo compreso è di $\frac{\pi}{3}$, quindi hanno tutti la stessa lunghezza $k$ tale che:

$$k^2 = 2 + 2\tau^2 - 2\sqrt{2}\tau\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3} = 2 + 2 + 2\tau - 4\tau\frac{1}{2} = 4$$

Pertanto $k = 2$.
Gli altri sei spigoli avranno sicuramente tutti la stessa lunghezza perchè ciascuno di loro è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con lo stesso cateto (per Osservazione 3); poichè la lunghezza di tale cateto è $\sqrt{2}$, anche questi sei spigoli dell'icosaedro saranno lunghi 2.
Ma sappiamo che il fatto che gli spigoli siano tutti uguali non basta ad affermare che l'icosaedro è regolare; serve un'altra condizione, ad esempio che i vertici hanno tutti la stessa valenza. Consideriamo quindi un generico vertice $A$ dell'icosaedro, che apparterrà ad uno spigolo $s$ dell'ottaedro; indichiamo con $v$ e $v'$ i vertici di $s$ e sia ad esempio $v$ quello per cui $d(A, v) < d(A, v')$. La valenza al vertice $A$ (e anche di tutti gli altri vertici) è 5, infatti appartiene ai quattro spigoli delle due facce dell'icosaedro che sono contenute nelle facce $f$ ed $f'$ dell'ottaedro adiacenti allo spigolo $s$, ed appartiene anche ad un quinto spigolo in corrispondenza del vertice $v$ dell'ottaedro. Pertanto, l'icosaedro con i vertici scelti è regolare.
Le equazioni dei piani delle facce sono:

- Otto delle venti facce giacciono sulle facce dell'ottaedro, quindi i piani di tali facce avranno equazioni:

$$\pm x \pm y \pm z = 1 + \tau$$

- I piani delle restanti dodici facce avranno equazioni:

$$\pm\tau x \pm (\tau - 1)z = 1 + \tau,$$

$$\pm(\tau - 1)y \pm \tau z = 1 + \tau,$$

$$\pm(\tau - 1)x \pm \tau y = 1 + \tau.$$

L'icosaedro così costruito ha spigolo 2 e le tre sfere, inscritta, media e circoscritta, hanno tutte centro nell'origine e raggi rispettivamente $\frac{\sqrt{3}(\tau+1)}{3}$, $\tau$ e $\sqrt{2+\tau}$.

Usando la dualità si possono individuare le coordinate del dodecaedro: invertiamo i ruoli di vertici e facce tra loro usando la polarità rispetto alla sfera media.
Troveremo quindi i venti vertici di coordinate:

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1), \quad (\pm\tau, 0, \pm(\tau - 1)), \quad (0, \pm(\tau - 1), \pm\tau), \quad (\pm(\tau - 1), \pm\tau, 0)$$

e i dodici piani di equazioni:

$$\pm\tau x \pm y = 1 + \tau, \quad x \pm \tau z = 1 + \tau, \quad \pm\tau y \pm z = 1 + \tau$$

Per maggiori dettagli, si veda [61].

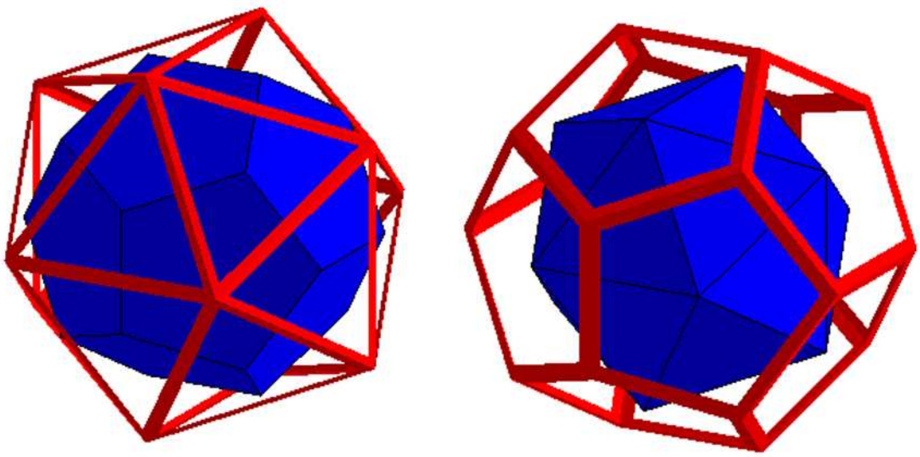


Figura 4.10: Dualità Icosaedro e Dodecaedro rispetto alla sfera inscritta

**TETRAEDRO**:
Per trovare le coordinate dei vertici di un tetraedro, consideriamo il cubo e scegliamo, tra i suoi otto vertici, quattro di questi in modo tale che due siano i vertici di una diagonale di una faccia del cubo e gli altri due siano vertici sulla faccia opposta della diagonale non parallela alla precedente. Questi

quattro punti così scelti, sono i vertici di un tetraedro.
Esplicitamente, se il cubo ha vertici $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, le due quaterne:

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, -1), \quad (-1, 1, -1), \quad (-1, -1, 1)$$

e:

$$(-1, -1, -1), \quad (-1, 1, 1), \quad (1, -1, 1), \quad (1, 1, -1)$$

sono vertici di due tetraedri di spigolo $2\sqrt{2}$, uno duale dell'altro rispetto alla sfera media di raggio 1 e centro l'origine.

I quattro piani relativi alle quattro facce del tetraedro corrispondente alla prima quaterna saranno ortogonali, per dualità, ai vettori individuati dalla seconda quaterna, pertanto avranno equazione:

$$-x - y - z = 1, \quad -x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1, \quad x + y - z = 1$$

Con questa scelta di coordinate, le sfere inscritta e circoscritta avranno centro nell'origine e raggio, rispettivamente, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\sqrt{3}$.

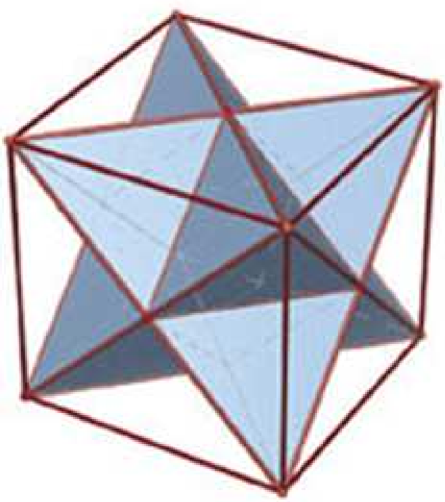


Figura 4.11: Due tetraedri uno duale dell'altro dentro il cubo

## 4.3 Sezioni del cubo

Sezionando un poliedro, a seconda dell'inclinazione e della posizione del piano di sezione rispetto al solido, si possono ottenere vari poligoni. In questo senso, le sezioni del cubo sono particolarmente interessanti perchè la varietà di poligoni ottenibili è, a tratti, inaspettata.
Prima di passare a descrivere le sezioni, è opportuna fare una breve premessa riguardo le simmetrie del cubo.

### 4.3.1 Premessa

Sia $C$ un cubo e indichiamo con $G = \Gamma(C)$ il suo gruppo di simmetrie. Con $H = \Gamma^+(C)$ indichiamo il sottogruppo di indice due di $G$, costituito dalle isometrie dirette. Sicuramente, $H$ non coincide con $G$ perchè in $G$ esiste almeno una riflessione. Poichè tutti gli elementi di $G$ lasciano fisso il centro del cubo, gli elementi di $H$ saranno necessariamente delle rotazioni il cui asse passa per il centro di $C$; per questa ragione possiamo riferirci ad $H$ come al gruppo delle rotazioni del cubo.

Sia $\rho \in H$ una rotazione di asse $r$ e siano $A$ e $B$ i punti di intersezione tra $r$ e $C$. Poichè $\rho$ è un'isometria, quindi $\rho(C) = C$, saranno possibili tre casi:

1) I due punti $A$ e $B$ sono i punti medi di due spigoli opposti di $C$, cioè $r$ è un'asse che passa per due punti medi di spigoli opposti o, analogamente, per il centro del cubo e il punto medio di uno spigolo. Le rette di questo tipo sono assi di rotazione di periodo 2; ci sono sei rette di questo tipo e per ciascuna di esse, abbiamo solo una rotazione diversa dall'identità. Pertanto, abbiamo in totale sei rotazioni di angolo $\pi$ e chiameremo gli assi di tali rotazioni **assi di ordine** 2.

2) I due punti $A$ e $B$ sono due vertici opposti di $C$, cioè $r$ è un'asse che passa per due vertici opposti o, analogamente, per il centro del cubo e un vertice. Le rette di questo tipo sono assi di rotazione di periodo

3; ci sono quattro rette di questo tipo e per ciascuna di esse, abbiamo due rotazioni diverse dall'identità. Pertanto, abbiamo in totale otto rotazioni di angoli $\pm\frac{2\pi}{3}$ e chiameremo gli assi di tali rotazioni **assi di ordine** 3.

3) I due punti $A$ e $B$ sono i centri di due facce opposte di $C$, cioè $r$ è un'asse che passa per i centri di due facce opposte o, analogamente, per il centro del cubo e il centro di una faccia. Le rette di questo tipo sono assi di rotazione di periodo 4; ci sono tre rette di questo tipo e per, ciascuna di esse, abbiamo tre rotazioni diverse dall'identità. Pertanto, abbiamo in totale nove rotazioni di angoli $\pi$ o $\pm\frac{\pi}{2}$ e chiameremo gli assi di tali rotazioni **assi di ordine** 4.

Quindi $H$ ha $1 + 9 + 8 + 6 = 24$ elementi, cioè ci sono 24 isometrie dirette che trasformano il cubo in sè.

Per quanto riguarda le isometrie inverse, che potranno essere o una riflessione oppure la composizione di una riflessione in un piano passante per il centro del cubo con una rotazione il cui asse passante per il centro del cubo è ortogonale a tale piano, sappiamo che saranno 24.

Per individuare le riflessioni, basta trovare i piani di simmetria del cubo: ce ne sono 3 paralleli a due facce opposte, mutuamente ortogonali tra loro, e 6 che contengono due spigoli opposti. Pertanto i piani di simmetria del cubo sono 9.

Due piani che contengono spigoli opposti e hanno in comune un asse di ordine 4 formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$.

Due piani che contengono spigoli opposti e hanno in comune un asse di ordine 3 formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

Un piano parallelo a due facce opposte e un piano che contiene due spigoli opposti che hanno in comune un asse di ordine 4 formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{4}$.

Un piano parallelo a due facce opposte e un piano che contiene due spigoli opposti che hanno in comune un asse di ordine 2 formano tra loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$.

### 4.3.2 Sezioni

Naturalmente, non è possibile ottenere un poligono con più di sei lati sezionando un cubo dal momento che questo poliedro ha 6 facce e deve esserci al più una sezione su ogni faccia.
Sezionando un cubo in modo opportuno si possono tuttavia ottenere triangoli, quadrilateri, pentagoni, esagoni e le sezioni degeneri (un punto, un segmento).
Vedremo nel seguito alcuni risultati e alcune particolari sezioni del cubo rappresentate grazie al programma *Cabrì 3D* e ottenute sfruttando le simmetrie del solido. In tutte le figure che seguono, in celeste viene evidenziato il poligono di sezione, i piani di sezione saranno grigio tratteggiati e gli assi o i piani di simmetria saranno in rosso tratteggiato.
Ad esempio, sezionando un cubo con un piano perpendicolare ad un asse di ordine 4, il poligono di sezione dovrà avere un gruppo di simmetria rotatoria di ordine 4, quindi otterremo necessariamente un quadrato:

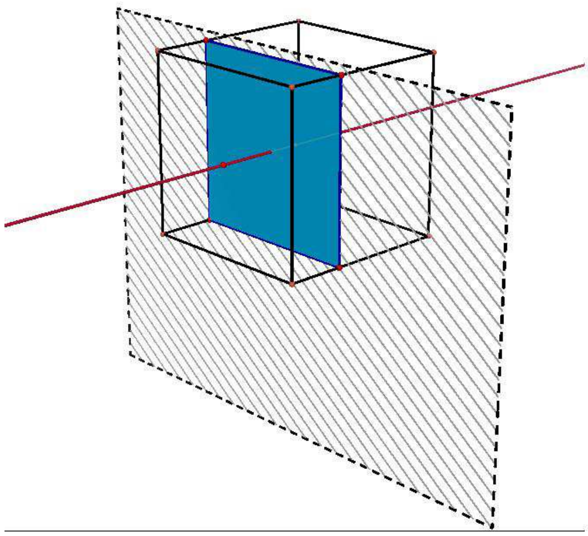


Figura 4.12: Sezione quadrata del cubo

Sezionando il cubo con un piano perpendicolare ad una asse di ordine 2 avremo che la sezione risultante deve avere un gruppo di simmetria rotatoria di ordine 2, pertanto, in alcuni casi particolari sarà un quadrato, ma in generale sarà un rettangolo, ad esempio:

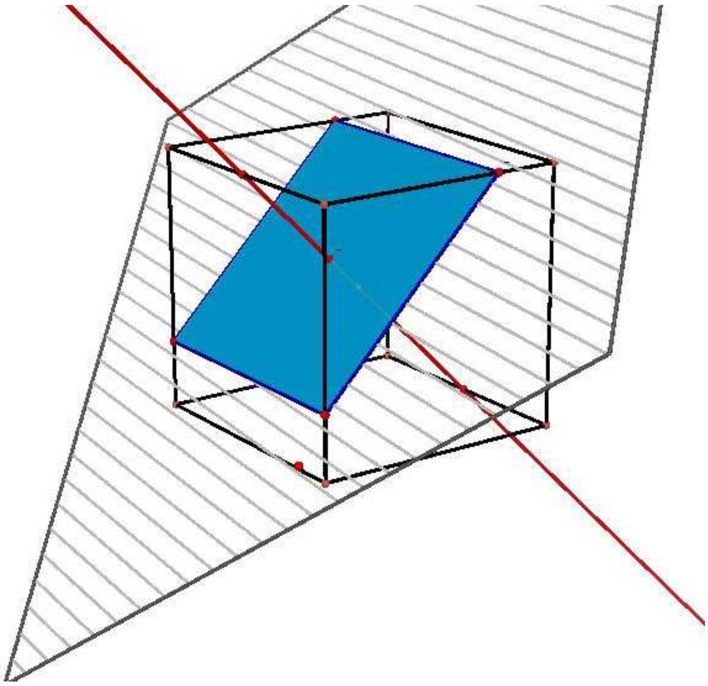
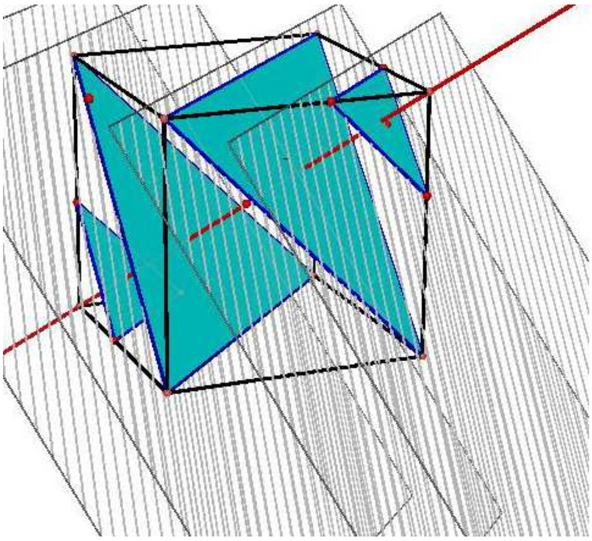


Figura 4.13: Sezione rettangolare del cubo

Provando a sezionare il cubo con un piano perpendicolare ad un asse di ordine 3 si otterrà un poligono di sezione che avrà una simmetria rotatoria di ordine 3. Di conseguenza, questo poligono non potrà essere nè un quadrato nè un pentagono ma soltanto o un triangolo o un esagono, a seconda che vengano tagliate rispettivamente tre o sei facce, come si vede nella prossima figura. Nel caso in cui il piano taglia tre facce, come nell'immagine a sinistra, avremo un triangolo che sarà necessariamente equilatero. Se invece con il piano di sezione vengono tagliate sei facce del cubo allora avremo un esagono che sarà regolare se il piano passa per il centro del cubo, come si vede nell'immagine a destra.



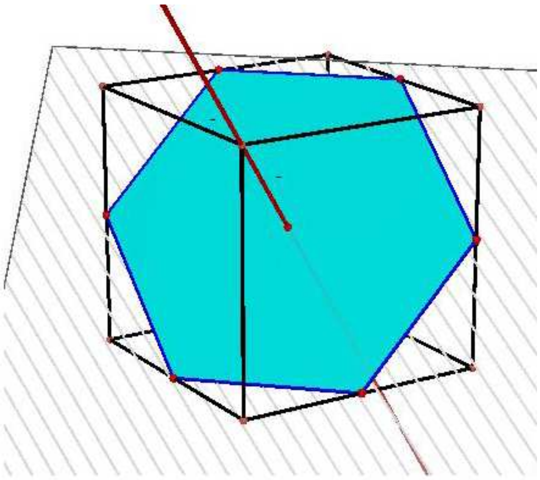


Figura 4.14: Triangolo equilatero ed esagono regolare come sezioni del cubo

Se proviamo invece a tagliare il cubo con un piano che sia ortogonale ad un piano di simmetria otterremo poligoni con un asse di simmetria come ad esempio trapezi isosceli e triangoli isosceli o anche alcuni esagoni e pentagoni particolari.

