Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

# Rappresentazioni del gruppo fondamentale di una superficie di Riemann associate a connessioni olomorfe

**Tesi di Laurea in Geometria**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Luca Migliorini**

**Presentata da:**
**Lorenzo Pittau**

**I Sessione**
**Anno Accademico 2009/2010**

# Introduzione

Il giorno 8 agosto 1900 David Hilbert, durante il suo ormai celebre intervento al Congresso Internazionale dei Matematici, presentò una lista di 23 problemi, la cui risoluzione avrebbe dovuto guidare lo sviluppo matematico nel Novecento.
Il problema numero 21, in particolare, consiste nel mostrare se è possibile costruire un sistema lineare di tipo fuchsiano con un insieme fissato di punti singolari e una data rappresentazione di monodromia. In altri termini si chiede se ad ogni rappresentazione di dimensione finita del gruppo fondamentale della retta proiettiva complessa privata di un insieme finito di punti corrisponde un sistema lineare fuchsiano.
La trattazione del problema avverrà con un approccio basato sulla teoria delle categorie a partire da un caso semplificato, inizialmente si mostra infatti che vi è un'equivalenza fra rappresentazioni del gruppo fondamentale di un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e connessioni olomorfe sullo stesso spazio; a queste ultime, si associano infine sistemi lineari di equazioni differenziali.
Si estende poi il risultato al caso della retta proiettiva complessa privata di alcuni punti, riscontrando che, in questo caso, non è sempre possibile associare ad una connessione un sistema fuchsiano.
Il problema nel corso del tempo è stato inoltre generalizzato da particolari superfici di Riemann a $n$-varietà complesse arbitrarie e tutti questi risultati sono noti come corrispondenza di Riemann-Hilbert.

# Indice

# Capitolo 1

# Rivestimenti

## 1.1 Proprietà di base dei rivestimenti

**Definizione 1.1.** Sia $X$ uno spazio topologico.
Uno spazio sopra $X$ è uno spazio topologico $Y$ con una mappa continua $p : Y \longrightarrow X$.
Un morfismo fra due spazi sopra $X$, $p : Y_1 \longrightarrow X$ e $p : Y_2 \longrightarrow X$, è una mappa continua $f : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tale che il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & Y_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

**Definizione 1.2.** Sia $X$ uno spazio topologico.
Un *rivestimento* di $X$ è uno spazio topologico $Y$ sopra $X$ tale che per la mappa di proiezione $p : Y \longrightarrow X$ vale la seguente proprietà: $\forall x \in X$ vi è un intorno aperto $V$ tale che $p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$, ovvero è unione disgiunta di insiemi aperti $U_i$, tali che $p$ ristretta ad ogni $U_i$ è un omeomorfismo.
Un morfismo di rivestimenti di $X$ è un morfismo di spazi sopra $X$.

**Esempio 1.1.** Siano $X$ ed $I$ spazi topologici, in particolare sia $I$ discreto.
Allora lo spazio prodotto $X \times I$ con la funzione di proiezione $p : X \times I \longrightarrow Y$ è un rivestimento di $X$, chiamato rivestimento banale.

La preimmagine di ogni punto, anche considerando tutto $X$ come intorno, è infatti costituita dall'unione disgiunta di aperti, in quanto $I$ si è supposto essere discreto.

Questo tipo di rivestimento è apparentemente particolare, tuttavia, come mostra la seguente proposizione, ogni rivestimento localmente presenta questa struttura.

**Proposizione 1.1.1.** *Uno spazio $Y$ sopra $X$ è un rivestimento se e solo se per ogni punto $x \in X$ vi è un intorno aperto $V$ tale che la restrizione della funzione di proiezione $p : X \longrightarrow Y$ a $p^{-1}(V)$ è isomorfa, come spazio sopra $Y$, ad un rivestimento banale.*

*Dimostrazione.* Supponendo che $p : Y \longrightarrow X$ sia un rivestimento, dalla definizione si ha che per ogni $x \in X$ vi è un intorno $V$ tale che $p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$ con $I$ insieme discreto di indici.
Ora la mappa $f : \coprod_{i \in I} U_i \longrightarrow V \times I$ che manda $u_i \in U_i$ in $(p(u_i), i)$, con $I$ dotato della topologia discreta, è un omeomorfismo. Questo è inoltre un isomorfismo fra la struttura locale del rivestimento di partenza e quello banale.
Il viceversa si ha invece subito in quanto il rivestimento banale è proprio un rivestimento e il concetto di rivestimento è locale. □

**Definizione 1.3.** Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento.
Per la proposizione precedente questo è localmente isomorfo ad un rivestimento banale del tipo $p_x : V \times I \longrightarrow V$, ove $V$ è un intorno opportuno che esiste per ogni $x \in X$.
Si dice che l'insieme $I$ è la fibra di $p$ sui punti di $V$ e la cardinalità di $I$ è il numero di fogli o grado del rivestimento nel punto $x$.
Un rivestimento si dice finito se lo è l'insieme $I$ per ogni punto.

**Corollario 1.1.2.** *Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento di $X$, spazio connesso. Allora le fibre di $p$ sono tutte omeomorfe allo stesso spazio discreto $I$, cioè il numero di fogli del rivestimento è costante per tutti i punti di $X$.*

*Dimostrazione.* La proposizione 1.1.1 implica subito che i punti con fibra $I$ costituiscono un sottoinsieme aperto di $X$, pertanto anche i punti con una fibra diversa da $X$ sono un sottoinsieme di $X$ in quanto unione di aperti, per la connessione di $X$ si ha quindi il corollario. □

**Esempio 1.2.** Un esempio di rivestimento che globalmente non è banale si ha grazie al nastro di Möbius.
Si consideri infatti il rettangolo $ABCD$ e si identifichino con orientazione opposta i due lati $AB$ e $DC$, siano $P$ e $Q$ i punti medi di questi lati. Il segmento del rettangolo che li unisce è una circonferenza sul nastro di Möbius che si può rivestire con la proiezione indotta da quella perpendicolare dei lati del rettangolo $AD$ e $BC$ su $PQ$, ovvero con la proiezione naturale del bordo del nastro.
Localmente è un rivestimento banale a 2 fogli in quanto la preimmagine di ogni punto è costituita dai due punti corrispondenti lungo il bordo del nastro, tuttavia il rivestimento globalmente non è quello banale perchè il bordo non è omeomorfo all'unione disgiunta di due circonferenze.

