ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Specialistica in Matematica

Mezzi semiotici di rappresentazione tattili per l'apprendimento della Geometria dei Poliedri

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
GIORGIO BOLONDI

Presentata da:
ELISA CORTESI

I Sessione
Anno Accademico 2009/2010

...É in questo territorio che la soggettivitá e l'oggettivitá culturale si sovrappongono reciprocamente e la mente si estende al di lá della pelle

(L. Radford)

Introduzione

La ricerca che abbiamo condotto, vuole dimostrare l'efficacia della nozione di apprendimento come processo di oggettivazione. In particolare nel caso di allievi non vedenti mostreremo come l'uso di mezzi di oggettivazione appropriati consente di superare gli ostacoli derivanti dal deficit visivo, raggiungere un apprendimento stabile e significativo e quindi prendere coscienza. Questo lavoro di tesi da un lato é una conferma in ambito educativo speciale della teoria di Radford, dall'altro a partire da questa teoria fornisce degli strumenti didattici in ambito geometrico che consentono anche agli alunni non vedenti di apprendere la matematica.

Il primo capitolo è esplicitamente dedicato alla teoria dell'oggettivazione di Radford; vengono presentati i temi caratteristici dell'approccio semiotico culturale da lui proposto, soffermandosi sulla questione della natura degli oggetti matematici e della loro rappresentazione. Vengono quindi considerati l'apprendimento come oggettivazione, i mezzi semiotici di oggettivazione, ed i vari livelli di generalizzazione proposti da Radford.

Il secondo capitolo, partendo dal quadro teorico delineato, affronta il problema delle rappresentazioni semiotiche tattili. In particolare viene introdotto il problema centrale della tesi, la relazione tra cecità e matematica, presentando alcuni dati relativi alla situazione italiana e soffermandosi sulla realizzazione dei mezzi semiotici di oggettivazione per questa particolare situazione didattica.

Il terzo capitolo introduce la base teorica sui cui è stata sviluppata la sperimentazione: la geometria dei poliedri. Vengono presnetate le fondamentali nozioni di geometria spaziale, le definizioni di poliedri, i diagrammi di Schlegel ed i loro sviluppi, che sono fondamentali per la realizzazione pratica della ricerca sperimentale.

Infine, il quarto capitolo introduce e presenta la parte sperimentale della ricerca:

l'insegnamento della geometria dei poliedri ad un'alunna non vedente, Anna. Viene illustrata la base teorica della sperimentazione relativa all'analisi mediante mezzi semiotici di oggettivazione, e quindi descritti alcuni episodi significativi seguendo la teoria di Radford.

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Teoria dell'oggettivazione di Radford

In questo capitolo tratteremo della teoria dell'oggettivazione che Radford (2000, 2003a, 2003c, 2008) sviluppa nell'ambito di un approccio semiotico che consente di assumere un punto di vista pragmatico nei confronti degli oggetti e dei significati matematici. L'approccio semiotico culturale deriva dalla scuola storico-culturale di Vygotsky, dalle fenomenologia di Merlau-Ponty, dalla filosofia di Ilyenkov e Leont'ev che dedicano speciale attenzione alla attività cognitiva umana, alla coscienza (nota: consciusness) individuale ed al ruolo essenziale svolto dagli elementi culturali.

1.1 L'approccio semiotico culturale

In questo approccio agli oggetti matematici, il concetto di 'segno' svolge un ruolo essenziale con esplicite caratteristiche cognitive e sociali, come nota Luis Radford (2000, pp. 240-41):

> We take signs here not as mere accessories of the mind, but as concrete components of 'mentation'. ... instead of seeing signs as the reflecting mirrors of internal cognitive processes, we consider them as tools ... of the mind to accomplish actions as required by the contextual activities in which the individuals engage. ... the signs with which the individual acts and in which the individual thinks belong to cultural symbolic systems which transcend the individual .... Signs hence have a double life. On the one hand, they

> function as tools allowing the individuals to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified[1].

Il tema centrale dell'analisi di Radford è la nozione di 'oggettivazione' che costituisce uno strumento teorico molto potente per comprendere l'apprendimento e il significato degli oggetti matematici[2].

La specifica abilità cognitiva che caratterizza il pensiero matematico è stata analizzata da Duval, che la identifica con un sistema di rappresentazioni e registri semiotici. Molte teorie educative concepiscono il pensare e l'apprendere come una attività isolata che ha luogo nella mente dell'individuo ed è una tendenza a scoprire una realtà a priori. Spesso si prende in considerazione anche l'interazione sociale, ma il ruolo che le viene attribuito è essenzialmente di stimolare l'attività cognitiva nei termini di adattamento all'ambiente esterno. L'approccio semiotico culturale invece considera costitutivi del pensiero gli aspetti antropologici, storici e culturali. Questo orientamento è seguito da Radford che sostiene (2008, p. 218) che la teoria della oggettivazione adotta una posizione non mentalista relativamente al pensiero e alla attività intellettuale, proponendo che il pensiero è un tipo di pratica sociale (Wartofsky 1979), una riflessione mediata dalla forma e dalle modalità delle attività degli individui.

Ciò nonostante, il pensiero matematico mantiene il proprio carattere di idealità, come "fosse un'impronta impressa sulla sostanza della natura dalla attività della vita sociale umana, una forma del funzionamento della cosa fisica nel processo di questa attività. Così tutte le cose coinvolte nel processo sociale acquistano una nuova 'forma di esistenza' che non fa parte della loro natura fisica ... ma è la loro forma ideale" (Ilyenkov,

[1]Noi qui consideriamo i segni non come meri accessori della mente, ma come concreti componenti della attività mentale, invece di vedere i segni come rispecchiamento dei processi cognitivi interni, li consideriamo come strumenti della mente che servono a compiere le azioni richieste dalle attività contestuali in cui gli individui sono impegnati. I segni, con cui l'individuo agisce e in cui l'individuo pensa, appartengono a sistemi simbolici culturali che lo trascendono. I segni hanno quindi una duplice vita. Da un lato, funzionano come strumenti che permettono all'individuo di cimentarsi nella prassi cognitiva. Dall'altro, fanno parte di quei sistemi che trascendono l'individuo e attraverso cui una realtà sociale è oggettivizzata.

[2]L'approccio semiotico culturale viene infatti chiamato anche teoria della oggettivazione della conoscenza.

1977, p. 86). Pensare consiste, quindi, nel prendere parte ad attività che conferiscono senso, nell'ambito di un contesto socio-culturale, dal quale emergono forme di razionalità, bisogni e problemi. In questo quadro, i segni sono costituenti del pensiero perchè esprimono l'attività sociale collegandola alle dimensioni individuale, storica e culturale. Una simile mediazione richiede la partecipazione non solo dei sistemi di segni, ma anche degli oggetti, degli strumenti, dei gesti, ecc. Il pensiero, quindi, non è qualcosa che avviene sul puro piano mentale, ma anche sul piano sociale, "in una regione che voglio chiamare il territorio del pensiero in quanto artefatto. È in questo territorio che la soggettività e l'oggettività culturale si sovrappongono reciprocamente e la mente si estende al di là della pelle (Radford, 2008, p. 219).

La riflessività del pensare riguarda il ruolo della coscienza soggettiva nel pensiero, la cui attività viene portata avanti come un atto intenzionale[3], da un lato, diretto verso la realtà storica e culturale, dall'altro, sviluppato attraverso quella stessa realtà storica. Pensare non è una attività isolata in cui l'individuo assimila conoscenza, ma una riflessione da parte del soggetto, compiuta nell'ambito di un contesto socialmente condiviso e di una realtà storica e culturale che indirizzano gli atti intenzionali dell'individuo verso ciò che chiamiamo pensiero e conoscenza. Radford (2008) chiama questi fattori culturali *Sistemi Semiotici di Significazione Culturale*. Nelle loro interazioni con le attività (oggetti, azioni, ecc.) e il contesto del pensiero artefatto (artifactual), essi danno luogo alle forme o modi delle attività e ai modi specifici della conoscenza o epistemologici (Foucault, 1966).

1.2 Pensiero e oggetti matematici

Secondo la prospettiva pragmatica invocata dall'approccio Semiotico Culturale, gli oggetti matematici sono strettamente collegati alla attività riflessiva mediata. La teoria della oggettivazione della conoscenza sostiene che gli oggetti matematici sono stati generati sul piano storico nel corso della attività matematica degli individui. Più pre-

[3] *Intenzionalià* è un concetto chiave della filosofia del soggetto e della mente studiato in particolare nell'ambito della fenomenologia; derivato dal temine medioevale *intentio*, che significa 'tendere a', indica l'atto distintivo della mente o coscienza di tendere, essere rivolta, verso i propri oggetti.

cisamente, gli oggetti matematici sono schemi prefissati di attività riflessiva "incapsulata nel sempre mutevole mondo della pratica sociale mediata dagli artefatti" (Radford, 2008, p. 222).

Questa concezione degli oggetti matematici appare quindi fortemente connessa ad una prospettiva pragmatica in cui sia gli individui che le attività sociali assolvono ad un ruolo prioritario, perdendo il loro carattere di entità 'a-priori'. Questo è un punto cruciale nella discussione della relazione tra significato e rappresentazione semiotica degli oggetti matematici, poichè non possiamo confinare il problema del significato alla relazione tra i segni di un sistema semiotico e la coordinazione di differenti rappresentazioni semiotiche, che si riferiscono ad un qualche comune oggetto a-priori.

Ciascuna rappresentazione è imbevuta di pratiche sociali e personali che obbligano ad allargare la sfera del significato al di là della struttura simbolica. Nella traiettoria semiotico culturale che viene delineata da questo percorso teorico, viene riconosciuta una precisa dualità tra la struttura dei segni e l'attività sociale, che non consente di assegnare una priorità alla pratica rispetto alla semiotica, e viceversa.

Va sottolineato che le teorie pragmatiche e quelle realistiche non sono necessariamente in conflitto tra loro; l'idea realistica di fare riferimento ad un oggetto esistente può essere recuperata come esito finale delle pratiche da cui emergono gli oggetti matematici. Nell'approccio semiotico culturale non possiamo ascrivere agli oggetti matematici un'esistenza ideale a-priori dal momento che sono strettamente legati alla attività riflessiva da cui emergono. Tuttavia, nell'ambito dei Sistemi Semiotici di Significazione Culturale possiamo ascrivere una forma di esistenza agli schemi prefissati che emergono dalla 'praxis cogitans'[4].

L'esisistenza ideale, storica e culturale, che attribuiamo agli oggetti matematici derivandola dalla attività nel senso di Ilyenkov, consente di definire una forma di riferimento all'oggetto matematico che non possiamo identificare con la rigida designazione che si ricava dalla relazione oggetto-segno, o con qualche forma di costruzione e ricostruzione

[4]Questa posizione si accorda con Platone quando afferma, nel Parmenide, che le idee sono modelli fissi che non risiedono nella mente umana. Ma invece di considerare tali schemi o modelli come 'stabiliti in natura', sono qui definiti come 'stabiliti nella pratica sociale'. Così facendo, cade a pezzi il muro che divide il mondo reale dal mondo invisibile, e gli oggetti matematici perdono la loro aura eterna e la loro atemporalità, per diventare parte del mutevole mondo degli individui (Radford, 2004, p. 20).

della conoscenza. Dipende invece dalla profondità e dalla finezza della attività riflessiva e dai processi costitutivi di significato che prederemo in esame parlando di oggettivazione.

1.3 Apprendimento come oggettivazione

L'apprendimento rappresenta una attività riflessiva mediata quando è indirizzato verso gli oggetti matematici che presentano caratteri storico culturali. La situazione cognitiva ed epistemologica è molto differente se prendiamo in considerazione l'apprendimento nei confronti della *costruzione* degli oggetti matematici. Mentre l'attività riflessiva del matematico aspira alla creazione di nuovi oggetti, quella di chi apprende è rivolta ad oggetti che esistono già, non in senso strettamente realistico, ma come entità culturalmente e socialmente riconosciute. Questa presa di coscienza dell'oggetto matematico da parte dello studente non è un processo passivo, ma richiede un impegno reale nelle attività matematiche, non per 'costruire l'oggetto', che è già presente nella cultura, ma per 'dargli un senso'. Questa attribuzione di significato è un processo attivo, basato sulla comprensione e l'interpretazione, dove si incontrano le biografie individuali e le categorie concettuali comuni. Radford definisce questo processo: 'oggettivazione'. "Imparare, dunque, corrisponde a oggettivizzare qualcosa". L'apprendimento è un atto intenzionale in cui il soggetto incontra e prende coscienza (pone "di fronte" alla propria consapevolezza) dell'oggetto matematico, attraverso una attività mediata che fornisce senso all'oggetto appreso (Radford, 2005, p. 111).

1.3.1 Mezzi semiotici di oggettivazione

La modalità in base a cui gli studenti apprendono l'oggetto matematico attraverso i loro atti intenzionali non è una neutra relazione soggetto-oggetto, ma è intrinsecameinte connotata dalla cultura, la storia, le strutture sociali che rappresentano i mediatori semiotici.

Gli atti che producono senso e il contesto che li rende possibili sono essenzialmente culturali: gli studenti impegnati nell'attività matematica non fanno ricorso solamente ai procedimenti formali, ai metodi deduttivi e assiomatici che si richiamano ai registri semiotici caratterizzati nell'approccio semiotico strutturale e funzionale di Duval (1993, 1998). Essi per attribuire significato e prendere coscienza devono ricorrere anche al **linguaggio naturale, ai gesti, all'attivitá cinestetica, ai movimenti del corpo, ai segni, agli oggetti concreti, ad artefatti e strumenti**, che mediano la nostra attivitá riflessiva e indirizzano culturalmente i nostri atti intenzionali verso l'oggetto matematico. Tali mediatori sono portatori di un'intelligenza culturale storico e sociale che nel caso della matematica sono incarnati in sistemi di segni, che in un'accezzione più generale, Radford chiama mezzi semiotici di oggettivazione[5].

Radford (2008, p. 224) sottolinea che gli oggetti, in quanto tali, non sono in grado di esprimere direttamente l'intelligenza storica che contengono, perciò è fondamentale il loro uso nelle attività e nei contatti con le altre persone che sanno come 'leggere' questa intelligenza e ci aiutano ad acquisirla. Diversamente, il linguaggio simbolico-algebrico si ridurrebbe ad un gruppo di geroglifici, e l'intelligenza in esso contenuta non sarebbe afferrata senza il contributo fondamentale dell'attività sociale che ha luogo nel contesto scolastico.

La prospettiva semiotica culturale considera l'attività come una sintesi di aspetti sensibili e intellettuali che caratterizzano pensiero e apprendimento. Per comprendere l'attività dobbiamo focalizzarci sugli atti intenzionali della coscienza quando gli individui li dotano del senso che deriva dalla realtà sociale e culturale: l'esperienza umana è caratterizzata dalla dimensione spazio-temporale, e da dimensioni come movimento, percezione, sentimenti, emozioni e, ad un livello più generale di astrazione, da schemi, generalizzazioni, organizzazioni strutturali, ecc.

Le trasformazioni che risultano dai mezzi semiotici di oggettivazione non sono analoghe alle operazioni che caratterizzano i registri semiotici definiti da Duval. La sua analisi semiotica considera il passaggio da una rappresentazione semiotica all'altra, le operazioni semiotiche sono portate avanti secondo una linea temporale diacronica, mentre la teoria dell'oggettivazione della conoscenza si basa su una analisi sincronica, perchè l'attività riflessiva richiede l'uso simultaneo di più mezzi semiotici di oggettivazione. Gli atti intenzionali sono realizzati in un network di attività sia sensoriali che intellettuali, e non pos-

[5]Esemplare, in proposito, sono le ricerche condotte dalla psicologa Susan Goldin Meadow e colleghi (2005, 2009) sull'importanza dei gesti nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica, e più in generale nell'apprendimento scolastico, soprattutto nella prima infanzia.

siamo separare queste dimensioni, nè disegnare un passaggio dal livello delle sensazioni alle cosí dette strutture razionali, come avviene nelle teorie Piagetiane. I mezzi semiotici di oggettivazione sono organizzati assieme come 'pezzi delle attività semiotiche degli studenti in cui azione, gestualità e parola cooperano per dare luogo all'oggettivazione della conoscenza' (Radford et al., 2003).

Così, benchè l'esperienza matematica degli studenti si sviluppi in modo diacronico, i mezzi semiotici di oggettivazione sono usati in modo sincronico: ad esempio, se osserviamo degli studenti impegnati nell'attività della geometria, vediamo che oltre al linguaggio simbolico fanno ricorso a gesti, azioni, artefatti, usi deittici del linguaggio naturale.

1.4 Livelli di generalizzazione

Schema operatorio

E' utile interpretare lo sviluppo dei livelli di generalizzazione proposti da Radford riferendosi alla nozione di schema operatorio e dei suoi invarianti proposto da Vergnaud. Gli schemi cui si fa riferimento sono "schemi di azione" nel senso definito da Piaget (per il quale uno schema è la "struttura invariante dell'azione ". Esso permane nel caso delle ripetizioni, si consolida con l'esercizio e si applica a situazioni che si riferiscono alla stessa struttura). Vergnaud rielabora l'idea piagetiana e definisce uno schema operatorio "un'organizzazione invariante del comportamento per una classe di situazioni date"[6] Non si tratta, dunque, di un'azione, ma di un "modello di azione operatorio"capace di sostenere e di guidare ogni altra azione particolare. Costruire competenza implica allora, in questo caso, un progressivo organizzarsi e stabilizzarsi di schemi operatori. É a questo livello che la competenza si lega alle conoscenze (il sapere) e alle abilitá (il saper fare). Uno schema operatorio , infatti, è un'organizzazione che emerge sì dall'esperienza, ma questo non significa che non gli siano necessari elementi conoscitivi, anche di tipo simbolico. Al contrario, esso si costruisce grazie al ripetersi delle azioni in diverse situazioni (che presuppongono conoscenze diverse) e alla riflessione sulle loro caratteristiche comuni. Se le situazioni sono simili, sará piú facile il riconoscimento e piú facile l'adattamento

[6] Vedi Vergnoud (1990).

dello schema; se invece sono diverse, esigeranno una più profonda trasformazione dello schema. In ogni caso, ció che permette di collegare tra loro le varie esperienze pratiche é una sorta di riflessione critica che é tanto più efficace quanto piú sostenuta da categorie e quadri concettuali adeguati. Ad esempio la numerazione di una piccola collezione di oggetti da parte di un bambino di 5 anni necessita l'applicazione di uno schema che gli permette di coordinare movimenti di occhi e mani e di coordinare con essi la sequenza numerica.

Vergnaud introduce inoltre l'idea di ‟invarianti operatori ″, che sono le ‟conoscenze contenute negli schemi ″, le proprietá su cui si basano gli schemi messe in atto in situazioni simili. Come tali, gli invarianti operatori possono essere posseduti dal soggetto a diversi livelli di esplicitazione e di consapevolezza.

1.4.1 Embodied experience

La teoria dell'oggettivazione della conoscenza designa l'aspetto sensoriale, spaziale e temporale dell'attività educativa col termine esperienza *embodied*[7], contrapposta a esperienza *disembodied*[8], mentre definisce l'attività intellettuale come significato non-incorporato (Radford, 2000, 2005). Il termine 'embodied' non viene qui usato con il senso strettamente cognitivo e neuroscientifico impiegato da altri studiosi in merito alla attività educativa matematica (p. es. Lakoff and Nuñez, 2001). L'esperienza embodied, nella prospettiva di Radford, è intrinsecamente sociale e culturale e la coscienza dell'individuo acquisisce la sua identità nell'ambito della pratica riflessiva sociale: attraverso i processi di oggettivazione l'individuo trova 'il proprio sè' come controparte dell'oggettivazione che viene chiamata 'soggettivizzazione'.

I nostri risultati sperimentali confermano le difficoltà incontrate dagli studenti quando la pratica matematica si limita al linguaggio simbolico. Il problema è dato dal passaggio dalla dimensione embodied alla dimensione disembodied dell'eseperienza educativa: da un lato, infatti, la matematica è per definizione disembodied, poichè i suoi oggetti culturali non hanno natura concreta e sono accessibili solo attraverso una pratica mediata.

[7] In italiano si tradurrebbe incorporato, ma in letteratura si é scelto di utilizzare i termini inglesi.

[8] A questo soggetto, qui applicato all'analisi dell'esperienza dell'insegnamento della matematica, è dedicata una vasta letteratura nell'area della filosofia della mente e del rapporto mente e corpo.

Dall'altro lato, è come un gioco linguistico, 'una forma di vita' nel senso di Wittgenstein (1953): richiede una correlazione di attività embodied e disembodie, di dimensioni sensibili e intellettuali.

Lo schema che segue riprende la proposta di Radford e sintetizza la complessità dell'apprendimento come processo di oggettivazione di un oggetto culturale cui si accede tramite mezzi semiotici di oggettivazione connotati da modi sociali e culturali di significazione; tanto piú gli invarianti degli schemi operatori saranno capaci di includere nuove situazioni tanto maggiore sará il livello di generalizzazione raggiunto. Radford (2003, 2005) riconosce tre livelli di generalizzazione:

- Una generalizzazione fattuale
- Una generalizzazione contestuale
- Una generalizzazione simbolica

1.4.2 Generalizzazione fattuale

Questa forma di generalizzazione è vincolata agli schemi operazionali che si attivano nell'esperienza spazio-temporale incorporata degli alunni; in questo tipo di esperienza l'attivitá riflessiva é mediata dai gesti, dall'uso del ritmo, dai movimenti del corpo, dall'attivitá cinestetica, dall'uso deittico del linguaggio naturale e dalle abilità che si sviluppano lavorando con oggetti specifici. Questo livello e' quindi caratterizzato da schemi operatori strettamente legati all'esperienza embodied degli alunni. Lo schema operatorio può essere molto solido ma il suo livello di invarianza è molto basso e non permette di accogliere situazioni nuove e più complesse. Gli invarianti sono bassi.

1.4.3 Generalizzazione contestuale

Questa forma di generalizzazione è legata al riconoscimento degli invarianti che caratterizzano gli schemi operatori, conservando la memoria di un'esperienza contestuale spazio-temporale, senza fare riferimento ad una particolare rappresentazione di un oggetto. Questo livello é quindi caratterizzato da invarianti che consentono di includere più situazioni e strutture complesse, anche se la generalizzazione rimane legata all'attività riflessiva di una situazione specifica, significativa per gli allievi. La memoria di questo contesto significativo è rintracciabile nell'uso di mezzi semiotici di tipo deittico e generativo.

1.4.4 Generalizzazione simbolica

A questo livello di generalizzazione l'allievo non ha bisogno del contesto specifico in cui lo schema operatorio (attraverso un'attività riflessiva mediata) si é sviluppato, ma riconosce lo schema fisso (vedi paragrafo 1.2), l'invariante indipendente da uno specifico schema che caratterizza il concetto matematico nella sua generalitá. L'invariante dello schema viene oggettivato soprattutto con l'introduzione dei mediatori simbolici tipici della matematica, che comportano una rottura cognitiva dal livello embodied a quello disembodied. Osserviamo, tuttavia, che questa distinzione netta tra i due livelli che si trova solitamente in letteratura, non sará riscontranbile nella nostra ricerca che mostrerá come, anche nei livelli di generalizzazione piú alti, in caso di mancanza della vista, dovrá essere comunque presente l'uso di mezzi semiotici di oggettivazione legati all'esperienza senso-motoria.

Capitolo 2

Rappresentazioni semiotiche tattili

2.1 Introduzione

E' molto difficile trovare un'unica definizione di che cosa si intenda per cecitá in primo perché esistono vari tipi di minorazione visiva, in secondo perché esistono definizioni normative, sociologiche, pedagogiche e cliniche, a volte in contraddizione fra loro, ed infine perché sará sempre limitante e riduttivo voler incasellare una cosí vasta realtá, che, per quanto potrá essere osservata, uscirá sempre dai confini dell'oggettiva analisi scientifica.
Lontani dal voler affrontare questo problema ampiamente discusso ad esempio in ..., in questa tesi intendiamo solo accennare alcune importanti distinzioni che si devono tenere conto entrando in contatto con questa realtá.
In un dizionario della lingua Italiana[1] troviamo come definizione: "mancanza totale o parziale della vista"; e la vista é definita come la "facoltá di percepire stimoli visivi attraverso gli organi adibiti a tale funzione". Tale definizione, assolutamente riduttiva, non tiene conto di profonde differenze che intercorrono fra vari tipi di cecitá. É infatti molto importante fare una distinzione tra *cecitá totale* e *cecitá parziale* (con *capacitá visiva residua*[2]), che a sua volta si suddivide in *ipovisione* e una fascia di passaggio tra

[1]Sabatini Coletti, *dizionario della lingua italiana*, Rizzoli larousse, 2004

[2]La misura della capacitá visiva residua, a livello medico legale, in Italia viene normalmente espressa con frazioni numeriche (1/10, 1/20, 1/50...) dove 10/10 corrisponde alla capacitá di leggere le prime dieci righe di una tabella visiva (ottotipo) alla distanza di circa 5 m.

ipovedenti e non vedenti.
Bisogna tenere conto di queste differenze sia sotto il profilo sanitario che quello didattico. Infatti come é stato evidenziato dalle ricerche sui processi di sviluppo cognitivo di Y. Hatwell (1967, 1986), successivamente confermate da altri ricercatori in campo internazionale (Miller, 1969; Friednam e Pasnak, 1973) bisogna imporre "precisione e chiarezza nel discriminare fra la cecitá e l'ipovisione al fine di orientare nel migliore dei modi gli interventi educativo-riabilitativi e di formazione professionale".
Nella normativa italiana, la Legge del 3 aprile 2001, consente una dettagliata classificazione della minorazione visiva[3], in base alla quantitá del residuo visivo e alla percentuale di campo perimetrico disponibili; ma ancora non tiene conto di altri importanti indicatori che sono il momento di insorgenza della minorazione visiva, la causa fisica che l'ha prodotta o la reale possibilitá di utilizzo del visus residuo.
Non va infatti dimenticato che, nell'ambito della cecitá totale esistono, a fini educativi e riabilitativi, notevoli diversitá fra coloro che sono nati ciechi, *cecitá congenita*, o che lo sono diventati nella prima infanzia e coloro che lo sono divenuti in etá avanzata, *cecitá acquisita*. Chi ha avuto modo di vedere conserva il proprio patrimonio visivo per integrare le nuove modalitá conoscitive e, se aiutato, conserva la micro-mimica e la gestualitá, ma quanto piú tardiva sará la perdita della vista, tanto piú difficile sará la riorganizzazione delle proprie conoscenze.
Tutte le precedenti osservazioni, sono solo un accenno di una vasta serie di fattori variabili a cui ci troviamo di fronte. Questi saranno diversi per ogni singola persona e dipenderanno dal tipo di patologia, dalla prognosi, dall'etá, dall'educazione ricevuta e dal tipo di attivitá svolte al di fuori della scuola, dalla propria personalitá, dal proprio vissuto, dalle aspirazioni personali di vita, dalle strategie adattative agite e cosí via. Una serie di fattori, quindi, dipendenti ma anche indipendenti dalla minorazione visiva in sé. É proprio per questo motivo che la nostra ricerca non pretende di giungere a osservazioni e conclusioni generali, ma vuole essere solo un contributo alle ricerche in *didattica speciale*, riportando un caso particolare[4], e suggerendo un possibile metodo di insegnamento della geometrie a una persona non vedente.