Supponiamo ora avere un triangolo isoscele come sezione del cubo. Il seguente teorema ci dice che il piano di sezione dovrà essere perpendicolare ad uno dei sei piani di simmetria del cubo che contengono coppie di spigoli opposti:

**Teorema 4.3.1.** *Sia $C$ un cubo $\pi_C$ un triangolo isoscele, ottenuto sezionando $C$ con $\pi$. Allora $\pi$ è perpendicolare ad un piano di simmetria di $C$ che contiene una coppia di spigoli opposti.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con $A$, $B$ e $C$ i vertici del triangolo isoscele $\pi_C$ e assumiamo che $AB \cong AC$. Indichiamo inoltre con $l_1$, $l_2$ ed $l_3$ gli spigoli di $C$ che rispettivamente contengono $A$, $B$ e $C$, cioè gli spigoli del cubo che vengono tagliati da $\pi$. Sia $V_4$ il vertice del cubo in cui concorrono $l_1$, $l_2$ ed $l_3$ e indichiamo gli altri tre vertici di tali spigoli, rispettivamente, $V_1$, $V_2$ e $V_3$.

Dall'ipotesi $AB \cong AC$ segue che i due triangoli $BAV_4$ $AV_4C$ sono congruenti, in particolare che $BV_4 \cong CV_4$. Il triangolo $V_4BC$ è quindi un triangolo rettangolo isoscele, pertanto, indicando con $l$ la bisettrice dell'angolo retto $B\hat{V_4}C$, si avrà che $l \perp BC$, in cui il punto medio $M$ di $BC$ sarà il piede. Indichiamo con $V_5$ l'altro vertice del cubo, oltre a $V_4$, che appartiene ad $l$, e sia $\sigma$ il piano generato da $V_1$, $V_4$, $V_5$. Per come è definito, $\sigma$ è piano di simmetria del cubo che contiene due spigoli opposti.
Chiamiamo $r$ la retta intersezione tra $\pi$ e $\sigma$, cioè la retta che contiene $AM$ e consideriamo i punti $M$, $V_4 \in \sigma$ e $C \in \pi$. Si ha:

$$MV_4 \perp r, \quad MC \perp r \quad e \quad MV_4 \perp MC$$

Pertanto i piani $\pi$ e $\sigma$ sono ortogonali. □

Da questo teorema segue anche il seguente:

**Teorema 4.3.2.** *Sia $C$ un cubo e $\pi_C$ un quadrilatero sezione di $C$ (quindi il piano di sezione taglia quattro spigoli del cubo).*
*$\pi_C$ è un trapezio isoscele (non rettangolo) se e solo se il piano di sezione $\pi$ è perpendicolare ad uno dei piani di simmetria di $C$ che contengono due spigoli opposti del cubo.*

*Dimostrazione.* Muovendo il piano $\pi$ parallelamente a sè stesso in modo da tagliare tre facce di $C$ il trapezio diventa un triangolo isoscele e si può usare il teorema precedente. □

In Figura 3.15 vediamo la sezione del cubo ottenuta usando un piano ortogonale ad uno dei sei piani di simmetria che contengono spigoli opposti del cubo e che, nell'immagine sinistra taglia tre facce, nell'immagine destra ne taglia quattro.
Se, infine, il taglio viene effettuato con un piano con inclinazioni non notevoli rispetto ad assi e piani di simmetria del cubo, otterremo come sezioni dei poligono meno "simmetrici". In Figura 3.16 è rappresentata, come esempio, una sezione parallelogrammica.

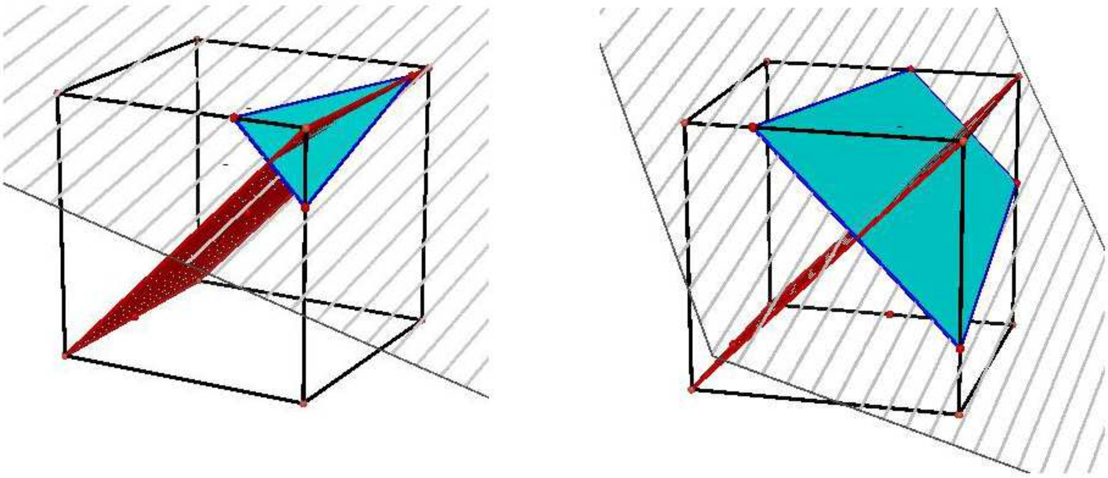


Figura 4.15: Triangolo isoscele e trapezio isoscele come sezioni del cubo

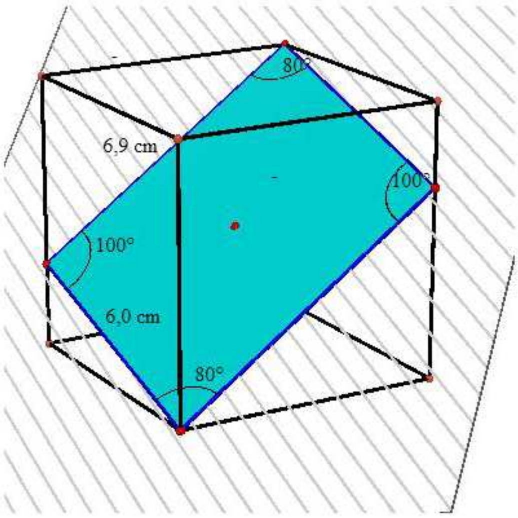



Figura 4.16: Parallelogramma come sezione del cubo

# Capitolo 5

# Laboratorio

Come accennato, si è trattato di un laboratorio di geometria in cui si è scelto di iniziare dalla geometria dello spazio per poi passare a quella del piano. Questo passaggio è stato proposto in due modalità: attraverso gli sviluppi piani di un poliedro e attraverso le sezioni. Si è svolto nell'arco di 10 incontri ed è stato suddiviso principalmente in tre fasi:

- Anna, pur non avendo mai fatto un vero e proprio percorso di geometria, aveva qualche conoscenza preliminare su alcuni argomenti. Quindi, dopo aver fatto una breve indagine per capire quali fossero queste conoscenze, la prima fase del laboratorio è stata dedicata all'introduzione della terminologia delle parti di un poliedro (vertici, spigoli, facce, cercando di darle delle corrispondenti sensazioni tattili di riferimento) e allo studio di vari poliedri, presentati in rappresentazioni di diversi materiali, grandezze e consistenze.

- Nella seconda fase è stato effettuato il primo passaggio dal 3D al 2D: sono stati introdotti e approfonditi gli sviluppi piani. In questa fase si è cercato di trasmettere, con diverse metodologie, la non unicità dello sviluppo piano di un solido e le sono stati proposti molti esercizi volti al renderla il più consapevole possibile del passaggio dimensionale effettuato.

- La terza ed ultima fase del laboratorio è stata dedicata al passaggio dal tridimensionale al bidimensionale attraverso le sezioni di un poliedro, in particolare attraverso le sezioni del cubo[1].

Durante tutto il laboratorio si è cercato di rendere il più spontaneo possibile qualunque approccio che lei aveva con gli oggetti che le venivano presentati, per un motivo fondamentale: erano i vari oggetti, gli artefatti che le sono stati proposti a *dover essere adattati* alle *sue modalità di conoscenza*, e non viceversa. E' stato molto importante, infatti, osservare e capire in che modo un artefatto percepito venisse "trasformato" in immagine mentale; solo in questo modo è stato possibile, di volta in volta, migliorare le rappresentazioni proposte. Si è cercato di non "insegnare niente" a lei, lasciando che fosse lei a insegnare il modo migliore per far sì che ciò che le veniva proposto fosse la rappresentazione più adatta per una corretta concettualizzazione.

Durante la prima fase, dopo averle introdotto la terminologia di base, le sono stati presentati diversi solidi in varie rappresentazioni:
- Tre cubi fatti di diversi materiali e in diverse dimensioni (uno di cartoncino, uno fatto con gli stuzzicadenti e uno fatto con delle cannucce);
- Una piramide a base quadrata in cartoncino;
- Un tetraedro in cartoncino;
- Un prisma a basi triangolari in cartoncino;
- Un cilindro in cartoncino;
- Un prisma a basi esagonali in cartoncino;

Il fatto che ci fossero dei cubi "pieni" e dei cubi "vuoti" non le ha creato nessuna indecisione. Le prime osservazioni fatte sono proprio state che "*Alcuni non sono uguali ma hanno delle forme uguali*", riferendosi esplicitamente ai tre cubi.

E' stato interessante notare che ha trovato molto simili il cilindro e il prisma a basi esagonali: evidentemente, viste le imprecisioni dei modelli[2] e consideran-

[1] E' stato scelto il cubo perchè, come visto nel capitolo precedente, sezionando in modo opportuno questo poliedro è possibile ottenere una grande varietà di poligoni diversi.

[2] Tutti i materiali usati nel laboratorio sono stati "fatti in casa".

do che l'esagono è, tra quelli proposti, il poligono che meglio approssima una circonferenza, la sua prima impressione è stata di avere tra le mani una "*Forma simile*". Tuttavia, con un'esplorazione più accurata, si è resa conto che nel prisma erano percepibili le facce e gli spigoli mentre nel cilindro no.

Questo momento di familiarizzazione è stato utile per una proposta di lavoro fatta successivamente, nella quale le è stato richiesto di classificare, con un *criterio a sua scelta*, una serie di solidi in diverse rappresentazioni, quali:
- Due cubi di diverse dimensioni, uno in cartoncino e uno di stuzzicadenti;
- Due parallelepipedi di diverse dimensioni, uno in cartoncino e uno di stuzzicadenti;
- Due prismi a basi triangolari di diverse dimensioni, uno in cartoncino e uno di stuzzicadenti;
- Tre piramidi a base quadrata di diverse dimensioni, una di cartoncino e due di stuzzicadenti (di cui una con i vertici in pongo e una no);
- Due tetraedri di diverse dimensioni, uno in cartoncino e uno di stuzzicadenti;
- Un cilindro.

Ha iniziato esaminando tutti i solidi, uno alla volta, prima nella loro forma globale tenendoli tra le due mani, poi nei dettagli, cercando di individuare la forma delle facce, senza pronunciarsi. L'unica difficoltà incontrata nella percezione dei poliedri scheletrati è stata la flessibilità del modello (ricordiamo, dovuta alla non validità nel piano del Teorema 4.2.3) che le rendeva più lenta la sintesi della forma globale. Una volta esplorati tutti i modellini li ha distribuiti in gruppi *senza alcuna incertezza* nella maniera illustrata in Figura 5.1.

L'unico che ha richiesto qualche istante in più è stato il cilindro, che alla fine ha deciso di sistemare da solo in un gruppo a parte.
Pur non essendo riuscita a spiegare chiaramente quale fosse stato il criterio usato per la classificazione, si potrebbe ipotizzare che ha considerato in classe insieme quei poliedri che le evocavano immagini mentali "simili". Infatti, è

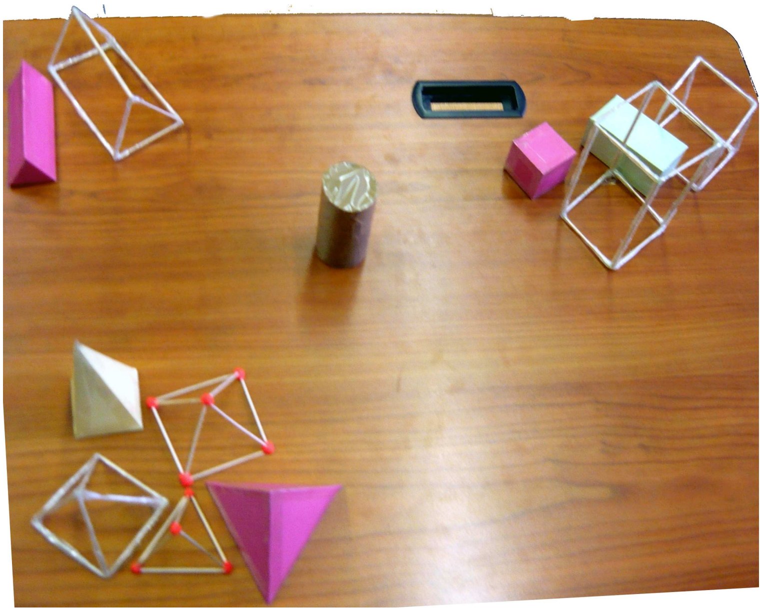


Figura 5.1: Classificazione Anna

molto significativo il fatto che non abbia deciso di separarli in base al *tipo di rappresentazione* ma solo in base alla loro “forma”.

La preparazione del materiale[3] per affrontare le sezioni del cubo è stata estremamente stimolante e non sempre facile. Infatti si è deciso di preparare dei cubi in cartone già sezionati cercando di costruirli da sviluppi piani del cubo già sezionati, cioè di assemblare il cubo partendo dagli sviluppi piani delle due porzioni ottenute dopo il sezionamento. E’ stato interessante, per questo scopo, scoprire l’utilità dei molti diversi sviluppi del cubo; infatti ci sono alcuni sviluppi che per certe sezioni sono più “comodi”. A questo proposito c’è un episodio significativo che riguarda l’ultimo incontro fatto con Marco. Preparare la sezione esagonale partendo dallo sviluppo non è stato semplice e ha richiesto qualche tentativo (fino a che non è stato identificato lo sviluppo più adatto). Marco, senza quasi neanche pensarci, con lo sviluppo davanti ha identificato subito in che modo doveva essere tagliato:

[3]La preparazione dei materiali non veniva fatta con lei.

Figura 5.2: Sezione esagonale dallo sviluppo

In un primo momento abbiamo proposto ad Anna, costruito con questo metodo, un cubo sezionato con un piano perpendicolare ad un asse di ordine 4 e chiuso con delle linguette di nastro adesivo removibili, ma una volta "aperto", la flessibilità dei bordi rendeva ad Anna difficoltosa l'identificazione del poligono di sezione. Quindi il modello è stato modificato in modo che ci fosse all'interno una sagoma di cartoncino della forma del poligono di sezione corrispondente. In questo modo, quando il cubo era chiuso lei aveva la possibilità di esplorare il taglio percorrendone il perimetro e una volta aperto poteva esplorare in modo confortevole la sezione ottenuta e che eventualmente poteva essere rimossa, in modo che lei potesse rappresentare sul piano in gomma il poligono ottenuto o misurarne la lunghezza dei lati.

Figura 5.3: Sezione quadrata Anna

L'argomento delle sezioni è stato affrontato in tre diverse modalità. La prima consiste proprio nell'analizzare delle sezioni già fatte per individuare le corrispondenze tra il tipo di taglio e il poligono ottenuto. Per ognuna di queste, Anna doveva iniziare con l'esplorare il taglio, cercando di capire quante facce, spigoli e vertici venivano coinvolti e poi fare una previsione del poligono che si sarebbe ottenuto.
La prima ad essere studiata è stata la sezione quadrata. Facciamo qualche commento sulla Fig. 5.3. Nell'immagine a sinistra vengono messe in evidenza le mani di Anna che sta percorrendo il perimetro del taglio. Dopo averlo analizzato a fondo percorrendolo più volte, si è resa conto che il taglio coinvolgeva quattro facce e quattro spigoli; riguardo alla modalità di taglio, le è stato fatto notare il parallelismo rispetto a due facce opposte del cubo.
Nell'immagine centrale, dopo aver rimosso le linguette che tenevano il cubo chiuso, Anna sta esplorando la sezione ottenuta, prevedendo che si poteva trattare di un quadrato. In particolare, si è cercato di farle notare le corrispondenze tra: taglio di una faccia/nuovo spigolo e taglio di uno spigolo/nuovo vertice.
Nell'immagine a destra Anna sta staccando il poligono di sezione per verificare la correttezza della sua ipotesi. Per verificare davvero che si trattava di un quadrato, le è stato proposto di misurare i lati della sagoma. Lei si è limitata a misurarne due consecutivi, che erano di 6 cm, per poi affermare che "*Allora sono tutti di* 6 *cm*". Questo commento è estremamente interessante: Anna *non conosce la definizione formale di quadrato* eppure, attraverso l'esplorazione tattile, con questa affermazione *l'ha usata.*

La seconda proposta è stata l'analisi di una sezione triangolare. Nella seguente Figura 5.4 vediamo i tre passaggi dell'analisi:

Figura 5.4: Sezione triangolare Anna

Anche qui, possiamo notare nell'immagine di sinistra il momento di esplorazione del taglio. Con questo taglio, poichè coinvolge solo tre facce, inizialmente non è stato semplicissimo per lei orientarsi ma le è bastato solo un aiuto iniziale per individuare il percorso e prevedere che la sezione risultante sarebbe stata un triangolo. Il fatto che se ne sia subito resa conto lascia ipotizzare che nell'immagine mentale associata al sezionamento abbia aggiunto gli elementi emersi dall'esercizio precedente di associazione tra il numero delle facce tagliate e il numero dei lati della sezione.
L'immagine centrale è il momento in cui il cubo è stato aperto ed Anna sta esplorando la sagoma del triangolo.
Nell'immagine di destra sta togliendo la sagoma per poterla analizzare separatamente e riprodurla nel piano in gomma. Il fatto di poter togliere le sagome è indicativo anche perchè dà la possibilità di sentire la diversa libertà di movimenti tra un poliedro e una sua sezione. Ad esempio, il fatto di poter disegnare la sezione ma di non poter disegnare il cubo poteva essere un modo per evidenziare la diversa dimensionalità dei due. A questo proposito, può essere utile ricordare quanto detto nel Capitolo 2 riguardo al fatto che non tutte le immagini mentali di una persona che non vede sono rappresentabili su un foglio (a meno di un cambio di rappresentazione).