**Esempio 1.3.** Si consideri la circonferenza $S^1$, vista come l'insieme dei numeri complessi di norma unitaria, e la mappa $p : S^1 \longrightarrow S^1$ definita da $z \mapsto z^n$. Per ogni $z \in S^1$, $p^{-1}(z)$ è l'insieme costituito dalle $n$ radici di $z^n$ e quindi l'angolo sotteso dall'archetto fra due di questi punti è $\frac{2\pi}{n}$; scegliendo un intorno sufficientemente piccolo si ha dunque che la sua preimmagine è l'unione disgiunta di intorni dei punti della fibra e $p$, ristretta ad ognuno di questi è un omeomorfismo. Si ha così un rivestimento ad $n$ fogli della circonferenza.

**Definizione 1.4.** Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento dello spazio $X$. Si definisce automorfismo di rivestimento di $p$ ogni omeomorfismo $\phi : Y \longrightarrow Y$ compatibile con la proiezione, cioè tale che $p = p \circ \phi$.

*Osservazione* 1. Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento dello spazio $X$.
Gli automorfismi di rivestimento di $p$ costituiscono un gruppo rispetto alla composizione, denotato con $Aut(Y/X)$.

Si osserva inoltre che la condizione di compatibilità equivale a chiedere che venga fissata la fibra di ogni punto di $X$; gli automorfismi operano dunque, in generale, delle permutazioni sugli elementi delle fibre.

## 1.2 Rivestimenti di Galois

**Definizione 1.5.** Sia $G$ un gruppo ed $A$ un insieme.
Si dice che $G$ agisce a sinistra su $A$ se vi è una mappa

$$f : G \times A \longrightarrow A$$

$$(g, a) \mapsto g \cdot a$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

i. $g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (g_1 g_2) \cdot a \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall a \in A$

ii. $1_G \cdot a = a \quad \forall a \in A$

La mappa $f$ è l'azione del gruppo $G$ su $A$.
Se $A$ è uno spazio topologico e $f$ è continua allora $G$ agisce in modo continuo su $A$, che viene detto $G$-spazio.

In modo del tutto analogo si possono definire le azioni a destra; tutti i risultati seguenti valgono anche per queste azioni.

*Osservazione* 2. Sia $G$ un gruppo che agisce sull'insieme $A$. Sia $S_A$ l'insieme delle applicazioni biunivoche su $A$.
Si definisca, per ogni $g \in G$ fissato, la mappa

$$\sigma_g : A \to A$$

$$\sigma_g(a) = g \cdot a$$

Allora:

i. $\sigma_g \in S_A \quad \forall g \in G$

ii. la mappa $\phi : G \longrightarrow S_A$ definita da $g \mapsto \sigma_g$ è un omomorfismo

In particolare si osservi che se $A$ spazio topologico e l'azione è continua, allora la mappa $\sigma_g$ è un omeomorfismo $\forall g \in G$.

*Dimostrazione.*
(i) Si vuole mostrare che $\sigma_g$ ammette inversa $\forall g \in G$, in particolare che l'inversa è $\sigma_{g^{-1}}$. Ora $\forall a \in A$ si ha $(\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g)(a) = \sigma_{g^{-1}}(\sigma_g(a)) = g_{-1} \cdot (g \cdot a) = (g^{-1} \cdot g) \cdot a = 1 \cdot a = a$. Analogamente si mostra che è anche inversa destra.
(ii) Per semplicità notazionale si ponga $\phi(g) := \sigma_g$.
È sufficiente mostrare che $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$.
Ora $\forall a \in A \quad \phi(g_1 g_2)(a) = (g_1 g_2) \cdot a = g_1 \cdot (g_2 \cdot a) = (\phi(g_1) \circ \phi(g_2))(a)$. □

**Definizione 1.6.** Sia $G$ un gruppo che agisce sull'insieme A.
Si dice che $G$ agisce *transitivamente* su $A$ se $\forall x, y \in A \quad \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

**Definizione 1.7.** Sia $G$ un gruppo che agisce in modo continuo sullo spazio topologico $X$. Si dice che $G$ agisce in modo *propriamente discontinuo* se $\forall y \in X$ vi è un intorno aperto $U$ tale che $gU \cap U \neq \emptyset$ per $g \neq 1_G$, ovvero gli insiemi gU sono a due a due disgiunti $\forall g \in G$.

**Definizione 1.8.** Sia $G$ un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico $X$. Lo spazio quoziente $X/G$ è detto *spazio delle orbite* di $X$ e le sue classi, chiamate orbite, sono del tipo

$$[x] = \{y \in X | \exists g \in G \text{ tale che } gx = y\}$$

Lo spazio $X/G$ è naturalmente dotato della topologia quoziente, ovvera quella meno fine per cui la proiezione è continua.

**Lemma 1.2.1.** *Sia $G$ un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su uno spazio topologico connesso $Y$. Allora $Y$ con la proiezione $p_G : Y \longrightarrow Y/G$ è un rivestimento di $Y/G$ detto $G$-rivestimento.*

*Dimostrazione.* La proiezione $p_G$ è evidentemente continua e suriettiva, inoltre $\forall x \in X$ considero l'aperto $V$ che soddisfa la definizione di azione propriamente discontinua; questo, per come sono definite le orbite, è tale da verificare la condizione di rivestimento. □

Nei successivi risultati si assumerà sempre $X$ spazio topologico localmente connesso.