[3]Nella legge precedente del 1999, ancora questa distinzione non veniva fatta.
[4]descritto nel capitolo 4

2.1.1 Stime italiane

Dati forniti dall'Unione Italiana Ciechi, nel corso di un convegno del 2007[5], indicano che i ciechi assoluti sono, in Italia, 120000, mentre le persone ipovedenti si aggirano tra un dato minimo di 450000 e uno massimo di 1800000: questo perchè non tutte le persone con ipovisione risultano censite in maniera precisa o, comunque, non vi sono le condizioni per censirle tutte (molte persone con ipovisione non fruiscono né di benefici economici, né di agevolazioni).
I dati degli alunni con deficit visivo per l'a.s. 2006 2007 sono:

- scuola dell'infanzia: 282 bambini (ma molte famiglie ritardano la scolarizzazione per cui questo dato é parziale);

- scuola primaria: 902 alunni;

- scuola secondaria di primo grado: 560;

- scuola secondaria di secondo grado: 772 studenti.

Complessivamente, nella scuola statale gli alunni con disabilitá visiva sono 2516, circa l'1,75%. A proposito di questi dati riportiamo le parole di Tioli([26], pag. 135):

> I numeri ci dicono chiaramente che il problema della presenza di disabili visivi nella scuola si impone per *qualitá* e non certo per quantitá: il loro numero, infatti, risulta percentualmente esiguo anche rispetto al totale degli alunni disabili e potrebbe in tal senso, essere individuato come *situazione trascurabile.*

Ed in accordo con Tioli, dal punto di vista di didattica della matematica, affrontare questo problema, lavorare con i deficit visivi, puó portare a significativi risultati per tutti gli studenti.

[5]Disabilitá visiva, Universitá e territorio, tenuto a Villa Contarini-Piazzola sul Brenta (Padova) il 28 e 29 giugno 2007

2.2 Strumentazioni come mezzi semiotici di oggettivazione

2.2.1 Cecitá e matematica

> l'ostacolo non é nella natura delle idee, ma nella scarsitá di mezzi cui dispone il cieco per assimilarle. P.Villey[6]

Dario Russo, nella prefazione a L'insegnamento della matematica ai ciechi di J.E.F. del Campo, sottolinea come molti insegnanti si chiedano quale matematica é possibile insegnare ai non vedenti e se sia necessario effettuare dei tagli o delle riduzioni nei curricoli. Certamente oltre alle difficoltá insite nella materia, che derivano dall'astrattezza della disciplina, esistono difficoltá relative alle trasformazioni delle percezioni sensoriali in rappresentazioni mentali.
La risposta di del Campo é inequivocabile: non si tratta di ridurre gli argomenti da insegnare, ma solo di adattarli. Egli parte dalla convinzione che la matematica, almeno ai livelli di base, non si insegni, ma si impari; impararla significa scoprirla da soli, l'insegnante è solo colui che mette a disposizione gli aiuti necessari. In effetti l'insegnamento della matematica a un alunno con minorazioni visive non é molto diverso da quello che dovrebbe essere rivolto ad uno normodotato, con il rispetto dei tempi necessari per l'esplorazione tattile e per il formarsi dei concetti con un'adeguata operazione di sintesi di percezioni successive. Ricordiamo a questo proposito le parole del professore A. Bonvino:

> Sicuramente la matematica é disciplina accessibile ai ciechi e, diversamente da quanto affermano troppi insegnanti dei nostri alunni, i ciechi incontrano difficoltá nell'apprendimento di questa disciplina non perché la cecitá sia ostativa ma perché l'insegnamento avviene in maniera inadeguata.[24]

Per avviare un alunno all'educazione logico-matematica, é necessario che l'insegnante verifichi come egli percepisce il proprio corpo, come si muove, come utilizza le mani, quindi l'esperienza sullo spazio, nonché l'esperienza sulla forma e l'esperienza sui simboli. É necessario cioé che lo studente abbia fatto esperienze di conoscenza della realtá e che

[6] *Le monde des Aveugles*, citato in [25],pag. 163

controlli i concetti topologici fondamentali per definirla. Tutto ció é fondamentale per un non vedente, perché solo la conoscenza della geometria puó permettergli di rappresentarsi mentalmente in maniera efficace luoghi e ambienti, quindi di sapersi orientare autonomamente in essi.

Per poter apprendere la matematica, riprendendo la teoria di Radford nel caso di studenti con deficit visivo, é indispensabile quindi l'utilizzo sincronico, come mezzi semiotici di oggettivazioni, dell'esplorazione tattile, o piú precisamente *l'esplorazione aptica*, e di particolari strumentazioni volte aa sostituire tutti i mezzi semiotici che dipendono dal senso della vista (segni sscritti, linguaggio deittico, la lavagna, gestualitá dell'insegnante).

2.2.2 La percezione aptica

Per una persona priva della vista, la mano é in grado di costruire una rappresentazione mentale completa della forma che ha esplorato. Il tatto puó essere considerato, infatti, una forma di vista ridotta a zero e la vista una forma di tatto a distanza. Questo perché la vista permette il cosiddetto colpo d'occhio, essendo sintetica ed istantanea, a differenza del tatto che é un senso analitico e successivo. Inoltre l'occhio si spinge alla ricerca delle cause e degli effetti, mentee la mano verifica i principi del mezzo e dello scopo. Eppure esiste un collegamento molto stretto tra il tipo di esplorazione che si conduce con le mani e quella che compiono gli occhi e ció porta a dedurre che vi é una relazione innata latente che unisce campi sensoriali apparentemente distinti e conferma la primitiva unitá organica dei sensi. I dati della percezione tattile sono infatti, per un vedente, un arricchimento e una precisazione di quelli della percezione visiva, e viceversa. Basti pensare allo spessore, molto piú facilmente valutabile dal tatto che non dalla vista. Una persona allenata puó percepire differenze di centesimi di millimetri nello spessore della carte, in un tempo inferiore ai 10 secondi, semplicemente opponendo pollice e indice (e la contrazione del muscolo posto alla base del pollice che permette la stima dello spessore). Il tatto da solo, ad ogni modo, non é sufficiente per conoscere la realtá: é necessaria la cosiddetta percezione aptica (letteralmente: "toccare con attenzione"), essa

> coinvolge tutto l'essere, presupponendo una elaborazione cosciente degli ele-

> menti semplicemente percepiti, sommandoli tra di loro per ottenere un tutto strutturato. ([27], pag. 6)

Con la sola percezione tattile si costruisce uno spazio limitato, in cui manca il concetto di prospettiva, cosí come quando manca uno sfondo nella collocazione spaziale degli oggetti. É necessaria l'integrazione di tutte le percezioni ottenute con i sensi vicarianti della vista: tatto, udito, olfatto e gusto, ma anche senso termico, senso anemestico (dell'aria in movimento), la cinestesia, la sensibilitá muscolare e plantare, la memoria muscolare, la capacitá associativa e un'immaginazione correttamente formata per estendere il concetto di spazio. É grazie alla sintesi di tutte queste percezioni che un non vedente si ferma prima di toccare un ostacolo, senza neppure sfiorarlo.

Il tatto

Il tatto puó essere considerato certamente il senso piú importante per l'esplorazione e la costruzione delle immagini.

Per la formazione di immagini, sono necessarie, due tipi di esplorazioni: una prima esplorazione rapida e sommaria dell'insieme per comporre uno schema complessivo dell'oggetto e una seconda esplorazione fine, che analizza in maniera dettagliata una ristretta porzione della superficie e colloca il particolare percepito nel quadro dell'immagine d'insieme. Per tutto questo é indispensabile, fin dall'infanzia, un'educazione delle dita alla motricitá fine, alla prensilitá, alla capacità di manipolazione. Per poter sintetizzare ed integrare i dati dell'esperienza e le informazioni raccolte da altri canali percettivi (operazione cui normalmente provvede la vista, soprattutto nei primi due anni di vita), é necessario per un bambino con minorazioni visive che la mano diventi l'organo primario di percezione e che il coordinamento visivo-motorio (vedo il traguardo che voglio raggiungere e mi ci avvicino) venga sostituito dal coordinamento bimanuale e da quello udito-mano. Il mondo esterno é pieno di oggetti afferrabili, con un nome, una forma e un uso propri. La localizzazione visiva (che per un bambino vedente é stimolata dalle forme e dai colori, che lo attraggono) viene sostituita dalla scoperta dell'oggetto, che deve peró essere necessariamente agevolata e stimolata dall'adulto. Se si toglie un oggetto dalle mani di un bimbo non vedente di etá inferiore agli 8 mesi, normalmente egli non fa niente per recuperarlo, diversamente da un coetaneo vedente che segue la traiettoria del suo spostamento. É come se un oggetto esistesse solo nel momento in cui il bambino puó toccarlo. Questo fenomeno viene definito *propriocezione*, cioé tendenza a rappresentare non l'ambiente, ma se stesso nell'ambiente, deformando cosí i rapporti fra il soggetto e il mondo esterno e i rapporti interpersonali.

Come si diceva, la mano deve divenire l'organo primario di percezione, senza perdere però le altre funzioni: afferrare, infilare, aprire, chiudere, coprire... É quindi necessario e indispensabile il coordinamento delle due mani. Per chiudere una scatola, ad esempio, il bambino deve sostenerla con una mano, con la stessa individuarne i bordi e con l'altra mettere il coperchio nel punto che gli sta indicando la prima mano (la mano che fissa e guida è la mano detta *non dominante*, mentre quella che esegue è detta *dominante*). La palpazione deve essere attiva ed essere eseguita con le due mani, anche se la mano non dominante é sempre meno attiva. La mano non dominante sostiene l'oggetto da esplorare e facilita riferimenti fissi. La mano dominante é piú attiva, svolge movimenti piú ampi e provvede all'integrazione dei dati. I movimenti di palpazione sono di due tipi: quelli lievi, che assicurano informazioni su alcuni dettagli o sulle parti piú significative di un oggetto; e i movimenti ampi, globalizzatori o di sintesi. Il bambino che esplora la sua bottiglia realizza movimenti di palpazione lievi per verificare il restringimento del collo, la forma del tappo, gli eventuali spigoli, ...; e movimenti ampi per rapportare alcune parti alle altre ed offrire informazioni sulla forma finale, sulla forma "globale", che risulta essere una "bottiglia". I movimenti di palpazione girano intorno al dito pollice. Il pollice offre il punto di riferimento per calibrare le dimensioni dell'oggetto, per posizionarlo nello spazio e perché il bambino ne assimili la forma in tre dimensioni. L'identificazione di oggetti si fará quindi in funzione del carattere analitico e processuale del tatto.

Il tatto permette di conoscere quasi tutte le proprietá degli oggetti, dalla grandezza alla localizzazione spaziale, dalla distanza al peso e alla rigiditá del materiale. Sono peró indispensabili procedure di esplorazione diverse: per conoscere la durezza é necessario esercitare una pressione, per la temperatura occorre un contatto statico, per la texture si utilizzano movimenti laterali. Per conoscere le cosiddette proprietà strutturali, cioè forma globale, forma esatta e volume bisogna invece afferrare l'oggetto e seguirne i contorni. Alcuni di questi movimenti non possono peró essere simultanei, quindi l'esplorazione richiede molto tempo. Inoltre il tatto é in grado di cogliere solo superfici ristrette, poiché la mano si muove analizzando una piccola porzione di spazio dopo l'altra.

Una testimonianza tattile matematica

Intervistando Marco[7] studente, frequentante la quinta superiore di un liceo scientifico, abbiamo avuto modo di conoscere alcuni suoi schemi invarianti tattili per percepire particlari nozioni matematiche. Per quanto riguarda il riconoscimento di due rette parallele disegnate in rilievo su un piano di gomma, Marco, pone l'indice su una retta e il medio su un'altre e muove la mano lungo la direzione delle rette. La sua sensibilitá gli permette di percepire immediatamente, tramite questo movimento da lui interiorizzato, la distanza fra le due rette e capire se queste si ‷avvicinano, si allontanano ″o sono parallele (vedi figura). Per valutare invece l'ampiezza di un angolo, Marco utilizza il dito pollice, esso é divenuto per lui un vero mezzo di misurazione: se il pollice si sovrappone esattamente all'angolo questo é retto, altrimenti si tratterá di un angolo acuto o ottuso (vedi figura) Un metodo di valutazione analogo, per il riconoscimento dell'altezza di un triangolo ci é stato poi fornito dal Dott. Vito La Pietra[8]. Egli ci ha mostrato come scorrendo gli indici sul segmento ‷altezza ″e ponendo i pollici all'interno dei due angoli che si formano alla base relativa é capace di valutare se il segmento in questione é realmente un'altezza del triangolo (vedi figura).

Questi tipi di riconoscimenti tattili, in cui possiamo individuare gli schemi invarianti generati da un ben precisi movimenti delle mani, ormai intrinsecamente associati ai concetti matematici (parallelismo, ampiezza degli angoli, riconoscimento dell'altezza di un triangolo) corrispondenti, si possono collocare in un alto livello di generalizzazione, in cui, a differenza di quanto puó accadere per un alunno vedente, non c'é alcun tipo di legame con una particolare rappresentazione di tipo figurale (i disegni), ma é come se il riconoscimento tattile sia strettamente legato all'oggetto ideale in sé, senza quindi la possibilitá di cadere in classiche misconcezioni.

[7]Marco ha perso la vista nei primi anni di vita (intorno ai due anni) e non ha alcuna memoria visiva.
[8]coordinamento organizzativo servizi tiflodidattici presso l'istituto F. Cavazza di Bologna

2.2.3 sussidi come mezzi di oggettivazione

Come abbiamo detto in precedenza oltre alla percezione aptica altri mezzi semiotici di oggettivazione importanti sono tutte le strumentazioni sostitutive. Vediamone alcune comunemente usate nelle scuole:

Numeri in Braille

Riportiamo innanzitutto la traduzione Braille di numeri e lettere: vedi figura

Blocchi logici di Vygotskij

Sussidi molto importanti per favorire l'apprendimento sono i blocchi logici di Vygotskij: varie forme geometriche (quadrati, rettangoli, triangoli...) differenziati tra loro da grandezza, spessore e colore. Per gli alunni non vedenti, che quindi non distinguono i colori, devono essere ricoperti con materiali che diano sensazioni tattili differenti. I blocchi logici sviluppano nei bambini l'educazione della mano, li mettono a contatto con varie forme geometriche e li stimolano a confrontarle e successivamente a classificarle. Questo tipo di sussidio é particolarmente adatto per i bambini con minorazioni visive anche perché soddisfa due requisiti essenziali per la percezione aptica: puó essere contenuto nel palmo di una mano e non contiene troppi dettagli, che rischiano di rimanere elementi aptici separati, a causa della generale tendenza alla semplificazione e alla schematizzazione dell'esplorazione tattile.

Regoli

Altri strumenti utili sono i regoli per costruire le figure geometriche, costituiti da asticciole di diverse lunghezze, che si possono incastrare tra loro agli estremi o a metà e permettono di comporre varie figure e di scoprirne le proprietá.

Geopiani

Possono essere utilizzati anche i geopiani, cioé piani in legno con dei chiodi piantati a distanze regolari che formino una quadrettatura. Tendendo degli elastici tra questi chiodi, ossia utilizzandoli come vertici, é possibile costruire figure geometriche piane, anche se la presenza dei chiodi rende poi difficile la manipolazione. Esistono comunque numerosi strumenti che utilizzano lo stesso principio ma evitano questo inconveniente.

Cubaritmo

Casellario in plastica in cui inserire piccoli cubi, che riportano sulle facce segni in Braille che, opportunamente ruotati, rappresentano in numeri e le operazioni.

Piano in gomma

Tavoletta rivestita di gomma elastica, su cui adagiare un foglio di cellophan, su cui si scrive o si disegna con una biro scarica o con una matita apposita, dotata di punte intercambiabili per fare disegni continui, tratteggiati, punteggiati... Questi album tattili sono molto utili per l'apprendimento della geometria, perché permettono all'alunno non vedente di disegnare in rilievo e poter valutare tattilmente, in modo sincronico al momento del disegno, quanto si sta disegnando.

È importante sottolineare come tutti i sussidi finora menzionati, indispensabili per gli alunni non vedenti, si dimostrano estremamente utili anche per i ragazzi vedenti. Lo stesso dicasi per ogni particolare percorso didattico ideato appositamente per la presenza di un alunno non vedente in classe, portiamo ad esempio le proposte didattiche di Del Campo [25]. Portando avanti un'attivitá insieme al resto della classe, lo studente con minorazioni visive non si sente escluso né diverso, mentre puó diventare prezioso per le proprie potenzialitó (soprattutto in ottica di lavori di gruppo e apprendimento cooperativo). Inoltre tutti i compagni possono beneficiare di strumenti con cui ‶toccare″la matematica, nell'ottica di un laboratorio di geometria, nel quale rendere l'alunno protagonista del processo di apprendimento, tramite l'esplorazione e la manipolazione, opportunitá da non sottovalutare per stimolare l'interesse per questa disciplina e rendere più piacevole lo studio di una materia considerata a torto fredda e arida.
Riportiamo a proposito le parole di Vincenzo Bizzi [9]

> La presenza di un ragazzo non vedente in classe, puó indurre un insegnante ad inventare una sequenza didattica, che consenta di non far venire meno il

[9] Estratto da un incontro all'istituto F. Cavazza del 26 gennaio 2007 dove Vincenzo Bizzi é consulente psicopedagogico, fornisce servizio di consulenza operativa e coordinamento servizi tiflodidattici.

contenuto didattico, ne al ragazzo in questione, ne agli altri studenti. Questo è molto bello e anche molto stimolante, direi che è una situazione di creatività che viene prodotta da questa difficoltà iniziale. All'inizio un professore può avere un po' di disorientamento, capendo che gli strumenti didattici tradizionali non sono compatibili con tale condizione, ma é possibile che si ritrovi ad inventare metodologie, percorsi, e addirittura strumenti pratici che concilino tutte le esigenze. E accade a volte che l'insegnante si ritrovi negli anni a venire con una metodologia innovata, più operativa più ricca di esperimenti e di contenuti concreti che non solo sono adatti a un cieco, ma facilitano l'apprendimento di molti altri studenti che avrebbero comunque incontrato degli ostacoli nel loro apprendimento, che non avrebbero raggiunto una reale presa di coscienza di ció che stavano studiando. Questo è un arricchimento importante, sempre che si abbia l'umiltá di mettersi in gioco e la creativitá di rinnovare la propria cultura, la propria formazione e la propria prassi didattica che é messa in crisi dalla presenza di un non vedente.