La terza sezione proposta era quella rettangolare, ottenuta tagliando lungo le diagonali di due facce opposte del cubo.

Figura 5.5: Sezione rettangolare Anna

Questa tipologia di taglio è differente dalle precedenti, infatti in questo caso la corrispondenza numero di facce tagliate/numero dei lati del poligono di sezione non vale più. Nell'immagine di sinistra si vede Anna che sta esplorando il perimetro del taglio, e nel farlo ha osservato "*Ma qui sono tagliate solo due facce!*". Il fatto che in questa nuova situazione l'immagine mentale del sezionamento finora elaborata risulta inadeguata ha comportato un conflitto cognitivo in Anna, come si è visto nel Capitolo 1, che lei ha prontamente esternato con questa affermazione. E' stato possibile quindi darle delle nuove informazioni che le permettessero di arrivare ad un livello di generalizzazione maggiore, di ampliare l'immagine mentale che si stava creando e che, per fortuna, era ancora provvisoria.
Nell'immagine centrale si nota Anna che sta analizzando la sezione dopo aver separato le due parti di cubo, riconoscendo il rettangolo. Nell'immagine di destra Anna sta riproducendo nel piano in gomma il nuovo poligono ottenuto.
La quarta sezione proposta è stata la sezione parallelogrammica che le ha permesso di generalizzare ulteriormente, essendo il risultato di un taglio che non coinvolge particolari parallelismi. Nel momento in cui ha analizzato il parallelogramma, nonostante la sua somiglianza con il rettangolo, non si è fatta ingannare, come se attraverso l'esplorazione si fosse resa conto dell'ampiezza degli angoli. Le è stato proposto quindi di fare un confronto tra rettangolo e

parallelogramma in modo da focalizzare precisamente sugli elementi comuni o differenti.
In tutti e quattro gli esempi di sezioni appena descritti è stato proposto ad Anna anche un ulteriore esercizio: prima di rimuovere la sagoma, le è stato chiesto di cercare di identificare i nuovi poliedri che nascevano dalla separazione del cubo. Questo esercizio ha avuto sia dei lati positivi che dei lati negativi, ai fini della corretta concettualizzazione del sezionamento. Infatti, da una parte è stato un utile lavoro sia per riconoscere alcuni dei solidi già studiati nella prima fase del laboratorio che per trasmettere il fatto che il taglio deve essere in grado di separare il cubo (altrimenti non è una sezione). Ma dall'altra parte ha reso ambigua l'idea di sezione (e quindi difficoltosa la scesa di dimensione) nel senso che lei non associava univocamente la parola *sezione* al *poligono staccato dal piano di sezione*, ma a volte per lei *sezionare un cubo* significava tagliarlo in due. A questo proposito, per superare l'ambiguità, le è stata indicata la sezione come la "nuova faccia che si crea lungo il taglio". Questa visione è sembrata essere la più efficace per aiutarla nel passaggio dimensionale.

La seconda modalità di approccio alle sezioni del cubo è stata la seguente: usando gli stessi materiali della prima modalità[4] le è stato proposto un percorso a ritroso: con il poligono di sezione in mano doveva individuare le due parti di cubo corrispondenti. Questa esercitazione è stata fatta con la sezione quadrata, quella rettangolare e quella triangolare.
Anna aveva tra le mani le tre sagome dei poligoni di sezione e davanti a sè i sei "pezzi di cubo". Ha iniziato esplorando le sagome una alla volta e le ha riconosciute subito, semplicemente percorrendone il perimetro. Su questo fatto è interessante notare che riconoscere il triangolo era abbastanza immediato ma la distinzione tra quadrato e rettangolo è meno banale, essendo entrambi quadrilateri. Per le associazioni (tutte avvenute velocemente e senza alcun dubbio), la strategia usata da Anna è stata di prendere una parte

[4]cubi sezionati in cartoncino con la sagoma removibile

di cubo alla volta, percorrere il taglio con le dita e, una volta individuata la forma, prendere la giusta sagoma e ricostruire il cubo.

La terza modalità di approccio alle sezioni è stata quella di *far sezionare a lei* dei cubi. Il materiale proposto per questa attività erano dei cubi in creta, che potevano essere tagliati usando un filo di nylon. Questa proposta di lavoro si basa sul fatto che per ottenere da un cubo in creta un certo poligono di sezione è necessaria una notevole consapevolezza matematica; inoltre sarebbe stato un buono stimolo per esercitare la manualità e la coordinazione. Per individuare i punti critici di questa attività, le è stato chiesto di iniziare sezionando a suo piacimento il primo cubo. In questo modo, è stato possibile rendersi conto che per ottimizzare l'orientamento durante il taglio con il filo (che è un'operazione che richiede l'uso di entrambe le mani) sarebbe stato meglio segnare preventivamente sulla creta un solco da seguire. Quindi, in un primo momento sono stati ripresi i cubi sezionati in cartoncino per rafforzare le osservazioni sulle varie modalità di taglio (facce, spigoli coinvolti) e sulle varie relazioni tra l'inclinazione del taglio e la lunghezza dei lati del poligono di sezione. Una volta effettuato questo ripasso, Anna è passata al sezionamento vero e proprio di tre cubi di creta (sezione quadrata, paralleogrammica e triangolare). Ogni volta, venivano sistemati davanti a lei un cubo in cartoncino già sezionato e chiuso con il nastro adesivo (in modo che comunque il taglio fosse ben percepibile) *incollato al tavolo* e un cubo in creta *con possibilità di movimento*. L'esercizio proposto era di analizzare il taglio nel cubo in cartone, *una faccia alla volta*, e riprodurlo nel cubo in creta facendo un solco con la punta di una matita. Una volta completato il perimetro del taglio, Anna poteva passare all'uso del filo di nylon in modo più agevole, perchè poteva seguire le guide scavate con la matita. Questo tipo di esercizio era molto difficile: infatti il "cubo-modello" era fissato al tavolo, a differenza di quello in creta, quindi Anna doveva orientarsi *mentalmente* per individuare le posizioni corrispondenti tra i due.

Figura 5.6: Sezione triangolare cubo in creta Anna

Nella Figura 5.6 sono stati messi in evidenza tre momenti di questo lavoro, durante la riproduzione della sezione triangolare.
Il primo tentativo è stato quello di ottenere la sezione quadrata. Il cubo in cartone era posizionato in modo tale che il taglio risultasse verticale. Anna ha iniziato dalla faccia superiore, usando come punti di riferimento due punti di due spigoli paralleli equidistanti dagli altri due spigoli ed ha riprodotto la stessa situazione nel cubo in creta. Più difficile è stato invece individuare la posizione dei due tagli verticali del cubo fissato: infatti la mobilità del cubo in creta faceva sì che la faccia in cui segnava il solco fosse sempre la faccia superiore e Anna doveva ruotare il cubo mentalmente per orientarsi e capire il proseguimento corretto su ciascuna faccia.
La sezione parallelogrammica aveva una difficoltà in più: non era possibile sfruttare il parallelismo del piano di sezione per trovare dei punti di riferimento, visto che viene ottenuta usando un piano inclinato. Inoltre, nel momento in cui Anna ha passato il filo, ha dovuto fare estrema attenzione e andare molto lentamente proprio a causa dell'inclinazione del piano.
L'ultima sezione, quella triangolare, è risultata la più difficile perchè, coinvolgendo solo tre facce del cubo, l'orientamento si è rivelato piuttosto os-

tico. Tuttavia, con solo alcuni suggerimenti, Anna è riuscita con successo a sezionare il suo cubo in creta. In riferimento alla Figura 5.6, dopo aver fatto il primo solco, nell'immagine di sinistra si vede Anna mentre analizza il proseguimento del taglio e nell'immagine al centro ha appena finito di riprodurre questo segmento di taglio nel cubo in creta. L'immagine di destra presenta Anna mentre si appresta a tagliare la creta con il filo di nylon (è stata aiutata a tenere fermo il cubo, che era instabile a causa dell'inclinazione necessaria per questo tipo di sezione). Nella figura seguente si vedono i tre cubi sezionati da Anna. Da sinistra, la sezione quadrata, paralleogrammica e triangolare:

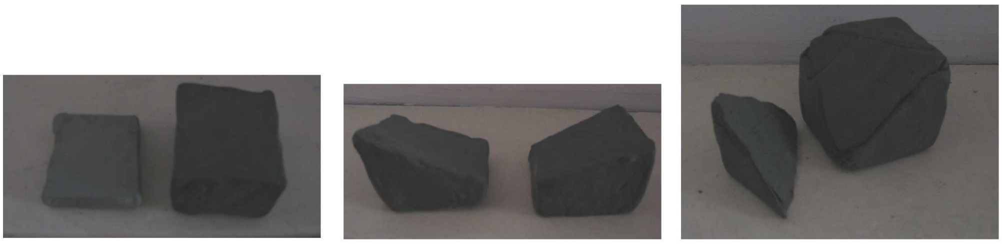


Figura 5.7: Sezioni in creta Anna

Finito questo lavoro, alla domanda "*E' possibile, secondo te, ottenere un poligono di* 9 *lati sezionando un cubo?*, la risposta di Anna è stata: "*No perchè ci sono solo sei facce*". Le sono stati proposti, in conclusione del laboratorio, anche due modelli in cartoncino di cubi sezionati in modo da ottenere un esagono e un pentagono, ma non sono stati usati per la riproduzione perchè effettuare quel tipo di taglio richiede una precisione a cui si arriva solo dopo molto allenamento.

Durante la parte del laboratorio dedicata alle sezioni è stato anche fatto un incontro in cui Anna era in compagnia di un altro ragazzo, D., anche lui certificato ma per motivi diversi da Anna. Questa esperienza è stata molto interessante perchè lei ha avuto l'opportunità di riorganizzare le nuove

conoscenze per cercare di spiegarle a qualcun altro. Molto interessante in questa interazione è stato il momento in cui Anna ha spiegato a D come fare a capire se un angolo è o no di 90°. Durante il laboratorio le era stato suggerito di verificare la perpendicolarità confrontando l'angolo da misurare e un angolo di un righello. Lei ha riproposto lo stesso metodo, guidando le mani di D. nella sistemazione del righello e indicandogli ciò che doveva andare a verificare.
Negli episodi descritti, quindi, emerge chiaramente che Anna, grazie ad una strumentazione studiata consapevolmente, nel corso del laboratorio ha elaborato delle immagini mentali di natura tattile e, a partire da queste, ha svolto tutte le varie attività proposte. Con una "semiotica tattile", diversa quindi da quella che di norma viene proposta nelle scuole, ha sviluppato delle immagini, a volte addirittura modelli, mentali che, tra l'altro, le hanno permesso di comunicare consapevolmente a D. dei concetti geometrici, ricorrendo a descrizioni di natura aptico-motoria.

Globalmente, questa esperienza è stata molto positiva: Anna ha scoperto un modo di "fare geometria" che l'ha molto coinvolta tenendo sempre alta la sua attenzione. Magari non avrà interiorizzato completamente il passaggio dimensionale, ma sicuramente ha avuto accesso a concetti matematici, anche sofisticati (ad esempio le sezioni del cubo, la classificazione dei solidi, la non unicità degli sviluppi piani) che una didattica di tipo tradizionale le avrebbe precluso. Un altro aspetto che non possiamo trascurare è che questo laboratorio ha permesso ad Anna di sperimentare una relazione emotiva diversa nei confronti della matematica, che ha vissuto con interesse, curiosità e divertimento.

# Conclusioni

L'apprendimento è un processo dinamico che coinvolge numerose funzioni cognitive dell'individuo. Ma è anche un processo che avviene all'interno di un contesto socio-culturale e quindi è necessario pensare a questo contesto non come a qualcosa di totalmente predefinito che prescinde dagli individui che lo compongono. Dovrebbero essere, quindi, le persone con le loro specificità a dare una forma al contesto in cui il processo di apprendimento avviene, non viceversa. Se questo non accade, e quindi se il contesto non è adatto a tutte le sfumature delle persone che lo compongono, si rischia che qualcuna di queste persone, per i più svariati motivi, "rimanga indietro".
La dinamicità del processo di apprendimento *necessita* di una dinamicità di contesto per poter avvenire liberamente, altrimenti rischia di subire dei rallentamenti, rischia di imbattersi in degli *ostacoli*. Alla luce di tutto ciò che è stato presentato e analizzato finora, riguardo al caso particolare dell'apprendimento della geometria in connessione al deficit visivo, ci si può rendere conto del fatto che non è produttivo pensare al deficit visivo come un ostacolo ontogenetico perchè diventa tale *solo in connessione al contesto* di riferimento. Se si chiede ad una persona disgrafica di disegnare delle figure geometriche è chiaro che la sua disgrafia diventa immediatamente un ostacolo ontogenetico. Ma se a questa stessa persona si propone di disegnare le stesse figure geometriche usando un programma come *Cabrì Geometre II*, la sua disgrafia non rappresenta più un ostacolo all'apprendimento. La sua disgrafia si limita ad essere quello che di fatto è, usando la definizione di J. De Ajuriaguerra: "un deficit del tracciato grafico". Un analogo discorso vale,

come è stato ampiamente analizzato in questa trattazione, se si sta parlando di deficit visivo. In realtà, in questa tesi è stato fatto molto di più: si è visto come non solo il deficit visivo non ostacola di per sè l'apprendimento della matematica, ma anche che le modalità con cui un non vedente percepisce il mondo che lo circonda potrebbero addirittura evitargli l'insorgere di alcune classiche misconcezioni geometriche. Angelo Bonvino in un articolo del 1953 riporta come il matematico Eugenio Togliatti fosse solito dire che la difficoltà principale dello studio della geometria sta nella generalizzazione delle nozioni. Bonvino osserva poi:

> "Il vedente rimane troppo impressionato dalla prima figura che gli si traccia sulla lavagna al punto da non potersi più staccare senza difficoltà da quella tipica figura; mentre la nozione esposta è generale e riguarda sovente numerosi casi fondamentalmente simili. Chi non vede, invece, non essendo legato all'impressione visiva può generalizzare più facilmente."[5]

E' per tutte queste ragioni che è estremamente importante che la realtà d'aula si costruisca e si strutturi giorno per giorno sulla base di tutte le persone che la compongono, con le loro specificità. Questo, inoltre, rappresenta per l'insegnante l'opportunità di rivivere da diversi punti di vista il "sapere da insegnare", con la possibilità che questo sapere riservi anche a lui delle nuove sorprese.

Tutto questo discorso è stato fatto per l'apprendimento di alcuni concetti geometrici e il deficit visivo ma si potrebbe azzardare una generalizzazione. Forse è proprio l'idea di ostacolo ontogenetico in sè che non ha motivo di esistere, se non in relazione al contesto scolastico in cui l'individuo è inserito e quindi, in termini di ostacoli, agli ostacoli didattici. Si potrebbe quindi dire che *le specificità degli individui non sono ostacoli all'apprendimento in sè ma lo diventano se il contesto scolastico non è adeguato alle loro potenzialità.*

[5] Bonvino A. (1953), p.2

# Appendice A

# Appendice: Documentazione

## A.1 Diari Laboratorio

ATTIVITA' DI LABORATORIO

1° INCONTRO, 21/12/2009 Durata: 1h 30min

Prima fase: Indagine sulle conoscenze preliminari dell'alunna

Servendosi del piano di gomma, l'alunna ci ha mostrato alcuni disegni di figure geometriche realizzate ed analizzate l'anno scorso. In un primo foglio c'era la rappresentazione di un triangolo, un rettangolo e un quadrato. Negli altri vi erano disegnate circonferenze e le posizioni di una retta rispetto alla circonferenza. Ci siamo soffermate sul primo foglio. Le abbiamo chiesto di esplorarlo tattilmente e di dirci che figure vi erano rappresentate. Lei è stata subito in grado di riconoscere i vari tipi di poligoni, e quando le abbiamo chiesto come fa a distinguere un quadrato da un rettangolo, ci ha risposto che "il rettangolo ha i lati più corti" (non siamo riuscite a capire se il "più corti" era riferito ai lati del rettangolo rispetto a quelli del quadrato o al confronto fra i lati stessi del rettangolo). Questo ci ha fatto pensare che, forse, non ha acquisito piena consapevolezza delle caratteristiche fondamentali dei poligoni . Per indagare su quest'ipotesi le abbiamo chiesto di indicare i lati, i vertici e gli angoli del quadrato. Sui lati e i vertici non ha avuto dubbi, sugli angoli ha avuto qualche esitazione ("un angolo è la punta tra un lato e l'altro e un po' di superficie in mezzo"). Per darle un'idea intuitiva corretta di angolo, gliel'abbiamo fornita partendo dal piano (foglio di plastica del piano di gomma): le abbiamo chiesto di disegnare un punto, di tracciare due semirette con origine comune nel punto scelto e facendole sentire tattilmente l' angolo come le due porzioni di piano individuate dalle due semirette. Abbiamo notato che all'idea di angolo, lei associa automaticamente l'angolo di 90°, ma ci è sembrato che non abbia piena consapevolezza di cosa sia un angolo retto. A questo punto abbiamo deciso di interrompere la trattazione delle figure piane, dal momento che il nostro laboratorio è impostato proprio sul partire dal 3D per arrivare al 2D.