**Proposizione 1.2.2.** *Siano $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento di $X$, $Z$ uno spazio topologico connesso, $f, g : Z \longrightarrow Y$ due mappe continue tali che $p \circ f = p \circ g$. Se $\exists z \in Z$ tale che $f(z) = g(z)$, allora $f = g$.*

*Dimostrazione.* Sia $L = \{z \in Z | f(z) = g(z)\}$, per ipotesi $L \neq \emptyset$, sia dunque $z \in L$ e $y = f(z) = g(z)$. Consideriamo ora un aperto connesso $V$ di $p(y)$ che soddisfa la definizione di rivestimento; questo esiste sicuramente visto che $X$ è localmente connesso e sia $U_i \cong V$ la componente di $p^{-1}(V)$ che contiene $y$. Ora in quanto $f$ e $g$ continue $W = f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_i)$ è un intorno aperto di $z$ e poichè $p \circ f = p \circ g$, $f$ e $g$ coincidono su $W$ in quanto p è un omeomorfismo su $U_i$, pertanto $L$ è aperto.
Mostriamo ora che $M = \{z \in Z | f(z) \neq g(z)\}$ è aperto. Sia $z' \in M$ e $x = p \circ f(z') = p \circ g(z')$, si consideri un aperto connesso $V'$ di $x$. Siano infine $U_i$ e $U_j$ le componenti di $p^{-1}(V')$ che contengono rispettivamente $f(z')$ e $g(z')$, come prima si può trovare un intorno aperto di $z'$ che venga mappato su questi aperti e si conclude così in modo analogo.
Pertanto $L$ è non vuoto, aperto e chiuso, dalla connessione si ha perciò $L = Z$, ovvero $f = g$ su $Z$. □

**Proposizione 1.2.3.** *Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento connesso di X, sia $\phi \in Aut(Y/X)$. Se $\phi$ ammette un punto fisso allora è l'automorfismo identico.*

*Dimostrazione.* Si ha immediatamente dalla proposizione precedente nel caso $Z = Y$, $f = id$, $g = \phi$. □

**Proposizione 1.2.4.** *Se $p : Y \longrightarrow X$ è un rivestimento connesso allora $Aut(Y/X)$ agisce su $Y$ in modo propriamente discontinuo.*

*Dimostrazione.* Sia $y \in Y$, si consideri un intorno $V$ di $p(y)$ che soddisfa la definizione di rivestimento e sia $U_i$ la componente di $p^{-1}(V)$ che contiene $y$. Ora ogni $\phi \in Aut(Y/X)$ mappa $U_i$ in un intorno $U_j$, applicando la proposizione precedente si ha che, se $\phi \neq id$ allora $i \neq j$, ovvero l'azione del gruppo degli automorfismi su $Y$ è propriamente discontinua. □

**Proposizione 1.2.5.** *Sia $G$ un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio connesso $Y$, allora il gruppo degli automorfismi di rivestimento di $p_G : Y \longrightarrow Y/G$ è esattamente $G$.*

*Dimostrazione.* Si osservi subito che l'azione di ogni elemento di $G$ si può naturalmente vedere come una permutazione sulle fibre di $Y/G$ e dunque $G$ è, a meno di isomorfismi, un sottogruppo di $Aut(Y/(Y/G))$.
Sia ora $\phi \in Aut(Y/(Y/G))$, visto che opera sulle fibre, scelto $y \in Y$ vi è certamente $g \in G$ tale che $\phi(y) = gy$ e dunque applicando la proposizione 1.2.3 all'automorfismo $\phi \cdot g^{-1}$ si ha che è quello banale e pertanto $\phi = g$, ovvero tutti gli automorfismi si possono vedere come l'azione di un elemento di $G$. □

*Osservazione* 3. Sia dato un rivestimento connesso $p : Y \longrightarrow X$.
Si consideri il gruppo $Aut(Y/X)$, questo, per quanto provato, agisce in modo propriamente discontinuo su $Y$ e la proiezione $p_1 : Y \longrightarrow Y/Aut(Y/X)$ è un rivestimento.
Ora visto che gli automorfismi di $Aut(Y/X)$ agiscono come permutazioni sugli elementi delle fibre di $X$ si ha che la mappa $p$ si può fattorizzare come composizione di rivestimenti

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "p_1"] \arrow[dr, "p"'] & Y/Aut(Y/X) \arrow[d, "\overline{p}"] \\
 & X
\end{tikzcd}
$$

ove $\overline{p}$ è la mappa indotta da $p$.

**Definizione 1.9.** Un rivestimento $p : Y \longrightarrow X$ si dice che è di Galois (o regolare) se $Y$ è connesso e la mappa $\overline{p}$, definita nell'osservazione 3, è un omeomorfismo.

*Osservazione* 4. Un rivestimento connesso $p : Y \longrightarrow X$ è di Galois se e solo se $Aut(Y/X)$ agisce transitivamente su ogni fibra di $p$.

*Dimostrazione.* Dalla definizione di rivestimento di Galois segue che i punti di $X$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $Y/Aut(Y/X)$, questi a loro volta sono le orbite definite dall'azione di $Aut(Y/X)$ su $Y$.
Ognuna di queste orbite è necessariamente una intera fibra definita da p e pertanto si ha l'osservazione, infatti, se così non fosse, vi potrebbero essere due elementi della stessa fibra che vengono mappati su $Y/Aut(Y|X)$ in due orbite distinte, ma per la commutatività del diagramma dovrebbero essere entrambe mandati nello stesso elemento di $X$ da $\overline{p}$ e ciò è assurdo essendo questa una mappa biunivoca per ipotesi. $\square$

*Osservazione* 5. Dato un rivestimento connesso $p : Y \longrightarrow X$, affinchè sia di Galois è sufficiente che l'azione di $Aut(Y/X)$ sia transitiva su una sola fibra, infatti in tal caso $Y/Aut(Y/X)$ è un rivestimento connesso di $X$ tale che esiste un punto di $X$ la cui fibra è costituita da un punto, pertanto anche le altre saranno costituite da un solo punto per il corollario 1.1.2.