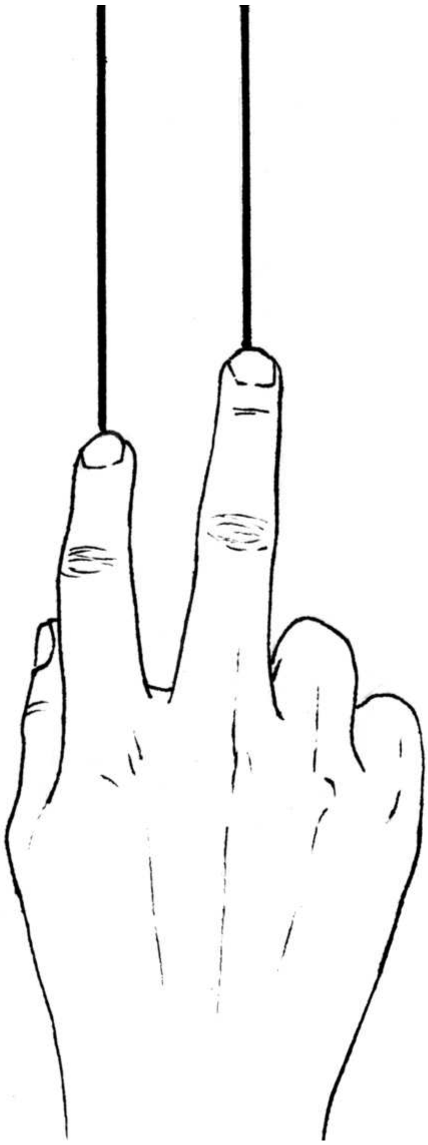

Figura 2.1: Valutazione di parallelismo

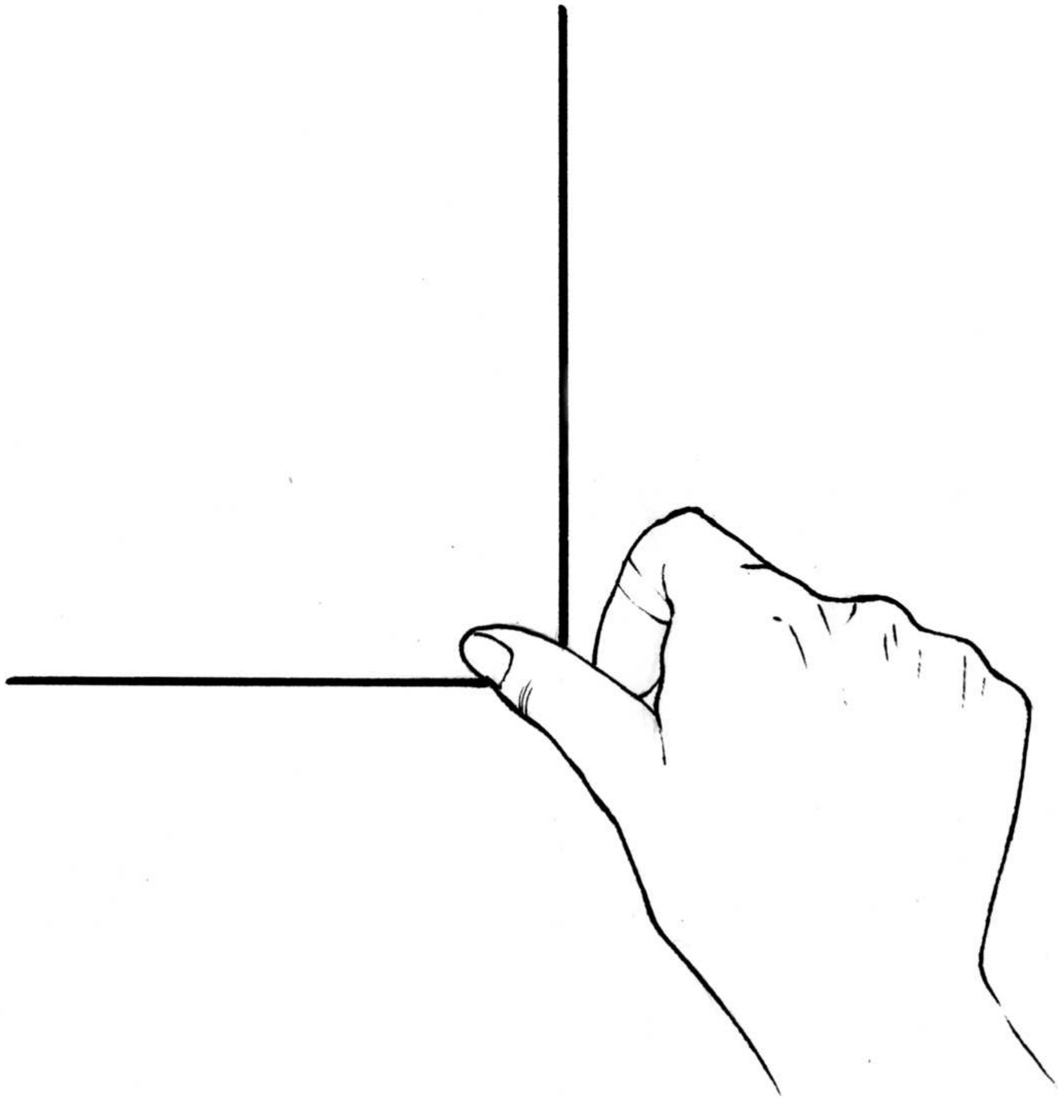

Figura 2.2: Valutazione dell'ampiezza di un angolo

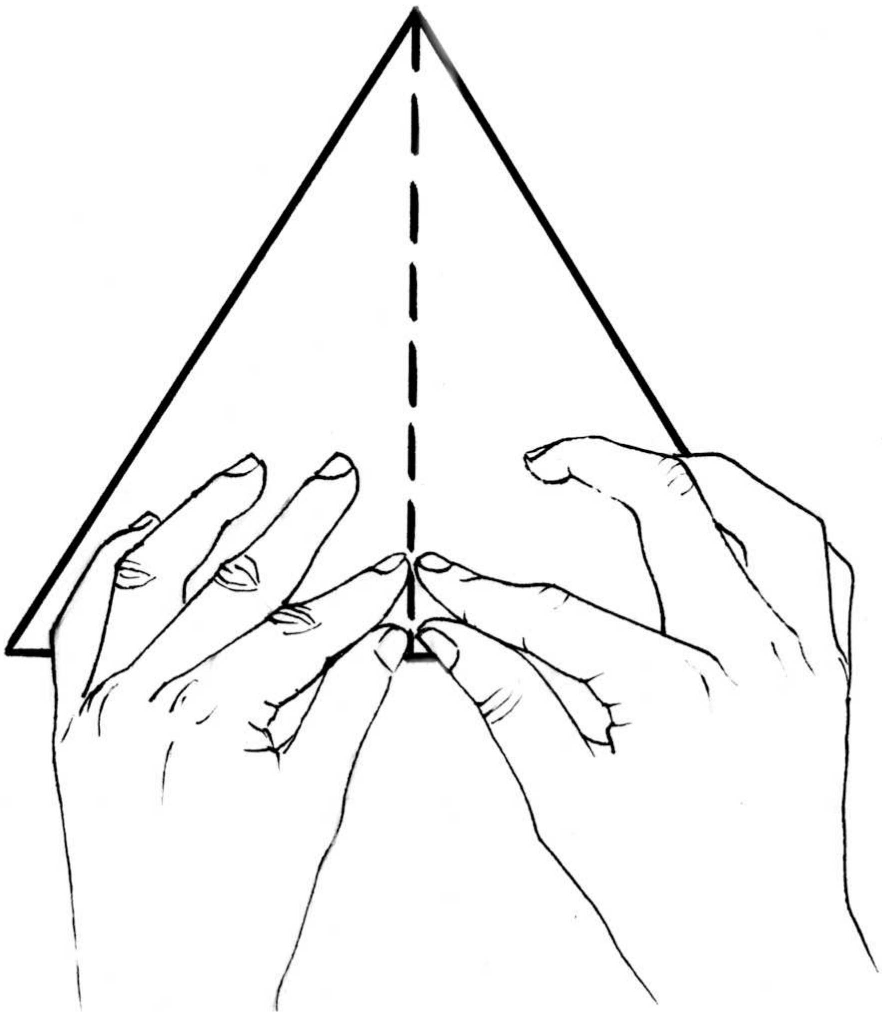

Figura 2.3: Riconoscimento dell'altezza di un triangolo

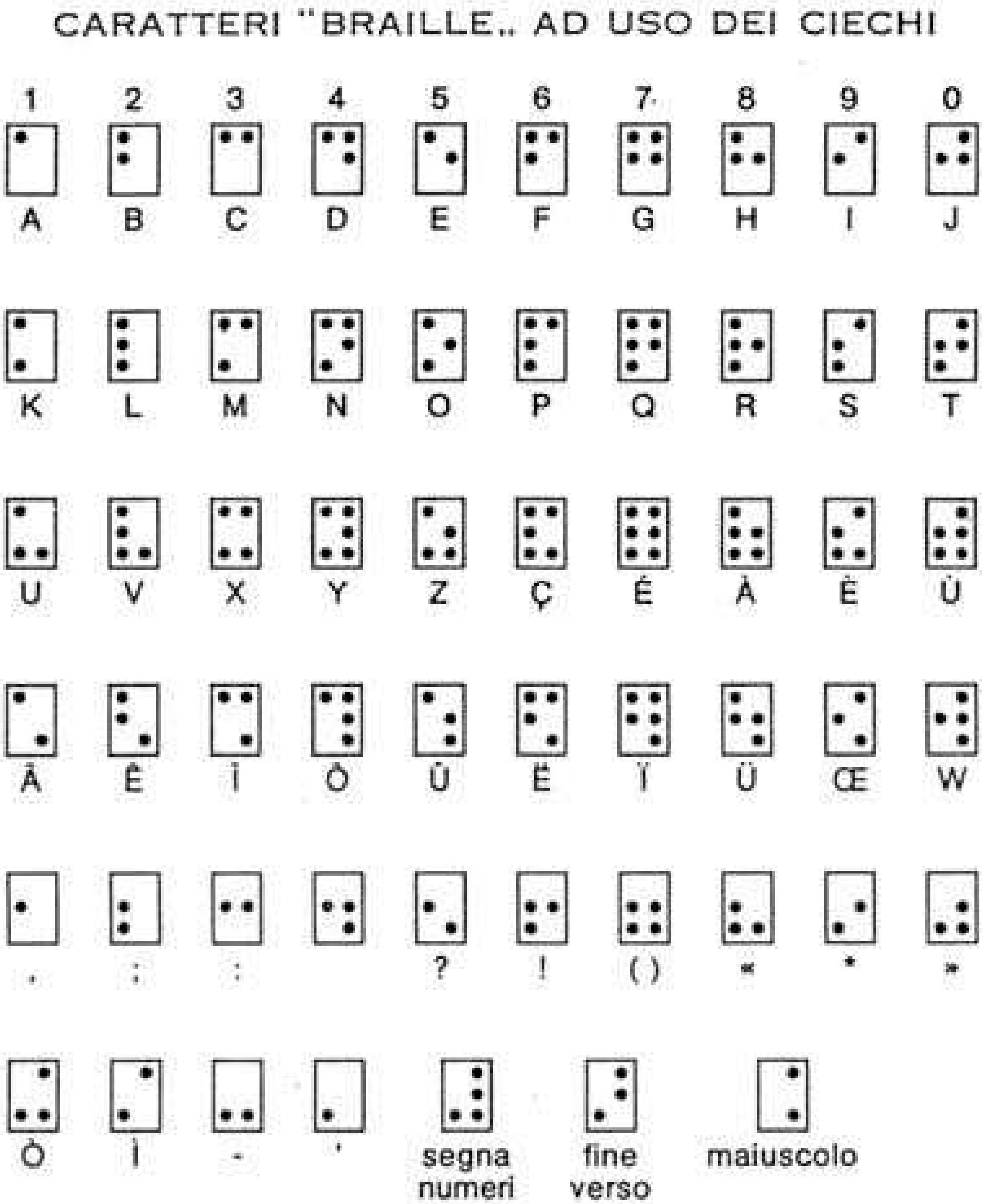

Figura 2.4: Alfabeto Braille

Capitolo 3

Poliedri

In questo capitolo vengono analizzati gli oggetti geometrici a cui si é fatto riferimento nel laboratorio sperimentale. Nella prima sezione sono definiti e descritti i poliedri convessi ed alcune relazioni che interessano gli elementi che li costituiscono. Nella seconda sezione vengono presentati i diagrammi di Schlegel e nella terza gli sviluppi piani. Entrambi questi argomenti costituiscono modelli di rappresentazione degli oggetti geometrici a cui fa riferimento la ricerca. Mediante un'opportuna trasposizione didattica, seguendo la teoria di oggettivazione di Radford, questi contenuti sono stati utilizzati nel laboratorio di geometria che verrá descritto nel prossimo capitolo.

3.1 Geometria nello spazio, i poliedri

3.1.1 Notazioni sull'ambiente geometrico

Ci troviamo nello **spazio vettoriale euclideo 3-dimensionale**, $\mathbb{R}^3$.
Stiamo quindi considerando uno spazio affine reale su uno spazio vettoriale reale a tre dimensioni in cui per ogni coppia di vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ é assegnato il seguente **prodotto scalare** definito positivo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3, \qquad x_i, y_i \in \mathbb{R}, \quad per \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

Inoltre $\mathbb{R}^3$ é uno **spazio metrico** con la topologia indotta dalla distanza euclidea:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \tag{3.2}$$

con

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \tag{3.3}$$

3.1.2 Poliedri

Ad uno spazio tridimensionale appartengono particolari oggetti chiamati *figure solide* che possiamo considerare intuitivamente come parti di spazio delimitate da una superficie chiusa. Fra queste, sono stati scielti come argomento principale del nostro studio sono i *poliedri convessi*[1]. Vediamo una loro possibile definizione, introducendo anche la nozione di *insieme convesso*:

Definizione 3.1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine reale. Un sottoinsieme $\mathbf{S}$ di $\mathbb{A}$ si dice *convesso* se per ogni P, $Q \in \mathbf{S}$ il segmento PQ é contenuto in $\mathbf{S}$.

Definizione 3.2. Un *poliedro convesso* é un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^3$ che non é contenuto in un sottospazio affine proprio di $\mathbb{R}^3$ e che é l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Un poliedro convesso é un insieme convesso perché lo é ogni semispazio.
D'ora in avanti, per semplicitá, i poliedri convessi verranno chiamati poliedri.

Vertici, facce, spigoli

Descriviamo i principali elementi che caratterizzano un poliedro, individuandoli attraverso le possibili intersezioni di un poliedro con un piano.
Sia $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ un poliedro. Se h é un piano contenuto in $\mathbb{R}^3$, allora abbiamo le seguenti possibilitá:

- $h \cap \Pi = \emptyset$;
- $h \cap \Pi$ é un punto, che si dice *vertice* di Π;
- $h \cap \Pi$ é un segmento, che si dice *spigolo* di Π;

[1] Dal greco $\pi o \lambda \upsilon \varsigma$, molti e $\varepsilon \delta \rho o \nu$, faccia.
Molti oggetti microscopici naturali come molecole, protozoi e virus hanno forme poliedrali; i cristalli, invece, si possono presentare in questa forma anche a livello macroscopico.

- $h \cap \Pi$ é un poligono, che si dice *faccia* di Π;

Un poliedro é quindi una regione dello spazio delimitata da piani che lo intersecano in facce ed inoltre:

- ogni spigolo é un lato di due facce
- ogni vertice é un estremo di almeno tre spigoli
- ad ogni vertice concorrono almeno tre facce

Π per definizione é intersezione di un numero finito di semispazi, di conseguenza esso possiede un numero finito di facce, che indicheremo con F, di vertici V e di spigoli S.

Definizione 3.3. Si definisce *angolo diedro* la porzione di spazio compresa fra due semipiani aventi per origine la stessa retta.

Definizione 3.4. Si dice *angoloide* la parte di spazio compresa fra le facce uscenti da uno stesso vertice.

Nota
Due angoloidi sono uguali se hanno ordinatamente congruenti tutte le facce e tutti i diedri compresi tra due facce congruenti.

3.1.3 Legami

Vediamo alcune relazioni che mettono in evidenza importanti legami fra gli elementi che compongono i poliedri, limitando e regolando la loro esistenza e costruzione. Partiamo innanzitutto dal numero delle facce degli spigoli e dei vertici.

Teorema 3.1.1 (Formula di Eulero[2])**.**
Sia Π un poliedro. Tra F, V, S vale la seguente relazione:

$$V + F - S = 2 \tag{3.4}$$

[2]Questa relazione era giá nota a Cartesio nel 1640, ma la sua prima dimostrazione fu data da Eulero nel 1752.

Dimostrazione.
Supponiamo che Π venga ottenuto attraverso la seguente costruzione per fasi: nella fase 1 si parte da una singola faccia, ad ogni fase si aggiunge una faccia in modo che abbia in comune con quelle inserite precedentemene solo spigoli consecutivi (vedi figura 3.1).

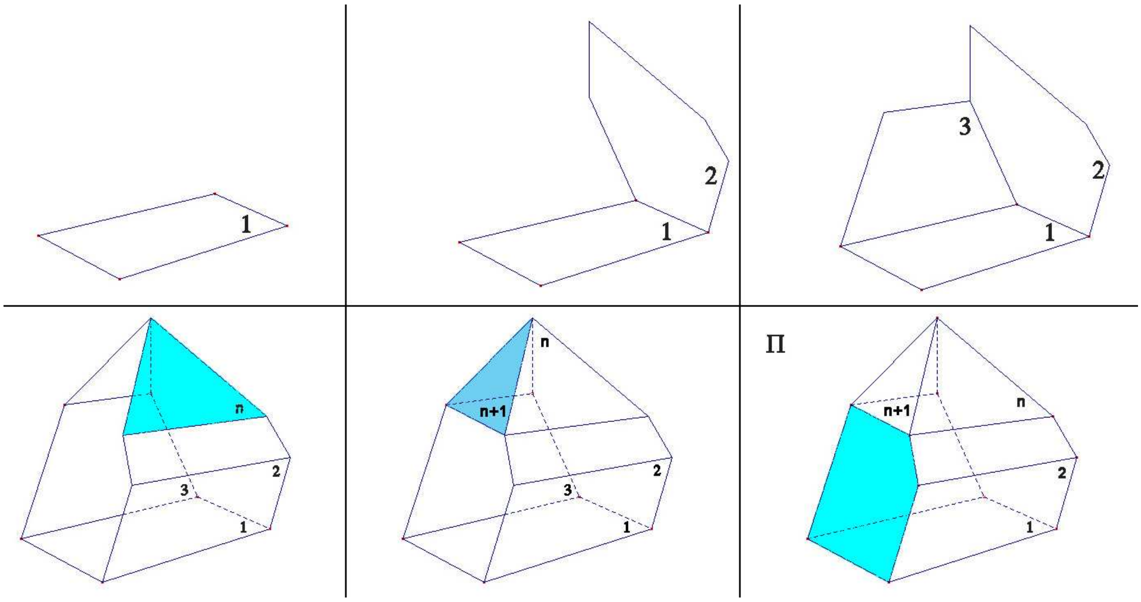

Figura 3.1: Costruzione di Π

Ad ogni fase si indicherà rispettivamente con $\tilde{F}$, $\tilde{V}$, $\tilde{S}$ il numero di facce, vertici, spigoli presenti in quella particolare configurazione parziale.
Dimostriamo per induzione su $\tilde{F}$ che:

$$\tilde{F} + \tilde{V} - \tilde{S} - 1 = 0 \tag{3.5}$$

per ogni fase della costruzione fino a quando il poliedro sará incompleto.
Per $\tilde{F} = 1$, e quindi nella fase 1 in cui possiamo supporre, senza perdere generalitá, che la singola faccia sia un poligono di l lati, abbiamo $\tilde{V} = l$, $\tilde{S} = l$ e di conseguenza

$$\tilde{F} + \tilde{V} - \tilde{S} - 1 = 1 + l - l - 1 = 0$$

Supponiamo l'equazione 3.5 vera per $\tilde{F} = n$, quindi per l'n-esima fase della costruzione, in cui si avrà una particolare configurazione che indichiamo con n, $\bar{V}$ e $\bar{S}$.

Alla $n+1$-esima fase, supponendo di aggiungere come faccia un poligono di p lati, che ha in comune con la costruzione precedente q spigoli consecutivi e quindi $q+1$ vertici, avremo:$\tilde{F} = n+1$, $\tilde{V} = \bar{v} + p - q$ e $\tilde{S} = \bar{S} + p - (q+1)$. Otteniamo:

$$\tilde{F} + \tilde{V} - \tilde{S} - 1 = n + 1 + \bar{V} + p - q - (\bar{S} + p - q - 1) - 1 = n + \bar{V} - \bar{S} - 1$$

e per ipotesi induttiva:

$$n + \bar{V} - \bar{S} - 1 = 0$$

Consideriamo ora l'ultima fase della costruzione in cui Π viene completato. Rispetto alla fase precedente, aumenta di 1 il numero della facce, mentre il numero degli spigoli e dei vertici resta invariato, in quanto i lati e i vertici del poligono aggiunto sono tutti comuni a quelli preesistenti (vedi figura 3.2).

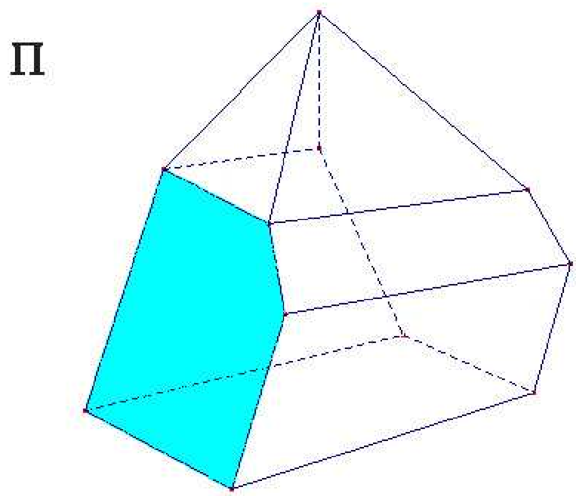

Figura 3.2: Chiusura di Π

Indicando con F,V,S l'ultima configurazione e $\tilde{F}$,$\tilde{V}$,$\tilde{S}$ la penultima, si ha:

$$F + V - S - 1 = (\tilde{F} + 1) + \tilde{V} - \tilde{S} - 1$$

e per l'equazione 3.5

$$F + V - S - 1 = 2$$

□

Corollario 3.1.2.
Dato un poliedro Π *tra* S*,* F *e tra* S*,* V *sussistono le seguenti relazioni:*

$$S + 6 \leq 3F \leq 2S \qquad S + 6 \leq 3V \leq 2S$$

Dimostrazione. Se le facce di Π sono tutte triangolari abbiamo che $2S = 3F$, e di conseguenza se Π ha come facce poligoni qualunque avremo che $2S \geq 3F$.
Analogamente se da ogni vertice di Π escono 3 spigoli, $2S = 3V$, in quanto ogni spigolo congiunge due vertici, e quindi in generale $2S \geq 3V$.
Utilizzando questa disuguaglianza e la formula di Eulero otteniamo:

$$3V = 3S - 3F + 6 \leq 2S$$

e quindi

$$S + 6 \leq 3F$$

In modo analogo si ottiene la seconda relazione del corollario. □

Come la somma degli angoli interni di un poligono di n lati é sempre determinata dalla relazione: $(n-2)\pi$, esiste una relazione analoga anche per la somma degli angoli interni di tutte le facce di un poliedro, illustrata nel seguente corollario:

Corollario 3.1.3.
In un poliedro Π*, indicando con* α *la somma delle ampiezze degli angoli delle facce, vale la relazione:*

$$\alpha = 2\pi(V - 2)$$

Dimostrazione. Ordiniamo con i numeri da 1 a F le facce di Π.
Per ogni $i = 1, ..., F$ considereremo quindi una particolare faccia, e indicheremo con n_i il numero degli angoli della faccia i.
Osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^{F} n_i = 2S$$

infatti n_i corrisponde anche al numero dei lati della faccia i, ed ogni spigolo é comune a due facce, quindi:

$$sum_{i=1}^{F} \frac{n_i}{2} = S$$

Ora la somma degli angoli interni della faccia i é data da $(n_i - 2)\pi$, quindi:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{F} (n_i - 2)\pi = [(n_1 + n_2 + ... + n_F) - 2F]\pi = (2S - 2F)\pi$$

e usando la formula di Eulero si ottiene l'uguaglianza. □

Da questi risultati ricaviamo ora un'importante osservazione che fa notare come non sia possibile costruire un poliedro a piacere, ma esistono particolari limitazioni sul tipo di poligoni utilizzati nella scelta delle facce, che divengono ancora piú forti nel caso dei *poliedri regolari.*

Osservazione 1. In un poliedro qualsiasi almeno una faccia é un triangolo, o un quadrato, o un pentagono.
Inoltre un poliedro qualsiasi deve contenere almeno un vertice comune a tre, o quattro, oppure cinque spigoli.

Dimostrazione. Riscrivendo la prima delle relazioni del corollario 3.1.2 abbiamo:

$$6F - 2S \geq 12$$

Indicando con f_l il numero delle facce con l lati otteniamo

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + ...$$

e

$$2S = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + ...$$

in quanto ogni spigolo é comune a due facce. Sostituendo quindi nella disuguaglianza iniziale, otteniamo:

$$6(f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + ...) - (3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + ...) \geq 12$$

da cui

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - ... \geq 12$$

Per soddisfare la disuguaglianza risulta quindi necessario che almeno uno dei primi tre termini (f_3, f_4 o f_5) deve essere non nullo.

Analogamente partendo dalla seconda relazione della prop. 3.1.2 $3V \geq S + 6$ e indicando con v_s il numero dei vertici da cui escono s spigoli otteniamo che almeno uno fra v_3, v_4 o v_5 deve essere non nullo. $\square$

Nel 1906, Steintz, in un suo articolo, dimostra che se alla relazione di Eulero e alle relazioni

$$3F \leq 2S$$

$$3V \leq 2S$$

si aggiunge come ipotesi che F, V e S siano numeri interi, allora le tre relazioni precedenti non sono solo necessarie, ma anche sufficienti per l'esistenza di poliedri convessi con F facce, V vertici e S spigoli.

3.2 Poliedri dal punto di vista combinatorio

La *struttura combinatoria* di un poliedro é l'insieme dei suoi vertici (che indicheremo con v), spigoli (s), facce (f) e le relazioni che intercorrono fra essi[3].

Definizione 3.5. Dato un poliedro Π considero l'insieme A di tutti i suoi v, s, f. Con la scrittura:

$$x < y$$

indichiamo che x (vertice o spigolo) é contenuto in y (spigolo o faccia).
Tale relazione viene chiama *relazione di incidenza.*
Definiamo *bandiera* di un poliedro Π una terna (v, s, f) tale che $v < s < f$.

Definizione 3.6. Se v é un vertice di un poliedro Π, la *figura al vertice* di Π in v é la poligonale, non necessariamente piana, i cui vertici sono (ordinatamente) i punti medi degli spigoli uscenti da v.

[3]Un primo importante risultato combinatorio é la relazione di Eulero giá dimostrata nella sezione precedente.

Definizione 3.7. La *valenza* di un vertice é il numero degli spigoli, o equivalentemente delle facce, che escono da quel vertice.

3.2.1 Diagrammi di Schlegel

Definizione 3.8. Dati due poliedri Π e Π' con rispettivamente A, A', insiemi dei loro vertici (o nodi), spigoli (o linee) e facce (o regioni), si definisce *isomorfismo combinatorio* tra Π e Π' un'applicazione biunivoca $\tau : A \to A'$ tale che

$$x < y \quad in \quad A \Longleftrightarrow \tau(x) < \tau(y) \quad in \quad A'.$$

Definizione 3.9. Due poliedri Π, Π' si dicono *combinatoriamente equivalenti* se esiste un isomorfismo combinatorio tra Π e Π'.
Dato un poliedro Π, l'insieme degli isomorfismi combinatori di Π in se stesso si indica con $\mathrm{Aut}(\Pi)$.

In questo contesto, quindi, l'unica cosa che conta in un poliedro é il reticolato di vertici spigoli e facce. La relazione di equivalenza combinatoria ci dice quando due poliedri considerati sotto questo punto di vista, rappresentano la stessa cosa. Ad esempio un cubo ed un parallelepipedo nell'analisi combinatoria sono indistinguibili, per cui non valgono in questo caso i valori metrici. É importante notare che se due poliedri sono combinatoriamente equivalenti, allora hanno lo stesso numero di vertici, facce e spigoli, ma non viceversa.

Esempio 3.1. Nella figura 3.3, vediamo l'esempio di un poliedro con F=6, V=8 e S=12, ovvero con lo stesso numero di facce, vertici e spigoli di un cubo, ma non combinatoriamente equivalente ad esso.

Introduciamo ora un particolare modello di rappresentazione dei poliedri chiamato *diagramma di Schlegel*, molto utile nello studio di un poliedro da un punto di vista combinatorio. Ricordiamo innanzitutto la definizione di grafo piano:

Definizione 3.10. Si definisce *grafo piano* un insieme finito di punti (chiamati *nodi*), *linee* e *regioni*, appartenenti a un piano che soddisfano le seguenti condizioni:

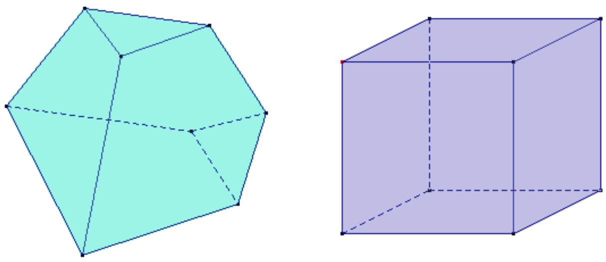

Figura 3.3: Poliedri non combinatoriamente equivalenti

- ogni linea contiene dei nodi alle sue estremitá;
- i nodi si trovano solo alle estremitá delle linee;
- gli unici punti che possono avere in comune due linee sono nodi;
- le linee non si autointersecano;
- le regioni sono esattamente le parti di piano divise dalle linee.

Un diagramma di Schlegel é un particolare grafo piano che ricostruisce l'intera struttura combinatoria di un poliedro non tenendo conto delle caratteristiche metriche (come la lunghezza degli spigoli o la misura degli angoli), superflue come giá detto nell'analisi combinatoria.

Costruzione di un diagramma di Schlegel di un poliedro

Consideriamo un poliedro Π, un punto P molto vicino ad una faccia $f \subset \Pi$ ed un piano α opposto a P rispetto a Π. Con un'opportuna scelta di P e α é possibile costruire una proiezione $p : \Pi \to \alpha$ di centro P in modo tale che $p(f)$ sia un poligono al cui interno si proiettano tutti i restanti vertici e spigoli di Π[4]. Aggiungendo all'immagine della proiezione la regione illimitata del piano non appartenente a $p(\Pi)$ otteniamo un grafo piano chiamato *diagramma di Schlegel* di Π (vedi fig.3.4).

[4]Dal momento che stiamo considerando poliedri convessi, si puó sempre scegliere P in modo che la proiezione risulti biunivoca su vertici e spigoli.

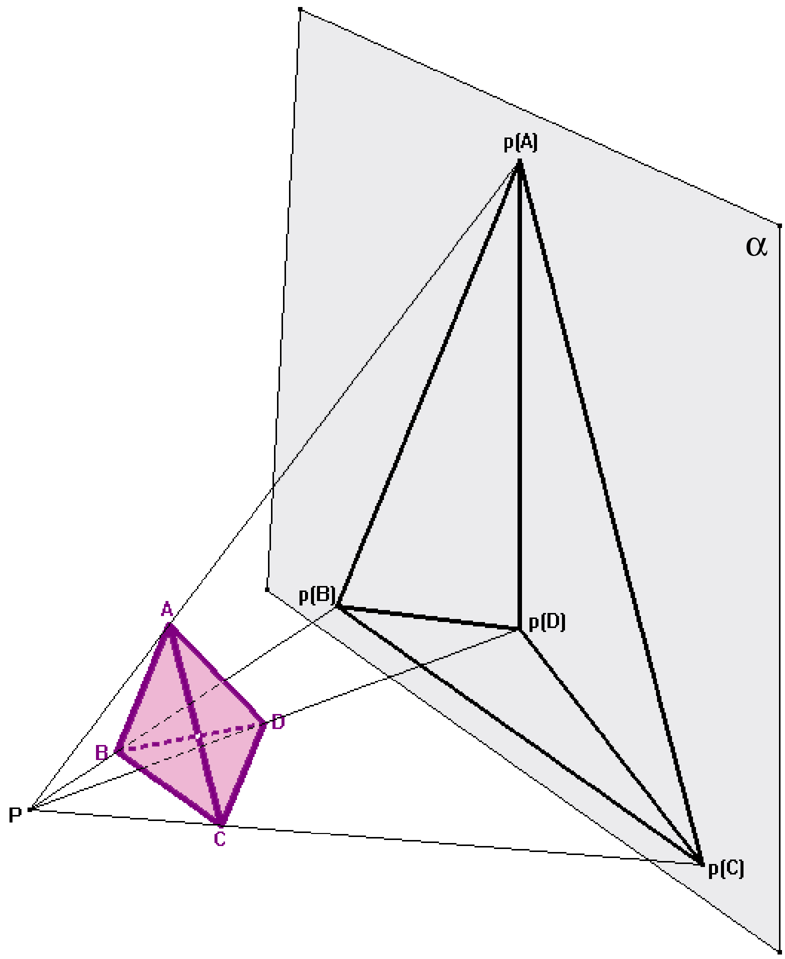

Figura 3.4: Costruzione del diagramma di Schlegel di una piramide

Vediamo nel dettaglio le corrispondenze fra il poliedro Π ed il suo relativo grafo K:

- i vertici di Π corrispondono ai nodi di K;
- gli spigoli di Π corrispondono alle linee di K;
- le facce di Π corrispondono alle regioni di K.

In particolare, la regione illimitata corrisponde alla faccia f vicino alla quale si trova il punto P, le regioni limitate invece sono in corrispondenza con le altre facce. Inoltre, estendendo la relazione di incidenza introdotta nella definizione 3.5 agli elementi di un grafo piano e la relazione di equivalenza combinatoria ai grafi piani [5], abbiamo che Π e K sono combinatoriamente equivalenti.