Seconda fase: Primo approccio con i poliedri

Inizialmente le abbiamo chiesto se sa cos'è un poliedro e ci ha risposto di no. Abbiamo provato a chiederle se sa cos'è un cubo e ci ha risposto "è un quadrato", una piramide "è un triangolo".

A questo punto le abbiamo dato in mano un cubo di cartoncino e le abbiamo chiesto di analizzarlo (lo ha rigirato tra le mani più volte). All'inizio ha detto "è un quadrato", poi si è corretta dicendo "ha tante forme fatte a quadrato". Le abbiamo chiesto di quantificare i quadrati e la risposta è stata: "più di quattro ...sei". Prima di darle informazioni sul cubo, le abbiamo chiesto di provare a disegnarlo e lei, appoggiando una faccia del cubo al foglio del piano di gomma, ne seguiva il contorno con la penna e lo spostava, per disegnare dei quadrati uno accanto all'altro (abbiamo il foglio con il disegno). Quindi le abbiamo chiesto se c'era qualche differenza tra il cubo che aveva in mano e quello che aveva disegnato e ci ha risposto: "con il cubo posso fare più cose che con il disegno". Guidandola nell'esplorazione tattile, abbiamo cercato di dare una forma matematica a questa sua intuizione, ragionando in termini di libertà di movimento sia nell'oggetto in sé (facendole sentire in che modo poteva spostarsi con le mani sul cubo in paragone con il quadrato), sia dell'oggetto immerso nel piano (quadrato) e nello spazio (cubo, facendole osservare il fatto che un cubo può rimbalzare e saltare).

Terza fase: Terminologia

Partendo dalla terminologia a lei già nota del quadrato (lati, vertici), siamo passate agli analoghi nello spazio, indicandole quindi spigoli, vertici e facce del cubo. L'individuazione dei vertici è stata immediata, li ha contati e ci ha detto che sono 8 (all'inizio li ha contati girando il cubo più volte e ci ha detto che erano 12, poi le abbiamo consigliato di tenere fermo il modellino e ha subito detto 8). Per quanto riguarda le facce, le abbiamo spiegato che quelle che lei chiamava "forme fatte a quadrato" sono le facce del cubo e, contandole, ha subito detto che sono 6. Le abbiamo, quindi, fatto notare che nella geometria piana non si parla di "facce" perché ogni poligono ha "una faccia sola". Per gli spigoli, i modellini avevano una striscia di nastro adesivo in corrispondenza di ciascuno di essi per farglieli notare. Li abbiamo definiti come "lati delle facce" e, quando li ha contati, ha detto dopo pochi istanti, che sono 12. In conclusione, abbiamo cercato di associare ad ognuno di questi elementi una sensazione tattile molto intuitiva che ci è sembrata molto efficace: il vertice è dove "punge", lo spigolo è dove "si possono dare pizzicotti" e la faccia è "dove si possono appoggiare le dita ed esercitare movimenti circolari senza uscire dalla faccia stessa".

Le abbiamo lasciato il cubo, per darle modo di esaminarlo ancora, e il tetraedro per provare a fare, da sola, lo stesso esame su un nuovo solido. Nel prossimo incontro le chiederemo che cosa ha osservato.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

2° INCONTRO, 23/01/2010
Durata: 45 min

Questo incontro è stato più un momento di riassunto di quanto fatto nel primo incontro e una preparazione per quanto progettato nell'incontro successivo (classificazione di solidi). Abbiamo innanzitutto ripassato le nozioni e le terminologie introdotte precedentemente. Le abbiamo poi proposto solidi di diverso tipo:

-cubo di cartoncino (più piccolo di quello usato nel primo incontro);

-cubo scheletrato (più grande di quello in cartoncino);

-cubo scheletrato molto grande (circa 20 cm di spigolo);

-piramide a base quadrata in cartoncino;

-tetraedro in cartoncino;

- prisma a base triangolare in cartoncino;

- cilindro;

- prisma a base esagonale in cartoncino. Lo scopo principale è stato quello di farla familiarizzare con tali solidi senza darle indicazioni troppo formali, ma lasciandola libera di esplorare, descrivere intuitivamente questi oggetti e trovare analogie e differenze. Le sue prime osservazioni sono state: "Sono uno diverso dall'altro...alcuni non sono uguali ma hanno delle forme uguali".

Riportiamo alcuni fatti che abbiamo trovato rilevanti:

1) Ha riconosciuto subito le piramidi ("Sembra una piramide");

2) Non ha avuto insicurezze nel riconoscere i cubi scheletrati (per quanto riguarda quello di spigolo 20 cm l'esplorazione è

stata temporalmente più lunga ma efficace) affermando tra l'altro: "Le facce si sentono perché ci si possono infilare le mani dentro"

3) In un primo momento, ha trovato il cilindro simile al prisma a base esagonale, le abbiamo chiesto per quale motivo e lei ci ha risposto: "sono simili nella forma e nella dimensione (effettivamente, i due solidi avevano più o meno lo stesso volume, e fra tutte le facce dei vari poliedri proposti l'esagono è il poligono che più approssima una circonferenza. Certamente Anna non saprebbe formalizzare ragionamenti del tipo: "facendo tendere a infinito il numero dei lati di un poligono si ottiene una circonferenza"; ma posizionando il prisma con una faccia esagonale appoggiata sul tavolo, e stringendo le facce rettangolari con una mano ha probabilmente provato una sensazione simile, dal punto di vista della forma, a quella sentita quando stringeva il cilindro). Continuando l'esplorazione si è poi resa conto di effettive differenze, non ha subito intuito la presenza di spigoli sul prisma e l'assenza di questi sul cilindro ma ha affermato: "però qui (nel prisma) si sentono meglio le facce...in più ci sono anche i vertici " Alla nostra richiesta di spiegarci meglio questa sua descrizione ci ha indicato gestualmente la presenza degli spigoli (scorreva con le dita sugli spigoli). Abbiamo "formalizzato" queste sue osservazioni dicendole che il cilindro, a differenza degli altri, non è un poliedro.

Purtroppo non c'è stato tempo di approfondire ma lo faremo nel laboratorio di lunedì 25.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

3° INCONTRO, 25/01/2010
Durata: 1h 30min

Nel secondo incontro, avevamo chiesto ad Anna di individuare le forme geometriche analizzate in qualche oggetto reale. Lei ci ha riferito che, durante un'attività svolta con gli scout, ha riconosciuto in un modellino di cartone di una casa la composizione di un cubo con una piramide: "le mura della casa erano tutto il cubo, la piramide il tetto."

PRIMA FASE: Confronto tra un cubo e un parallelepipedo

Le abbiamo fatto analizzare tattilmente un cubo e un parallelepipedo (due facce del parallelepipedo erano quadrate e congruenti alle facce del cubo), entrambi di cartoncino, per capire quali fossero le differenze. Il suo primo commento è stato che il cubo "è più piccolo", così abbiamo deciso di approfondire questa osservazione concentrandoci sulle differenze e sulle analogie tra vertici, facce e spigoli dei due solidi. In questo modo, contemporaneamente, abbiamo voluto fare un ripasso della terminologia (manifesta ancora qualche resistenza con la parola spigolo, anche se riesce a riconoscerlo tattilmente) e farle porre l'attenzione su caratteristiche metriche e morfologiche. Abbiamo avuto l'impressione che lei abbia spesso le giuste intuizioni, ma non sappia come esprimerle con le parole. Inizialmente, ha avuto qualche difficoltà, quindi abbiamo deciso di limitare l'analisi ad una faccia del cubo confrontata con una delle facce rettangolari del parallelepipedo. Si è subito resa conto che avevano lo stesso numero di vertici e di spigoli, ma che il parallelepipedo aveva una "faccia più grande". Per cercare di dare forma a questa frase, le abbiamo proposto di misurare le lunghezze degli spigoli con il righello tattile (si sta esercitando sulle misurazioni in questo periodo, abbiamo pensato che potesse essere un'occasione per collegare le due cose). Dopo aver stabilito che l'unità di misura più adatta era il centimetro, ha iniziato a prendere le misure (l'abbiamo all'inizio aiutata nella sistemazione dello spigolo in corrispondenza dello 0 del righello). Per le prime misurazioni ci è voluto un po' di tempo ma poi, prendendoci la mano, sono diventate via via più rapide. La cosa interessante è che per il parallelepipedo, che è stato misurato per secondo, dopo aver trovato la lunghezza di due spigoli consecutivi, ha intuito la lunghezza degli altri due senza bisogno di misurarla. Quindi, l'abbiamo aiutata a formalizzare la sua intuizione di diversità di grandezza, concludendo che le caratteristiche combinatorie sono le stesse (n° vertici, facce e spigoli) ma le caratteristiche metriche no (lunghezze spigoli). Non abbiamo usato questi termini con lei, ci siamo limitate a farle notare i significati.

SECONDA FASE: Classificazione

Abbiamo sistemato davanti a lei 12 solidi:

- un cubo in cartoncino e uno scheletrato ;

- un parallelepipedo in cartoncino e uno scheletrato;

- un prisma a base triangolare di cartoncino e uno scheletrato;

- una piramide a base quadrata di cartoncino e due scheletrata;

- un tetraedro in cartoncino e uno scheletrato;

- un cilindro.

Le dimensioni tra i solidi in cartoncino e quelli scheletrati erano diverse. L'obiettivo di questa fase è quello di fare una suddivisione consapevole di un gruppo di solidi (abbiamo deciso di considerare corretta qualunque tipo di suddivisione, purché supportata da una motivazione logica). Per fornire un collegamento intuitivo, abbiamo paragonato la classificazione al sistemare gli oggetti in un armadio: in ogni cassetto verrà posta una certa tipologia di oggetti. L'unica "regola del gioco" era di dirci il criterio scelto. In un primo momento li ha analizzati tutti, uno alla volta, senza pronunciarsi. La cosa interessante è che, anche questa volta, i solidi scheletrati non le hanno creato nessun problema di riconoscimento . L'unica difficoltà è stata che alcuni di questi (cubo, parallelepipedo) erano un po' flessibili, quindi si sentiva un po' limitata nell'esplorazione. Quando si è sentita pronta ha fatto la sua divisione nel seguente modo:

1) Cubi e parallelepipedi insieme (indipendentemente se scheletrati o meno);

2) I due prismi insieme;

3) Tutte le piramidi insieme;

4) Il cilindro a parte.

Le abbiamo chiesto quindi di spiegarci la classificazione. In particolare, le abbiamo chiesto a cosa avesse dato attenzione (alla grandezza, al materiale, alla forma...). All'inizio ha detto "a tutto, un po' la grandezza, un po' la forma...", le abbiamo quindi suggerito che a noi sembrava che avesse dedicato attenzione a tutto ma che avesse scelto la forma come caratteristica discriminante. Potrebbe sembrare che non avesse consapevolezza del criterio usato, ma abbiamo avuto l'impressione che fosse più una difficoltà di espressione di questo criterio. Infatti, mentre distribuiva i solidi in gruppi lo faceva in modo molto deciso, le bastava riprenderli in mano un secondo per sistemarli subito nel gruppo da lei scelto. L'unico che ha richiesto qualche istante di ragionamento in più è stato il cilindro. Sono emerse due discussioni:

1) Vedendo la sua difficoltà a ricordare il termine "parallelepipedo", abbiamo posto la sua attenzione sul parallelismo degli spigoli, visto che il termine "parallelelo" lo conosceva già. Per darle un'effettiva trasposizione tattile le abbiamo fatto mettere il dito pollice su uno spigolo e il dito indice su un altro, di una stessa faccia, parallelo al primo. A questo punto, le abbiamo fatto osservare che facendo scorrere le dita prima lungo gli spigoli, poi, mantenendo costante l'apertura, lungo i prolungamenti immaginari degli spigoli, le due dita non si incontrano. Infine le abbiamo fatto notare come questo non avviene, ad esempio, in alcuni spigoli della piramide.

2) Il cilindro l' ha lasciata perplessa, non sapeva per i primi istanti dove metterlo, poi ha scelto di sistemarlo a parte. Ci siamo soffermate su questo discorso (riprendendo alcune osservazioni fatte nell'incontro precedente). Le abbiamo fatto notare la differenza tra il rotolamento del cilindro e quella del parallelepipedo e del prisma, per evidenziare l'assenza degli

spigoli nel primo. Per fare questo abbiamo anche usato un paragone con la pasta fatta in casa, facendole immaginare di avere un matterello a forma di parallelepipedo. A questo punto le abbiamo chiesto cosa c'è di diverso fra i due solidi, cosa ha in più o in meno un parallelepipedo che gli impedisce di rotolare in modo fluido. La sua risposta è stata: "Le facce" Le abbiamo spostato l'attenzione sugli spigoli, più che sulle facce, e lei ha realizzato che il cilindro non ne ha. Le abbiamo inoltre fatto notare che le due facce parallele del cilindro sono "rotonde", mentre quelle del parallelepipedo no. Infine le abbiamo chiesto se il cilindro ha dei vertici e la sua risposta è stata subito no. A questo punto abbiamo "istituzionalizzato" la diversità del cilindro rispetto a tutti gli altri, dicendole che il cilindro non è un poliedro mentre tutti gli altri solidi analizzati lo sono.

TERZA FASE: Gli sviluppi piani

Abbiamo preparato per ogni solido (cubo, parallelepipedo, tetraedro, piramide con una faccia quadrata e prisma con due facce parallele triangolari) uno sviluppo piano senza linguette di chiusura, chiuso da pezzettini di nastro adesivo rimovibili, e uno sviluppo piano con le linguette di chiusura. Anche qui, siamo partite dal cubo, e le abbiamo dato in mano quello chiuso con i pezzettini di nastro adesivo. Non lo ha riconosciuto subito a causa dello scotch presente ma dopo che le abbiamo suggerito di dare attenzione a spigoli, vertici e facce, ha detto che si trattava di un cubo. A questo punto le abbiamo chiesto di togliere le linguette di nastro adesivo, una alla volta per capire bene cosa sarebbe successo. Appena sganciata la prima faccia, ha esclamato: "Non è un cubo, è una scatola. Si è aperta." Una volta tolti tutti i pezzi di scotch, le abbiamo chiesto cosa era successo al cubo, lei ci ha risposto "si è aperto". Le abbiamo quindi fatto notare che il cubo aperto "si è spalmato" sulla superficie del tavolo (1° passaggio dal 3D al 2D), e lo abbiamo definito come sviluppo piano del cubo. Abbiamo cercato di porre l'attenzione sul fatto che un cubo può essere stretto nella mano, lo sviluppo piano no; il suo commento a questo fatto è stato che lo sviluppo piano "occupa un po' troppo spazio" (abbiamo interpretato "troppo spazio per essere stretto nelle mani") e le abbiamo fatto osservare che lo sviluppo piano occupa "spazio piano". Le abbiamo infine chiesto di riprodurre sul piano di gomma lo sviluppo del cubo. Con la penna, ha disegnato la sagoma seguendo i contorni esterni dello sviluppo (ovviamente con le imprecisioni dovute al fatto che il modellino non era fissato al foglio), poi, consapevole che mancavano le linee interne al cartoncino (che poteva sentire grazie alle piegature), le ha esplorate tattilmente una alla volta (trovando punti di riferimento che le permettessero di localizzarle in modo efficace), ha localizzato i punti corrispondenti nel suo disegno e, aiutandosi con il righello tattile, ha tracciato le linee mancanti. E' interessante notare (ci ha detto che non ha mai fatto esperienze di questo tipo) :

1) Si orientava abbastanza bene e aveva presente quali linee aveva già ridisegnato e quali no (solo ad un certo punto ha perso un attimo il filo perché è suonata la campanella, le mancava ancora l'ultimo segmento e aveva poco tempo per finire);

2) Le abbiamo dato uno sviluppo a croce, quindi c'era un segmento privo di punti di riferimento evidenti: quello a metà della coda della croce. Questo non è stato un ostacolo, anzi ha subito

intuito che poteva riferirsi al fatto che si sarebbe trovato a metà strada della coda della croce.