*Osservazione* 6. Se il gruppo $G$ agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio connesso $Y$ allora la mappa $p_G : Y \longrightarrow Y/G$ è un rivestimento di Galois.

*Dimostrazione.* Si è già visto per il lemma 1.2.1 che $p_G$ è un rivestimento, inoltre la proposizione 1.2.5 prova che gli elementi di $G$ si possono vedere come automorfismi di rivestimento. Rimane da mostrare che questi agiscono transitivamente sulle fibre, ma ciò si ha subito in quanto scelti $y_0$ e $y_1$ punti della stessa fibra allora vi è, per come è definito $Y/G$, $g \in G$ tale che $gy_0 = y_1$ e l'azione di questo elemento corrisponde proprio all'automorfismo cercato. $\square$

**Esempio 1.4.** Si consideri l'azione di traslazione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ definita da $(n, x) \mapsto x + n$. L'azione è propriamente discontinua, per ogni $x \in \mathbb{R}$ è infatti sufficiente considerare l'intervallo $(x - 1/4, x + 1/4)$.
Allora la proiezione $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è un rivestimento di Galois con infiniti fogli. Essendo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ si ha che è un rivestimento della circonferenza e il gruppo $Aut(\mathbb{R}/S^1)$ è proprio $\mathbb{Z}$. Il rivestimento a $n$ fogli di $S^1$ dell'esempio 1.3 è anch'esso Galois, infatti gli automorfismi sono dati da rotazioni di un angolo $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ e costituiscono un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, che agisce transitivamente su ogni fibra (con quelle rotazioni è sempre possibile mandare una radice in un'altra).

**Esempio 1.5.** L'esempio 1.4 si generalizza immediatamente per una dimensione $n$ arbitraria. In tal caso si considera l'azione di traslazione operata, componente per componente, da ogni $n$-upla di interi su ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ovvero $((m_1, ..., m_n), (x_1, ..., x_n)) \mapsto (x_1 + m_1, ..., x_n + m_n)$. Con un intorno analogo al precedente si mostra che l'azione è propriamente discontinua (si consideri un ipercubo sufficientemente piccolo attorno ad ogni punto), inoltre $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ per $n \geq 2$ è omeomorfo al toro di dimensione $n$ (per $n = 2$, si ha il toro classico). La proiezione $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ è quindi un rivestimento di Galois ad infiniti fogli del toro $n$-dimesionale.

**Lemma 1.2.6.** *Sia $f : Y \longrightarrow Z$ una mappa continua e $q : Z \longrightarrow X$ un rivestimento connesso. Se $q \circ f : Y \longrightarrow X$ è un rivestimento allora lo è anche $f : Y \longrightarrow Z$.*

*Dimostrazione.* La prima parte della prova mostra, nel modo classico, utilizzando la connessione di $Z$, che $f$ è suriettiva.
Si provi dunque che $f(Y)$ è aperto. Sia $z \in Z$ e sia $x = q(z)$, si consideri un suo intorno $V$ che soddisfi le condizioni della definizione per i rivestimenti $q$ e $p = q \circ f$. Siano quindi $q^{-1}(V) = \coprod(V_j)$ e $p^{-1}(V) = \coprod(U_i)$. Ora dalla continuità di $f$ segue che, per ogni $i$, $f(U_i)$ è un insieme connesso e pertanto vi è un $j$ tale che $f(U_i) \subset V_j$. Dalla definizione di rivestimento si ha però che le proiezioni, ristrette ad ognuno degli aperti disgiunti sullo spazio che

riveste, sono omeomorfismi; in questo caso allora $f(U_i)$ e $V_j$ sono mappati omeomorficamente su $V$ da $q$ e dunque sono fra loro omeomorfi. Si ha pertanto che $f(Y)$ è aperto in $Z$ in quanto ogni punto dell'immagine ha un intorno aperto.
Si mostra ora che $Z \setminus f(Y)$ è aperto. Sia $z_f \in Z \setminus f(Y), x_f = q(z_f)$ e $V_f$ un intorno che soddisfi la definizione di rivestimento per $q$ e $p$, allora l'aperto $V_j$ di $q^{-1}(V_f)$ che contiene $z_f$ deve essere disgiunto da $f(Y)$ altrimenti, per quanto appena visto, è contenuto in $f(Y)$.
La mappa $f$ è quindi suriettiva; è infine un rivestimento perchè per ogni suo punto l'intorno $V_j$ costruito come sopra soddisfa le condizioni di rivestimento, la sua preimmagine è infatti unione disgiunta di aperti di $Y$ (si usa essenzialmente il fatto che p è un rivestimento) e le restrizioni sono omeomorfismi. □

**Teorema 1.2.7.** *Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento di Galois.*
*Per ogni $H$ sottogruppo di $Aut(Y/X)$ la proiezione $p$ induce una mappa $\overline{p_H} : Y/H \longrightarrow X$ che rende $Y/H$ un rivestimento di $X$.*
*Viceversa se $g : Z \longrightarrow X$ è un rivestimento connesso per cui il seguente diagramma commuta*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

*allora $f : Y \longrightarrow Z$ è un rivestimento di Galois e $Z \cong Y/Aut(Y/Z)$.*
*Le mappe $Aut(Y/Z) \mapsto Y/Aut(Y/Z)$ e $Z \mapsto Aut(Y/Z)$ inducono pertanto una corrispondenza biunivoca fra sottogruppi di $Aut(Y/X)$ e rivestimenti intermedi $Z$ di $X$.*
*Il rivestimento $g : Z \longrightarrow X$ è infine di Galois se e solo se $Aut(Y/Z)$ è un sottogruppo normale di $Aut(Y/X)$, in tal caso $Aut(Z/X) \cong Aut(Y/X)/Aut(Y/Z)$.*

*Dimostrazione.* La prova che $\overline{p_H}$ è un rivestimento si ha mostrando che localmente è isomorfo ad un rivestimento banale ed applicando la proposizione

1.1.1.