3.2.2 Poliedri astratti

A questo punto é interessante domandarsi quando un grafo puó essere il diagramma di Schlegel di un qualche poliedro. Trovare quindi condizioni necessarie e sufficienti affinché dato un grafo piano k, esso sia il diagramma di Schlegel di un poliedro Π.
Per rispondere a questa domanda diamo innanzitutto la definizione di *poliedro astratto*, un particolare grafo piano che ci dará le condizioni necessarie affinché K sia un diagramma di Schlegel:

Definizione 3.11. Chiamiamo *poliedro astratto* un grafo piano tale da soddisfare le seguenti sei proprietá:

- ogni linea é adiacente ad esattamente due regioni;
- ogni linea contiene esattamente due nodi;
- dati due modi esiste al piú una linea che li contiene entrambi;
- date due regioni, esiste al piú una linea adiacente ad entrambe;
- ogni nodo é adiacente ad almeno tre regioni;
- ogni regione contiene almeno tre nodi.

É infatti immediato verificare che il diagramma di Schlegel di un poliedro é un poliedro astratto.
Il seguente teorema chiamato *Teorema fondamentale della teoria dei poliedri* e dimostrato dal matematico tedesco Steintz, ci dice infine che essere un *poliedro astratto* é condizione sufficiente per essere un diagramma di Schlegel di un qualche poliedro.

Teorema 3.2.1. *Dato un poliedro astratto K esiste sempre un poliedro Π combinatoriamente equivalente ad esso, o, in altri termini, che ammette K come diagramma di Schlegel*

[5] basta sostituire rispettivamente i termini vertice, spigolo e faccia con i termini nodo, linea, regione

3.3 Sviluppi piani dei poliedri

Per studiare le caratteristiche di un poliedro spesso é utile costruirne dei modelli ottenuti realizzando la loro superficie con poligoni (ad esempio in cartoncino) opportunamente incollati [6].
Consideriamo quindi un poliedro Π ed una sua rappresentazione tridimensionale, si dice *sviluppo piano di* Π ogni figura piana connessa ottenuta dal suo modello, tagliando un opportuno insieme di suoi spigoli che renda possibile la distensione sul piano di quanto ottenuto. É importante tenere presente, dal modo costruttivo con cui si definisce lo sviluppo piano di Π, che uno sviluppo piano non é solo una figura piana ma anche un insieme di regole di assemblaggio (quali facce vadano unite in quali vertici) che determinano particolari identificazioni di lati e vertici tali da permettere la ricostruzione del modello tridimensionale da cui si era partiti. Come nello studio combinatorio attraverso i diagrammi di Schlegel non si tiene conto delle caratteristiche metriche, nello studio di poliedri attraverso gli sviluppi piani si ignora la loro disposizione nello spazio.

Costruzione di uno sviluppo piano di un poliedro
In geometria descrittiva si ottiene lo sviluppo di un poliedro attraverso una serie di costruzioni geometriche che trasportano la superficie del solido su un piano, eventualmente tagliandola ma senza sconnetterla ne deformarla, a partire da una sua rappresentazione tridimensionale.
Per costruire lo sviluppo piano di un poliedro Π possiamo scegliere uno dei piani su cui giacciono le facce del poliedro. In seguito tagliando la superficie lungo spigoli opportuni, portiamo tutte le facce del poliedro sul piano scelto tramite isometrie successive.
Nell'esempio in figura 3.5 é riportata la costruzione dello sviluppo piano di una piramide a base triangolare. Le faccie f_1, f_2, f_3 vengono portate sul piano α a cui appartiene la faccia f_4, tramite rotazioni ρ_1, ρ_2, ρ_3, rispettivamente di angoli θ_1, θ_2 e θ_3 e assi r_1, r_2, r_3, passanti per i lati di f_4.

[6] Oggi é possibile ottenere questi modelli virtualmente attraverso la computer grafica, facendo anche uso di animazioni

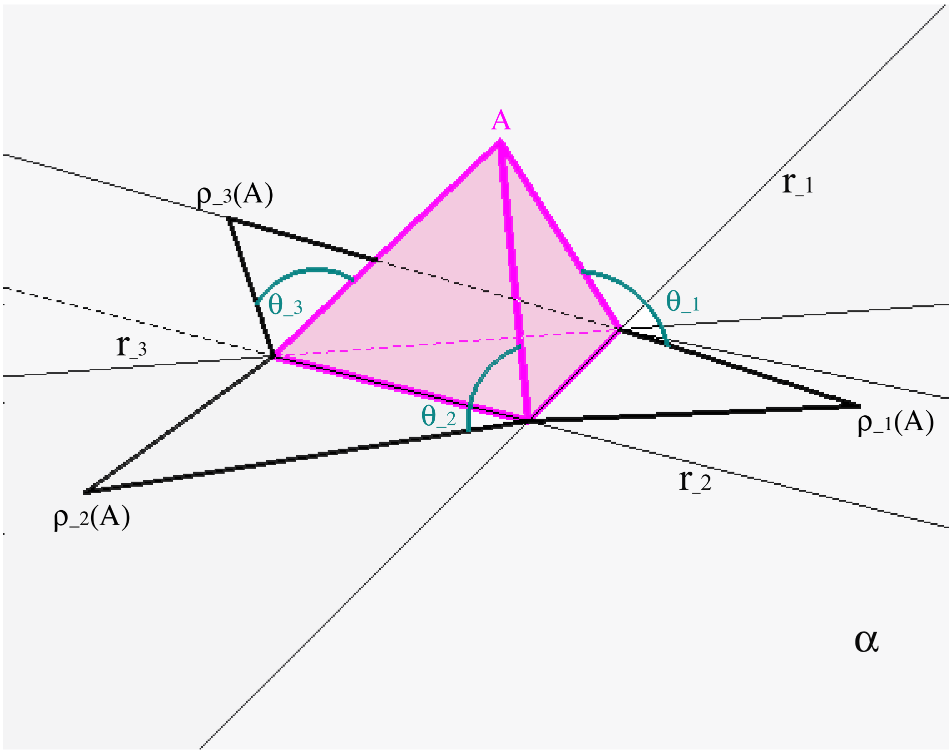

Figura 3.5: Costruzione dello sviluppo piano di una piramide

3.3.1 Condizioni metriche

Viste in 3.2.2 le condizioni necessarie e sufficienti affinché un grafo piano sia un diagramma di Schlegel di un poliedro, vediamo ora cosa possiamo dire su poliedri diversi dal punto di vista metrico [7], ma che hanno in comune lo stesso diagramma di Schlegel. In particolare ci chiediamo quali ulteriori condizioni ci garantiscono che a partire da un diagramma di Schlegel si possa individuare un unico poliedro.
Una risposta é data dal seguente teorema di Cauchy:

Teorema 3.3.1. *Siano* Π *e* Π' *due poliedri combinatoriamente equivalenti e sia* τ *un isomorfismo combinatorio fra* Π *e* Π', *supponiamo inoltre che per ogni faccia* f *di* Π,

[7] Lo studio della struttura metrica di un poliedro é lo studio di un poliedro come spazio metrico, cioé come spazio dotato di distanza fra punti (vedi 3.2).

$\tau(f)$ di Π' sia isometrica a f. Allora esiste un'isometria tra Π e Π'.
In particolare gli angoli diedri formati da facce corrispondenti sono congruenti.

Per la dimostrazione si veda [**?**].
Il teorema di Cauchy, in termini intuitivi, ci dá importanti informazioni relative alla costruzione di rappresentazioni di poliedri a partire dal loro sviluppo piano.
Supponiamo di costruire un poliedro col cartoncino. Assegnato un particolare sviluppo piano, quindi le facce congiunte in una figura piana e le regole di assemblaggio , non ci sono piú ambiguitá: é possibile ottenere un unico e solo poliedro. Inoltre se all'inizio della costruzione il poliedro era flessibile, quando la costruzione é conclusa il poliedro é rigido.
Questa situazione concreta corrisponde esattamente al teorema di Cauchy:

- assegnare le regole di assemblaggio e un determinato numero di facce (e di conseguenza di vertici e spigoli) corrisponde ad assegnare il tipo di poliedro a meno di isomorfismo combinatorio;

- avere determinate facce di cartoncino, quindi determinati poligoni con una precisa estensione metrica, corrisponde ad assegnare le facce a meno di isometria.

Quindi, per il teorema di Cauchy, non si possono ottenere due poliedri, non isometrici fra loro, a partire da questi dati.
Un'altra interessante corrispondenza fra questo teorema e le costruzioni pratiche di poliedri si trova nelle costruzioni in cui si parte solo dallo scheletro degli spigoli (ad esempio con dei legnetti o delle cannucce). In questo tipo di costruzioni i modelli risultanti sono flessibili, a meno che il poliedro non abbia tutte le facce triangolari. Tale osservazione corrisponde al fatto che l'analogo del teorema di Cauchy nel caso bidimensionale é falso.
Infatti se di un poligono vengono assegnate le lunghezze dei lati e la struttura combinatoria (numero di lati e quali fra di questi sono adiacenti), allora il poligono non é univocamente determinato a meno che non sia un triangolo. In altre parole é possibile trasformare un poligono in un altro cambiando gli angoli, ma senza cambiare la lunghezza dei lati; ad esempio é possibile trasformare un quadrato in un rombo. Di conseguenza quando le facce dei poliedri saranno date da piú di tre lati (quindi da piú di tre legnetti

o cannucce) il modello comincerá ad essere flessibile, proprio per il fatto che gli angoli di quel poligono potranno cambiare senza cambiare la lunghezza dei lati.
É proprio per questo motivo che il modello di un icosaedro (20 facce triangolari, ogni vertice ha valenza cinque) é piú facile da costruire e piú stabile del modello di un cubo, *per l'icosaedro non c'é bisogno di sistemare gli angoli, vanno a posto da soli.*
Si puó dimostrare che se un poliedro é assegnato tramite la sua struttura combinatoria e la lunghezza degli spigoli, allora il poliedro é rigido se e solo se tutte le sue facce sono triangolari (vedi Roth 1981)

3.3.2 Sistema di poligoni

Un *sistema di poligoni* é una figura connessa nel piano composta da poligoni congiunti tra di loro tramite lati in comune, e dotato di alcune regole prescritte di identificazione, chiamate anche di incollamento, di lati e vertici.
Per incollare due lati stabiliamo una corrispondenza biunivoca tra i loro punti e identifichiamo punti corrispondenti, considerandoli cosí come lo stesso punto della figura. Le regole di identificazione sono quindi una specificazione delle corrispondenze fra i punti sui lati. In particolare se ad esempio il lato A_1B_1 di un poligono P_1 é incollato al lato A_2B_2 di un poligono P_2 in modo che il vertice A_1 é identificato con il vertice A_2, ed il lato B_2C_2 del poligono P_2 é incollato al lato B_3C_3 di un poligono P_3 in modo che il vertice B_2 é identificato con il vertice B_3, allora anche il vertice B_1 é automaticamente identificato con il vertice B_3, e B_1, B_2 e B_3 sono considerati come uno stesso vertice comune quindi a tre lati e a tre poligoni.
Assumiamo inoltre che le regole di identificazione soddisfino le seguenti condizioni:

1. i lati possono essere identificati solo se hanno la stessa lunghezza (in altri termini la corrispondenza fra i punti identificati di lati incollati preserva la lunghezza);

2. ogni lato di ogni poligono é identificato al massimo ad un solo altro lato.

Evidentemente lo sviluppo piano di un poliedro é un particolare sistema di poligoni: le regole di identificazione, date astrattamente, corrispondono alle regole di assemblaggio intrinseche nel modello tridimensionale.
Vi sono, analogamente a quanto visto nel caso dei diagrammi di Schlegel, condizioni

sufficienti affinché un sistema di poligoni sia lo sviluppo piano di un qualche poliedro.

NOTAZIONI

- Dato un poliedro Π con F facce ($f_1, \quad f_2, \quad ..., \quad f_F$), indicheremo con $P_1, \quad P_2, \quad ..., \quad P_F$ i poligoni corrispondenti che compongono il suo sviluppo;
- dato uno spigolo s, appartenente a due facce, verrá considerato come lato di entrambi i corrispondenti poligoni, e denotato dallo stesso simbolo s per entrambi i poligoni;
- dato un vertice v di valenza K, sará considerato vertice appartenente a tutti i K corrispondenti poligoni e denotato per tutti dallo stesso simbolo v.

Osservazione 2. L'insieme di poligoni che costituiscono lo sviluppo di un poliedro soddisfa le seguenti condizioni:

1. Ogni lato é comune a esattamente due poligoni, e ogni vertice é comune ad almeno tre poligoni;
2. il numero F dei poligoni, V dei vertici distinti, e S dei lati distinti soddisfa la relazione di Eulero 3.1.1;
3. due poligoni P e P' possono essere connessi da una successione, opportunamente ordinata, di poligoni dello sviluppo: $P = P_0, P_1, ..., P_k = P'$ tale che P_0 e P_1, P_1 e P_2, ..., $P_k - 1$ e P_k hanno un lato in comune;
4. i lati in comune di due poligoni hanno uguale lunghezza;
5. la somma degli angoli a un vertice, comune a piú poligoni, é minore di 2π[8]

Tale osservazione puó essere facilmente dedotta per costruzione e definizione di uno sviluppo piano.

[8]Infatti la somma delle ampiezze degli angoli piani che convergono ad uno stesso vertice di un poliedro é minore di 2π.

Teorema 3.3.2 (Aleksandrov's theorem)**.** *Un sistema di poligoni é lo sviluppo di un poliedro se soddisfa le condizioni* $(1)-(5)$

Questo teorema é stato dimostrato da Aleksandrov in [28].
Si notino le connessioni fra questo teorema e il teorema di Cauchy. Il teorema di Aleksandrov dimostra a partire da particolari sistemi di poligoni, che esiste un poliedro convesso e il teorema di Cauchy prova che tale poliedro é unico (a meno di congruenza e simmetria).

Secondo Esempio.

Capitolo 4

Laboratorio

In questo capitolo verrá esposta un'analisi di alcune situazioni significative emerse durante la sperimentazione con Anna [1], alunna di una terza superiore di un liceo di scienze sociali.

4.1 Il caso di Anna

Ricordiamo, come giá esposto nel Capitolo 2, che di fronte ad un particolare caso di deficit visivo, non si puó trovare un'unica e generalizzante strategia didattica, ma bisogna tenere conto di tutta una serie di fattori variabili che possono essere: il tipo di patologia, la prognosi, l'etá, l'educazione ricevuta il tipo di attivitá svolte al di fuori della scuola, la propria personalitá, il proprio vissuto, le aspirazioni personali di vita, le strategie adattative agite e cosí via. É quindi indispensabile conoscere la storia di Anna.

Fin dall'infanzia Anna, ha subito una progressiva perdita della vista a causa di un glaucoma; a 11, 12 anni riusciva ancora a leggere lettere in nero grandi un centimetro, ora vede solo ombre e luci. Il caso di Anna, quindi, non puó essere ricondotto né alla categoria di cieco congenito, né a quella di cieco tardivo. Quello che conta non é solo il fatto che ha perso la vista a 11, 12 anni, ma tutte le fasi che ha vissuto da una situazione all'altra, il clima di forti speranze di poter recuperare la vista. Anna, infatti, é stata sottoposta a molti interventi oculistici, rivelatisi poi inutili, che hanno avuto le loro ripercussioni

[1] svoltasi tra il 21 dicembre 2009 e il 26 aprile 2010

sia a livello fisico, ma soprattutto sul piano psicologico, per la frantumazione del sogno, il crearsi di una bella attesa e poi la delusione sempre più grande, per la perdita di molte esperienze infantili, per esempio, il gioco, il dinamismo e il movimento. Tutta la sua vita é stata segnata dall'attesa di recuperare la vista, ed in questa attesa tutto é stato inibito: le potenzialità intellettive delle esperienze, l'autonomia di movimento , il riconoscimento delle capacità di saper vivere, saper giocare, sapersi vestire.., tutto é stato rinviato nell'attesa di recuperare una sensorialitá alla quale si ritiene dipendano le autonomie. Poi é arrivata ad un'età in cui é stato chiaro che il percorso terapeutico chirurgico e tutte le sperimentazioni possibili erano state condotte invano, anzi, in modo addirittura peggiorativo.

Per comprendere quanto sia delicato questo problema é interessante leggere le parole di Paola Zaniboni:

> Il possesso di un benché minimo visus offre sicuramente vantaggi, ma crea anche problemi. Se é difficile per i genitori di un cieco assoluto accettare questa minorazione, a maggior ragione lo é per chi ha un figlio ipovedente. La presenza infatti di questo residuo favorisce l'insorgere di aspettative che in alcuni casi possono essere giustificate, ma in altri no. Inoltre la famiglia, di solito, non accetta in modo assoluto l'uso di strumenti differenziati e tanto meno l'apprendimento della scrittura e lettura Braille. Questo é un grave errore [...]. Riuscire a scrivere seguendo linee spesse un paio di millimetri e producendo lettere alte un centimetro, utilizzando magari una particolare lampada che gli illumina il foglio, a mio avviso non significa nulla e non é per nulla utile. Tanto piú che, nella maggioranza dei casi, questi alunni non riescono a leggere ció che hanno scritto. La lettura e la scrittura sono strumenti del comunicare e servono per la produzione e per la fruizione. Se non vengono utilizzati per questo a cosa servono? Come si può parlare di comunicazione quando non c'é ritorno? Io penso, perció, che innanzitutto é necessario conoscere quale sia la probabile evoluzione del residuo visivo e se sia bene stimolarlo a usarlo con parsimonia. In ogni caso quando esso non permette la lettura e la scrittura in caratteri accettabili quali, per intenderci, quelli usati in prima elementare, é privo di logica costringere un bambino a

> sforzarsi ad imparare una cosa che per lui non ha significato e non lo aiuta in nessun modo. Offriamogli uno strumento che gli permetta una reale comunicazione con il mondo e, quando sará un po' piú grande, o affiancheremo con l'altro strumento della scrittura in nero, sia per una sua personale conoscenza, sia per fini molto pratici. Se poi, in seguito, l'alunno riacquisterá un grado di visus sufficiente, abbandonerá il Braille, ma nella malaugurata ipotesi in cui il residuo dovesse calare o addirittura scomparire egli si troverá giá un po' preparato, almeno strumentalmente, ad affrontare questo duro cambiamento. Io sono del parere che la soluzione migliore é sempre quella di offrire il massimo possibile, non quella di fomentare false speranze che mantengono in difficoltà anche il bambino. (, 1986, pagg. 101-102)

E ci ritroviamo oggi, di fronte ad una ragazza che vede solo luci ed ombre e a cui manca un importante percorso sia esperienziale che di riorganizzazione delle modalitá conoscitive (l'integrazione di tutte le percezioni ottenute con i sensi vicarianti della vista), che limita le sue capacitá di autonomia, di apprendimento, di autositma personale ... .

La scelta del percorso didattico é stata quindi influenzata da tutti questi fattori. Da un punto di vista di contenuto, é stato scelto un argomento di geometria solida proprio per andare incontro alle sue nuove esigenze di prendere confidenza con l'esplorazione tattile [2]. Da un punto di vista di modalitá di svolgimento le sono sempre stati lasciati i suoi spazi ed i suoi tempi, con la consapevolezza di quanto sia più lenta l'esplorazione tattile rispetto al colpo d'occhio in generale, e con ancor piú consapevolezza del fatto che per lei, era una delle prime volte in cui le veniva richiesto di usare il tatto per capire, comprendere, azzardare ipotesi, prendere coscienza di oggetti matematici sconosciuti. Infine, é stato molto importante, non imporle alcun tipo di aspettative, sia per evitare scoraggiamenti, sia perché si voleva vederla pensare, ragionare, non certo spingerla ad imparare a memoria significati vuoti per non tradire le aspettative, ed infine perché, da un certo punto di vista, era lei ad insegnare molto.

[2] senza dimenticare, quanto sostenuto nel Capitolo 2 sull'utilitá della geometria a vari livelli di organizzazione delle conoscenze

4.2 Analisi in termini di mezzi semiotici di oggettivazione

Il tema centrale del laboratorio proposto ad Anna é stata la presentazione di alcune parti della geometria dei poliedri convessi e l'introduzione della geometria piana a partire da quella solida. Il lavoro é stato suddiviso in tre principali percorsi: una classificazione generale dei poliedri convessi, i loro sviluppi piani e le sezioni del cubo. Ognuno di questi percorsi é stato per l'alunna un primo incontro con il pensiero matematico, in particolare con la geometria. Partendo dalla percezione delle forme esplorate, abbiamo voluto indurre Anna ad osservare, classificare, stabilire relazioni, compiere operazioni spazio-temporali e compiere operazioni logighe. In particolare ci si é soffermati sul passaggio dal 3d al 2d, proprio in quanto l'idea di bidimensionalitá, difficile da interiorizzare per un qualunque alunno a causa delle difficoltá di astrazione nell'immaginare un oggetto reale senza spessore, é di ancor piú difficile accesso per un alunna non vedente (per chi non vede il bidimensionale non esiste).

La progettazione del laboratorio, é stata ispirata alla teoria di Radford, soprattutto per quello che riguarda la costruzione degli strumenti e degli artefatti, che sono stati utilizzati come mezzi semiotici di oggettivazione per rendere accessibile ad Anna gli enti della geometria scelti, a diversi livelli di generalizzazione. In particolare, l'idea di costruire una "matematica tattile"si é ispirata alle ricerche e alle sperimentazioni del museo tattile *Anteros* dell'istituto F. Cavazza, che é stato visitato e studiato nella fase preliminare del lavoro fatto per la stesura di questa tesi.

Verranno analizzati alcuni episodi significativi seguendo il seguente schema:

- Descrizione generale del progetto ideato;
- Obiettivi didattici[3]
- Oggetti matematici in questione;
- Mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati;

[3]in riferimento alla teoria di Radford, con obiettivi didattici si indicherá, quindi, cosa SI é voluto far oggettivare, di cosa si é voluto farla prendere coscienza

- Invarianti operatori presenti e livelli di generalizzazione raggiunti.

4.2.1 Classificazione dei poliedri

Partendo da un'analisi tattile di alcuni poliedri in cartoncino é stata introdotta ad Anna una prima terminologia matematica (facce, spigoli, vertici), le sono state richieste alcune osservazioni sulle differenze fra i vari poliedri proposti (lunghezze degli spigoli, forme delle facce, numero dei vertici delle facce e degli spigoli), per poterle chiedere infine di fronte ad una serie di poliedri una loro possibile classificazione.

Obiettivi didattici

- Avere l'occasione di esprimere le proprie interpretazioni degli oggetti presentati e di discutere le proprie idee concettuali, che tramite la pratica potranno evolvere verso il sapere istituzionale.

- L'acquisizione di una terminologia, non ridotta a vuote definizioni, ma legata strettamente agli enti ideali a cui si riferisce, attraverso un'attenta manipolazione, che fisserá quindi i concetti "tra le sue mani";

- Riuscire, nelle fasi di terminologia, a esprimersi in maniera sempre piú cosciente, migliorando le capacitá di espressione linguistica.

- Stimolare le sue capacitá di classificazione, che richiedono a loro volta processi di analisi, sintesi e astrazione.

Oggetti matematici

- Poliedri convessi, in particolare: parallelepipedi, piramidi e prismi;

- Elementi caratteristici dei poliedri: vertici, facce e spigoli;

Mezzi semiotici di oggettivazione

I mezzi semiotici prncipalmente utilizzati sono stati: una strumentazione di modellini solidi, il linguaggio naturale, l'esplorazine tattile della strumentazione fornita. Per quanto riguarda la strumentazione, sono stati costruiti:

- Cubi e parallelepipedi, in cartoncino e scheletrati [4] di diverse dimensioni;
- Piramidi a base quadrata, e triangolare in cartoncino e scheletrate;
- Prismi a base triangolare, in cartoncino e scheletrati;
- Un cilindro in cartoncino.

In particolare i modellini in cartoncino sono stati costruiti con la massima precisione possibile, onde evitare informazioni aggiuntive che distraessero l'alunna dai particolari fondamentali su cui porre l'attenzione. Sapendo che Anna si trovava di fronte ad una delle sue prime esperienze di manipolazione tattile in assenza quasi totale della vista, é stato inoltre deciso di evidenziare gli spigoli dei poliedri attraveso pezzi di nastro adesivo.

Livelli di generalizzazione

L'esplorazione tattile di Anna é partita dal primo livello di generalizzazione, quello fattuale. L'allieva, afferrando fra le mani i modellini proposti, ha potuto riconoscere le proprietá strutturali di forma globale e di volume. Abbiamo inizialmente proposto un'esplorazione libera di queste forme a lei nuove[5]. La prima impressione di Anna é stata: "é un quadrato, anzi ha tante forme fatte a quadrato". Anna ha successivamente disegnato, su richiesta ma senza vincoli di modalitá, il cubo sul piano in gomma (vedi figura 4.1).