Questa fase del laboratorio verrà terminata nel prossimo incontro.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

4° INCONTRO, 1/02/2010
Durata: 1h 30min

Nell'incontro precedente avevamo chiesto ad Anna di portarci quello che aveva fatto l'anno scorso, per capire quali fossero le sue conoscenze di geometria piana. In un primo momento abbiamo quindi ripercorso gli argomenti fatti l'anno precedente (circonferenza e parti della circonferenza). Mentre facevamo questa specie di ripasso, lei ha detto apertamente che l'esperienza di "contatto diretto" con gli oggetti matematici che ha fatto con noi le è molto piaciuta e che ha sentito che le sono state davvero state "spiegate" delle cose. Ci ha poi raccontato di un ripasso fatto insieme all'insegnante di sostegno di quanto avevamo fatto nell'incontro precedente (l'insegnante le ha portato un cubo e un parallelepipedo che lei ha riconosciuto e ne ha poi misurato gli spigoli). A questo punto, le abbiamo chiesto di cercare di riassumere quello che avevamo fatto nell'incontro precedente, lei ci ha risposto: "abbiamo preso un cubo, lo abbiamo aperto, lo abbiamo esplorato e toccato, poi lo abbiamo disegnato sul piano in gomma"

PRIMA FASE: Ricerca di analogie e differenze tra il cubo e il suo sviluppo

Con sotto mano un cubo e il suo sviluppo a croce (sia di cartoncino che rappresentato nel piano in gomma), abbiamo puntato la sua attenzione sul fatto che "non abbiamo aggiunto né tolto niente" al cubo chiuso per ottenerne lo sviluppo piano, e le abbiamo chiesto di cercare di individuare le corrispondenze tra il solido e il suo sviluppo. La nostra prima domanda è stata: "Cosa diventato i vertici nel cubo aperto? I vertici che senti nel solido, a cosa corrispondono secondo te nello sviluppo?" Per guidare il ragionamento, le abbiamo suggerito di provare a chiudere lo sviluppo (concentrandosi su quegli elementi dello sviluppo che, dopo la chiusura, diventato i vertici del cubo). Nonostante l'instabilità del solido ottenuto, le sue mani hanno subito individuato i vertici del cubo e nella riapertura ha trovato i punti corrispondenti nello sviluppo. Le abbiamo quindi chiesto di contare i vertici del cubo. Per farlo, lei ha contato solo i quattro della faccia superiore e poi ci ha risposto "otto". Abbiamo quindi pensato di approfondire e le abbiamo chiesto di spiegarci perché era sicura che fossero otto, senza bisogno di contarli tutti. Non siamo riuscite a capire precisamente il ragionamento da lei fatto per darci questa risposta, la nostra impressione è che potrebbe aver inconsapevolmente sfruttato il parallelismo degli spigoli ma che non sapeva come dirlo.

Le abbiamo poi fatto porre l'attenzione sulle facce. Lei ci ha detto che per passare dal solido allo sviluppo le facce "si sono aperte" e ha riconosciuto il fatto che le facce del cubo sono tutti quadrati. Contando le facce sul solido e le corrispondenti parti nello sviluppo, si è resa conto che sono dello stesso numero. Le abbiamo chiesto di dirci qualcosa sui vertici dello sviluppo piano e lei ci ha detto che "sono di più".

Infine, le abbiamo chiesto di sentire e contare gli spigoli del cubo e, prima ancora che le chiedessimo a cosa corrispondevano nello sviluppo piano, lei ci ha detto "diventano i lati del quadrato". Ha avuto però delle difficoltà nel conteggio degli spigoli del solido, probabilmente dovute al fatto che a volte non lo tiene fermo mentre conta ma lo rigira tra le mani (si rende conto che gli errori di conteggio dipendono dal fatto che potrebbe contare due volte gli stessi elementi). Le abbiamo quindi suggerito di tenerlo fermo in una mano e l'abbiamo un po' guidata nel conteggio.

Prima di proseguire, abbiamo cercato di fare una specie di panoramica di tutte le corrispondenze che intercorrono tra il cubo e il suo sviluppo, insistendo sul fatto che si passa da una figura solida ad una piana.

SECONDA FASE: Sviluppo piani di altri solidi

Prisma con due facce triangolari:

Le abbiamo dato in mano un modellino di cartoncino chiuso da delle linguette di nastro adesivo rimovibili. Prima le abbiamo fatto analizzare la forma globale del solido chiuso, soffermando l'attenzione anche sulle differenze tra il cubo e il prisma (facce uguali/ facce diverse, spigoli uguali/spigoli diversi). Le abbiamo poi chiesto di togliere il nastro adesivo un pezzo alla volta, cercando di capire cosa succede. Dopo aver aperto il modello, ha riconosciuto subito quali erano le facce triangolari e quali quelle rettangolari ("tre rettangoli e due triangoli"). Con un altro modellino solido dello stesso prisma, ci ha detto tutte le corrispondenze corrette tra le facce e spigoli del solido con i vari poligoni e lati dello sviluppo. In questo caso, abbiamo fatto noi la rappresentazione sul piano in gomma dello sviluppo del prisma, invitandola poi a toccarlo e riconoscere le corrispondenze con lo sviluppo in cartoncino.

Tetraedro:

Avevamo anche in questo caso due solidi in cartoncino, di cui uno con delle linguette di nastro adesivo rimovibili. Dopo aver riconosciuto il solido come una piramide con tutte le facce triangolari, l'abbiamo invitata a togliere il nastro adesivo per ottenere lo sviluppo piano (che abbiamo rappresentato noi nel piano in gomma). Anche qui, le abbiamo chiesto di contare facce e spigoli sia nel solido che nello sviluppo (nel conteggio nel solido si è verificato il problema del contare più volte lo stesso elemento), trovando le corrispondenze.

TERZA FASE: Riconoscimento di solidi a partire dagli sviluppi

Le abbiamo proposto di fare il lavoro opposto: con in mano uno sviluppo piano di cartone, cercare di capire a che solido corrisponde SENZA CHIUDERLO, poi verificare le sue ipotesi con la chiusura. Prima di iniziare, poiché negli sviluppi erano presenti delle linguette di cartoncino per la chiusura, gliele abbiamo fatte notare per evitare che poi, nel toccarle, si confondesse.

Sviluppo del tetraedro

Abbiamo iniziato con lo stesso sviluppo con cui abbiamo concluso la fase precedente. Anna ha subito detto che si trattava dello sviluppo della piramide. Le abbiamo suggerito come usare le linguette per chiuderlo e verificare l'esattezza della sua ipotesi. Lei ha chiuso il solido senza difficoltà.

Sviluppo del prisma a base triangolare

Lo ha subito riconosciuto, soltanto toccando le facce di cui era composto. Poi, usando dei pezzi di nastro adesivo, lo ha chiuso in modo corretto e senza difficoltà (anche la presenza delle linguette non le ha creato problemi).

Sviluppo della piramide a base quadrata I

Lo ha tenuto tra le mani analizzando prima la forma globale dello sviluppo (aveva un quadrato al centro e i quattro triangoli attorno). La sua prima risposta è stata "diventerà un cubo...cioè è aperto". Le abbiamo quindi suggerito di dare attenzione alla forma delle facce e di non farsi ingannare dalle presenza delle linguette, e si è resa conto che non si trattava di un cubo. Lo ha quindi analizzato ancora un po' (non era facile, data anche la presenza delle linguette) e poi ha risposto "la piramide". Le abbiamo quindi fatto fare un confronto con il tetraedro visto in precedenza ma non ci ha risposto subito e ha preferito aspettare la chiusura. Durante la chiusura di questo solido, le linguette hanno creato qualche problema in più e durante l' incollamento ha quasi sovrapposto due facce triangolari. Una volta chiuso, le abbiamo proposto di fare attenzione a vertici, spigoli e facce per fare il confronto con il tetraedro. Ha contato gli spigoli di entrambi i solidi e si è resa conto che erano in numero diverso. Le differenze sono state evidenti anche nel conteggio delle facce. Nell'analizzare la forma delle facce ha detto "quella sotto è diversa...è un quadrato". Le abbiamo fatto notare che il termine "sotto" dipende dal posizionamento del solido nello spazio.

Sviluppo piano della piramide a base quadrata II

Le abbiamo proposto di nuovo la piramide a base quadrata ma con uno sviluppo diverso (quattro triangoli uno adiacente all'altro e un quadrato adiacente ad uno dei due triangoli esterni). Dopo una breve analisi ha detto: "secondo me è un'altra piramide". Le abbiamo proposto questo esempio per introdurre il fatto che ad ogni solido corrispondono sviluppi diversi, che sarà argomento del prossimo laboratorio con attenzione particolare agli sviluppi del cubo.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

5° INCONTRO, 8/02/2010
Durata: 1h 30min

DI QUESTO INCONTRO E DI TUTTI I SUCCESSIVI FINO ALLA FINE DEL LABORATORIO ABBIAMO LE REGISTRAZIONI VIDEO

In questo incontro abbiamo concluso la parte riguardante gli sviluppi piani e introdotto le sezioni piane.

PRIMA FASE: Ricostruzione di un solido

Per riprendere quanto già iniziato nell'incontro precedente abbiamo proseguito con l'esercizio di ricostruzione di un solido, dato il suo sviluppo piano. In tutta questa fase le abbiamo chiesto prima, di cercare di immaginare la chiusura e fare una previsione del solido risultante, poi di procedere a chiudere lo sviluppo praticamente per verificare le ipotesi fatte. ·

Sviluppo piano a croce di un cubo

Le abbiamo dato lo sviluppo di cartoncino con linguette di chiusura in mano. Lei lo ha esplorato non facendosi in nessun modo distrarre dalla presenza delle linguette, lo ha subito riconosciuto e chiuso correttamente. Ne abbiamo quindi approfittato per fare un ripasso sulla terminologia.

Sviluppo piano del tetraedro I

Il primo sviluppo che le abbiamo proposto era composto da quattro triangoli uno adiacente all'altro con orientamenti invertiti, con le linguette di chiusura. Lei ha preso lo sviluppo in mano, ne ha prima percorso il perimetro globale per poi concentrarsi sulle pieghe all'interno. Dalla forma delle facce si è resa conto che si trattava di una piramide, cosa che ha poi verificato chiudendolo correttamente e senza difficoltà.

Sviluppo piano del tetraedro II

Le abbiamo dato un secondo sviluppo del tetraedro, formato da tre triangoli ognuno adiacente ad un lato di un triangolo centrale, in questo caso senza linguette di chiusura. Lei, come in precedenza, si è inizialmente concentrata sulla forma globale, poi sulle pieghe interne. Anche questa volta è riuscita a capire che era una piramide grazie al riconoscimento della forma delle facce. L'assenza delle linguette non le ha creato nessun problema nella chiusura.

Sviluppo piano del parallelepipedo

Le abbiamo dato in mano uno sviluppo a croce con linguette di chiusura. Ha analizzato la forma globale scorrendo con le mani lungo il perimetro, poi si è concentrata sulle pieghe interne. Ha subito riconosciuto che era lo sviluppo di un parallelepipedo. Ci ha colpito molto il fatto che non si sia fatta ingannare dalla "forma a croce", che poteva facilmente essere attribuita ad un cubo, ma che abbia analizzato tutte le informazioni prima di rispondere correttamente.

SECONDA FASE: Ricerca di diversi sviluppi del cubo

In questa parte abbiamo voluto evidenziare il fatto che lo sviluppo di un solido non è unico e per farlo ci siamo dedicate in particolare agli sviluppi del cubo. Abbiamo costruito dei cubi in cartoncino, non partendo da uno sviluppo preciso, ma attaccando le sei facce quadrate con una linguetta di nastro adesivo removibile in tutti e dodici gli spigoli. La richiesta era di togliere il minor numero di pezzi di scotch per far si che si ottenesse l'apertura del cubo e vedere se gli sviluppi ottenuti erano uguali tra loro o no. Abbiamo effettuato cinque prove e, alla fine, ottenuto quattro diversi sviluppi. Di fronte ad ogni sviluppo trovato le chiedevamo se secondo lei si trattava di uno sviluppo che già conosceva o no. Il primo che ha ottenuto era quello a forma di T, che non le è sembrato familiare (commento che ha fatto dopo averne analizzato la forma globale; in effetti era uno sviluppo che non avevamo mai usato prima). Il secondo era il classico sviluppo a croce, che lei ha subito riconosciuto come quello a cui era abituata e che aveva anche rappresentato sul piano in gomma nell'incontro precedente. Nel terzo cubo ha ottenuto di nuovo lo sviluppo a croce. Si è subito accorta, analizzandone la forma globale, che si trattava dello stesso sviluppo ottenuto con il cubo precedente. I due tentativi seguenti hanno fornito due sviluppi diversi che Anna, su nostra richiesta, ha confrontato con i precedenti, basandosi sempre sulla forma globale, rendendosi conto della diversità. Abbiamo notato due fatti che meritano di essere evidenziati:

1) Tendeva sempre ad iniziare l'apertura togliendo tre pezzi di nastro adesivo dalla faccia superiore;

2) Per confrontare gli sviluppi ottenuti, oltre che esaminarli singolarmente, cercava di sovrapporli per vedere se combaciavano.

Per concludere questa fase, abbiamo voluto evidenziare anche il fatto che non è detto che qualunque sequenza di figure piane attaccate tra loro sia lo sviluppo piano di qualcosa. Per farlo le abbiamo dato in mano un falso sviluppo del cubo composto da sei quadrati disposti a forma di L. Senza dirle di cosa si trattava esattamente, le abbiamo chiesto di analizzare l'oggetto e dirci se secondo lei poteva essere lo sviluppo di qualche solido e, se sì, di quale. Lei ha prima esplorato la forma globale, poi ha cercato di sentire le pieghe interne, intuendo che si trattava di una sequenza di sei quadrati. Dopo una lunga analisi ci ha detto "Non capisco cosa potrebbe diventare...forse come cubo non si chiude però...secondo me non può diventare un cubo". Le abbiamo chiesto di motivare questa osservazione, e ci ha risposto: "Mi sembra la forma del cubo. La grandezza non lo fa diventare un cubo, cioè la forma del cubo non viene". A questo punto le abbiamo proposto di provare a verificare la sua ipotesi provando a chiuderlo e guardando se si riesce o no. Lei ha iniziato a incollare i lati fino a che si riusciva, ad un certo punto ha dovuto fermarsi perché non era più possibile andare avanti, ottenendo un cubo senza una delle facce. Solo a questo punto abbiamo confermato la sua intuizione, spiegandole che si trattava di un falso sviluppo. Questa parte è stata molto interessante per due ragioni:

1)Dal modo in cui ha affrontato le nostre richieste e risposto alle nostre domande, abbiamo avuto l'impressione (in particolare nel momento in cui doveva trovare gli sviluppi corretti) che Anna stia sviluppando la capacità di astrarre la chiusura dei solidi, almeno parzialmente, immaginandola senza bisogno di chiuderli effettivamente, dal momento che si rendeva perfettamente conto quando qualcosa non andava.

2)D'altra parte però, nonostante la sua intuizione fosse corretta sin dal principio, ha manifestato delle insicurezze nell'affermare con certezza che non si poteva chiudere, tant'è vero che mentre cercava di realizzare il cubo, e si rendeva conto di non riuscirci, tentava delle strade diverse (...contratto didattico??)

Introduzione alle sezioni piane

Abbiamo soltanto introdotto, per mancanza di tempo, quella che sarà la seconda parte del laboratorio: le sezioni piane del cubo. Abbiamo preparato, a questo proposito, un cubo sezionato parallelamente ad una delle facce ed incollato lungo il taglio con delle linguette removibili di nastro adesivo. Lei ha rimosso le linguette e il suo commento è stato "diventa un cubo senza la testa". Le abbiamo chiesto innanzitutto di cercare di capire in che modo il cubo era stato tagliato, introducendo l'idea di taglio parallelo ad una delle facce, poi di cercare di individuare la forma della sezione. Purtroppo non c'è stato abbastanza tempo per approfondire ma il prossimo incontro sarà interamente dedicato a questo.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

6° INCONTRO, 15/02/2010
Durata: 1h 30min

Prima di riprendere da dove sospeso nell'incontro precedente, abbiamo fatto un ripasso sugli sviluppi piani. Le abbiamo dato dei quadrati in cartoncino tutti congruenti. La richiesta era di attaccare i quadrati in modo da ottenere uno sviluppo piano del cubo, magari diverso da quelli conosciuti la volta precedente. Lei ha iniziato attaccando i primi tre quadrati a L ed in seguito ne ha posizionato un quarto, in modo che con gli altri tre si formasse un quadrato, ma si è immediatamente resa conto, senza bisogno di verificarlo, che in questo modo non era possibile effettuare la chiusura. Così ha deciso di attaccare il quarto in modo da formare una T con gli altri tre. La sistemazione degli altri due quadrati le ha fatto ottenere uno sviluppo a croce. Nonostante fosse uno sviluppo che aveva già esaminato, non lo ha ottenuto per imitazione da quanto fatto in precedenza ma attraverso il ragionamento: infatti, la sistemazione dell'ultimo quadrato ha richiesto più tempo perché ha simulato più volte la chiusura del cubo con le prime cinque facce per capire bene dove attaccarlo per evitare sovrapposizioni o incastri errati.

SEZIONI PIANE DEL CUBO

Abbiamo migliorato il modellino che le avevamo proposto nell'incontro precedente nel seguente modo: abbiamo preparato dei cubi in cartoncino già divisi in due parti (che simulavano il sezionamento di un cubo) attaccate con delle linguette di nastro adesivo rimovibili; una volta rimosse le linguette, e quindi sezionato il cubo, in una delle due parti abbiamo attaccato una sezione in cartoncino (che rappresentava una diversa figura piana per ogni tipo di sezione), anch'essa rimovibile attraverso delle linguette. Abbiamo fatto questa scelta per varie ragioni:

1)Il modello era più stabile, poteva permettere una migliore manipolazione, e di conseguenza una migliore comprensione della forma della sezione evitando distrazioni dovute alle imprecisioni del modello;

2)La possibilità di rimuovere la sezione le permetteva di analizzare la figura piana risultante in modo più profondo (poteva misurare i lati, rappresentarla facilmente nel piano in gomma, confrontare agevolmente le varie sezioni diverse tra loro,...) e rendeva più concretamente tangibile il passaggio dalle tre dimensioni del solido alle due della sezione.