Si osservi subito che la mappa $p$ si fattorizza come segue

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi_H"'] & X \\ & Y/H \arrow[u, "\overline{p_H}"'] \end{tikzcd}$$

e dunque $\overline{p_H}$ è continua in quanto lo è $p$ e $\pi_H$ è un rivestimento (e pertanto localmente un omeomorfismo) per lemma 1.2.1.

Si ha quindi che $Y/H$ è uno spazio sopra $X$.

Ora per la proposizione 1.1.1, ogni punto $x \in X$ ha un intorno $V$ tale che $\overline{p}^{-1} \cong V \times F$, ove $F$ è un insieme discreto su cui $Aut(Y|X)$ agisce transitivamente ($p$ è Galois) e in generale ciò induce un'azione di $H$. Quozientando rispetto all'azione di $H$ e per la commutatività del diagramma si ha quindi che $\overline{p_H}^{-1} \subset Y/H$ è isomorfo al prodotto fra $V$ e le $H$-orbite di $F$, cioè al rivestimento banale.

Si deve ora mostrare che $f : Y \longrightarrow Z$ è un rivestimento di Galois; di certo $f$ è un rivestimento per il lemma 1.2.6.

Rimane dunque da provare che il gruppo $Aut(Y|Z)$ agisce transitivamente sulle fibre di $f$. Sia $z \in Z$ e $y_1, y_2 \in f^{-1}(z)$, ora questi, per la commutatività del diagramma, sono certamente anche in $p^{-1}(q(z))$, ma $p$ è Galois dunque $\exists \phi \in Aut(Y|X)$ tale che $y_1 = \phi(y_2)$. Se $\phi$ è anche nel suo sottogruppo $Aut(Y|Z)$, cioè fissa tutte le fibre di $f$, ovvero $Y = \{y \in Y | f(y) = f(\phi(y))\}$, allora la prova è conclusa; ma ciò si ottiene applicando la proposizione 1.2.2 con $f$ e $f \circ \phi$.

L'ultima parte della dimostrazione si ha mostrando che $q$ è Galois se e solo se $Aut(Y|Z)$ è normale in $Aut(Y|X)$. Supponiamo $Aut(Y|Z) \triangleleft Aut(Y|X)$, allora è ben definito il quoziente $Aut(Y|X)/Aut(Y|Z)$ e questo agisce in modo naturale su $Z \cong Y/Aut(Y|Z)$, conservando la mappa $q$, visto che gli elementi identificati nel quoziente definiscono esattamente le orbite di $Z$. Si ha pertanto un monomorfismo $Aut(Y|X)/Aut(Y|Z) \longrightarrow Aut(Z|X)$, inoltre $Z/(Aut(Y|X)/Aut(Y|Z)) \cong Y/Aut(Y|X) \cong X$, quindi per definizione 1.9 $q$ è Galois e si ha $Aut(Y|X)/Aut(Y|Z) \cong Aut(Z|X)$.

Viceversa sia $q : Z \longrightarrow X$ Galois, per prima cosa si mostra che ogni elemento $\phi \in Aut(Y/X)$ induce un automorfismo su $Z$ (come spazio sopra $X$), ovvero un automorfismo che conserva la commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "id"] & X \end{tikzcd}$$

Si consideri dunque un punto $y \in Y$ con $x = (q \circ f)(y)$ in $X$; dalla commutatività segue che $f(y)$ e $f(\phi(y))$ sono punti della fibra $q^{-1}(x)$, su cui $Aut(Z/X)$ agisce transitivamente per ipotesi e pertanto vi è un automorfismo $\psi \in Aut(Z/X)$ tale che $\psi(f(y)) = f(\phi(y))$. Questo automorfismo è anche unico in quanto se ve ne fosse un'altro, $\lambda \in Aut(Z/X)$, allora $\phi \circ \lambda^{-1}$ avrebbe un punto fisso e quindi per la proposizione 1.2.3 si avrebbe $\phi = \lambda$. Ora $\phi$ è proprio l'automorfismo cercato in quanto $\psi \circ f = f \circ \phi$ per proposizione 1.2.2 poichè queste mappe sono continue e coincidono composte con $q$. La prova si conclude osservando che l'applicazione $\phi \mapsto \psi$ così definita è un omomorfismo da $Aut(Y/X)$ in $Aut(Z/X)$ il cui nucleo è costituito esattamente dagli automorfismi che permutano solo gli elementi delle fibre di $f$, ovvero è $Aut(Y/Z)$ che risulta quindi un sottogruppo normale. □

## 1.3 Criteri di sollevamento

Nella parte seguente vengono mostrati i principali risultati relativi alla teoria dei sollevamenti in modo da esaminare le relazioni fra automorfismi di rivestimento, rivestimenti di Galois e gruppo fondamentale.

**Definizione 1.10.** Sia $p : Z \longrightarrow X$ un rivestimento. Un *sollevamento* di una mappa $f : Y \longrightarrow X$ fra spazi topologici è una mappa $\tilde{f} : Y \longrightarrow Z$ tale che $p \circ \tilde{f} = f$.

**Teorema 1.3.1.** *Siano $p : Z \longrightarrow X$ un rivestimento, $I = [0,1]$, $F : Y \times I \longrightarrow X$ una omotopia della mappa $f_0 : Y \longrightarrow X$ e $\tilde{f}_0$ un sollevamento di $f_0$.*
*Allora esiste una unica omotopia $\tilde{F} : Z \times I \longrightarrow X$ di $\tilde{f}_0$ che solleva $f_t$.*

L'omotopia precedente risulta chiaramente un'omotopia di cammini qualora $Y = I$. Si osservi inoltre che nel caso in cui Y sia un punto, si ha il seguente corollario, noto come teorema di sollevamento dei cammini.