Le differenze da lei osservate sono state: "con il cubo posso fare piú cose che con il disegno ". Questa riflessione, puó essere considerata una primo schema invariante, che Anna ha inconsciamente formulato, per poter fare una prima distinzione fra una

[4] i materiali utilizzati sono stati cannucce e stuzzicadenti

[5] Attraverso domande sulle sue conoscenze preliminari, Anna ha spiegato di non conoscere i poliedri, anche senza una documentazione dettagliata dei suoi programmi scolastici, sicuramente questi oggetti non sono rimasti impressi nella sua conoscenza

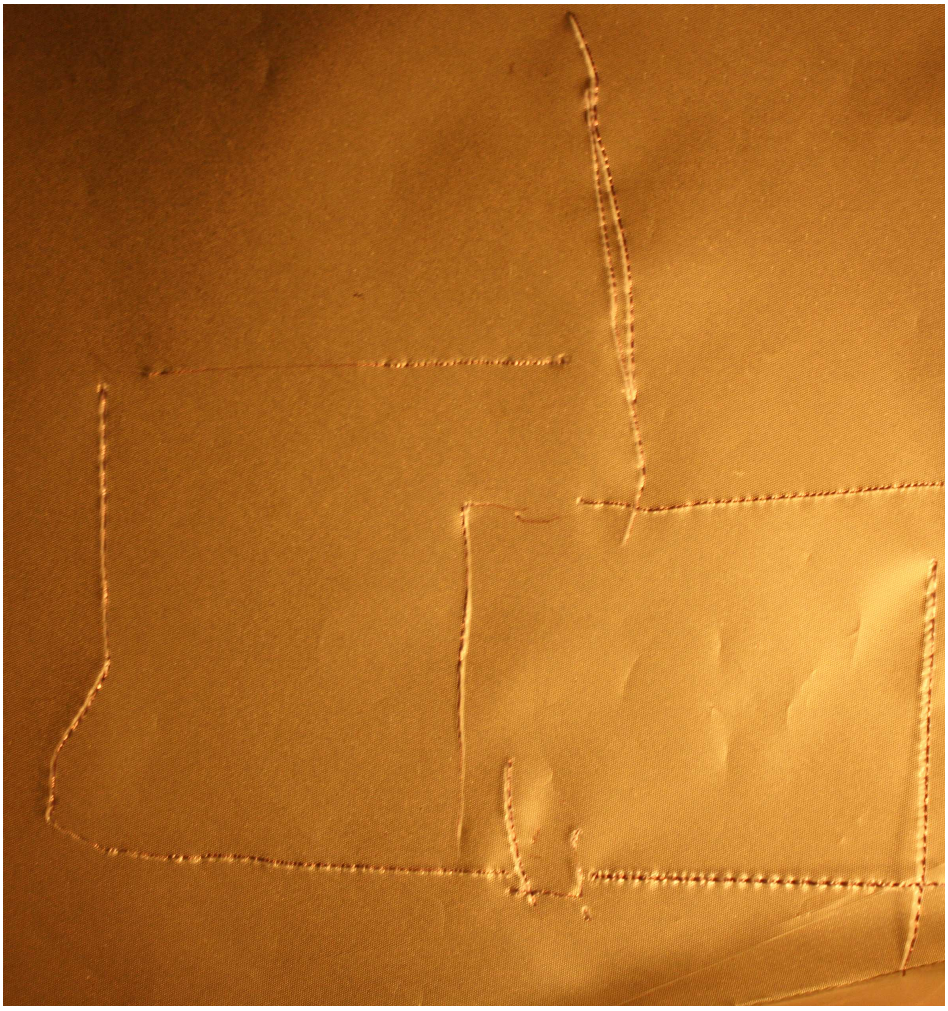

Figura 4.1:

figura solida ed una piana. Per rafforzare questa sua idea, si é creato un legame con precisi movimenti delle sue mani, guidando Anna nell'esplorazione tattile e ragionando in termini di libertá di movimento prima delle sue mani sui due diversi oggetti, e poi di questi oggetti nei loro ambienti: il quadrato immerso nel piano ed il cubo immerso nello spazio. Sempre a livello di generalizzazione fattuale, seguendo con le dita i contorni e le superfici dei modellini, attraverso movimenti fini per l'individuazione dei dettagli e delle parti piú significative, sono stati mostrati ad Anna i vertici, gli spigoli e le facce[6]

[6]Si noti che giá nella prima esplorazione Anna aveva intuitivamente percepito le facce del poliedro indicandole con la parola "forme".

del poliedro. Le é stata proposta un'associazione tra ognuno di questi elementi e una particolare senzazione:

- il vertice: "é dove punge";
- lo spigolo: "é dove si possono dare pizzicotti";
- la faccia: "é dove si possono appoggiare le dita ed esercitare movimenti senza uscire dalla faccia stessa."

Queste corrispondenze fra le percezioni tattili, il linguaggio naturale e la terminologia, sono diventate per Anna degli ottimi schemi invarianti che le hanno permesso di astrarre tali definizioni dal solido particolare che stava esplorando e riconoscerle in altri modellini riproposti negli incontri successivi, portandola quindi verso un secondo livello di generalizzazione, quello contestuale. L'importanza di questi schemi si é rivelata particolarmente significativa in un incontro successivo[7]: Anna ha usato proprio queste corrispondenze per spiegare il significato di facce, vertici e spigoli ad un altro studente presente durante il laboratorio. Un'altra proposta molto interessante é stata quella di classificare un certo numero di modellini, in forme e materiali diversi, a partire sia da quanto aveva appreso fino ad allora, ma soprattutto seguendo una sua strada personale senza vincoli particolari, se non quello di fornire una motivazione logica della sua suddivisione. Tale esercizio richiedeva un certo livello di generalizzazione. L'alunna doveva infatti riuscire a riconoscere ognuno dei modellini proposti: erano della stessa forma di tutti quelli che erano stati esplorati precedentemente, ma alcuni erano piú piccoli, altri piú grandi, uno dei cubi era di spigolo 20 cm e quindi non poteva tenerlo globalmente fra le mani, per il suo riconoscimento doveva quindi analizzare piú parti in tempi diversi e quindi ricomporle nella sua mente, e attraverso gli schemi invarianti riconoscere la sua identitá di cubo; doveva inoltre trovare una strategia di similitudini fra gli oggetti scelti non guidata, ma scelta a suo arbitrio. Vista la libertá assegnata, avrebbe potuto scegliere una classificazione in base al materiale, oppure dividere i solidi in cartoncino da quelli scheletrati; invece, ha scelto una classificazione in base alle facce e agli angoli diedri, seguendo l'invariante della forma: i parallelepipedi, le piramidi, i prismi e il cilindro, che stava in classe da solo (vedi figura 4.2).

[7] erano passati circa due mesi

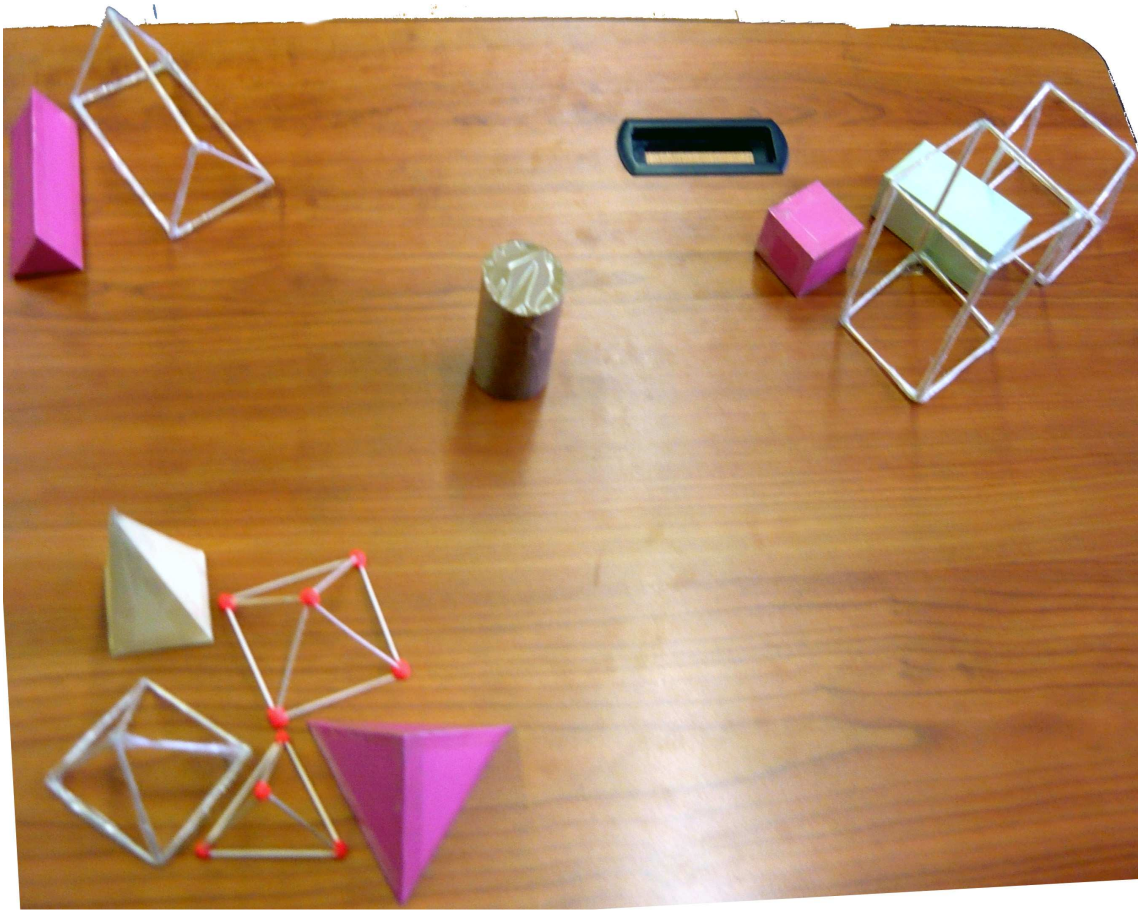

Figura 4.2: Classificazione di Anna

Ovviamente, Anna non aveva a sua disposizione un buon registro linguistico per poter motivare le sue scelte; le sue osservazioni sono state:

> Sono uno diverso dall'altro... alcuni non sono uguali ma hanno forme uguali.
> ..Ho pensato a tutto, un pó la grandezza, un pó la forma...

Si é ritenuto comunque, data la sicurezza con cui operativamente ha effettuato la sua scelta, che abbia, almeno a livello intuitivo, interiorizzato le caratteristiche studiate sui poliedri proposti e sia riuscita quindi a generalizzare, partendo dagli schemi invarianti rappresentati dai singoli elementi (vertici, facce e spigoli sotto forma di stuzzicadenti o cannucce o cartoncino), a un concetto piú generale di forma.

4.2.2 Sviluppi piani

In questa fase del laboratorio sono stati presentati ad Anna gli sviluppi piani dei poliedri. All'inizio le sono stati proposti a partire da un dato modellino solido, concretizzando quindi un passaggio concettuale dal tridimensionale al bidimensionale. In seguito, le éstato proposto il procedimento inverso: la ricostruzione dei modellini solidi, prima concreta, ed in seguito a livello astratto, a partire dagli sviluppi piani.

Obiettivi didattici

- Entrare in contatto con due rappresentazioni diverse di uno stesso oggetto matematico, riuscendo quindi ad avere punti di vista diversi di uno stesso ente e ad avvicinarsi, alla sua concettualizzazione;

- Sviluppare la visione spaziale attraverso la possibilitá di osservare un diverso tipo di costruzione (saper quindi vedere sempre piú con gli occhi della mente);

- Riuscire a ricostruire, almeno in parte mentalmente, particolari poliedri, favorendo quindi l'immaginazione spaziale.

Oggetti matematici

- Poliedri convessi

- Sviluppi piani di poliedri convessi

- Poligoni

Mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati

Come nel percorso precedente, si sono utilizzati il linguaggio naturale, l'esplorazione tattile e una strumentazione di modellini in cartoncino. In questo caso sono stati ricostruiti gli stessi modellini solidi proposti nel primo percorso ma con le facce incollate tramite pezzi di nastro adesivo rimovibile. Inoltre sono stati preparati sviluppi piani giá aperti, con linguette di chiusura e senza.

Figura 4.3: Esplorazione tattile di un modellino di uno sviluppo piano

Livelli di generalizzazione

Un primo livello di generalizzazione é stato raggiunto aprendo concretamente, attraverso la rimozione delle linguette di nastro adesivo, i modellini che le venivano proposti. Piú complicato é stato invece il percorso inverso: partendo dagli sviluppi piani in cartonicino bisognava riconoscere quale poliedro rappresentassero. Il processo di oggettivazione che consentiva ad Anna tale riconoscimento é molto sofisticato e richiede il raggiungimento di un livello generalizzazione elevato. A partire dagli sviluppi piani Anna doveva riconoscere un tetraedro, un prisma a base triangolare, e una piramide a base quadrata, in questo caso avendo a disposizione due sviluppi differenti dello stesso poliedro. In termini di oggettivazione, Anna doveva direzionare il suo atto intenzionale verso un oggetto tridimensionale avendo a disposizione mezzi di oggettivazione che mediavano un'attivitá nel piano. Anna percorreva con le dita i contorni del cartone con cui erano stati preparati gli sviluppi piani. La concretezza e fisicitá del cartoncino consentiva a Anna di manipolare nell'ambito di un'attivitá riflessiva mediata della geometria, un mezzo semiotico di oggettivazione che non coinvolgesse la vista. Al cartoncino, Anna accompagnava altri mezzi di oggettivazione: la percezione tattile con i polpastrelli, il movimento lungo i contorni dello sviluppo, i gesti di pointing e manipolativi. L'attivitá di riconoscimento é sostenuta in maniera determinante dal linguaggio naturale, che costituisce un ponte verso la dimensione tridimensionale che non é accessibile in termini embodied, ma richiede il riconoscimento degli invarianti caratteristici del solido che Anna doveva riconoscere: la relazione tra facce, spigoli e vertici che caratterizzano i poliedri in questione a partire da caratteristiche bidimensionali accessibili sensorialmente, Anna ha compiuto un atto di generalizzazione che le permette di riconoscere il poliedro in termini puramente strutturali e di caratteristiche assolutamente generali, che non sono legati ad alcun caso specifico. Bisogna sottolineare che Anna non riconosceva i poliedri in questione (tetraedro, prisma, piramide etc.) pensando ad un solido specifico composto da un certo materiale, di un certo peso, di un certo volume, ma il poliedro nella sua generalità tipica della matematica. Occorre osservare questo epis che Anna compie anche con un altro atto di generalizzazione estremamente sofisticato: toccando i cartoncini ne riconosceva l'appartenenza al piano, quando in realtà sta toccando un oggetto tridimensionale. Anna non sta toccando un mero pezzo di cartone, ma un oggetto semiotico di oggettivazione di cui riconosce il significato storico e culturale. Anna era consapevole di toccare un pezzo di cartone, ma era anche consapevole che le permette di oggettivare la nozione di spazio bidimensionale. Questo episodio conferma l'uso sincronico dei mezzi semiotici di oggettivazione previsto dalla teoria di Radford. L'esempio descritto evidenzia addirittura la presenza di un nodo semiotico in cui gesti di pointing e manipolazione, attivitá aptica, uso del linguaggio naturale, artefatti e strumenti contemporaneamente attivano l'oggettivazione, in questo caso il riconoscimento, del poliedro, di cui Anna possedeva lo sviluppo piano. Bisogna sottolineare che i mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati, in particolare ci si sta riferendo ai cartoncini, alle linguette di nastro adesivo, il piano in gomma etc., non sono degli strumenti che sul piano biologico e fisiologico sostituiscono il deficit visivo di Anna. Attraverso questi mezzi semiotici di oggettivazione, la dimensione soggettiva di Anna incontra quella culturale della matematica, in un'attività riflessiva che indirizza culturalmente "freccia" intenzionale di Anna verso i poliedri, oggetti la cui ontologia é storica e culturale. La situazione descritta é sicuramente diversa da quella che sarebbe stata descritta nel caso di alunni vedenti. La differenza, tuttavia, consiste solo nella scelta di mediatori opportuni che tengano conto delle caratteristiche dei soggetti non vedenti. I risultati che Anna ha conseguito, da un lato possono essere raggiunti anche da altri alunni non vedenti, dall'altro suggeriscono attivitá che si possono proporre anche ad alunni cosiddetti normodotati.

4.2.3 Sezioni di un cubo

Nell'episodio che stiamo per descrivere, é stato chiesto ad Anna di ricavare alcune figure piane sezionando opportunamente un cubo: un triangolo, un parallelogramma, una quadrato, un rettangolo. L'episodio che si vuole analizzare si inserisce nell'ultima fase del laboratorio che é stato proposto ad Anna. La consegna era particolarmente difficile, per l'interazione di diversi mezzi di oggettivazione che Anna doveva gestire e per il livello di generalizzazione che doveva raggiungere. Gli obiettivi didattici rimangono gli stessi del percorso descritto in 4.2.2.

Oggetti matematici

- Poliedri convessi
- Sezioni piane di poliedri convessi
- Poligoni

Mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati

In questo caso, sono stati usati modellini di cubi costruiti con la creta e un filo di nylon per poterli sezionare.

Nella fase precedente del laboratorio Anna doveva riconoscere il risultato della sezione del cubo che era stato giá preparato; Anna doveva solo separare il cubo lungo il taglio che le era accessibile tramite le linguette di nastro adesivo e riconoscere i poliedri ottenuti e la figura piana sezionata. La consegna contraria, ottenere una determinata figura piana assegnata sezionando opportunamente un cubo, é cognitivamente molto piú impegnativa e richiede un controllo matematico e un livello di generalitá molto piú elevati. Inoltre, questa attivitá richiede, da parte dell'allievo, un buon pensiero anticipatorio perché una volta iniziato il taglio non é possibile correggere il percorso del filo. Per svolgere la consegna, Anna aveva a disposizione un cubo di creta, un filo di nylon, una matita per solcare la creta e dei cartoncini con la forma delle figure piane che doveva ottenere sezionando il cubo. Anna prima toccava il cubo di creta con gesti di pointing e manipolativi, poi utilizzava l'attivitá aptica per riconoscere facce, spigoli e vertici e individuare le linee da solcare con la matita. Dopo aver solcato il cubo con la matita, Anna tagliava il cubo con il filo di nylon.

Dopo aver tagliato il cubo oggettivava la sezione ottenuta sempre con gesti di ponting e manipolativi, l'attività aptica, l'attività cinestetica e, successivamente, attivando lo stesso insieme di mezzi semiotici di oggettivazione, confrontava la sezione ottenuta dal cubo di creta con le figure piane di cartone. Questa attivitá richiede da parte dell'allievo un buon pensiero anticipatorio perché una volta iniziato il taglio non é possibile correggere il percorso del filo attraverso il cubo di creta; se i solchi non sono stati disegnati correttamente, occorre ripetere il procedimento dall'inizio. Anna ha svolto questa attivitá con successo, riuscendo quasi sempre al primo tentativo ad effettuare il taglio corretto per ottenere la figura piana richiesta. I mezzi semiotici di oggettivazione mediavano uno schema operatorio molto sofisticato che richiedeva di riconoscere gli invarianti per ciascuna sezione e selezionare quello opportuno per ottenere la figura piana desiderata. Anna aveva chiaro lo schema generale del processo di taglio che le consentiva di ottenere quella particolare figura piana; le facce coinvolte, il numero di spigoli da tagliare, la relazione tra facce e spigoli tagliati e vertici e lati della figura piana, condizioni parallelismo e perpendicolaritá etc. I mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati mediavano un attivitá ad un livello di generalizzazione elevato, che nella classificazione alla Radford puó essere considerato simbolico. Anna ha in mente uno schema assolutamente generale per tagliare il cubo di creta in modo da ottenere una particolare figura. Il cubo di creta e il filo di nylon, in senso lato, assumono lo stesso ruolo che la variabile assume in algebra. Sono dei mezzi di oggettivazione che mediano un'attivitá che si sviliuppa, appunto, ad un livello di generalizzazione simbolica. La stessa considerazione é valida per le figure piane in cartone che Anna utilizzava per verificare se la sezione che ha ottenuto é quella desiderata. I cartonicini rappresentano tutte le possibili figure piane. Il triangolo che aveva a disposizione rappresenta tutti i possibili triangoli come la variabile n rappresenta tutti i possibili numeri naturali, se il suo universo di riferimento è l'insieme $\mathbb{N}$. Quando Anna eseguiva il confronto, la generalitá del significato che riconosce nelle figure di cartone le permette di riconoscere l'esattezza della figura che ottiene sezionando il cubo, non solo quel cubo ma tutti i possibili cubi che le potevano essere dati. Attraverso il cubo di creta, il filo di nylon e i cartoni, Anna ha la possibilitá di porre davanti la sua coscienza, di dirigere il suo atto intenzionale, dunque, di oggettivare rispettivamente tutte le possibili sezioni di tutti i possibili cubi e tutti i possibili triangoli, quadrati, rettangoli e parallelogrammi. L'interazione tra generale e particolare é resa possibile dall'uso del linguaggio naturale che permette di controllare la complessitá degli altri mezzi di oggettivazione che Anna deve coordinare. I risultati che sono stati ottenuti in questa fase del laboratorio confermano, come si é giá avuto modo di verificare, l'uso sincronico dei diversi mezzi di oggettivazione che si organizzano in nodi semiotici. Privando Anna di uno solo dei mediatori che sono stati descritti, si sarebbe assistito sicuramente ad un fallimento nell'esecuzione della consegna. Questa esperienza fornisce un risultato molto significativo dal punto di vista teorico, che é evidenziato dal fatto che é stata coinvolta un'allieva non vedente. Sembra che per raggiungere livelli superiori di generalizzazione Anna non sia dovuta passare per la rottura della dimensione embodied del significato e della sua esperienza descritta in letteratura.. I mezzi semiotici che a causa della sua cecitá Anna deve utilizzare, sono sempre fortemente legati alla sua esperienza sensoriale e cinestetica: Anna non puó fare a meno di toccare, sentire, manipolare, muovere. Allo stesso tempo, Anna ha accesso a livelli di generalitá difficilmente accessibili ad un soggetto vedente. La dimensione embodie della sua esperienza assume una nuova forma quando raggiunge livelli di astrazione piú elevati. Occorrono ulteriori indagini per comprendere come avviene questo processo e come é estendibile anche ad alunni vedenti.

Sicuramente, conferma le piú recenti teorie neuroscientifiche, che identificano le attivitá cognitive superiori con le zone cerebrali deputate al controllo dell'attivitá sensomotoria. Ancora una volta si vuole sottolineare la natura culturale e sociale dell'attivitá di cui Anna é stata protagonista. Il nylon, il cubo di creta, i cartoncini etc. non erano degli strumenti tecnici per sopperire alla mancanza della vista, ma autentici mezzi culturali di significazione che nell'interazione tra la dimensione intrapersonale ed interpersonale hanno permesso ad Anna di accedere a concetti che ingenuamente si potrebbero considerare inaccessibili ad un soggetto non vedente. Anna é entrata a far parte di una cultura e di una dimensione sociale che le ha dato la forza di superare un evidente condizione di svantaggio rispetto a quella dei suoi compagni normodotati. Anna non potrá fare la stessa matematica di un alunno vedente, ma nella prospettiva pragmatica che abbiamo deciso di seguire, non ha senso parlare della matematica, dell'attivitá riflessiva mediata tipica di ogni contesto culturale e sociale.

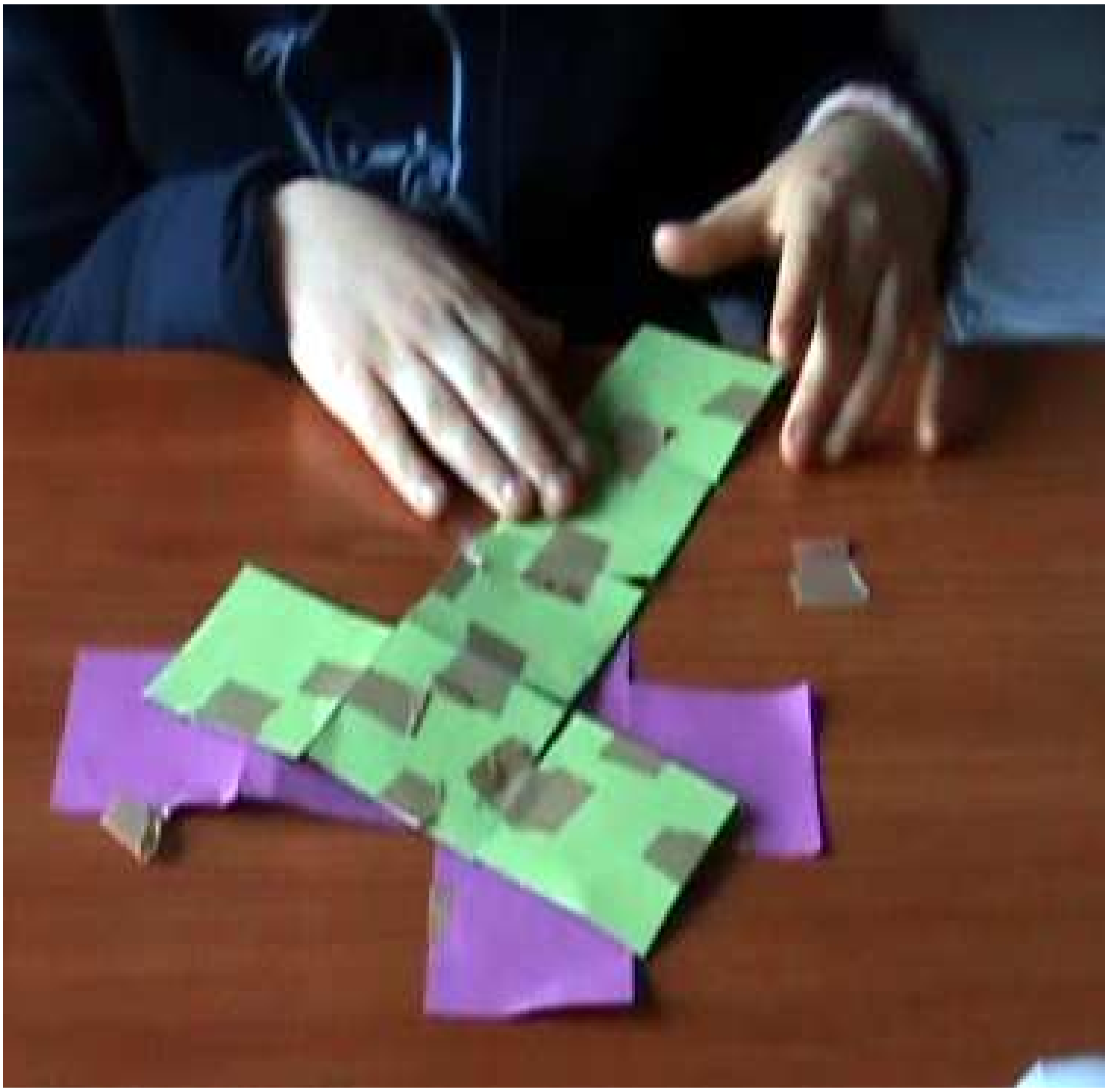

Figura 4.4: Esplorazione tattile di un modellino di uno sviluppo piano, costruito da Ann,a a partire da sei quadrati in cartoncino

Figura 4.5: Sezione triangolare di un cubo di creta

Figura 4.6: Taglio di un cubo in creta con filo di nylon

Conclusioni

Questo lavoro di tesi ha portato alle seguenti conclusioni:

1)Lavorare in contesti e situazioni di educazione speciale permette un'analisi piú dettagliata e mirata dei processi di funzionamento cognitivo in generale. Quindi con una ricaduta per la didattica della matematica[8]. In particolare questa tesi é una conferma in contesti nuovi rispetto alle ricerche classiche della teoria dell'oggettivazione di Radford, che ha permesso di prendere in considerazione nuovi mezzi di oggettivazione.

2)Costruire un percorso didattico specifico per non vedenti, suggerisce indirettamente metodi per una migliore oggettivazione, diretta anche a studenti vedenti.

3)I risultati dell'attivitá laboratoriale mostrano come vi sia un strettissima correlazione fra livello emboded e il livello astratto che, nel caso di un allievo non vedente, non è scindibile. Mancando la presenza della vista il "livello tattile"e i livelli di generalizzazione piú alti saranno sempre compresenti.