In questo incontro siamo riuscite ad analizzare con lei tre tipi di sezione:

SEZIONE QUADRATA

Si ottiene sezionando il cubo con un piano parallelo ad una delle facce. Le abbiamo dato il cubo chiuso ponendo la sua attenzione lungo la linea del taglio. Prima di aprire il modello, le abbiamo chiesto di analizzare il modo in cui la sezione era stata effettuata. Lei scorrendo le dita lungo il taglio ha dedotto che venivano tagliate quattro facce, appoggiando le dita negli spigoli attraversati dal taglio ha capito che la sezione coinvolgeva quattro spigoli. A questo punto le abbiamo chiesto di togliere le linguette che tenevano unite le due porzioni del cubo. Dopo averlo fatto, l'abbiamo invitata a descrivere il risultato del taglio e lei ha risposto: "Si è tagliata una faccia" (NOTA: abbiamo posizionato il taglio più vicino ad una delle due facce a cui era parallelo). Dopo l'apertura, tra le sue mani aveva due parallelepipedi di grandezza diversa, così le abbiamo chiesto intanto di provare a capire, dopo il taglio, che tipo di solidi erano i due "pezzi" di cubo. Riguardo alla porzione di cubo "più grande", ha inizialmente detto che si trattava di un cubo, così le abbiamo chiesto se aveva tutte le facce uguali. Questa domanda ha riportato la sua attenzione alla definizione di cubo e si è corretta, affermando che non si trattava di un cubo ma non riusciva comunque a riconoscere il solido. Come suggerimento, le abbiamo dato un altro parallelepipedo di dimensioni diverse, invitandola a confrontarlo con quello che stava analizzando, e lei lo ha riconosciuto. Abbiamo voluto porre attenzione sul fatto che il taglio effettuato era parallelo a due facce e per farlo le abbiamo fatto posizionare due dita della stessa mano, una lungo il taglio e l'altra lungo lo spigolo facendole sentire il parallelismo. Durante tutta questa esplorazione, abbiamo cercato di mettere in evidenza il fatto che tagliando una faccia si ottiene un nuovo spigolo e tagliando uno spigolo si ottiene un nuovo vertice. A questo punto le abbiamo chiesto di staccare la figura piana corrispondente a questo tipo di taglio, togliendo le linguette di nastro adesivo. Lei aveva previsto che si sarebbe trattato di un quadrato ma le abbiamo comunque chiesto di verificare la cosa misurandone i lati. E' interessante il fatto che si sia limitata a misurare solo due lati consecutivi, dopo aver visto che erano di 6 centimetri ha detto "Ne ho misurati due e sono di 6 centimetri, allora sono tutti di 6 centimetri". Abbiamo cercato di farci spiegare il ragionamento fatto per arrivare a questa conclusione ma non ci ha spiegato la sua intuizione (come abbiamo notato molte altre volte, lei ha spesso delle intuizioni corrette che però non riesce a spiegare). Analizzando tattilmente il quadrato ha riconosciuto anche la perpendicolarità dei lati consecutivi, oltre che il parallelismo di quelli opposti. Infine, le abbiamo chiesto di rappresentare la sezione ottenuta sul piano in gomma, usando il quadrato di cartoncino rimosso dal modello.

SEZIONE TRIANGOLARE

In questo caso il cubo era stato tagliato lungo le tre diagonali di tre facce con un vertice in comune. Come prima, le abbiamo chiesto di analizzare il modello e di fare una previsione della sezione risultante. Scorrendo il dito lungo il taglio, si è accorta che stavolta le facce tagliate erano tre e che il taglio attraversava tre vertici, così ci ha detto "Verrà fuori un triangolo". Dopo aver rimosso le linguette, e quindi tagliato di fatto il cubo, come prima le abbiamo chiesto se i due "pezzi" di cubo le risultavano solidi familiari (uno dei due era una piramide, l'altro un solido irregolare). Con il solido irregolare in mano, ha in un primo momento detto che si trattava di una piramide perché aveva dato molta attenzione alle facce triangolari. Le abbiamo fatto quindi fare un confronto con delle altre piramidi, facendole notare che nel solido che stava analizzando le facce triangolari non convergevano tutte nello stesso vertice. Dopo averle spiegato che si trattava di un solido "senza nome", irregolare, le abbiamo dato l'altro solido che ha riconosciuto subito come una piramide. Anche questa volta le abbiamo chiesto di rimuovere la sezione, di misurarne i lati e di rappresentare il triangolo ottenuto sul piano in gomma.

SEZIONE RETTANGOLARE

In questo caso, il taglio era stato fatto lungo due diagonali di due facce parallele e due spigoli. Come nei casi precedenti, le abbiamo chiesto di analizzare il taglio. Il suo primo commento è stato "Ma qui sono tagliate solo due facce". Abbiamo quindi aggiunto alle informazioni raccolte finora, il fatto che si ottiene uno spigolo anche se il taglio avviene lungo uno spigolo del solido. Dopo questa osservazione, lei ha dedotto che la sezione sarebbe sicuramente stata un quadrilatero. Dopo aver rimosso le linguette che tenevano il cubo chiuso, come prima le abbiamo chiesto di riconoscere i due solidi (in questo caso risultavano due prismi a base triangolare). Analizzandoli, non è riuscita a riconoscerli subito, così le abbiamo dato un altro prisma di cartoncino di dimensioni diverse e le abbiamo chiesto di dare attenzione alla forma delle facce. Lei ha fatto quindi un confronto, rendendosi conto che in tutti i casi si trattava di solidi con tre facce rettangolari e due facce triangolari (non si ricordava però il nome del solido). Come nelle analisi precedenti, abbiamo concluso l'incontro facendole rimuovere la sezione e chiedendole di rappresentare il rettangolo ottenuto sul piano in gomma.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

7° INCONTRO, 22/02/2010
Durata: 1h 30min

Abbiamo diviso questo incontro in due diverse fasi. Nella prima, riutilizzando i modelli in cartoncino delle sezioni del cubo usate nel laboratorio precedente, abbiamo cercato di ripercorrere quanto fatto al contrario: partendo dal cubo già tagliato e dandole il poligono di sezione in cartoncino in mano, le abbiamo chiesto di associare ad ogni poligono il taglio (e quindi i due "pezzi" di cubo) corrispondenti. Abbiamo concluso questa fase portandole e facendole analizzare anche una quarta possibile sezione del cubo. Nella seconda fase, le abbiamo invece fatto sezionare in modo pratico dei cubi in creta.

PRIMA FASE:

Abbiamo iniziato dalle sezioni già analizzate la volta precedente. Le abbiamo dato il quadrato, il rettangolo e il triangolo in cartoncino e abbiamo disposto sul tavolo i sei "pezzi" di cubo che aveva ottenuto dopo il taglio nell'incontro precedente. Ha subito riconosciuto i tre poligoni e per effettuare l'associazione con i vari tagli ha lavorato in questo modo: prendeva una parte del cubo, scorreva con un dito lungo il taglio per rendersi conto della forma e poi decideva la sezione piana corrispondente. La prima parte di cubo che ha analizzato era una di quelle corrispondenti al taglio parallelo a due facce del cubo. Ha immediatamente associato a questo tipo di taglio la sezione quadrata ed ha riposizionato il quadrato in cartoncino in modo corretto. Ha poi preso una delle due parti di cubo a prisma a basi triangolari e, anche in questo caso, immediatamente e senza nessun dubbio ha associato al rettangolo, ricostruendo il cubo in modo corretto. Siamo rimaste molto colpite dalla velocità e sicurezza con cui associava i poligoni, così le abbiamo chiesto di spiegarci a quali elementi del taglio dava attenzione per capire il poligono corrispondente. Abbiamo capito che si concentrava molto sul parallelismo dei lati. Abbiamo voluto andare un po' più a fondo però perché il parallelismo del lati non basta a distinguere un quadrato da un rettangolo e lei nel riconoscerli non mostra alcuna titubanza. Abbiamo quindi dedicato una piccola parte di questa fase ad una analisi di analogie e differenze tra rettangolo e quadrato. Lei ha detto "Sento che gli spigoli sono diversi...gli spigoli del rettangolo sono più grandi". Riguardo agli angoli inizialmente lei ha detto soltanto: "Nel quadrato sono tutti uguali". Le abbiamo quindi proposto di confrontare gli angoli del rettangolo con un angolo di 90° (le chiedevamo di appoggiare il rettangolo su un righello in modo da far combaciare gli spigoli per paragonare le ampiezze degli angoli). Si è resa conto che anche nel rettangolo, i quattro angoli sono congruenti. Abbiamo cercato di formalizzare meglio le sue intuizioni e le osservazioni fatte, ponendo attenzione sul fatto che un quadrato è un particolare rettangolo che ha tutti i lati congruenti. Abbiamo concluso questa piccola parentesi chiedendole: "Se avessi avuto un quadrato più grande..." , ci ha risposto ancora prima di finire la domanda dicendo: "Gli angoli sono sempre di 90°". Tornando alle sezioni, ha associato in modo corretto anche il triangolo. Le abbiamo dato un altro cubo già tagliato in una sezione parallelogrammica e chiuso con delle linguette removibili di nastro adesivo. Come nell'incontro precedente, scorrendo le dita lungo il taglio si è resa conto che coinvolgeva quattro facce e che non si notava nessun parallelismo particolare. Una volta rimosse le linguette, analizzando la sezione non riusciva a riconoscere il poligono. Questo fatto ci ha colpito perché non si è fatta ingannare dalla somiglianza con il rettangolo, è come se avesse dato attenzione all'ampiezza degli angoli. Le abbiamo quindi fatto togliere le linguette di nastro adesivo per rimuovere il parallelogramma di cartoncino e farglielo analizzare. Anche in questo caso le abbiamo fatto porre particolare attenzione sul parallelismo dei lati opposti (scorrendo con le dita) e sul fatto che in questo caso gli angoli non sono di 90° (facendo sempre un confronto con gli angoli del righello lei ha detto "non combacia tanto, non sono retti"). Infine le abbiamo fatto misurare i lati, facendole notare che i lati opposti sono congruenti grazie al parallelismo e che quindi basta misurare due lati consecutivi. Abbiamo concluso questa prima fase con un'analisi delle analogie e delle differenze tra un rettangolo e un parallelogramma.

SECONDA FASE

Abbiamo preparato dei cubi in creta che possono essere sezionati usando del filo di nylon da pesca. Abbiamo pensato di iniziare chiedendole di sezionare il cubo a piacere. E' curioso il fatto che abbia ottenuto una sezione parallelogrammica. Dandole il modello in cartoncino della sezione quadrata, le abbiamo chiesto di riprodurla nel cubo di creta e lei, per farlo, ha cercato di mantenere il parallelismo del taglio. Le abbiamo chiesto di riprodurre anche la sezione triangolare ma questa ha creato diverse difficoltà e per mancanza di tempo abbiamo dovuto interrompere, per poi riprendere nel prossimo incontro.

Abbiamo pensato che il sezionamento di cubi di creta poteva essere un lavoro molto stimolante ed istruttivo. Infatti per riprodurre una sezione bisogna essere molto consapevoli di come deve essere effettuato il taglio. Si tratta però di un lavoro abbastanza complicato, poiché richiede sia consapevolezza matematica che buona manualità e coordinazione. Data la difficoltà, e quindi il tempo che questo lavoro richiede, continueremo a farlo per tutti gli incontri fino alla fine del laboratorio. Purtroppo, per mancanza di tempo, in questo incontro siamo riuscite solo a fare una breve introduzione, che ci è però servita per individuare i punti critici di questa attività.

ATTIVITA’ DI LABORATORIO

8° INCONTRO, 27/02/2010

Durata: 1h 30min

In questo incontro Anna non era sola ma insieme a D., un altro ragazzo certificato per motivi diversi da lei. Abbiamo pensato che fare un incontro insieme ad un altro studente con cui confrontarsi poteva essere un’occasione interessante sia per lei, perché aveva così l’opportunità di riorganizzare le proprie idee per poterle trasmettere a qualcun altro, sia per noi, perché potevamo osservare indirettamente quanto aveva capito e in che modo interagiva con un altro studente trovandosi quindi in confronto non con un insegnante ma con un suo compagno.

Abbiamo dato sia ad Anna che a D. un cubo di creta. Come prima cosa, le abbiamo proposto di cercare di spiegare a D. che cos’è un cubo. La sua prima spiegazione è stata "un cubo ha tipo la forma del quadrato". Abbiamo corretto questa affermazione dicendo che il cubo ha le facce quadrate e poi le abbiamo chiesto di mostrare a D. come contare le facce, i vertici e gli spigoli del cubo. Anna gli ha consigliato di tenere il cubo fermo e di contare una sola volta ogni faccia per vedere quante erano in totale ed è interessante notare che, se lui si confondeva nel conteggio, lei osservava che "forse hai contato la stessa faccia due volte" oppure gli consigliava di contare tenendo il cubo in una mano piuttosto che appoggiato al banco. Siamo passati poi al conteggio degli spigoli. Per spiegare a D. quali fossero gli spigoli, gli prendeva la mano e gli faceva scorrere un dito lungo uno spigolo, aiutandolo anche nel conteggio.

PARALLELISMO: Riguardo al parallelismo degli spigoli, Anna lo ha descritto in questo modo: "Prendi il cubo in mano dal lato che vuoi; prendi l'indice e il medio e prova a seguire i bordi della faccia, gli spigoli, e provi a vedere se si toccano o no, se sono paralleli o perpendicolari" (quest'ultima parte della frase ci ha dato l'impressione che lei pensasse, in generale, che due spigoli o sono paralleli o sono perpendicolari. Questo nel caso particolare del cubo è vero ma abbiamo ritenuto opportuno sottolineare la non generalità del fatto e le abbiamo ricordato il confronto con gli angoli del righello, fatto la volta precedente).

PERPENDICOLARITA': Per far capire cosa vuol dire essere perpendicolare, Anna ha insegnato a D. a fare il confronto con gli angoli di un righello, guidando le sue mani nel far corrispondere gli spigoli e spiegando a cosa doveva fare attenzione. Le abbiamo quindi dato in mano un tetraedro e un parallelepipedo di cartoncino, invitandola a far capire bene a D. la differenza. Con molta sicurezza, sistemava il righello nella giusta posizione e guidava le mani di D. facendogli notare che se sentiva combaciare gli angoli, allora il solido in quel punto aveva un angolo retto, altrimenti no. Come ultima cosa, le abbiamo chiesto di spiegare a D. il motivo del nome parallelepipedo e lei ha detto "Gli spigoli sono a due a due paralleli, come il rettangolo che ha i lati a due a due paralleli".

A questo punto, abbiamo chiesto ad Anna di spiegare a D. come si fa a sezionare un cubo in creta. Lei gli ha prima detto in che modo doveva tenere il filo e poi come poteva fare per ottenere una sezione quadrata (dando però molta importanza al fatto che il taglio doveva essere eseguito dall'alto verso il basso e non tanto al parallelismo con le facce del cubo). Sezionando il suo cubo una seconda volta, Anna ha ottenuto un rettangolo. Per farglielo riconoscere, le abbiamo sistemato sul banco le sagome delle quattro sezioni analizzate negli incontri precedenti (quadrato, rettangolo, parallelogramma e triangolo), chiedendole di capire di quale tra questi era la sezione del suo cubo in creta. E' molto interessante il modo in cui ha fatto questa analisi: prima ha esaminato separatamente la forma globale della sezione nella creta e delle sagome in cartone, poi ha sovrapposto le sagome sulla sezione in creta per fare un confronto. Aveva già intuito che si trattava di un rettangolo e la sovrapposizione con la sagoma in cartone è stata per lei una prova di quanto pensava (nonostante il rettangolo in cartone e quello ottenuto nella creta avessero dimensioni diverse). Dopo aver fatto questo lavoro, ha descritto a D. i poligoni di cui aveva le sagome, facendo sentire anche a lui con le mani gli eventuali parallelismi dei lati. Le abbiamo chiesto di cercare di ottenere una sezione triangolare. Tra quelle fatte, questa è una delle più difficili perché bisogna effettuare un taglio trasversale, per il quale la precisione del taglio fatto con il filo di nylon è di fondamentale importanza. Le abbiamo suggerito di tenere a portata di mano il modellino già sezionato in cartoncino, per analizzare bene la posizione del taglio. Questo lavoro ha richiesto diverso tempo e diversi tentativi. Abbiamo deciso quindi di guidare il movimento facendolo insieme a lei, e cercando di porre la sua attenzione sul fatto che deve avere ben presente il taglio che ha sentito nel cartoncino. In questo modo siamo riuscite ad ottenere nel cubo in creta la sezione triangolare (anche se con ovvi errori di imperfezione di taglio) che lei ha confrontato per sovrapposizione con la sagoma triangolare di cartoncino. Per spiegare quanto fatto a D. , ha riproposto lo stesso metodo: ha accompagnato i movimenti di D. con le sue mani cercando di porre la sua attenzione sul direzionamento del filo. Una volta tagliato il cubo, hanno ottenuto una sezione triangolare. Infine, le abbiamo chiesto di cercare di dare la definizione di sezione: "la sezione è un taglio che divide il cubo in due parti" (mentre diceva questa frase, con le dita percorreva il perimetro del taglio nel modello in cartoncino, dando l'impressione di starsi riferendo più al bordo del taglio che al taglio in sé.)