**Corollario 1.3.2.** *Siano $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento e $f : I \longrightarrow X$ un cammino con $f(0) = x_0$, allora, fissato $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ esiste ed è unico un sollevamento $\tilde{f} : I \longrightarrow Y$ di $f$ tale che $\tilde{f}(0) = y_0$.*

Si osservi in particolare che il sollevamento di un cappio non è necessariamente un cappio, ma che gli estremi di un cammino sollevato sono tuttavia nella stessa fibra. L'unicità del sollevamento implica infine che il sollevamento del cammino costante è anch'esso costante.

Un risultato ancor più generale si ha cercando di sollevare mappe qualsiasi e non solo omotopie, in tal caso l'esistenza del sollevamento è tuttavia subordinata ad una condizione.

Prima di enunciare il teorema è utile introdurre il concetto di mappa puntata.

**Definizione 1.11.** Una mappa $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ si dice una *mappa puntata* se $f(x_0) = y_0$.

**Teorema 1.3.3.** *Sia $p : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un rivestimento.*
*Sia $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ una mappa con $Y$ spazio connesso per archi e localmente connesso per archi.*
*Allora esiste un sollevamento $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ di $f$ se e solo se*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(Z, z_0))$$

*ove $f_*$ e $p_*$ sono le mappe indotte rispettivamente da $f$ e da $p$ sui gruppi fondamentali.*

*Dimostrazione.* L'implicazione diretta è immediata.
Se esiste un sollevamento $\tilde{f}$ si ha infatti $f = p \circ \tilde{f}$ per definizione e dunque $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(Z, z_0))$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Z, z_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Per l'implicazione inversa invece si procede costruendo un sollevamento e provando che, grazie all'ipotesi, risulta ben definito.
Sia dunque $y \in Y$ e $\gamma$ un cammino da $y_0$ in $y$ (vi è di certo poichè $Y$ connesso per archi). Si consideri ora il cammino $f \circ \gamma$ in $X$ con estremi $x_0$ e $f(y)$, questo per il corollario 1.3.2 ammette il sollevamento $\widetilde{f \circ \gamma}$ tale che $\widetilde{f \circ \gamma}(0) = z_0$, si definisce quindi $\tilde{f}(y) = \widetilde{f \circ \gamma}(1)$.
Per provare che è ben definito, ovvero è indipendente dal cammino $\gamma$ scelto, sia $\gamma'$ un altro cammino da $y_0$ a $y$. $h_0 = (f \circ \gamma')^{-1} \cdot (f \circ \gamma)$ è un cappio in $x_0$ pertanto $h_0 \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(Z, z_0))$, dunque è omotopo, tramite $H_t$ ad un cammino $h_1$ sollevabile ad un cappio $\tilde{h}_1$ e quindi per il teorema 1.3.1, anche $h_0$ si solleva ad un cappio, sia $\tilde{h}_0$, tramite $\tilde{H}_t$.
Ora per l'unicità dei sollevamenti si ha che la prima metà di $\tilde{h}_0$ è $\widetilde{f \circ \gamma}$ mentre la seconda è $\left(\widetilde{f \circ \gamma'}\right)^{-1}$ e queste hanno il punto di collegamento in comune, precisamente $\widetilde{f \circ \gamma}(1) = \left(\widetilde{f \circ \gamma'}\right)^{-1}(0) = \widetilde{f \circ \gamma'}(1)$, quindi $\tilde{f}$ è ben definita.
Rimane da mostrare che $\tilde{f}$ è continua, l'idea in questo caso è quella di provare che in un opportuno intorno di ogni punto di $Y$ coincide con una funzione continua. Sia $U \subset X$ aperto tale che il suo sollevamento $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ contenga $\tilde{f}(y)$ e sia omeomorfo a $U$ tramite $p$.
L'ipotesi di locale connessione per archi permette ora di trovare un intorno $V$ di $y$ connesso per archi tale che $f(V) \subset U$; $y_0$ si può allora collegare ad ogni

punto $y' \in V$ con il cammino $\delta \cdot \gamma$, ove $\delta$ è un arco in $V$ da $y$ a $y'$. Il cammino $(f \circ \delta) \cdot (f \circ \gamma)$ si può ora sollevare a $(\widetilde{f \circ \delta}) \cdot (\widetilde{f \circ \gamma})$ in Z e $\widetilde{f \circ \delta} = p^{-1} \circ f \circ \delta$ ove $p^{-1} : U \longrightarrow \tilde{U}$ è un omeomorfismo, pertanto $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$ e $\tilde{f}|_V = (p^{-1} \circ f)|_V$, quindi $\tilde{f}$ è continua in $y$. □

**Proposizione 1.3.4.** *Siano $p : Z \longrightarrow X$ un rivestimento e $f : Y \longrightarrow X$ una mappa. Se due sollevamenti $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2 : Y \longrightarrow Z$ di $f$ coincidono su un punto di $Y$ e $Y$ è connesso, allora $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

*Dimostrazione.* La prova consiste nel mostrare che l'insieme su cui le due funzioni coincidono, non vuoto per ipotesi, è aperto e chiuso e quindi è $Y$ per la connessione. Sia $y \in Y$ e $U$ un intorno aperto di $f(y)$ in $X$ tale che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti del tipo $\tilde{U}_\alpha$ ognuno omeomorfo ad $U$ tramite $p$, siano pertanto $\tilde{U}_1$ e $\tilde{U}_2$ gli intorni contenenti rispettivamente $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$. Per continuità si può trovare un intorno $N$ di $y$ che sia mappato in $\tilde{U}_1$ da $\tilde{f}_1$ e in $\tilde{U}_2$ da $\tilde{f}_2$. Ora se $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$ si ha che $\tilde{U}_1 \neq \tilde{U}_2$ in quanto sono aperti disgiunti e quindi $\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2$ su tutto l'intorno $N$.
Se invece $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ si ha che $\tilde{U}_1 = \tilde{U}_2$ in quanto avendo un punto in comune devono essere lo stesso aperto, pertanto $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ su tutto l'intorno $N$ visto che $p \circ \tilde{f}_1 = f = p \circ \tilde{f}_2$ e $p|_{U_\alpha}$ è un omeomorfismo. □