[8]Vigosky II volume dei collective works The Fundamentals of Defectology (Abnormal Psychology and Learning Disabilities). Translated and with an introduction by Jane E. Knox and Carol B. Stevens. Editors of the English translation: R. W. Rieber and A.S. Carton. Plenum Press, New York, 349 pages, 1993

Appendice A

Appendice: Documentazione

A.1 Diari Laboratorio

ATTIVITA' DI LABORATORIO

1° INCONTRO, 21/12/2009 Durata: 1h 30min

Prima fase: Indagine sulle conoscenze preliminari dell'alunna

Servendosi del piano di gomma, l'alunna ci ha mostrato alcuni disegni di figure geometriche realizzate ed analizzate l'anno scorso. In un primo foglio c'era la rappresentazione di un triangolo, un rettangolo e un quadrato. Negli altri vi erano disegnate circonferenze e le posizioni di una retta rispetto alla circonferenza. Ci siamo soffermate sul primo foglio. Le abbiamo chiesto di esplorarlo tattilmente e di dirci che figure vi erano rappresentate. Lei è stata subito in grado di riconoscere i vari tipi di poligoni, e quando le abbiamo chiesto come fa a distinguere un quadrato da un rettangolo, ci ha risposto che "il rettangolo ha i lati più corti" (non siamo riuscite a capire se il "più corti" era riferito ai lati del rettangolo rispetto a quelli del quadrato o al confronto fra i lati stessi del rettangolo). Questo ci ha fatto pensare che, forse, non ha acquisito piena consapevolezza delle caratteristiche fondamentali dei poligoni . Per indagare su quest'ipotesi le abbiamo chiesto di indicare i lati, i vertici e gli angoli del quadrato. Sui lati e i vertici non ha avuto dubbi, sugli angoli ha avuto qualche esitazione ("un angolo è la punta tra un lato e l'altro e un po' di superficie in mezzo"). Per darle un'idea intuitiva corretta di angolo, gliel'abbiamo fornita partendo dal piano (foglio di plastica del piano di gomma): le abbiamo chiesto di disegnare un punto, di tracciare due semirette con origine comune nel punto scelto e facendole sentire tattilmente l' angolo come le due porzioni di piano individuate dalle due semirette. Abbiamo notato che all'idea di angolo, lei associa automaticamente l'angolo di 90°, ma ci è sembrato che non abbia piena consapevolezza di cosa sia un angolo retto. A questo punto abbiamo deciso di interrompere la trattazione delle figure piane, dal momento che il nostro laboratorio è impostato proprio sul partire dal 3D per arrivare al 2D.

Seconda fase: Primo approccio con i poliedri

Inizialmente le abbiamo chiesto se sa cos'è un poliedro e ci ha risposto di no. Abbiamo provato a chiederle se sa cos'è un cubo e ci ha risposto "è un quadrato", una piramide "è un triangolo".

A questo punto le abbiamo dato in mano un cubo di cartoncino e le abbiamo chiesto di analizzarlo (lo ha rigirato tra le mani più volte). All'inizio ha detto "è un quadrato", poi si è corretta dicendo "ha tante forme fatte a quadrato". Le abbiamo chiesto di quantificare i quadrati e la risposta è stata: "più di quattro ...sei". Prima di darle informazioni sul cubo, le abbiamo chiesto di provare a disegnarlo e lei, appoggiando una faccia del cubo al foglio del piano di gomma, ne seguiva il contorno con la penna e lo spostava, per disegnare dei quadrati uno accanto all'altro (abbiamo il foglio con il disegno). Quindi le abbiamo chiesto se c'era qualche differenza tra il cubo che aveva in mano e quello che aveva disegnato e ci ha risposto: "con il cubo posso fare più cose che con il disegno". Guidandola nell'esplorazione tattile, abbiamo cercato di dare una forma matematica a questa sua intuizione, ragionando in termini di libertà di movimento sia nell'oggetto in sé (facendole sentire in che modo poteva spostarsi con le mani sul cubo in paragone con il quadrato), sia dell'oggetto immerso nel piano (quadrato) e nello spazio (cubo, facendole osservare il fatto che un cubo può rimbalzare e saltare).

Terza fase: Terminologia

Partendo dalla terminologia a lei già nota del quadrato (lati, vertici), siamo passate agli analoghi nello spazio, indicandole quindi spigoli, vertici e facce del cubo. L'individuazione dei vertici è stata immediata, li ha contati e ci ha detto che sono 8 (all'inizio li ha contati girando il cubo più volte e ci ha detto che erano 12, poi le abbiamo consigliato di tenere fermo il modellino e ha subito detto 8). Per quanto riguarda le facce, le abbiamo spiegato che quelle che lei chiamava "forme fatte a quadrato" sono le facce del cubo e, contandole, ha subito detto che sono 6. Le abbiamo, quindi, fatto notare che nella geometria piana non si parla di "facce" perché ogni poligono ha "una faccia sola". Per gli spigoli, i modellini avevano una striscia di nastro adesivo in corrispondenza di ciascuno di essi per farglieli notare. Li abbiamo definiti come "lati delle facce" e, quando li ha contati, ha detto dopo pochi istanti, che sono 12. In conclusione, abbiamo cercato di associare ad ognuno di questi elementi una sensazione tattile molto intuitiva che ci è sembrata molto efficace: il vertice è dove "punge", lo spigolo è dove "si possono dare pizzicotti" e la faccia è "dove si possono appoggiare le dita ed esercitare movimenti circolari senza uscire dalla faccia stessa".

Le abbiamo lasciato il cubo, per darle modo di esaminarlo ancora, e il tetraedro per provare a fare, da sola, lo stesso esame su un nuovo solido. Nel prossimo incontro le chiederemo che cosa ha osservato.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

2° INCONTRO, 23/01/2010
Durata: 45 min

Questo incontro è stato più un momento di riassunto di quanto fatto nel primo incontro e una preparazione per quanto progettato nell'incontro successivo (classificazione di solidi). Abbiamo innanzitutto ripassato le nozioni e le terminologie introdotte precedentemente. Le abbiamo poi proposto solidi di diverso tipo:

-cubo di cartoncino (più piccolo di quello usato nel primo incontro);

-cubo scheletrato (più grande di quello in cartoncino);

-cubo scheletrato molto grande (circa 20 cm di spigolo);

-piramide a base quadrata in cartoncino;

-tetraedro in cartoncino;

- prisma a base triangolare in cartoncino;

- cilindro;

- prisma a base esagonale in cartoncino. Lo scopo principale è stato quello di farla familiarizzare con tali solidi senza darle indicazioni troppo formali, ma lasciandola libera di esplorare, descrivere intuitivamente questi oggetti e trovare analogie e differenze. Le sue prime osservazioni sono state: "Sono uno diverso dall'altro...alcuni non sono uguali ma hanno delle forme uguali".

Riportiamo alcuni fatti che abbiamo trovato rilevanti:

1) Ha riconosciuto subito le piramidi ("Sembra una piramide");

2) Non ha avuto insicurezze nel riconoscere i cubi scheletrati (per quanto riguarda quello di spigolo 20 cm l'esplorazione è

stata temporalmente più lunga ma efficace) affermando tra l'altro: "Le facce si sentono perché ci si possono infilare le mani dentro"

3) In un primo momento, ha trovato il cilindro simile al prisma a base esagonale, le abbiamo chiesto per quale motivo e lei ci ha risposto: "sono simili nella forma e nella dimensione (effettivamente, i due solidi avevano più o meno lo stesso volume, e fra tutte le facce dei vari poliedri proposti l'esagono è il poligono che più approssima una circonferenza. Certamente Anna non saprebbe formalizzare ragionamenti del tipo: "facendo tendere a infinito il numero dei lati di un poligono si ottiene una circonferenza"; ma posizionando il prisma con una faccia esagonale appoggiata sul tavolo, e stringendo le facce rettangolari con una mano ha probabilmente provato una sensazione simile, dal punto di vista della forma, a quella sentita quando stringeva il cilindro). Continuando l'esplorazione si è poi resa conto di effettive differenze, non ha subito intuito la presenza di spigoli sul prisma e l'assenza di questi sul cilindro ma ha affermato: "però qui (nel prisma) si sentono meglio le facce...in più ci sono anche i vertici " Alla nostra richiesta di spiegarci meglio questa sua descrizione ci ha indicato gestualmente la presenza degli spigoli (scorreva con le dita sugli spigoli). Abbiamo "formalizzato" queste sue osservazioni dicendole che il cilindro, a differenza degli altri, non è un poliedro.

Purtroppo non c'è stato tempo di approfondire ma lo faremo nel laboratorio di lunedì 25.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

3° INCONTRO, 25/01/2010
Durata: 1h 30min

Nel secondo incontro, avevamo chiesto ad Anna di individuare le forme geometriche analizzate in qualche oggetto reale. Lei ci ha riferito che, durante un'attività svolta con gli scout, ha riconosciuto in un modellino di cartone di una casa la composizione di un cubo con una piramide: "le mura della casa erano tutto il cubo, la piramide il tetto."

PRIMA FASE: Confronto tra un cubo e un parallelepipedo

Le abbiamo fatto analizzare tattilmente un cubo e un parallelepipedo (due facce del parallelepipedo erano quadrate e congruenti alle facce del cubo), entrambi di cartoncino, per capire quali fossero le differenze. Il suo primo commento è stato che il cubo "è più piccolo", così abbiamo deciso di approfondire questa osservazione concentrandoci sulle differenze e sulle analogie tra vertici, facce e spigoli dei due solidi. In questo modo, contemporaneamente, abbiamo voluto fare un ripasso della terminologia (manifesta ancora qualche resistenza con la parola spigolo, anche se riesce a riconoscerlo tattilmente) e farle porre l'attenzione su caratteristiche metriche e morfologiche. Abbiamo avuto l'impressione che lei abbia spesso le giuste intuizioni, ma non sappia come esprimerle con le parole. Inizialmente, ha avuto qualche difficoltà, quindi abbiamo deciso di limitare l'analisi ad una faccia del cubo confrontata con una delle facce rettangolari del parallelepipedo. Si è subito resa conto che avevano lo stesso numero di vertici e di spigoli, ma che il parallelepipedo aveva una "faccia più grande". Per cercare di dare forma a questa frase, le abbiamo proposto di misurare le lunghezze degli spigoli con il righello tattile (si sta esercitando sulle misurazioni in questo periodo, abbiamo pensato che potesse essere un'occasione per collegare le due cose). Dopo aver stabilito che l'unità di misura più adatta era il centimetro, ha iniziato a prendere le misure (l'abbiamo all'inizio aiutata nella sistemazione dello spigolo in corrispondenza dello 0 del righello). Per le prime misurazioni ci è voluto un po' di tempo ma poi, prendendoci la mano, sono diventate via via più rapide. La cosa interessante è che per il parallelepipedo, che è stato misurato per secondo, dopo aver trovato la lunghezza di due spigoli consecutivi, ha intuito la lunghezza degli altri due senza bisogno di misurarla. Quindi, l'abbiamo aiutata a formalizzare la sua intuizione di diversità di grandezza, concludendo che le caratteristiche combinatorie sono le stesse (n° vertici, facce e spigoli) ma le caratteristiche metriche no (lunghezze spigoli). Non abbiamo usato questi termini con lei, ci siamo limitate a farle notare i significati.

SECONDA FASE: Classificazione

Abbiamo sistemato davanti a lei 12 solidi:

- un cubo in cartoncino e uno scheletrato ;

- un parallelepipedo in cartoncino e uno scheletrato;

- un prisma a base triangolare di cartoncino e uno scheletrato;

- una piramide a base quadrata di cartoncino e due scheletrata;

- un tetraedro in cartoncino e uno scheletrato;

- un cilindro.

Le dimensioni tra i solidi in cartoncino e quelli scheletrati erano diverse. L'obiettivo di questa fase è quello di fare una suddivisione consapevole di un gruppo di solidi (abbiamo deciso di considerare corretta qualunque tipo di suddivisione, purché supportata da una motivazione logica). Per fornire un collegamento intuitivo, abbiamo paragonato la classificazione al sistemare gli oggetti in un armadio: in ogni cassetto verrà posta una certa tipologia di oggetti. L'unica "regola del gioco" era di dirci il criterio scelto. In un primo momento li ha analizzati tutti, uno alla volta, senza pronunciarsi. La cosa interessante è che, anche questa volta, i solidi scheletrati non le hanno creato nessun problema di riconoscimento . L'unica difficoltà è stata che alcuni di questi (cubo, parallelepipedo) erano un po' flessibili, quindi si sentiva un po' limitata nell'esplorazione. Quando si è sentita pronta ha fatto la sua divisione nel seguente modo:

1) Cubi e parallelepipedi insieme (indipendentemente se scheletrati o meno);

2) I due prismi insieme;

3) Tutte le piramidi insieme;

4) Il cilindro a parte.

Le abbiamo chiesto quindi di spiegarci la classificazione. In particolare, le abbiamo chiesto a cosa avesse dato attenzione (alla grandezza, al materiale, alla forma...). All'inizio ha detto "a tutto, un po' la grandezza, un po' la forma...", le abbiamo quindi suggerito che a noi sembrava che avesse dedicato attenzione a tutto ma che avesse scelto la forma come caratteristica discriminante. Potrebbe sembrare che non avesse consapevolezza del criterio usato, ma abbiamo avuto l'impressione che fosse più una difficoltà di espressione di questo criterio. Infatti, mentre distribuiva i solidi in gruppi lo faceva in modo molto deciso, le bastava riprenderli in mano un secondo per sistemarli subito nel gruppo da lei scelto. L'unico che ha richiesto qualche istante di ragionamento in più è stato il cilindro. Sono emerse due discussioni:

1) Vedendo la sua difficoltà a ricordare il termine "parallelepipedo", abbiamo posto la sua attenzione sul parallelismo degli spigoli, visto che il termine "parallelelo" lo conosceva già. Per darle un'effettiva trasposizione tattile le abbiamo fatto mettere il dito pollice su uno spigolo e il dito indice su un altro, di una stessa faccia, parallelo al primo. A questo punto, le abbiamo fatto osservare che facendo scorrere le dita prima lungo gli spigoli, poi, mantenendo costante l'apertura, lungo i prolungamenti immaginari degli spigoli, le due dita non si incontrano. Infine le abbiamo fatto notare come questo non avviene, ad esempio, in alcuni spigoli della piramide.

2) Il cilindro l' ha lasciata perplessa, non sapeva per i primi istanti dove metterlo, poi ha scelto di sistemarlo a parte. Ci siamo soffermate su questo discorso (riprendendo alcune osservazioni fatte nell'incontro precedente). Le abbiamo fatto notare la differenza tra il rotolamento del cilindro e quella del parallelepipedo e del prisma, per evidenziare l'assenza degli

spigoli nel primo. Per fare questo abbiamo anche usato un paragone con la pasta fatta in casa, facendole immaginare di avere un matterello a forma di parallelepipedo. A questo punto le abbiamo chiesto cosa c'è di diverso fra i due solidi, cosa ha in più o in meno un parallelepipedo che gli impedisce di rotolare in modo fluido. La sua risposta è stata: "Le facce" Le abbiamo spostato l'attenzione sugli spigoli, più che sulle facce, e lei ha realizzato che il cilindro non ne ha. Le abbiamo inoltre fatto notare che le due facce parallele del cilindro sono "rotonde", mentre quelle del parallelepipedo no. Infine le abbiamo chiesto se il cilindro ha dei vertici e la sua risposta è stata subito no. A questo punto abbiamo "istituzionalizzato" la diversità del cilindro rispetto a tutti gli altri, dicendole che il cilindro non è un poliedro mentre tutti gli altri solidi analizzati lo sono.

TERZA FASE: Gli sviluppi piani

Abbiamo preparato per ogni solido (cubo, parallelepipedo, tetraedro, piramide con una faccia quadrata e prisma con due facce parallele triangolari) uno sviluppo piano senza linguette di chiusura, chiuso da pezzettini di nastro adesivo rimovibili, e uno sviluppo piano con le linguette di chiusura. Anche qui, siamo partite dal cubo, e le abbiamo dato in mano quello chiuso con i pezzettini di nastro adesivo. Non lo ha riconosciuto subito a causa dello scotch presente ma dopo che le abbiamo suggerito di dare attenzione a spigoli, vertici e facce, ha detto che si trattava di un cubo. A questo punto le abbiamo chiesto di togliere le linguette di nastro adesivo, una alla volta per capire bene cosa sarebbe successo. Appena sganciata la prima faccia, ha esclamato: "Non è un cubo, è una scatola. Si è aperta." Una volta tolti tutti i pezzi di scotch, le abbiamo chiesto cosa era successo al cubo, lei ci ha risposto "si è aperto". Le abbiamo quindi fatto notare che il cubo aperto "si è spalmato" sulla superficie del tavolo (1° passaggio dal 3D al 2D), e lo abbiamo definito come sviluppo piano del cubo. Abbiamo cercato di porre l'attenzione sul fatto che un cubo può essere stretto nella mano, lo sviluppo piano no; il suo commento a questo fatto è stato che lo sviluppo piano "occupa un po' troppo spazio" (abbiamo interpretato "troppo spazio per essere stretto nelle mani") e le abbiamo fatto osservare che lo sviluppo piano occupa "spazio piano". Le abbiamo infine chiesto di riprodurre sul piano di gomma lo sviluppo del cubo. Con la penna, ha disegnato la sagoma seguendo i contorni esterni dello sviluppo (ovviamente con le imprecisioni dovute al fatto che il modellino non era fissato al foglio), poi, consapevole che mancavano le linee interne al cartoncino (che poteva sentire grazie alle piegature), le ha esplorate tattilmente una alla volta (trovando punti di riferimento che le permettessero di localizzarle in modo efficace), ha localizzato i punti corrispondenti nel suo disegno e, aiutandosi con il righello tattile, ha tracciato le linee mancanti. E' interessante notare (ci ha detto che non ha mai fatto esperienze di questo tipo) :

1) Si orientava abbastanza bene e aveva presente quali linee aveva già ridisegnato e quali no (solo ad un certo punto ha perso un attimo il filo perché è suonata la campanella, le mancava ancora l'ultimo segmento e aveva poco tempo per finire);

2) Le abbiamo dato uno sviluppo a croce, quindi c'era un segmento privo di punti di riferimento evidenti: quello a metà della coda della croce. Questo non è stato un ostacolo, anzi ha subito

intuito che poteva riferirsi al fatto che si sarebbe trovato a metà strada della coda della croce.

Questa fase del laboratorio verrà terminata nel prossimo incontro.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

4° INCONTRO, 1/02/2010
Durata: 1h 30min

Nell'incontro precedente avevamo chiesto ad Anna di portarci quello che aveva fatto l'anno scorso, per capire quali fossero le sue conoscenze di geometria piana. In un primo momento abbiamo quindi ripercorso gli argomenti fatti l'anno precedente (circonferenza e parti della circonferenza). Mentre facevamo questa specie di ripasso, lei ha detto apertamente che l'esperienza di "contatto diretto" con gli oggetti matematici che ha fatto con noi le è molto piaciuta e che ha sentito che le sono state davvero state "spiegate" delle cose. Ci ha poi raccontato di un ripasso fatto insieme all'insegnante di sostegno di quanto avevamo fatto nell'incontro precedente (l'insegnante le ha portato un cubo e un parallelepipedo che lei ha riconosciuto e ne ha poi misurato gli spigoli). A questo punto, le abbiamo chiesto di cercare di riassumere quello che avevamo fatto nell'incontro precedente, lei ci ha risposto: "abbiamo preso un cubo, lo abbiamo aperto, lo abbiamo esplorato e toccato, poi lo abbiamo disegnato sul piano in gomma"

PRIMA FASE: Ricerca di analogie e differenze tra il cubo e il suo sviluppo

Con sotto mano un cubo e il suo sviluppo a croce (sia di cartoncino che rappresentato nel piano in gomma), abbiamo puntato la sua attenzione sul fatto che "non abbiamo aggiunto né tolto niente" al cubo chiuso per ottenerne lo sviluppo piano, e le abbiamo chiesto di cercare di individuare le corrispondenze tra il solido e il suo sviluppo. La nostra prima domanda è stata: "Cosa diventato i vertici nel cubo aperto? I vertici che senti nel solido, a cosa corrispondono secondo te nello sviluppo?" Per guidare il ragionamento, le abbiamo suggerito di provare a chiudere lo sviluppo (concentrandosi su quegli elementi dello sviluppo che, dopo la chiusura, diventato i vertici del cubo). Nonostante l'instabilità del solido ottenuto, le sue mani hanno subito individuato i vertici del cubo e nella riapertura ha trovato i punti corrispondenti nello sviluppo. Le abbiamo quindi chiesto di contare i vertici del cubo. Per farlo, lei ha contato solo i quattro della faccia superiore e poi ci ha risposto "otto". Abbiamo quindi pensato di approfondire e le abbiamo chiesto di spiegarci perché era sicura che fossero otto, senza bisogno di contarli tutti. Non siamo riuscite a capire precisamente il ragionamento da lei fatto per darci questa risposta, la nostra impressione è che potrebbe aver inconsapevolmente sfruttato il parallelismo degli spigoli ma che non sapeva come dirlo.

Le abbiamo poi fatto porre l'attenzione sulle facce. Lei ci ha detto che per passare dal solido allo sviluppo le facce "si sono aperte" e ha riconosciuto il fatto che le facce del cubo sono tutti quadrati. Contando le facce sul solido e le corrispondenti parti nello sviluppo, si è resa conto che sono dello stesso numero. Le abbiamo chiesto di dirci qualcosa sui vertici dello sviluppo piano e lei ci ha detto che "sono di più".

Infine, le abbiamo chiesto di sentire e contare gli spigoli del cubo e, prima ancora che le chiedessimo a cosa corrispondevano nello sviluppo piano, lei ci ha detto "diventano i lati del quadrato". Ha avuto però delle difficoltà nel conteggio degli spigoli del solido, probabilmente dovute al fatto che a volte non lo tiene fermo mentre conta ma lo rigira tra le mani (si rende conto che gli errori di conteggio dipendono dal fatto che potrebbe contare due volte gli stessi elementi). Le abbiamo quindi suggerito di tenerlo fermo in una mano e l'abbiamo un po' guidata nel conteggio.

Prima di proseguire, abbiamo cercato di fare una specie di panoramica di tutte le corrispondenze che intercorrono tra il cubo e il suo sviluppo, insistendo sul fatto che si passa da una figura solida ad una piana.

SECONDA FASE: Sviluppo piani di altri solidi

Prisma con due facce triangolari:

Le abbiamo dato in mano un modellino di cartoncino chiuso da delle linguette di nastro adesivo rimovibili. Prima le abbiamo fatto analizzare la forma globale del solido chiuso, soffermando l'attenzione anche sulle differenze tra il cubo e il prisma (facce uguali/ facce diverse, spigoli uguali/spigoli diversi). Le abbiamo poi chiesto di togliere il nastro adesivo un pezzo alla volta, cercando di capire cosa succede. Dopo aver aperto il modello, ha riconosciuto subito quali erano le facce triangolari e quali quelle rettangolari ("tre rettangoli e due triangoli"). Con un altro modellino solido dello stesso prisma, ci ha detto tutte le corrispondenze corrette tra le facce e spigoli del solido con i vari poligoni e lati dello sviluppo. In questo caso, abbiamo fatto noi la rappresentazione sul piano in gomma dello sviluppo del prisma, invitandola poi a toccarlo e riconoscere le corrispondenze con lo sviluppo in cartoncino.

Tetraedro:

Avevamo anche in questo caso due solidi in cartoncino, di cui uno con delle linguette di nastro adesivo rimovibili. Dopo aver riconosciuto il solido come una piramide con tutte le facce triangolari, l'abbiamo invitata a togliere il nastro adesivo per ottenere lo sviluppo piano (che abbiamo rappresentato noi nel piano in gomma). Anche qui, le abbiamo chiesto di contare facce e spigoli sia nel solido che nello sviluppo (nel conteggio nel solido si è verificato il problema del contare più volte lo stesso elemento), trovando le corrispondenze.

TERZA FASE: Riconoscimento di solidi a partire dagli sviluppi

Le abbiamo proposto di fare il lavoro opposto: con in mano uno sviluppo piano di cartone, cercare di capire a che solido corrisponde SENZA CHIUDERLO, poi verificare le sue ipotesi con la chiusura. Prima di iniziare, poiché negli sviluppi erano presenti delle linguette di cartoncino per la chiusura, gliele abbiamo fatte notare per evitare che poi, nel toccarle, si confondesse.

Sviluppo del tetraedro

Abbiamo iniziato con lo stesso sviluppo con cui abbiamo concluso la fase precedente. Anna ha subito detto che si trattava dello sviluppo della piramide. Le abbiamo suggerito come usare le linguette per chiuderlo e verificare l'esattezza della sua ipotesi. Lei ha chiuso il solido senza difficoltà.

Sviluppo del prisma a base triangolare

Lo ha subito riconosciuto, soltanto toccando le facce di cui era composto. Poi, usando dei pezzi di nastro adesivo, lo ha chiuso in modo corretto e senza difficoltà (anche la presenza delle linguette non le ha creato problemi).

Sviluppo della piramide a base quadrata I

Lo ha tenuto tra le mani analizzando prima la forma globale dello sviluppo (aveva un quadrato al centro e i quattro triangoli attorno). La sua prima risposta è stata "diventerà un cubo...cioè è aperto". Le abbiamo quindi suggerito di dare attenzione alla forma delle facce e di non farsi ingannare dalle presenza delle linguette, e si è resa conto che non si trattava di un cubo. Lo ha quindi analizzato ancora un po' (non era facile, data anche la presenza delle linguette) e poi ha risposto "la piramide". Le abbiamo quindi fatto fare un confronto con il tetraedro visto in precedenza ma non ci ha risposto subito e ha preferito aspettare la chiusura. Durante la chiusura di questo solido, le linguette hanno creato qualche problema in più e durante l' incollamento ha quasi sovrapposto due facce triangolari. Una volta chiuso, le abbiamo proposto di fare attenzione a vertici, spigoli e facce per fare il confronto con il tetraedro. Ha contato gli spigoli di entrambi i solidi e si è resa conto che erano in numero diverso. Le differenze sono state evidenti anche nel conteggio delle facce. Nell'analizzare la forma delle facce ha detto "quella sotto è diversa...è un quadrato". Le abbiamo fatto notare che il termine "sotto" dipende dal posizionamento del solido nello spazio.

Sviluppo piano della piramide a base quadrata II

Le abbiamo proposto di nuovo la piramide a base quadrata ma con uno sviluppo diverso (quattro triangoli uno adiacente all'altro e un quadrato adiacente ad uno dei due triangoli esterni). Dopo una breve analisi ha detto: "secondo me è un'altra piramide". Le abbiamo proposto questo esempio per introdurre il fatto che ad ogni solido corrispondono sviluppi diversi, che sarà argomento del prossimo laboratorio con attenzione particolare agli sviluppi del cubo.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

5° INCONTRO, 8/02/2010
Durata: 1h 30min

DI QUESTO INCONTRO E DI TUTTI I SUCCESSIVI FINO ALLA FINE DEL LABORATORIO ABBIAMO LE REGISTRAZIONI VIDEO

In questo incontro abbiamo concluso la parte riguardante gli sviluppi piani e introdotto le sezioni piane.