In questo incontro non abbiamo fatto molto di nuovo, abbiamo colto l'occasione per fare una sorta di ripasso, un confronto con un altro studente e per fare un po' di esercizio di manualità.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

9° INCONTRO, 15/03/2010
Durata: 1h 30min

In questo incontro abbiamo continuato con il lavoro del sezionamento del cubo in creta, provando con un approccio diverso dalle volte precedenti. Abbiamo iniziato con l'analizzare nuovamente i diversi tipi di tagli che possono essere fatti. Le abbiamo dato i cubi di cartoncino sezionati e richiusi con del nastro adesivo. Come prima cosa le abbiamo fatto fare un confronto tra la sezione quadrata e quella parallelogrammica, per cercare di renderla il più consapevole possibile del modo in cui tagliare, per ottenere un certo poligono di sezione piuttosto che un altro. Per analizzare i due modelli, lei ha percorso con il dito il perimetro del taglio rendendosi conto che in entrambi i casi venivano coinvolte quattro facce e quattro spigoli. Le abbiamo chiesto quindi, secondo lei, dov'era la differenza tra i due tagli. Lei ha risposto "Sono diversi per come sono stati tagliati". Abbiamo insistito molto su questo punto per rendere più specifico questo suo commento: è molto importante, per il lavoro che avevamo progettato di fare, che ponesse la sua attenzione sia a quante facce e spigoli devono essere coinvolti nel taglio, che all'eventuale parallelismo o meno del piano di sezione rispetto alle facce del cubo. Come negli altri incontri, le abbiamo chiesto di percorrere il perimetro del taglio con il dito indice e con il dito medio il perimetro di un'opportuna faccia del cubo, per sentire se la distanza tra i due rimaneva costante oppure no. Le abbiamo così fatto notare che se la distanza rimane costante, e quindi il piano di sezione è parallelo ad una faccia del cubo, il poligono di sezione sarà il quadrato; se la distanza non si mantiene costante allora i lati del poligono di sezione non avranno tutti la stessa lunghezza e quindi il poligono non potrà essere un quadrato. Dopo aver dedicato la prima parte dell'incontro e questo tipo di lavoro, le abbiamo proposto di sezionare i cubi in creta, procedendo però in un modo un po' diverso dalle altre volte. Aveva davanti a sé un cubo in creta e uno di quelli in cartoncino già tagliati e chiusi con il nastro adesivo, incollato al tavolo (ovviamente in una posizione che le rendeva agevole l'esplorazione tattile del taglio). La richiesta era la seguente: analizzando una faccia alla volta, doveva cercare di capire il taglio, da che punto della faccia partiva e in che punto arrivava e quindi, con la punta di una matita, riprodurre la stessa cosa nel cubo in creta. Una volta che aveva ottenuto anche nel cubo in creta il perimetro completo del taglio da effettuare, poteva passare al sezionamento con il filo di nylon. Abbiamo pensato di procedere in questo modo perché ci è sembrato che permettesse un sezionamento più consapevole perché deciso nel dettaglio, una faccia alla volta fino a riottenere il taglio globale, a differenza delle volte precedenti. Era presente anche un'ulteriore difficoltà (e quindi un ulteriore stimolo): mentre il cubo "modello" in cartoncino era fissato al tavolo, quello in creta era mobile. Questo fatto, se da una parte le rendeva più comodo il tracciare solchi con la matita (poteva sempre fare in modo di avere la faccia interessata in alto), dall'altra richiedeva di orientarsi, ritrovando punti corrispondenti in posizioni differenti (per poter dare continuità al taglio). Ovviamente, questo elemento non le ha di certo reso le cose più semplici, ma l'abbiamo aiutata a fare attenzione e a ragionare. Siamo rimaste colpite dal fatto che, dopo un po', seguiva molto bene i nostri commenti. Questo tipo di esercizio è stato fatto per la sezione quadrata, parallelogrammica e triangolare.

SEZIONE QUADRATA:

Abbiamo posizionato il cubo in cartoncino in modo che il taglio risultasse verticale. Ha iniziato l'analisi dalla faccia superiore, capendo che quel segmento di taglio andava da un punto di uno spigolo ad un punto dello spigolo parallelo in modo da essere equidistante dagli altri due spigoli. Ha riprodotto correttamente questo primo segmento con la matita nel cubo in creta. A questo punto sono iniziate le prime difficoltà, perché sentiva che il taglio proseguiva in "verticale" verso il tavolo nel modello in cartoncino, mentre la mobilità del cubo in creta le permetteva di trovarsi a lavorare sempre nella faccia superiore (e quindi fare dei solchi sempre "orizzontali"). E' stato però, secondo noi, un lavoro molto utile, perché ci ha permesso farle notare che l'idea di verticale su un solido, dipende dalla posizione dell' oggetto nello spazio, e anche perché l'ha spinta a cercare di ruotare mentalmente il cubo per poter riprodurre il segno nella creta. Una volta fatto questo lavoro fino al completamento del solco disegnato con la matita per segnare dove tagliare, le abbiamo consigliato di posizionare il filo di nylon all'interno del solco nella faccia superiore e, aiutandosi con i pollici, di effettuare il taglio cercando di seguire i segni fatti con la matita. In questo modo, abbiamo ottenuto la sezione quadrata.

SEZIONE PARALLELOGRAMMICA:

Questo tipo di sezione era più difficile rispetto alla precedente per due ragioni fondamentali: i punti in cui il taglio attraversava gli spigoli del cubo sembravano più "casuali" rispetto a quanto accadeva nella sezione quadrata (in cui il parallelismo del piano di sezione era un valido aiuto) e il piano di sezione era inclinato rispetto alle facce del cubo (cosa che richiedeva più precisione manuale durante il taglio). Anche questa volta, una faccia alla volta, ha cercato di trovare dei punti di riferimento che le permettessero di posizionare ogni segmento di taglio sul cubo in creta e, una volta completato il perimetro, le abbiamo consigliato di effettuare la sezione molto lentamente e alla fine abbiamo ottenuto il poligono voluto.

SEZIONE TRIANGOLARE:

Questa si è rivelata la più difficoltosa perché coinvolgeva solo tre delle sei facce, e quindi il fatto che il cubo di creta fosse mobile e quello di cartoncino no, ha fatto sì che le servisse un pochino più di tempo per orientarsi, soprattutto quando è arrivato il momento di tracciare l'ultimo segmento. Alla fine comunque è riuscita a disegnare correttamente il perimetro e, anche se nel momento in cui è passata al taglio non è riuscita a seguire completamente i solchi fatti, la sezione risultante era triangolare.

Prima di concludere, le abbiamo chiesto se secondo lei era possibile ottenere, sezionando opportunamente un cubo, un poligono con, ad esempio, 9 lati. Lei ci ha risposto "No perché ci sono solo sei facce". Siamo rimaste molto colpite da questa sua risposta perché ci ha dato l'impressione che stia interiorizzando il collegamento che c'è tra ciò che viene tagliato e ciò che si ottiene.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

10° INCONTRO, 26/04/2010
Durata: 1h 30min

Questo è il decimo ed ultimo incontro del laboratorio con Anna, fatto dopo che lei ha sostenuto una verifica su alcuni degli argomenti affrontati. In questa verifica è emerso che, sulle sezioni in particolare, Anna aveva alcune incertezze. Infatti la sua definizione nel compito di "fare la sezione di un solido" è stata: "Fare una sezione significa fare un taglio su una faccia di un qualsiasi solido. Ho preso il cubo di creta e con una penna ho tracciato una linea e poi con il filo di plastica ci sono andata sopra per tagliare", in tutti gli incontri precedenti sembrava aver capito dove fosse la sezione (la indicava sempre nel modo corretto), ma in alcuni punti della verifica sembrava che confondesse la sezione con la divisione del solido. Abbiamo pensato quindi, considerando anche il tempo trascorso dall'ultimo incontro, di riprendere il discorso delle sezioni dalla definizione. Abbiamo ripreso i modelli in cartoncino chiusi dal nastro adesivo e abbiamo cercato di mettere in evidenza il fatto che la sezione è "la nuova faccia che si crea lungo il taglio" (questo modo di vedere la sezione è quello che è risultato più efficace). Dopo aver rimosso il nastro adesivo, le abbiamo fatto simulare il taglio di un coltello con la mano per farle sentire il fatto che, passando, la mano è come se descrivesse una nuova faccia all'interno del cubo. Abbiamo colto l'occasione per fare una breve parentesi sul discorso delle dimensioni ma si è rivelato molto difficile perché non aveva mai sentito parlare di dimensione (intesa in senso matematico e più in generale in senso spaziale) e non ci è sembrata che avesse interiorizzato bene il concetto di tridimensionale e bidimensionale. Si rende conto che un cubo si "tiene tra le mani" in modo diverso dal quadrato, che c'è più "libertà di movimento" in un solido che in un poligono, ma il dire che il primo è tridimensionale e il secondo è bidimensionale non è un passaggio semplice. A questo proposito, ha fatto un'osservazione che forse merita di essere citata: "Per me le cose sono tutte uguali toccandole, non distinguo tra bidimensionale e tridimensionale, però magari vedendole come sono capisci che hanno una loro dimensione". Aprire un vero discorso sul concetto di dimensione (soprattutto giustificare l'idea di 3 dimensioni o 2 dimensioni) necessiterebbe di un laboratorio a parte, per questo abbiamo deciso di limitarci ad un approccio intuitivo in termini di libertà (e possibilità) di movimento. Abbiamo preparato, per completare il discorso sulle sezioni, altri due modelli in cartoncino: in uno era stata fatta una sezione pentagonale, nell'altro quella esagonale. Nell'analisi, abbiamo proceduto come negli incontri precedenti: le abbiamo chiesto di percorrere prima il taglio con il dito per contare il numero di facce e spigoli coinvolti, di fare una previsione del poligono di sezione risultante, da verificare dopo aver tolto le solite linguette di nastro adesivo che tenevano il cubo chiuso. Anna ha capito che il numero delle facce tagliate corrisponde al numero di lati della sezione che si otterrà, ed è quindi entrata in contatto con due nuovi poligoni, il pentagono e l'esagono, di cui non aveva ancora sentito parlare . Non abbiamo richiesto la riproduzione di queste due sezioni sui cubi di creta, perché il taglio necessario per ottenerle, richiedeva troppo tempo ed una precisione manuale che Anna non ha ancora sviluppato. Abbiamo però concluso l'incontro richiedendo di tagliare una sezione a sua scelta su un tetraedro in creta. Quest'ultimo esercizio si è svolto come nell'incontro precedente: ha prima disegnato un solco con una matita e, dopo aver deciso di tagliare tre facce, ha previsto che la sezione risultante sarebbe stata un triangolo.

PRIME CONCLUSIONI

Un'analisi complessiva di tutti i laboratori descritti ci porta ad essere soddisfatte dell'esito di questa esperienza. Riprodurre matematica tattile, dal nostro punto di vista, è stato utile sia per Anna che per noi, sotto molti aspetti di cui diamo per ora solo un rapido accenno. Per quanto riguarda Anna questi sono:

- vedere un modo diverso di fare matematica;

- riuscire, anche se con molte limitazioni dovute sia alle sue poche conoscenze preliminari che al poco tempo, a sviluppare intuizioni e proprie idee su argomenti quasi sconosciuti;

- acquisire alcune particolari terminologie sulla geometria solida e piana;

- in generale sviluppare la sua sensibilità tattile e la capacità di manipolazione.

Per quanto riguarda noi:

- ideare modelli matematici tattili ci ha insegnato nuovi punti di vista su alcuni aspetti della matematica (nonostante gli argomenti trattati possano sembrare semplici, si può sempre scoprire un nuovo livello di analisi su cui soffermare l'attenzione).

- cercare di trasmettere concetti matematici ad Anna, ci ha fatto comprendere i limiti causati da alcune scelte ingenue, portandoci a rivedere, sia gli argomenti da utilizzare per il laboratorio, che il modo di trasporli didatticamente.

Ci siamo rese conto che su alcuni argomenti non è avvenuta una completa interiorizzazione e presa di coscienza (spesso ad esempio, in un primo momento confondeva un solido con una delle sue facce, ma non abbiamo mai capito se questo avveniva a causa di una confusione linguistica o per altri motivi più strettamente didattici). Ricordiamoci però che interiorizzare la matematica è un processo lento e difficoltoso per chiunque, e sicuramente 10 incontri da 90 minuti non bastano a digerire davvero tutti gli argomenti che abbiamo affrontato. Nonostante questo, Anna ha più volte, ed esplicitamente, manifestato il suo interesse verso questo lavoro e l'abbiamo spesso sentita appassionata in quello che stava facendo (riteniamo essere un fattore molto importante ed un buon inizio per lo sviluppo delle sue capacità e conoscenze, al di là del giungere nell'immediato a conclusioni giuste o sbagliate). Molte volte le sue intuizioni ci hanno stupito, e molte delle idee che abbiamo avuto per la preparazione del materiale sono nate dall'osservare il suo modo di approcciarsi agli oggetti: questa è una delle cose più importanti che ci ha insegnato.