## 1.4 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Ora, a partire da questi importanti criteri di sollevamento, si sviluppa la teoria relativa al gruppo fondamentale e alle sue relazioni con i rivestimenti. Dal teorema di sollevamento delle omotopie deriva la seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.1.** *La mappa $p_* : \pi_1(Z, z_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ indotta dal rivestimento $p : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ è iniettiva.*
*I cappi in $x_0$ del sottogruppo $p_*(\pi_1(Z, z_0))$ sono esattamente quelli di $\pi_1(X, x_0)$ che si sollevano a cappi in $z_0$ di $\pi_1(Z, z_0)$.*

*Dimostrazione.* La prova consiste nel mostrare che il nucleo di $p_*$ è costituito dal cammino costante in $x_0$. Ora sia $\tilde{f} \in Ker(p_*)$, allora esiste una omotopia

$F : I \times I \longrightarrow X$ di $p \circ \tilde{f}$ al cammino costante in $x_0$ pertanto questa per il teorema 1.3.1 si solleva ad una omotopia fra $\tilde{f}$ e il cammino costante in $z_0$ e dunque $p_*$ iniettiva. Per concludere la dimostrazione basta infine osservare che tutti i cappi sollevabili a cappi sono certamente in $p_*(\pi_1(Z, z_0))$, viceversa tutti i cappi di questo sottogruppo sono omotopi ad un cappio sollevabile ad un cappio e quindi anche loro hanno questa caratteristica. □

**Definizione 1.12.** Sia $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un rivestimento.
Si può definire un'azione del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ sulla fibra $p^{-1}(x)$ associando ad ogni cappio $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$, sollevato ad un cammino $\tilde{\gamma}$ in $(Y, y_0)$, il punto $\tilde{\gamma}(1)$.
Questa è un'azione sinistra, denominata *azione di monodromia*, ed è ben definita in quanto dai criteri di sollevamento si ha che il punto $\tilde{\gamma}(1)$ non varia partendo da cammini omotopi a $\gamma$ e chiaramente è nella fibra $p^{-1}(x_0)$.

**Proposizione 1.4.2.** *Sia $p : Z \longrightarrow X$ un rivestimento con $Z$ e $X$ connessi per archi, allora il numero di fogli del rivestimento è l'indice di $p_*(\pi_1(Z, z_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$.*

*Dimostrazione.* La prova consiste nel costruire una biiezione fra i laterali di $H = p_*(\pi_1(Z, z_0))$ (il cui numero è appunto l'indice del sottogruppo) e i punti di una fibra (la cui cardinalità è il numero di fogli del rivestimento essendo $Z$ connesso per archi).
Ora, per prima cosa, si osservi che ad ogni cappio $g$ in $x_0$ si può associare il punto $\tilde{g}(1)$ della fibra $p^{-1}(x_0)$, con $\tilde{g}$ sollevamento di $g$. Componendo inoltre $\tilde{g}$ con qualsiasi cammino $h \in H$ questo punto non cambia in quanto $h$ si solleva ad un cappio per la proposizione precedente e pertanto ad ogni laterale $gH$ si può associare univocamente un punto della fibra. Risulta allora ben definita l'applicazione $\phi$ dai laterali di $H$ ai punti di $p^{-1}(x_0)$.
Questa applicazione è inoltre suriettiva in quanto, essendo $Z$ connesso per archi, si può costruire un cammino $\tilde{g}$ fra $z_0$ ed ogni altro punto della fibra e poi proiettarlo ad un cappio in $x_0$ con $p$.
L'iniettività si ha invece poichè se $\phi(g_1 H) = \phi(g_2 H)$ allora i sollevamenti di

$g_1$ e di $g_2$ terminano nello stesso punto della fibra, dunque $g_1 \circ g_2^{-1}$ si sollevano ad un cappio in $z_0$ e $g_1 \circ g_2^{-1} \in H$ quindi $g_1 H = g_2 H$. $\square$

**Proposizione 1.4.3.** *Sia $X$ uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi, allora dati due rivestimenti connessi per archi $p_1 : Z_1 \longrightarrow X$ e $p_2 : Z_2 \longrightarrow X$ questi sono isomorfi tramite l'isomorfismo $f : Z_1 \longrightarrow Z_2$ che porta il punto base $z_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ nel punto base $z_2 \in p_2^{-1}(x_0)$ se e solo se $p_{1*}(\pi_1(Z_1, z_1)) = p_{2*}(\pi_1(Z_2, z_2))$.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{tikzcd} Z_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & Z_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Supponiamo che vi sia l'isomorfismo $f : (Z_1, z_1) \longrightarrow (Z_2, z_2)$, allora valgono le relazioni $p_1 = p_2 f$ e $p_2 = p_1 f^{-1}$ da cui applicando Z e passando alle mappe indotte sui gruppi fondamentali si ha $p_{1*}(\pi_1(Z_1, z_1)) = p_{2*}(\pi_1(Z_2, z_2))$.
Viceversa, grazie ai criteri di sollevamento, è possibile sollevare $p_1$ alla mappa $\tilde{p}_1 : (Z_1, z_1) \longrightarrow (Z_2, z_2)$ pertanto $p_2 \tilde{p}_1 = p_1$, allo stesso modo $p_2$ si solleva a $\tilde{p}_2 : (Z_2, z_2) \longrightarrow (Z_1, z_1)$ da cui $p_1 \tilde{p}_2 = p_2$. Ora per l'unicità del sollevamento $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = id$ e $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1 = id$ visto che le mappe fissano i rispettivi punti base, pertanto $\tilde{p}_1$ e $\tilde{p}_2$ sono isomorfismi, uno l'inverso dell'altro. $\square$