PRIMA FASE: Ricostruzione di un solido

Per riprendere quanto già iniziato nell'incontro precedente abbiamo proseguito con l'esercizio di ricostruzione di un solido, dato il suo sviluppo piano. In tutta questa fase le abbiamo chiesto prima, di cercare di immaginare la chiusura e fare una previsione del solido risultante, poi di procedere a chiudere lo sviluppo praticamente per verificare le ipotesi fatte. ·

Sviluppo piano a croce di un cubo

Le abbiamo dato lo sviluppo di cartoncino con linguette di chiusura in mano. Lei lo ha esplorato non facendosi in nessun modo distrarre dalla presenza delle linguette, lo ha subito riconosciuto e chiuso correttamente. Ne abbiamo quindi approfittato per fare un ripasso sulla terminologia.

Sviluppo piano del tetraedro I

Il primo sviluppo che le abbiamo proposto era composto da quattro triangoli uno adiacente all'altro con orientamenti invertiti, con le linguette di chiusura. Lei ha preso lo sviluppo in mano, ne ha prima percorso il perimetro globale per poi concentrarsi sulle pieghe all'interno. Dalla forma delle facce si è resa conto che si trattava di una piramide, cosa che ha poi verificato chiudendolo correttamente e senza difficoltà.

Sviluppo piano del tetraedro II

Le abbiamo dato un secondo sviluppo del tetraedro, formato da tre triangoli ognuno adiacente ad un lato di un triangolo centrale, in questo caso senza linguette di chiusura. Lei, come in precedenza, si è inizialmente concentrata sulla forma globale, poi sulle pieghe interne. Anche questa volta è riuscita a capire che era una piramide grazie al riconoscimento della forma delle facce. L'assenza delle linguette non le ha creato nessun problema nella chiusura.

Sviluppo piano del parallelepipedo

Le abbiamo dato in mano uno sviluppo a croce con linguette di chiusura. Ha analizzato la forma globale scorrendo con le mani lungo il perimetro, poi si è concentrata sulle pieghe interne. Ha subito riconosciuto che era lo sviluppo di un parallelepipedo. Ci ha colpito molto il fatto che non si sia fatta ingannare dalla "forma a croce", che poteva facilmente essere attribuita ad un cubo, ma che abbia analizzato tutte le informazioni prima di rispondere correttamente.

SECONDA FASE: Ricerca di diversi sviluppi del cubo

In questa parte abbiamo voluto evidenziare il fatto che lo sviluppo di un solido non è unico e per farlo ci siamo dedicate in particolare agli sviluppi del cubo. Abbiamo costruito dei cubi in cartoncino, non partendo da uno sviluppo preciso, ma attaccando le sei facce quadrate con una linguetta di nastro adesivo removibile in tutti e dodici gli spigoli. La richiesta era di togliere il minor numero di pezzi di scotch per far si che si ottenesse l'apertura del cubo e vedere se gli sviluppi ottenuti erano uguali tra loro o no. Abbiamo effettuato cinque prove e, alla fine, ottenuto quattro diversi sviluppi. Di fronte ad ogni sviluppo trovato le chiedevamo se secondo lei si trattava di uno sviluppo che già conosceva o no. Il primo che ha ottenuto era quello a forma di T, che non le è sembrato familiare (commento che ha fatto dopo averne analizzato la forma globale; in effetti era uno sviluppo che non avevamo mai usato prima). Il secondo era il classico sviluppo a croce, che lei ha subito riconosciuto come quello a cui era abituata e che aveva anche rappresentato sul piano in gomma nell'incontro precedente. Nel terzo cubo ha ottenuto di nuovo lo sviluppo a croce. Si è subito accorta, analizzandone la forma globale, che si trattava dello stesso sviluppo ottenuto con il cubo precedente. I due tentativi seguenti hanno fornito due sviluppi diversi che Anna, su nostra richiesta, ha confrontato con i precedenti, basandosi sempre sulla forma globale, rendendosi conto della diversità. Abbiamo notato due fatti che meritano di essere evidenziati:

1) Tendeva sempre ad iniziare l'apertura togliendo tre pezzi di nastro adesivo dalla faccia superiore;

2) Per confrontare gli sviluppi ottenuti, oltre che esaminarli singolarmente, cercava di sovrapporli per vedere se combaciavano.

Per concludere questa fase, abbiamo voluto evidenziare anche il fatto che non è detto che qualunque sequenza di figure piane attaccate tra loro sia lo sviluppo piano di qualcosa. Per farlo le abbiamo dato in mano un falso sviluppo del cubo composto da sei quadrati disposti a forma di L. Senza dirle di cosa si trattava esattamente, le abbiamo chiesto di analizzare l'oggetto e dirci se secondo lei poteva essere lo sviluppo di qualche solido e, se sì, di quale. Lei ha prima esplorato la forma globale, poi ha cercato di sentire le pieghe interne, intuendo che si trattava di una sequenza di sei quadrati. Dopo una lunga analisi ci ha detto "Non capisco cosa potrebbe diventare...forse come cubo non si chiude però...secondo me non può diventare un cubo". Le abbiamo chiesto di motivare questa osservazione, e ci ha risposto: "Mi sembra la forma del cubo. La grandezza non lo fa diventare un cubo, cioè la forma del cubo non viene". A questo punto le abbiamo proposto di provare a verificare la sua ipotesi provando a chiuderlo e guardando se si riesce o no. Lei ha iniziato a incollare i lati fino a che si riusciva, ad un certo punto ha dovuto fermarsi perché non era più possibile andare avanti, ottenendo un cubo senza una delle facce. Solo a questo punto abbiamo confermato la sua intuizione, spiegandole che si trattava di un falso sviluppo. Questa parte è stata molto interessante per due ragioni:

1)Dal modo in cui ha affrontato le nostre richieste e risposto alle nostre domande, abbiamo avuto l'impressione (in particolare nel momento in cui doveva trovare gli sviluppi corretti) che Anna stia sviluppando la capacità di astrarre la chiusura dei solidi, almeno parzialmente, immaginandola senza bisogno di chiuderli effettivamente, dal momento che si rendeva perfettamente conto quando qualcosa non andava.

2)D'altra parte però, nonostante la sua intuizione fosse corretta sin dal principio, ha manifestato delle insicurezze nell'affermare con certezza che non si poteva chiudere, tant'è vero che mentre cercava di realizzare il cubo, e si rendeva conto di non riuscirci, tentava delle strade diverse (...contratto didattico??)

Introduzione alle sezioni piane

Abbiamo soltanto introdotto, per mancanza di tempo, quella che sarà la seconda parte del laboratorio: le sezioni piane del cubo. Abbiamo preparato, a questo proposito, un cubo sezionato parallelamente ad una delle facce ed incollato lungo il taglio con delle linguette removibili di nastro adesivo. Lei ha rimosso le linguette e il suo commento è stato "diventa un cubo senza la testa". Le abbiamo chiesto innanzitutto di cercare di capire in che modo il cubo era stato tagliato, introducendo l'idea di taglio parallelo ad una delle facce, poi di cercare di individuare la forma della sezione. Purtroppo non c'è stato abbastanza tempo per approfondire ma il prossimo incontro sarà interamente dedicato a questo.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

6° INCONTRO, 15/02/2010
Durata: 1h 30min

Prima di riprendere da dove sospeso nell'incontro precedente, abbiamo fatto un ripasso sugli sviluppi piani. Le abbiamo dato dei quadrati in cartoncino tutti congruenti. La richiesta era di attaccare i quadrati in modo da ottenere uno sviluppo piano del cubo, magari diverso da quelli conosciuti la volta precedente. Lei ha iniziato attaccando i primi tre quadrati a L ed in seguito ne ha posizionato un quarto, in modo che con gli altri tre si formasse un quadrato, ma si è immediatamente resa conto, senza bisogno di verificarlo, che in questo modo non era possibile effettuare la chiusura. Così ha deciso di attaccare il quarto in modo da formare una T con gli altri tre. La sistemazione degli altri due quadrati le ha fatto ottenere uno sviluppo a croce. Nonostante fosse uno sviluppo che aveva già esaminato, non lo ha ottenuto per imitazione da quanto fatto in precedenza ma attraverso il ragionamento: infatti, la sistemazione dell'ultimo quadrato ha richiesto più tempo perché ha simulato più volte la chiusura del cubo con le prime cinque facce per capire bene dove attaccarlo per evitare sovrapposizioni o incastri errati.

SEZIONI PIANE DEL CUBO

Abbiamo migliorato il modellino che le avevamo proposto nell'incontro precedente nel seguente modo: abbiamo preparato dei cubi in cartoncino già divisi in due parti (che simulavano il sezionamento di un cubo) attaccate con delle linguette di nastro adesivo rimovibili; una volta rimosse le linguette, e quindi sezionato il cubo, in una delle due parti abbiamo attaccato una sezione in cartoncino (che rappresentava una diversa figura piana per ogni tipo di sezione), anch'essa rimovibile attraverso delle linguette. Abbiamo fatto questa scelta per varie ragioni:

1)Il modello era più stabile, poteva permettere una migliore manipolazione, e di conseguenza una migliore comprensione della forma della sezione evitando distrazioni dovute alle imprecisioni del modello;

2)La possibilità di rimuovere la sezione le permetteva di analizzare la figura piana risultante in modo più profondo (poteva misurare i lati, rappresentarla facilmente nel piano in gomma, confrontare agevolmente le varie sezioni diverse tra loro,...) e rendeva più concretamente tangibile il passaggio dalle tre dimensioni del solido alle due della sezione.

In questo incontro siamo riuscite ad analizzare con lei tre tipi di sezione:

SEZIONE QUADRATA

Si ottiene sezionando il cubo con un piano parallelo ad una delle facce. Le abbiamo dato il cubo chiuso ponendo la sua attenzione lungo la linea del taglio. Prima di aprire il modello, le abbiamo chiesto di analizzare il modo in cui la sezione era stata effettuata. Lei scorrendo le dita lungo il taglio ha dedotto che venivano tagliate quattro facce, appoggiando le dita negli spigoli attraversati dal taglio ha capito che la sezione coinvolgeva quattro spigoli. A questo punto le abbiamo chiesto di togliere le linguette che tenevano unite le due porzioni del cubo. Dopo averlo fatto, l'abbiamo invitata a descrivere il risultato del taglio e lei ha risposto: "Si è tagliata una faccia" (NOTA: abbiamo posizionato il taglio più vicino ad una delle due facce a cui era parallelo). Dopo l'apertura, tra le sue mani aveva due parallelepipedi di grandezza diversa, così le abbiamo chiesto intanto di provare a capire, dopo il taglio, che tipo di solidi erano i due "pezzi" di cubo. Riguardo alla porzione di cubo "più grande", ha inizialmente detto che si trattava di un cubo, così le abbiamo chiesto se aveva tutte le facce uguali. Questa domanda ha riportato la sua attenzione alla definizione di cubo e si è corretta, affermando che non si trattava di un cubo ma non riusciva comunque a riconoscere il solido. Come suggerimento, le abbiamo dato un altro parallelepipedo di dimensioni diverse, invitandola a confrontarlo con quello che stava analizzando, e lei lo ha riconosciuto. Abbiamo voluto porre attenzione sul fatto che il taglio effettuato era parallelo a due facce e per farlo le abbiamo fatto posizionare due dita della stessa mano, una lungo il taglio e l'altra lungo lo spigolo facendole sentire il parallelismo. Durante tutta questa esplorazione, abbiamo cercato di mettere in evidenza il fatto che tagliando una faccia si ottiene un nuovo spigolo e tagliando uno spigolo si ottiene un nuovo vertice. A questo punto le abbiamo chiesto di staccare la figura piana corrispondente a questo tipo di taglio, togliendo le linguette di nastro adesivo. Lei aveva previsto che si sarebbe trattato di un quadrato ma le abbiamo comunque chiesto di verificare la cosa misurandone i lati. E' interessante il fatto che si sia limitata a misurare solo due lati consecutivi, dopo aver visto che erano di 6 centimetri ha detto "Ne ho misurati due e sono di 6 centimetri, allora sono tutti di 6 centimetri". Abbiamo cercato di farci spiegare il ragionamento fatto per arrivare a questa conclusione ma non ci ha spiegato la sua intuizione (come abbiamo notato molte altre volte, lei ha spesso delle intuizioni corrette che però non riesce a spiegare). Analizzando tattilmente il quadrato ha riconosciuto anche la perpendicolarità dei lati consecutivi, oltre che il parallelismo di quelli opposti. Infine, le abbiamo chiesto di rappresentare la sezione ottenuta sul piano in gomma, usando il quadrato di cartoncino rimosso dal modello.

SEZIONE TRIANGOLARE

In questo caso il cubo era stato tagliato lungo le tre diagonali di tre facce con un vertice in comune. Come prima, le abbiamo chiesto di analizzare il modello e di fare una previsione della sezione risultante. Scorrendo il dito lungo il taglio, si è accorta che stavolta le facce tagliate erano tre e che il taglio attraversava tre vertici, così ci ha detto "Verrà fuori un triangolo". Dopo aver rimosso le linguette, e quindi tagliato di fatto il cubo, come prima le abbiamo chiesto se i due "pezzi" di cubo le risultavano solidi familiari (uno dei due era una piramide, l'altro un solido irregolare). Con il solido irregolare in mano, ha in un primo momento detto che si trattava di una piramide perché aveva dato molta attenzione alle facce triangolari. Le abbiamo fatto quindi fare un confronto con delle altre piramidi, facendole notare che nel solido che stava analizzando le facce triangolari non convergevano tutte nello stesso vertice. Dopo averle spiegato che si trattava di un solido "senza nome", irregolare, le abbiamo dato l'altro solido che ha riconosciuto subito come una piramide. Anche questa volta le abbiamo chiesto di rimuovere la sezione, di misurarne i lati e di rappresentare il triangolo ottenuto sul piano in gomma.

SEZIONE RETTANGOLARE

In questo caso, il taglio era stato fatto lungo due diagonali di due facce parallele e due spigoli. Come nei casi precedenti, le abbiamo chiesto di analizzare il taglio. Il suo primo commento è stato "Ma qui sono tagliate solo due facce". Abbiamo quindi aggiunto alle informazioni raccolte finora, il fatto che si ottiene uno spigolo anche se il taglio avviene lungo uno spigolo del solido. Dopo questa osservazione, lei ha dedotto che la sezione sarebbe sicuramente stata un quadrilatero. Dopo aver rimosso le linguette che tenevano il cubo chiuso, come prima le abbiamo chiesto di riconoscere i due solidi (in questo caso risultavano due prismi a base triangolare). Analizzandoli, non è riuscita a riconoscerli subito, così le abbiamo dato un altro prisma di cartoncino di dimensioni diverse e le abbiamo chiesto di dare attenzione alla forma delle facce. Lei ha fatto quindi un confronto, rendendosi conto che in tutti i casi si trattava di solidi con tre facce rettangolari e due facce triangolari (non si ricordava però il nome del solido). Come nelle analisi precedenti, abbiamo concluso l'incontro facendole rimuovere la sezione e chiedendole di rappresentare il rettangolo ottenuto sul piano in gomma.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

7° INCONTRO, 22/02/2010
Durata: 1h 30min

Abbiamo diviso questo incontro in due diverse fasi. Nella prima, riutilizzando i modelli in cartoncino delle sezioni del cubo usate nel laboratorio precedente, abbiamo cercato di ripercorrere quanto fatto al contrario: partendo dal cubo già tagliato e dandole il poligono di sezione in cartoncino in mano, le abbiamo chiesto di associare ad ogni poligono il taglio (e quindi i due "pezzi" di cubo) corrispondenti. Abbiamo concluso questa fase portandole e

facendole analizzare anche una quarta possibile sezione del cubo.
Nella seconda fase, le abbiamo invece fatto sezionare in modo pratico dei cubi in creta.

PRIMA FASE:

Abbiamo iniziato dalle sezioni già analizzate la volta precedente. Le abbiamo dato il quadrato, il rettangolo e il triangolo in cartoncino e abbiamo disposto sul tavolo i sei "pezzi" di cubo che aveva ottenuto dopo il taglio nell'incontro precedente. Ha subito riconosciuto i tre poligoni e per effettuare l'associazione con i vari tagli ha lavorato in questo modo: prendeva una parte del cubo, scorreva con un dito lungo il taglio per rendersi conto della forma e poi decideva la sezione piana corrispondente. La prima parte di cubo che ha analizzato era una di quelle corrispondenti al taglio parallelo a due facce del cubo. Ha immediatamente associato a questo tipo di taglio la sezione quadrata ed ha riposizionato il quadrato in cartoncino in modo corretto. Ha poi preso una delle due parti di cubo a prisma a basi triangolari e, anche in questo caso, immediatamente e senza nessun dubbio ha associato al rettangolo, ricostruendo il cubo in modo corretto. Siamo rimaste molto colpite dalla velocità e sicurezza con cui associava i poligoni, così le abbiamo chiesto di spiegarci a quali elementi del taglio dava attenzione per capire il poligono corrispondente. Abbiamo capito che si concentrava molto sul parallelismo dei lati. Abbiamo voluto andare un po' più a fondo però perché il parallelismo del lati non basta a distinguere un quadrato da un rettangolo e lei nel riconoscerli non mostra alcuna titubanza. Abbiamo quindi dedicato una piccola parte di questa fase ad una analisi di analogie e differenze tra rettangolo e quadrato. Lei ha detto "Sento che gli spigoli sono diversi...gli spigoli del rettangolo sono più grandi". Riguardo agli angoli inizialmente lei ha detto soltanto: "Nel quadrato sono tutti uguali". Le abbiamo quindi proposto di confrontare gli angoli del rettangolo con un angolo di 90° (le chiedevamo di appoggiare il rettangolo su un righello in modo da far combaciare gli spigoli per paragonare le ampiezze degli angoli). Si è resa conto che anche nel rettangolo, i quattro angoli sono congruenti. Abbiamo cercato di formalizzare meglio le sue intuizioni e le osservazioni fatte, ponendo attenzione sul fatto che un quadrato è un particolare rettangolo che ha tutti i lati congruenti. Abbiamo concluso questa piccola parentesi chiedendole: "Se avessi avuto un quadrato più grande..." , ci ha risposto ancora prima di finire la domanda dicendo: "Gli angoli sono sempre di 90°". Tornando alle sezioni, ha associato in modo corretto anche il triangolo. Le abbiamo dato un altro cubo già tagliato in una sezione parallelogrammica e chiuso con delle linguette removibili di nastro adesivo. Come nell'incontro precedente, scorrendo le dita lungo il taglio si è resa conto che coinvolgeva quattro facce e che non si notava nessun parallelismo particolare. Una volta rimosse le linguette, analizzando la sezione non riusciva a riconoscere il poligono. Questo fatto ci ha colpito perché non si è fatta ingannare dalla somiglianza con il rettangolo, è come se avesse dato attenzione all'ampiezza degli angoli. Le abbiamo quindi fatto togliere le linguette di nastro adesivo per rimuovere il parallelogramma di cartoncino e farglielo analizzare. Anche in questo caso le abbiamo fatto porre particolare attenzione sul parallelismo dei lati opposti (scorrendo con le dita) e sul fatto che in questo caso gli angoli non sono di 90° (facendo sempre un confronto con gli angoli del righello lei ha detto "non combacia tanto, non sono retti"). Infine le abbiamo fatto misurare i lati, facendole notare che i lati opposti sono congruenti grazie al parallelismo e che quindi basta misurare due lati consecutivi. Abbiamo concluso questa prima fase con un'analisi delle analogie e delle differenze tra un rettangolo e un parallelogramma.

SECONDA FASE

Abbiamo preparato dei cubi in creta che possono essere sezionati usando del filo di nylon da pesca. Abbiamo pensato di iniziare chiedendole di sezionare il cubo a piacere. E' curioso il fatto che abbia ottenuto una sezione parallelogrammica. Dandole il modello in cartoncino della sezione quadrata, le abbiamo chiesto di riprodurla nel cubo di creta e lei, per farlo, ha cercato di mantenere il parallelismo del taglio. Le abbiamo chiesto di riprodurre anche la sezione triangolare ma questa ha creato diverse difficoltà e per mancanza di tempo abbiamo dovuto interrompere, per poi riprendere nel prossimo incontro.

Abbiamo pensato che il sezionamento di cubi di creta poteva essere un lavoro molto stimolante ed istruttivo. Infatti per riprodurre una sezione bisogna essere molto consapevoli di come deve essere effettuato il taglio. Si tratta però di un lavoro abbastanza complicato, poiché richiede sia consapevolezza matematica che buona manualità e coordinazione. Data la difficoltà, e quindi il tempo che questo lavoro richiede, continueremo a farlo per tutti gli incontri fino alla fine del laboratorio. Purtroppo, per mancanza di tempo, in questo incontro siamo riuscite solo a fare una breve introduzione, che ci è però servita per individuare i punti critici di questa attività.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

8° INCONTRO, 27/02/2010
Durata: 1h 30min

In questo incontro Anna non era sola ma insieme a D., un altro ragazzo certificato per motivi diversi da lei. Abbiamo pensato che fare un incontro insieme ad un altro studente con cui confrontarsi poteva essere un'occasione interessante sia per lei, perché aveva così l'opportunità di riorganizzare le proprie idee per poterle trasmettere a qualcun altro, sia per noi, perché potevamo osservare indirettamente quanto aveva capito e in che modo interagiva con un altro studente trovandosi quindi in confronto non con un insegnante ma con un suo compagno.

Abbiamo dato sia ad Anna che a D. un cubo di creta. Come prima cosa, le abbiamo proposto di cercare di spiegare a D. che cos'è un cubo. La sua prima spiegazione è stata "un cubo ha tipo la forma del quadrato". Abbiamo corretto questa affermazione dicendo che il cubo ha le facce quadrate e poi le abbiamo chiesto di mostrare a D. come contare le facce, i vertici e gli spigoli del cubo. Anna gli ha consigliato di tenere il cubo fermo e di contare una sola volta ogni faccia per vedere quante erano in totale ed è interessante notare che, se lui si confondeva nel conteggio, lei osservava che "forse hai contato la stessa faccia due volte" oppure gli consigliava di contare tenendo il cubo in una mano piuttosto che appoggiato al banco. Siamo passati poi al conteggio degli spigoli. Per spiegare a D. quali fossero gli spigoli, gli prendeva la mano e gli faceva scorrere un dito lungo uno spigolo, aiutandolo anche nel conteggio.

PARALLELISMO: Riguardo al parallelismo degli spigoli, Anna lo ha descritto in questo modo: "Prendi il cubo in mano dal lato che vuoi; prendi l'indice e il medio e prova a seguire i bordi della faccia, gli spigoli, e provi a vedere se si toccano o no, se sono paralleli o perpendicolari" (quest'ultima parte della frase ci ha dato l'impressione che lei pensasse, in generale, che due spigoli o sono paralleli o sono perpendicolari. Questo nel caso particolare del cubo è vero ma abbiamo ritenuto opportuno sottolineare la non generalità del fatto e le abbiamo ricordato il confronto con gli angoli del righello, fatto la volta precedente).

PERPENDICOLARITA': Per far capire cosa vuol dire essere perpendicolare, Anna ha insegnato a D. a fare il confronto con gli angoli di un righello, guidando le sue mani nel far corrispondere gli spigoli e spiegando a cosa doveva fare attenzione. Le abbiamo quindi dato in mano un tetraedro e un parallelepipedo di cartoncino, invitandola a far capire bene a D. la differenza. Con molta sicurezza, sistemava il righello nella giusta posizione e guidava le mani di D. facendogli notare che se sentiva combaciare gli angoli, allora il solido in quel punto aveva un angolo retto, altrimenti no. Come ultima cosa, le abbiamo chiesto di spiegare a D. il motivo del nome parallelepipedo e lei ha detto "Gli spigoli sono a due a due paralleli, come il rettangolo che ha i lati a due a due paralleli".

A questo punto, abbiamo chiesto ad Anna di spiegare a D. come si fa a sezionare un cubo in creta. Lei gli ha prima detto in che modo doveva tenere il filo e poi come poteva fare per ottenere una sezione quadrata (dando però molta importanza al fatto che il taglio doveva essere eseguito dall'alto verso il basso e non tanto al parallelismo con le facce del cubo). Sezionando il suo cubo una seconda volta, Anna ha ottenuto un rettangolo. Per farglielo riconoscere, le abbiamo sistemato sul banco le sagome delle quattro sezioni analizzate negli incontri precedenti (quadrato, rettangolo, parallelogramma e triangolo), chiedendole di capire di quale tra questi era la sezione del suo cubo in creta. E' molto interessante il modo in cui ha fatto questa analisi: prima ha esaminato separatamente la forma globale della sezione nella creta e delle sagome in cartone, poi ha sovrapposto le sagome sulla sezione in creta per fare un confronto. Aveva già intuito che si trattava di un rettangolo e la sovrapposizione con la sagoma in cartone è stata per lei una prova di quanto pensava (nonostante il rettangolo in cartone e quello ottenuto nella creta avessero dimensioni diverse). Dopo aver fatto questo lavoro, ha descritto a D. i poligoni di cui aveva le sagome, facendo sentire anche a lui con le mani gli eventuali parallelismi dei lati. Le abbiamo chiesto di cercare di ottenere una sezione triangolare. Tra quelle fatte, questa è una delle più difficili perché bisogna effettuare un taglio trasversale, per il quale la precisione del taglio fatto con il filo di nylon è di fondamentale importanza. Le abbiamo suggerito di tenere a portata di mano il modellino già sezionato in cartoncino, per analizzare bene la posizione del taglio. Questo lavoro ha richiesto diverso tempo e diversi tentativi. Abbiamo deciso quindi di guidare il movimento facendolo insieme a lei, e cercando di porre la sua attenzione sul fatto che deve avere ben presente il taglio che ha sentito nel cartoncino. In questo modo siamo riuscite ad ottenere nel cubo in creta la sezione triangolare (anche se con ovvi errori di imperfezione di taglio) che lei ha confrontato per sovrapposizione con la sagoma triangolare di cartoncino. Per spiegare quanto fatto a D. , ha riproposto lo stesso metodo: ha accompagnato i movimenti di D. con le sue mani cercando di porre la sua attenzione sul direzionamento del filo. Una volta tagliato il cubo, hanno ottenuto una sezione triangolare. Infine, le abbiamo chiesto di cercare di dare la definizione di sezione: "la sezione è un taglio che divide il cubo in due parti" (mentre diceva questa frase, con le dita percorreva il perimetro del taglio nel modello in cartoncino, dando l'impressione di starsi riferendo più al bordo del taglio che al taglio in sé.)