## A.2 Foto di alcuni strumenti del laboratorio e alcuni disegni di Marco

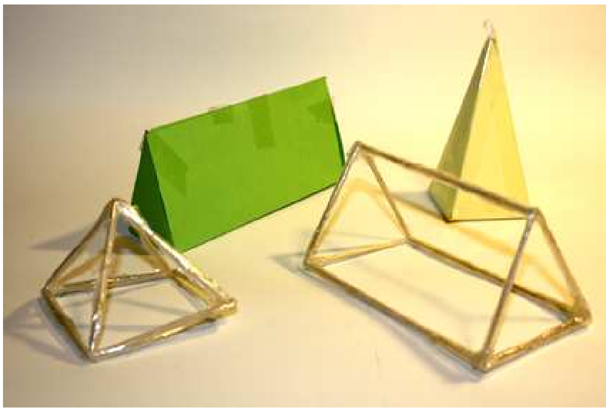


Figura A.1: Alcuni poliedri scheletrati e in cartoncino

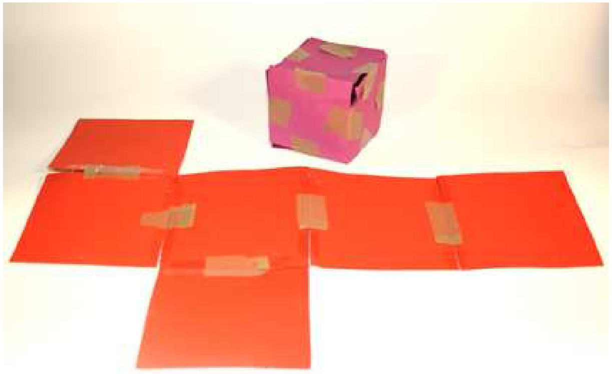


Figura A.2: Esempio di cubo senza sviluppo e sviluppo ottenuto

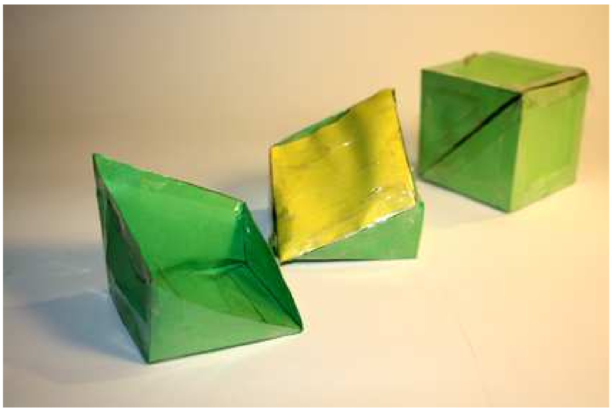


Figura A.3: Sezioni parallelogrammica e rettangolare in cartoncino

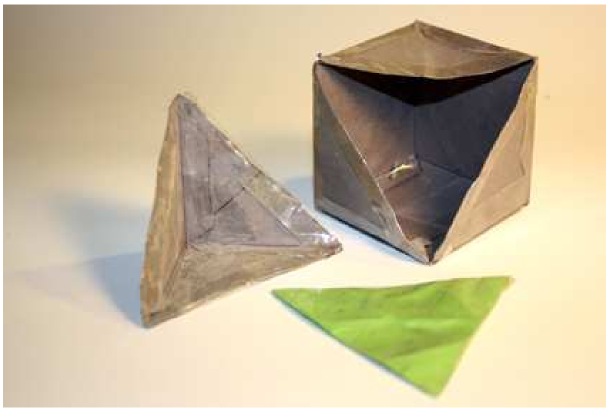


Figura A.4: Sezione triangolare in cartoncino

Figura A.5: Sezione esagonale in cartoncino

Figura A.6: Sezione quadrata in cartoncino

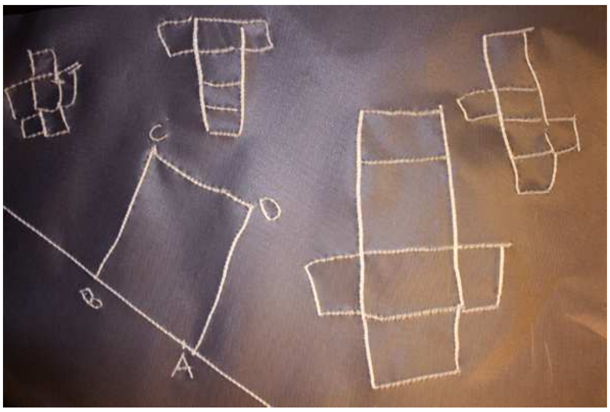



Figura A.7: Alcuni disegni di Marco

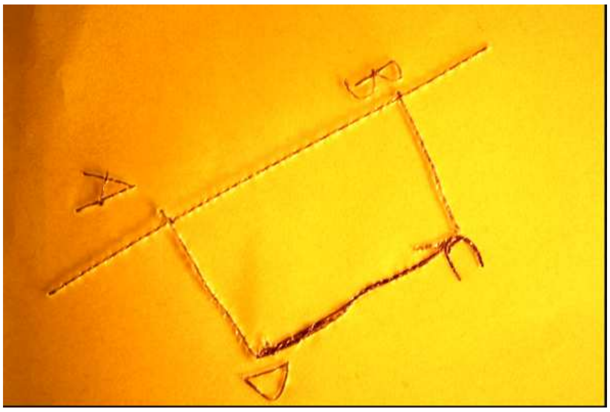


Figura A.8: Alcuni disegni di Marco

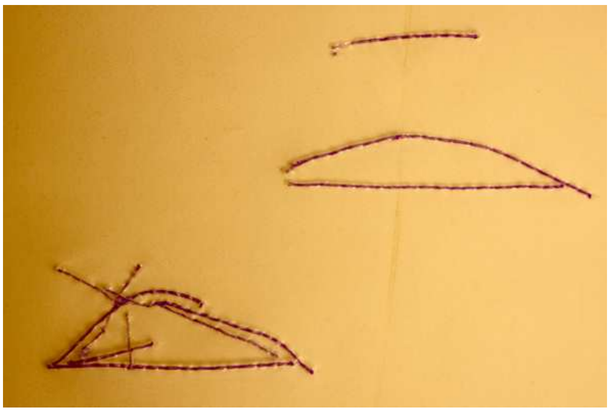


Figura A.9: Alcuni disegni di Marco

Figura A.10: Alcuni disegni di Marco

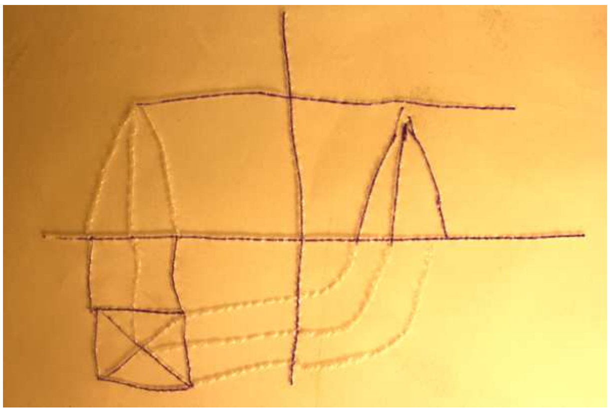


Figura A.11: Alcuni disegni di Marco

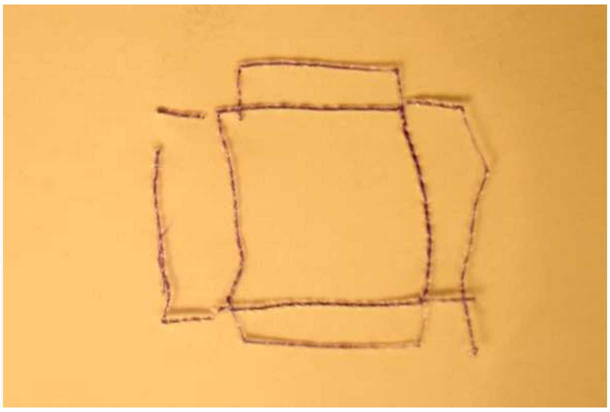


Figura A.12: Alcuni disegni di Marco

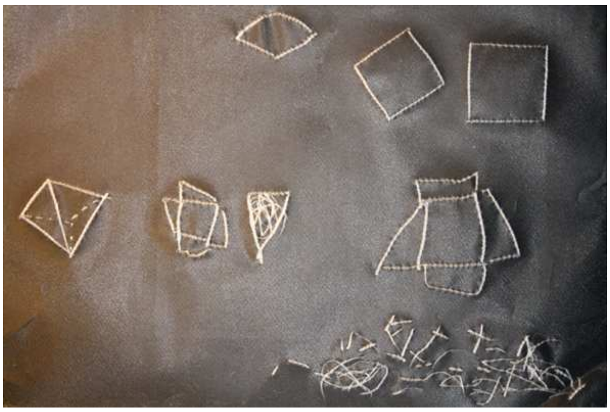


Figura A.13: Alcuni disegni di Marco

# Bibliografia

## A.3 Capitolo 1


[1] Bachelard G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique.* Paris, Vrin.

[2] Bagni G. T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

[3] Brousseau G. (1976-1983), *Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques.* In Wanhamme W. e Wanhamme J. (a cura di)(1976), *La problématique et l'enseignement des mathématique*, Actes de la XXVIIIéme rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976 [Ripubblicato su "Recherches en didactique des mathématique", vol. 4, n. 2, 1983, pp. 165-198]

[4] Brousseau G. (2005), Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica, *Bollettino dei docenti di matematica*, n. 49, pp. 39-56

[5] D'Amore B. (ed.) (1994), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica.* Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel san Pietro Terme. Bologna, Pitagora.

[6] D'Amore B. (ed.) (1995), *Insegnare ed apprendere la Matematica in aula: situazioni e prospettive.* Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel san Pietro Terme. Bologna, Pitagora.

[7] D'Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*. Bologna, Pitagora

[8] D'Amore B., Sbaragli S. (2005), Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione", *La matematica e la sua didattica*, n. 2, pp. 348-353.

[9] D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008) *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento, Erickson.

[10] Duval R. (1993), Registeres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

[11] Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Ginevra, Peter Lang.

[12] Ferreri M., Spagnolo F., (1994), *L'apprendimento tra emozione ed ostacolo*. Quderni di Ricerca in Didattica (GRIM di Palermo), 4.

[13] Fischbein E. (1963), *Conceptele figurale*, Bucuresti, Ed. Acad. Rep. Pop. Romine.

[14] Fischbein E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational studies in mathematics, 24, 139-162.*

[15] Gallo E. (1994), *Le figure questa sconosciute: come manipolarle, disegnarle, immaginarle per conoscerle meglio* in D'Amore B. (ed.) (1994).

[16] Gentilucci M. (2003), Object motor representation and language. *Experimental Brain Research*, 153, pp. 260-265.

[17] Goldin-Meadow S. (2003), *Hearing Gestures. How our Hands Help us Think*, Chicago, Chicago University Press.

[18] Ito M. (1993), Movement and thought: Identical control mechanisms by the cerebellum. *Trends in the Neurosciences*, 16(11), pp. 448-450.

[19] Maier H. (1993), Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.

[20] Manara C.F. (1997), "Costruire la geometria", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, pp. 338-349.

[21] Mariotti M.A. (1992), Immagini e concetti in geometria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 9, pp. 863-885.

[22] Mariotti M. A. (1993a), Strategie di conteggio del numero delle facce, dei vertici e degli spigoli di un poliedro, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 7, pp. 591-608.

[23] Mariotti M. A. (1993b), Il ruolo della visualizzazione in matematica, *Scuola viva*, XXIX, 2, fasc. 2, pp. 10-16.

[24] Mariotti M. A. (1994), Il ragionamento geometrico nell'ambito dei problemi di insegnamento/ apprendimento della matematica. In D'Amore B. (ed.)(1994), pp. 79-85.

[25] Mariotti M. A. (1995), Le rappresentazioni grafiche e l'apprendimento della geometria. In D'Amore B. (ed.)(1995), pp. 47-58.

[26] McNeill D. (1992), *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*, Chicago, University of Chicago Press.

[27] Perrin-Glorian M.-J. (1994), *Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives.* In Artigue M., Gras R., Laborde C. e Tavignot P. (a cura di)(1994), *Vingt ans de didactique des mathèmatiques en France, Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergaud*, Granoble, La Pensée Sauvage, pp. 97-147.

[28] Rizzolatti G., Sinigaglia C. (2006), *So quel che fai, Il cervello che agisce e i neuroni specchio*, Raffaello Cortina Editore.

[29] Santi G., Sbaragli S. (2008), Misconceptions and semiotics: a comparison, Conference of five cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno. *Reserch in Mathematics Education*, pp. 57-72.

[30] Sbaragli S. (2005), Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili", *La matematica e la sua didattica*, n. 1, pp. 57-71.

[31] Sbaragli S. (2006), *Diverse chiavi di lettura delle misconcezioni*, Rassegna, Istituto Pedagogico di Bolzano. XIV, 29, pp. 47-52.

[32] Stavy R. Tirosh D. (2000), *Perchè gli studenti fraintendono matematica e scienze?*, Trento, Erickson.

## A.4 Capitoli 2 e 3

Verrà prima fatto l'elenco dei libri poi la sitografia.

[33] Amedi A. et al. (2004), *Transcranial magnetic stimulation of the occipital pole interferes with verbal processing in blind subjects*, Nat. Neurosci., 7, pp. 1266-1270.

[34] Arrigo G., Sbaragli S., (2004), *I solidi* Riscopriamo la geometria, Roma, Carocci.

[35] Arzarello F. (2006), Semiosis as a multimodal process, *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, número especial Comité Latinoamericano de Matemática Educativa Distrito Federal, México*, pp. 267-299.

[36] Bonvino A. (1953), La matematica nell'educazione dei ciechi, *Problemi pedagogici nella scuola dei ciechi*, Rassegna bimestrale a cura della Federazione Nazionale delle istituzioni pro Ciechi, Roma, anno I, n. 3-4, pp. 3-9.

[37] Canevaro A. (1999), *Pedagogia speciale: la riduzione dell'handicap*, Milano, Bruno Mondadori.

[38] Carpenter P. A., Eisenberg P. (1978), mental rotatioin and the frame of reference in blind and sighted individuals, *Perception and Psychology*, 14, pp. 117-124.

[39] Cooper L. A., Shepard R. N. (1973), *Chrometric studies of the rotation of mental images*, in W. G. Chase (ed), *Visual information processing*, Academic Press, New York.

[40] Cornoldi C., Vecchi T. (2000), *Mental imagery in blind people: the role of passive and active visuo-spatial processes*, in M. Heller (ed), *Touch, representation and blindness* pp. 143-181, Oxford, Oxford Univerity Press.

[41] Del Campo J. E. F. (2000), *L'insegnamento della matematica ai ciechi*, Biblioteca Italiana per Ciechi "Regina Margherita" ONLUS.

[42] Galati D. (1992), *Vedere con la mente. Conoscenza, affettività, adattamento nei non vedenti*, Milano, Franco Angeli.

[43] Hinton G. (1979), Some demonstrations of the effects of structural descriptions in mental imagery, *Cognitive Science*, 3, pp. 231-250.

[44] Hollins M. (1985), Styles of imagery in blind adults, *Neuropsychologia*, 23, pp. 561-566.

[45] Hollins M. (1986), Haptic mental rotation: more consistent in blind subjects?, *Journal of Visual Impairment and Blindness*, 80, pp. 950-952.

[46] Hollins M. (1989), *Understanding blindness*,Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

[47] Lucerga Revuelta R. (1999), *Palmo a palmo: la motricità fine e la condotta di adattamento agli oggetti nei bambini ciechi*, Monza, Biblioteca

Italiana per i Ciechi (Trad. it. di: R. Lucerga Revuelta, *Palmo a palmo. La motricidad fina y la conducta adaptativa a los objetos en los niños ciegos*, Madrid, ONCE)

[48] Marmor G. S., Zaback L. A. (1976), Mental rotation by the blind: does mental rotation depend on visual imagery?, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 2, pp. 515-521.

[49] Portiglia C. (1994), *Mani che vedono*, Bologna, Cappelli Editore.

[50] Revesz G. (1950), *Psychology and art of the blind*, London, Longmans.

[51] Romagnoli A. (1973), *Ragazzi ciechi*, Roma, Armando Editore (Prima edizione 1924, Zanichelli).

[52] Sadato N. et al. (1996), Activation of the primary visual cortex by Braille reading in blind subjects, *Nature*, 380, pp. 526-528.

[53] Secchi L. (2004), *L'educazione estetica per l'integrazione*, Roma, Carocci Editore.

[54] Shepard R. N., Metzler J. (1971), Mental Rotation of three-dimensional objects, *Science*, 171, pp. 701-703.

[55] Villey P. (1946), *Le monde des aveugles*. Versión castellana de Antonio Bertolucci *El mundo de los ciegos*, Buenos Aires. Ed. Aguilar.

[56] Zaniboni P. (1986), *Il bambino non vedente: finalità e metodi della scuola dell'obbligo*, Biblioteca Italiana per i Ciechi "Regina Margherita" ONLUS, Monza.

**SITOGRAFIA:**

Arzarello F. (2005), *The genesis of signs by gestures. The case of Gustavo*

`http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2ArzarelloEtAl.pdf`

Franceschina V. (2006), *Il bambino non vedente e la matematica: quali strumenti è opportuno utilizzare per facilitare questo apprendimento*, Articolo pubblicato in *Tiflologia per l'Integrazione*, n. 1, gennaio/marzo.

`http://www.bibciechi.it/pubblicazioni/tiflologia/200601/Franceschina.rtf`

Russo D. (2003), *L'Insegnamento della matematica ai ciechi*, Articolo pubblicato in *Tiflologia per l'integrazione*, n. 2 aprile/giugno.

`www.bibciechi.it/pubblicazioni/tiflologia/200302/Russo.rtf`

Ricerca Italiana PRIN

`http://www.ricercaitaliana.it/prin/dettaglio_completo_prin-2004118414.htm`

Ricerca Italiana PRIN

`http://www.ricercaitaliana.it/prin/dettaglio_prin-2006117208.htm`

Sacks O. (2003), *L'occhio della mente*

`http://www.adelphiana.it/pdf/sacks_occhio.pdf`

Tioli E. (2005), *Dallo spazio aptico alla rappresentazione immaginativo-motoria*

`www.bibciechi.it/pubblicazioni/tiflologia/200601/Tioli.rtf`

Vangelisti S. (2006), *Geometria tra le mani: macchine matematiche per non vedenti* (Report di borsa di studio non pubblicato, Università di Modena e Reggio Emilia)

`http://www.matematicainsieme.it/Mostra\%20geometria/index.htm`

Virga G. (2001), *Considerazioni sperimentali sulla rappresentazione mentale dello spazio dei non vedenti*

`http://math.unipa.it/˜grim/virga-nonvedenti.pdf`

## A.5 Capitolo 4

[57] Banchoff T. F. (1993), *Oltre la terza dimensione-Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali*, Traduzione di Antonio Caronia, Bologna, Zanichelli

[58] Castelnuovo E. *Didattica della matematica*, La nuova Italia editrice.

[59] Coxeter H. S. M. (1948), *Regular Polytopes*, London, Methuen.

[60] D'Amore B. (1993), *Geometria*, Milano, Franco Angeli.

[61] Dedò M. (1999) *Forme, simmetria e topologia*, Padova, Decibel Editrice.

[62] Lyusternik L. A. (1966), *Convex figures and polyhedra*, Chicago, D. C. Heath and company Boston.

[63] Pellegrino C., Zuccheri L. (2007), *Tre in uno*, Stampa realizzata con fondi messi a disposizione dal Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Modena e Reggio Emilia come cofinanziamento al progetto *Matematica tra le mani per la Diffusione della Cultura Scientifica* 2005.

[64] Sbaragli S. (2002), Nel mondo quotidiano dei poliedri, *La Vita Scolastica*, Laboratori nel fascicolo di Area Matematica, 15, pp. 44-48.

**SITOGRAFIA:**

`http://it.wikipedia.org/wiki/Categoria:Matematica`

Accascina G., Monti V. (2006), *Le sezioni piane del cubo*, Versione provvisoria

`http://www.dmmm.uniroma1.it/accascinamonti/ssis/geometria2/SezioniSpeciali.pdf`

Bernecoli S., Tomasi L. (1995) *Sezioni piane di un cubo: un problema di geometria dello spazio risolta con Cbri-Géomètre*

`http://www.fardiconto.it/cabrirrsae/quaderni/doc/quad_09.pdf`

Favro P., Zucco A. (2005), *Appunti di geometria convessa*

`http://www.dm.unito.it/quadernididattici/favro/convessa.pdf`

# Ringraziamenti

Ed ecco finalmente la mia parte preferita....dove è molto importante iniziare dicendo che tutto quello che scriverò è il risultato di un flusso di coscienza di una persona che nelle ultime settimane ha passato quella decina di ore davanti al computer...quindi l'ordine delle persone che verranno nominate non è assolutamente basato sull'importanza ma solo sul seguire passivamente ciò che i miei poveri neuroni stressati dettano...
Un enorme grazie (ma proprio grande) a tutte le persone del Cavazza, del museo "Anteros" e del museo "Omero", per tutto il tempo che ci hanno dedicato e i preziosi consigli. Un grazie particolare ad "Anna" e "Marco" perchè ho imparato più matematica con loro in questi mesi che in tutti gli anni di studio. Un altro grazie enorme a Giorgio, per la sua pazienza e per tutto l'aiuto e i consigli dati per far si che questo lavoro riuscisse. Grazie al Biagio, perchè mi ha incoraggiato tutte le volte che la mia bassa autostima aveva il sopravvento...e perchè ha (ancora una volta) sopportato la me sotto tesi. Un gigagrazie alla "Beroaldo crew" per i multivitaminici, l'appoggio morale, i consigli pedagogici!!! A Sciaman, per essersi divertito nel leggere questo lavoro. A Fra e Cori per quelli che ormai sono diventati otto anni di motivi. Alla Baby, perchè abbiamo fatto proprio un bel viaggio insieme. A Milove perchè senza di lei io non sarei consapevole di neanche la metà di quello che sono. A Yung, perchè se questa tesi è nata è grazie a lui. A tutta la mia famiglia perchè, anche questa volta, è solo grazie a loro. Alla Marghe, Giò, Henry, Dadda, Alice,... (eccetera eccetera eccetera) perchè è stato proprio divertente. Alla Stefi e alla Giusy, perchè tutte le logopediste dovrebbero es-

sere come loro. Manca qualcuno?...Sicuramente si, ma questi ringraziamenti sono anche per tutti quelli per cui, anche se non sono esplicitamente scritti qui, provo un profondo senso di gratitudine. Posso assicurare, quindi, che mancherebbero ancora molte altre persone...e chiunque pensi di rientrare in queste “molte altre persone” sappia che sto ringraziando anche lui/lei.