In questo incontro non abbiamo fatto molto di nuovo, abbiamo colto l'occasione per fare una sorta di ripasso, un confronto con un altro studente e per fare un po' di esercizio di manualità.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

9° INCONTRO, 15/03/2010
Durata: 1h 30min

In questo incontro abbiamo continuato con il lavoro del sezionamento del cubo in creta, provando con un approccio diverso dalle volte precedenti. Abbiamo iniziato con l'analizzare nuovamente i diversi tipi di tagli che possono essere fatti. Le abbiamo dato i cubi di cartoncino sezionati e richiusi con del nastro adesivo. Come prima cosa le abbiamo fatto fare un confronto tra la sezione quadrata e quella parallelogrammica, per cercare di renderla il più consapevole possibile del modo in cui tagliare, per ottenere un certo poligono di sezione piuttosto che un altro. Per analizzare i due modelli, lei ha percorso con il dito il perimetro del taglio rendendosi conto che in entrambi i casi venivano coinvolte quattro facce e quattro spigoli. Le abbiamo chiesto quindi, secondo lei, dov'era la differenza tra i due tagli. Lei ha risposto "Sono diversi per come sono stati tagliati". Abbiamo insistito molto su questo punto per rendere più specifico questo suo commento: è molto importante, per il lavoro che avevamo progettato di fare, che ponesse la sua attenzione sia a quante facce e spigoli devono essere coinvolti nel taglio, che all'eventuale parallelismo o meno del piano di sezione rispetto alle facce del cubo. Come negli altri incontri, le abbiamo chiesto di percorrere il perimetro del taglio con il dito indice e con il dito medio il perimetro di un'opportuna faccia del cubo, per sentire se la distanza tra i due rimaneva costante oppure no. Le abbiamo così fatto notare che se la distanza rimane costante, e quindi il piano di sezione è parallelo ad una faccia del cubo, il poligono di sezione sarà il quadrato; se la distanza non si mantiene costante allora i lati del poligono di sezione non avranno tutti la stessa lunghezza e quindi il poligono non potrà essere un quadrato. Dopo aver dedicato la prima parte dell'incontro e questo tipo di lavoro, le abbiamo proposto di sezionare i cubi in creta, procedendo però in un modo un po' diverso dalle altre volte. Aveva davanti a sé un cubo in creta e uno di quelli in cartoncino già tagliati e chiusi con il nastro adesivo, incollato al tavolo (ovviamente in una posizione che le rendeva agevole l'esplorazione tattile del taglio). La richiesta era la seguente: analizzando una faccia alla volta, doveva cercare di capire il taglio, da che punto della faccia partiva e in che punto arrivava e quindi, con la punta di una matita, riprodurre la stessa cosa nel cubo in creta. Una volta che aveva ottenuto anche nel cubo in creta il perimetro completo del taglio da effettuare, poteva passare al sezionamento con il filo di nylon. Abbiamo pensato di procedere in questo modo perché ci è sembrato che permettesse un sezionamento più consapevole perché deciso nel dettaglio, una faccia alla volta fino a riottenere il taglio globale, a differenza delle volte precedenti. Era presente anche un'ulteriore difficoltà (e quindi un ulteriore stimolo): mentre il cubo "modello" in cartoncino era fissato al tavolo, quello in creta era mobile. Questo fatto, se da una parte le rendeva più comodo il tracciare solchi con la matita (poteva sempre fare in modo di avere la faccia interessata in alto), dall'altra richiedeva di orientarsi, ritrovando punti corrispondenti in posizioni differenti (per poter dare continuità al taglio). Ovviamente, questo elemento non le ha di certo reso le cose più semplici, ma l'abbiamo aiutata a fare attenzione e a ragionare. Siamo rimaste colpite dal fatto che, dopo un po', seguiva molto bene i nostri commenti. Questo tipo di esercizio è stato fatto per la sezione quadrata, parallelogrammica e triangolare.

SEZIONE QUADRATA:

Abbiamo posizionato il cubo in cartoncino in modo che il taglio risultasse verticale. Ha iniziato l'analisi dalla faccia superiore, capendo che quel segmento di taglio andava da un punto di uno spigolo ad un punto dello spigolo parallelo in modo da essere equidistante dagli altri due spigoli. Ha riprodotto correttamente questo primo segmento con la matita nel cubo in creta. A questo punto sono iniziate le prime difficoltà, perché sentiva che il taglio proseguiva in "verticale" verso il tavolo nel modello in cartoncino, mentre la mobilità del cubo in creta le permetteva di trovarsi a lavorare sempre nella faccia superiore (e quindi fare dei solchi sempre "orizzontali"). E' stato però, secondo noi, un lavoro molto utile, perché ci ha permesso farle notare che l'idea di verticale su un solido, dipende dalla posizione dell' oggetto nello spazio, e anche perché l'ha spinta a cercare di ruotare mentalmente il cubo per poter riprodurre il segno nella creta. Una volta fatto questo lavoro fino al completamento del solco disegnato con la matita per segnare dove tagliare, le abbiamo consigliato di posizionare il filo di nylon all'interno del solco nella faccia superiore e, aiutandosi con i pollici, di effettuare il taglio cercando di seguire i segni fatti con la matita. In questo modo, abbiamo ottenuto la sezione quadrata.

SEZIONE PARALLELOGRAMMICA:

Questo tipo di sezione era più difficile rispetto alla precedente per due ragioni fondamentali: i punti in cui il taglio attraversava gli spigoli del cubo sembravano più "casuali" rispetto a quanto accadeva nella sezione quadrata (in cui il parallelismo del piano di sezione era un valido aiuto) e il piano di sezione era inclinato rispetto alle facce del cubo (cosa che richiedeva più precisione manuale durante il taglio). Anche questa volta, una faccia alla volta, ha cercato di trovare dei punti di riferimento che le permettessero di posizionare ogni segmento di taglio sul cubo in creta e, una volta completato il perimetro, le abbiamo consigliato di effettuare la sezione molto lentamente e alla fine abbiamo ottenuto il poligono voluto.

SEZIONE TRIANGOLARE:

Questa si è rivelata la più difficoltosa perché coinvolgeva solo tre delle sei facce, e quindi il fatto che il cubo di creta fosse mobile e quello di cartoncino no, ha fatto sì che le servisse un pochino più di tempo per orientarsi, soprattutto quando è arrivato il momento di tracciare l'ultimo segmento. Alla fine comunque è riuscita a disegnare correttamente il perimetro e, anche se nel momento in cui è passata al taglio non è riuscita a seguire completamente i solchi fatti, la sezione risultante era triangolare.

Prima di concludere, le abbiamo chiesto se secondo lei era possibile ottenere, sezionando opportunamente un cubo, un poligono con, ad esempio, 9 lati. Lei ci ha risposto "No perché ci sono solo sei facce". Siamo rimaste molto colpite da questa sua risposta perché ci ha dato l'impressione che stia interiorizzando il collegamento che c'è tra ciò che viene tagliato e ciò che si ottiene.

ATTIVITA' DI LABORATORIO

10° INCONTRO, 26/04/2010
Durata: 1h 30min

Questo è il decimo ed ultimo incontro del laboratorio con Anna, fatto dopo che lei ha sostenuto una verifica su alcuni degli argomenti affrontati. In questa verifica è emerso che, sulle sezioni in particolare, Anna aveva alcune incertezze. Infatti la sua definizione nel compito di "fare la sezione di un solido" è stata: "Fare una sezione significa fare un taglio su una faccia di un qualsiasi solido. Ho preso il cubo di creta e con una penna ho tracciato una linea e poi con il filo di plastica ci sono andata sopra per tagliare", in tutti gli incontri precedenti sembrava aver capito dove fosse la sezione (la indicava sempre nel modo corretto), ma in alcuni punti della verifica sembrava che confondesse la sezione con la divisione del solido. Abbiamo pensato quindi, considerando anche il tempo trascorso dall'ultimo incontro, di riprendere il discorso delle sezioni dalla definizione. Abbiamo ripreso i modelli in cartoncino chiusi dal nastro adesivo e abbiamo cercato di mettere in evidenza il fatto che la sezione è "la nuova faccia che si crea lungo il taglio" (questo modo di vedere la sezione è quello che è risultato più efficace). Dopo aver rimosso il nastro adesivo, le abbiamo fatto simulare il taglio di un coltello con la mano per farle sentire il fatto che, passando, la mano è come se descrivesse una nuova faccia all'interno del cubo. Abbiamo colto l'occasione per fare una breve parentesi sul discorso delle dimensioni ma si è rivelato molto difficile perché non aveva mai sentito parlare di dimensione (intesa in senso matematico e più in generale in senso spaziale) e non ci è sembrata che avesse interiorizzato bene il concetto di tridimensionale e bidimensionale. Si rende conto che un cubo si "tiene tra le mani" in modo diverso dal quadrato, che c'è più "libertà di movimento" in un solido che in un poligono, ma il dire che il primo è tridimensionale e il secondo è bidimensionale non è un passaggio semplice. A questo proposito, ha fatto un'osservazione che forse merita di essere citata: "Per me le cose sono tutte uguali toccandole, non distinguo tra bidimensionale e tridimensionale, però magari vedendole come sono capisci che hanno una loro dimensione". Aprire un vero discorso sul concetto di dimensione (soprattutto giustificare l'idea di 3 dimensioni o 2 dimensioni) necessiterebbe di un laboratorio a parte, per questo abbiamo deciso di limitarci ad un approccio intuitivo in termini di libertà (e possibilità) di movimento. Abbiamo preparato, per completare il discorso sulle sezioni, altri due modelli in cartoncino: in uno era stata fatta una sezione pentagonale, nell'altro quella esagonale. Nell'analisi, abbiamo proceduto come negli incontri precedenti: le abbiamo chiesto di percorrere prima il taglio con il dito per contare il numero di facce e spigoli coinvolti, di fare una previsione del poligono di sezione risultante, da verificare dopo aver tolto le solite linguette di nastro adesivo che tenevano il cubo chiuso. Anna ha capito che il numero delle facce tagliate corrisponde al numero di lati della sezione che si otterrà, ed è quindi entrata in contatto con due nuovi poligoni, il pentagono e l'esagono, di cui non aveva ancora sentito parlare . Non abbiamo richiesto la riproduzione di queste due sezioni sui cubi di creta, perché il taglio necessario per ottenerle, richiedeva troppo tempo ed una precisione manuale che Anna non ha ancora sviluppato. Abbiamo però concluso l'incontro richiedendo di tagliare una sezione a sua scelta su un tetraedro in creta. Quest'ultimo esercizio si è svolto come nell'incontro precedente: ha prima disegnato un solco con una matita e, dopo aver deciso di tagliare tre facce, ha previsto che la sezione risultante sarebbe stata un triangolo.

PRIME CONCLUSIONI

Un'analisi complessiva di tutti i laboratori descritti ci porta ad essere soddisfatte dell'esito di questa esperienza. Riprodurre matematica tattile, dal nostro punto di vista, è stato utile sia per Anna che per noi, sotto molti aspetti di cui diamo per ora solo un rapido accenno. Per quanto riguarda Anna questi sono:

- vedere un modo diverso di fare matematica;

- riuscire, anche se con molte limitazioni dovute sia alle sue poche conoscenze preliminari che al poco tempo, a sviluppare intuizioni e proprie idee su argomenti quasi sconosciuti;

- acquisire alcune particolari terminologie sulla geometria solida e piana;

- in generale sviluppare la sua sensibilità tattile e la capacità di manipolazione.

Per quanto riguarda noi:

- ideare modelli matematici tattili ci ha insegnato nuovi punti di vista su alcuni aspetti della matematica (nonostante gli argomenti trattati possano sembrare semplici, si può sempre scoprire un nuovo livello di analisi su cui soffermare l'attenzione).

- cercare di trasmettere concetti matematici ad Anna, ci ha fatto comprendere i limiti causati da alcune scelte ingenue, portandoci a rivedere, sia gli argomenti da utilizzare per il laboratorio, che il modo di trasporli didatticamente.

Ci siamo rese conto che su alcuni argomenti non è avvenuta una completa interiorizzazione e presa di coscienza (spesso ad esempio, in un primo momento confondeva un solido con una delle sue facce, ma non abbiamo mai capito se questo avveniva a causa di una confusione linguistica o per altri motivi più strettamente didattici). Ricordiamoci però che interiorizzare la matematica è un processo lento e difficoltoso per chiunque, e sicuramente 10 incontri da 90 minuti non bastano a digerire davvero tutti gli argomenti che abbiamo affrontato. Nonostante questo, Anna ha più volte, ed esplicitamente, manifestato il suo interesse verso questo lavoro e l'abbiamo spesso sentita appassionata in quello che stava facendo (riteniamo essere un fattore molto importante ed un buon inizio per lo sviluppo delle sue capacità e conoscenze, al di là del giungere nell'immediato a conclusioni giuste o sbagliate). Molte volte le sue intuizioni ci hanno stupito, e molte delle idee che abbiamo avuto per la preparazione del materiale sono nate dall'osservare il suo modo di approcciarsi agli oggetti: questa è una delle cose più importanti che ci ha insegnato.

A.2 Foto di alcuni strumenti del laboratorio e alcuni disegni di Marco

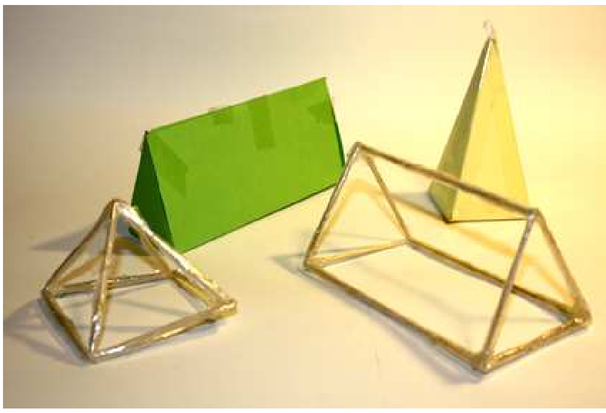

Figura A.1: Alcuni poliedri scheletrati e in cartoncino

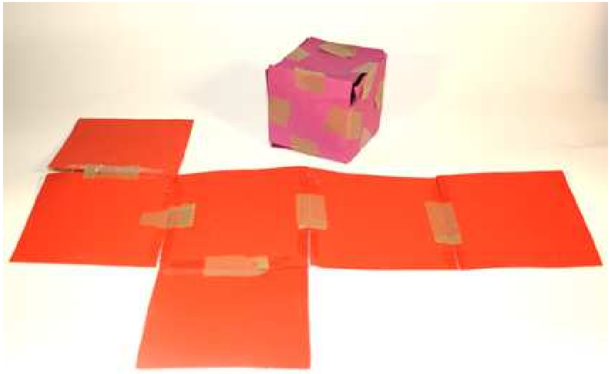

Figura A.2: Esempio di cubo senza sviluppo e sviluppo ottenuto

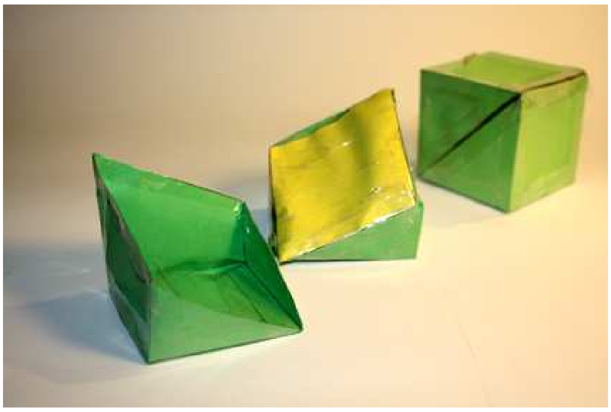

Figura A.3: Sezioni parallelogrammica e rettangolare in cartoncino

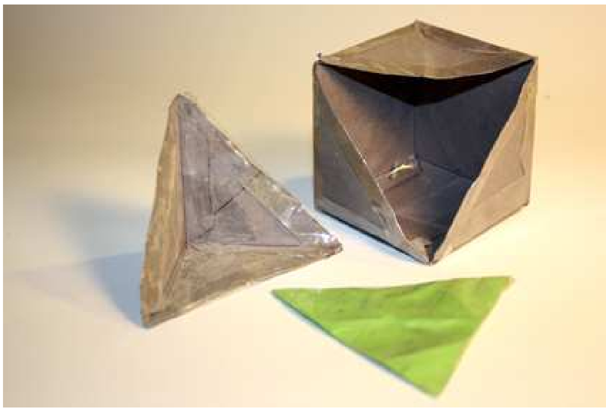

Figura A.4: Sezione triangolare in cartoncino

Figura A.5: Sezione esagonale in cartoncino

Figura A.6: Sezione quadrata in cartoncino

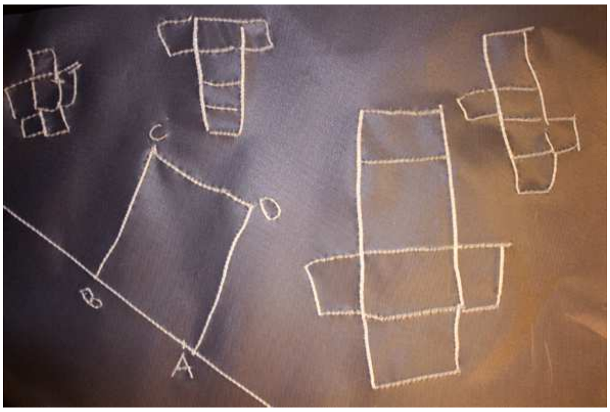

Figura A.7: Alcuni disegni di Marco

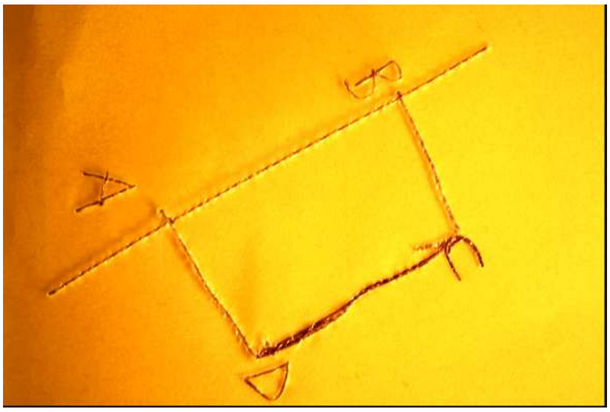

Figura A.8: Alcuni disegni di Marco

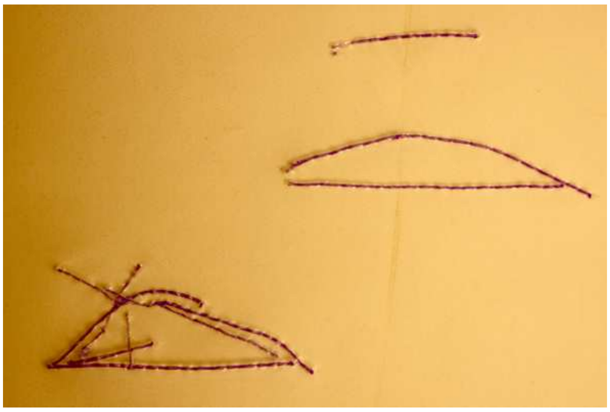

Figura A.9: Alcuni disegni di Marco

Figura A.10: Alcuni disegni di Marco

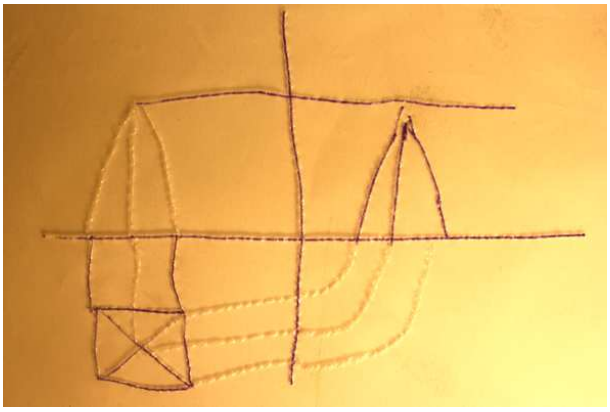

Figura A.11: Alcuni disegni di Marco

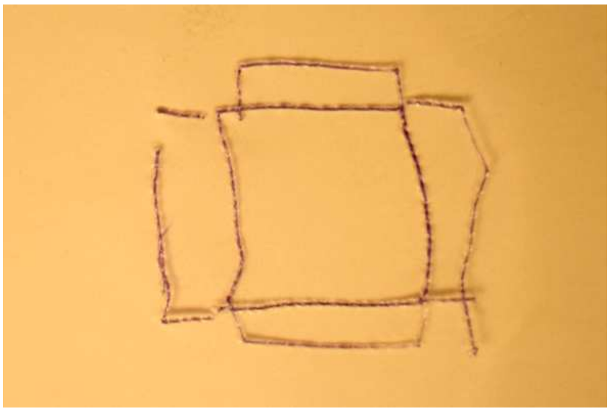

Figura A.12: Alcuni disegni di Marco

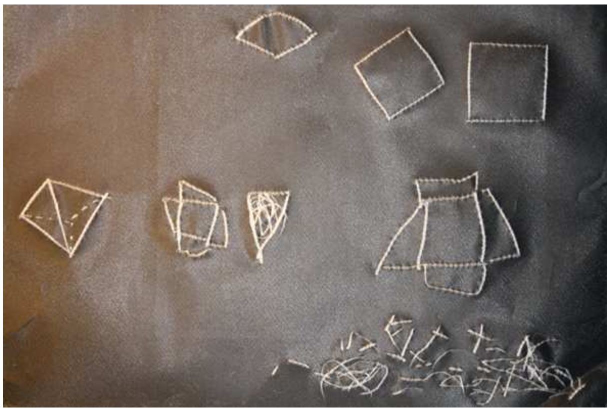

Figura A.13: Alcuni disegni di Marco

Bibliografia

A.3 Capitolo 1

[1] B. D'amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice Bologna, 1999.

[2] R. Duval, *Signe et object. Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 6, pp. 139-163, 1998.

[3] R. Duval, *Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, pp. 37-65, 1993.*

[4] M. Foucault, *Les mots et les choses*, Paris, Èditions Gallimard, 1966.

[5] E. Ilyenkov, *The Concept of the Ideal*, Problems of Dialectical Materialism, Progress Publishers, 1977.

[6] G. Lakoff, R. Nuñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, 2001.

[7] S. Goldin-Meadow, *Hearing Gesture. How our hands help us think*, Cambdrige, Ma., The Belknap Press of Harvard University Press, 2003.

[8] S. Goldin-Meadow, M. A. Singer, *Children Learn When Their Teacher's Gestures and Speech Differ*, Psychological Science, 16, vol. 2, pp. 85-89, 2005.

[9] S. Goldin-Meadow, S. W. Cook, Z. A. Mitchell, *Gesturing Gives Children New Ideas About Math*, Psychological Science, 20, vol. 3, pp. 267-272, 2009.

[10] R. D. Pea, *Practices of distributed intelligences and design for education*, in G. Solomon (ed.), *Distributed cognitions: Psychological and educational considerations*, pp. 47-87, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1993

[11] J. Piaget, R. Garcia, *Psychogenèse et histoire des sciences*, Paris, Flammarion, 1983.

[12] L. Radford, On Psychology, *Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 17(1), 26-33, 1997.

[13] L. Radford, *Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis*, Educational Studies in Mathematics, 42, 237-268, 2000.

[14] L. Radford, *On the Epistemological Limits of Language. Mathematical Knowledge and Social Practice in the Renaissance*, Educational Studies in Mathematics, 52(2), 123-150, 2003.

[15] L. Radford, *On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*, in Anderson M. et al. (eds.)(2003), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, pp. 49-79, Legas, Ottawa, 2003.

[16] L. Radford, *Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization*, Math. Thinking and Learning, 5(1), 37-70, 2003.

[17] L. Radford, *Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition*, in E. Simmt & B. Davis (eds.), Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, pp. 111-117, 2005.

[18] L. Radford, *La génŕalisation mathématique come processus sémiotique*, in G. Arrigo (ed.), Atti del Convegno di didattica della matematica, Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Suisse, pp. 11-27, 2004.

[19] L. Radford, *The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning*, in L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in mathematics educa-*

tion: epistemology, history, classroom, and culture, pp. 215-234, Rotterdam, Sense Publishers, 2008.

[20] G. Vergnaud, *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 19, pp. 133-169, 1990.

[21] L. S. Vygotsky, *The Instrumental Method in Psychology*, in J. V. Wertsch (ed.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology*, pp. 135-143, Armonk, New York: Sharpe, 1981.

[22] M. Wartofsky, *Models, Representation and the Scientific Understanding*, Dordrecht, D. Reidel, 1979.

[23] L. Wittgenstein, *Philosophical Investigations*, trad. inglese a cura di G.E.M. Anscombe e R. Rhees, Oxford 1953; *Ricerche filosofiche*, trad. italiana a cura di R. Piovesan e M. Trinchero, Torino 1967.

A.4 Capitolo 2

[24] Bonvino A. (1953), La matematica nell'educazione dei ciechi, *Problemi pedagogici nella scuola dei ciechi*, Rassegna bimestrale a cura della Federazione Nazionale delle istituzioni pro Ciechi, Roma, anno I, n. 3-4, pp. 3-9.

[25] J. Enriques Fernandez Del Campo, *L'insegnamento della matematica ai ciechi*, Monza, Biblioteca Italiana per i Ciechi "Regina Margherita ", 2000.

[26] E. Tioli, *L'integrazione scolastica degli alunni con disabilitá visiva secondo l'unione italiana dei ciechi e degli ipovedenti: realtá odierna e prospettive*, in AA.VV. (a cura di), *Integrazione scolastica dei ciechi e degli ipovedenti in Italia e in Europa*, Roma, Federazione Nazionale delle Istituzioni Pro-Ciechi, 2007.

[27] P. Zaniboni, *Il bambino non vedente: finalitá e metodi della scuola dell'obbligo*, Monza, Biblioteca italiana per i Ciechi "Regina Margherita "ONLUS, 1986.

A.5 Capitolo 3

[28] A. D. Aleksandrov, *Convex Polyhedra*, Springer, Berlin, 2005.

[29] M. Dedó, *FORME simmetria e topologia*, Decibel editrice, 1999, Padova.

[30] P. Favro, A. Zucco, *Appunti di geometria convessa*, Quaderni Didattci del Dipartimento di Matematica, Universitá di Torino, 2005.

[31] Sernesi, *Geometria 1*

[32] B. Roth *Rigid and flexible framework*, Amer. Math. Monthly, vol. 88, 1981.

A.6 Capitolo 4

[33] G. Arrigo, S. Sbaragli, *I solidi, Riscopriamo la geometria*, Carocci editore, 2004.

Ringraziamenti

per ora ringrazio tutti tranne qualcuno