**Teorema 1.4.4.** *Sia $X$ uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi, sia $p : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un suo rivestimento connesso per archi e sia $H = p_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$*
*Allora:*

- *i.* *Il rivestimento è di Galois se e solo se $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$*
- *ii.* *$Aut(Z|X) \cong N(H)/H$ ove $N(H)$ è il normalizzatore di $H$ in $\pi_1(X, x_0)$, ovvero il più grande sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ che ha $H$ come sottogruppo normale*

*In particolare si osservi che se il rivestimento è Galois allora $N(H) = \pi_1(X, x_0)$ e pertanto $Aut(Z|X) \cong \pi_1(X, x_0)/H$.*

*Dimostrazione.* Si osservi subito che, qualora si cambi il punto base $z_0 \in p^{-1}(x_0)$ con $z_1 \in p^{-1}(x_0)$, al sottogruppo $H$ corrisponde il suo coniugato $\gamma H \gamma^{-1}$ ove $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ e si solleva tramite $p$ ad un cammino da $z_0$ a $z_1$ in $(Z, z_0)$. Ora $\gamma \in N(H)$ se e solo se $p_*(\pi_1(Z, z_0)) = p_*(\pi_1(Z, z_1))$, ovvero se esiste un automorfismo di rivestimento da $z_0$ a $z_1$. Un rivestimento è Galois se e solo se il gruppo degli automorfismi agisce transitivamente sulle fibre, in tal caso, per quanto appena visto, il sottogruppo $H$ è uguale ad ogni suo coniugato e quindi $H \lhd \pi_1(X, x_0)$.
La seconda parte della prova si ha utilizzando il teorema fondamentale di omomorfismo, sia ora $f : N(H) \longrightarrow Aut(Z|X)$ tale che al cappio $\gamma$ associa l'automorfismo $\phi$ che porta $z_0$ in $z_1$ come sopra. Ora $f$ è un omomorfismo in quanto se $\gamma'$ è un cappio a cui corrisponde l'automorfismo $\phi'$ che porta $z_0$ in $z_2$ allora $\gamma' \cdot \gamma$ si solleva a $\phi(\tilde{\gamma'}) \cdot \tilde{\gamma}$; questo è un cammino da $z_0$ in $\phi(z_2)$ e cioè in $(\phi \circ \phi')(z_0)$ pertanto $\phi \circ \phi'$ è l'automorfismo associato a $\gamma' \cdot \gamma$. L'omomorfismo $f$ è inoltre suriettivo poichè, per quanto già mostrato, ad ogni automorfismo $\phi$ si può associare un cappio $\gamma$ che sollevato è un cammino da $z_0$ a $\phi(z_0)$.
Per concludere si osserva che il nucleo di $f$ è costituito da cappi su $X$ in $x_0$ che si sollevano a cappi su $Z$ in $z_0$ e quindi è esattamente $H$. $\square$

**Corollario 1.4.5.** *Sia $G$ un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio $Y$ connesso per archi e localmente connesso per archi.*
*Si consideri la mappa $p_G : Y \longrightarrow Y/G$.*
*Allora $G \cong \pi_1(Y/G, y_0)/p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

*Dimostrazione.* Si è già provato nell'osservazione 6 e nella proposizione 1.2.5 che $p_G$ è un rivestimento di Galois e $G = Aut(Y|(Y/G))$. L'isomorfismo è immediato per quanto osservato nel teorema 1.4.4 nel caso di rivestimenti di Galois. $\square$

Si cercherà ora di fornire una classificazione dei rivestimenti di uno spazio instaurando una corrispondenza, simile a quella della teoria algebrica di Galois, fra rivestimenti e sottogruppi del gruppo fondamentale dello spazio base. Si proverà così un risultato analogo al teorema 1.2.7 relativo agli automorfismi

di rivestimento.
L'idea di base è associare ad ogni rivestimento $p : Y \longrightarrow X$ il sottogruppo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ del gruppo fondamentale di $X$ e osservare quali sottogruppi corrispondono a quali rivestimenti.
Una prima informazione interessante è sapere se vi sono rivestimenti associati al sottogruppo banale, ovvero rivestimenti semplicemente connessi essendo $p_*$ iniettiva.
Si osserverà inoltre che a rivestimenti di Galois corrispondono sottogruppi normali, così come avviene, nella teoria algebrica, per estensioni di campo di Galois.

**Definizione 1.13.** Uno spazio topologico $X$ si dice *localmente connesso per archi* se $\forall x_0 \in X$ e per ogni suo intorno aperto $U$ vi è un aperto connesso per archi $V$ tale che $x_0 \in V \subset U$.

**Definizione 1.14.** Uno spazio topologico $X$ si dice *semilocalmente semplicemente connesso* (o semilocalmente 1-connesso) se $\forall x_0 \in X$ vi è un intorno $N$ di $x_0$ in cui tutti i cappi in $x_0$ sono omotopi in $X$ al cammino costante, ovvero se la mappa di inclusione indotta fra i gruppi fondamentali $i_* : \pi_1(N, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ è banale.

**Proposizione 1.4.6.** *Uno spazio localmente connesso per archi è connesso se e solo se è connesso per archi.*

*Osservazione* 7. Se $X$ ammette un rivestimento semplicemente connesso $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ allora $X$ è semilocalmente 1-connesso.

*Dimostrazione.* Sia $x \in X$ e $U$ un suo intorno che soddisfi la condizione di rivestimento, ovvero che si sollevi ad $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ omeomorfo ad $U$ tramite $p$. Ora ogni cappio $\gamma$ in $x$ contenuto in $U$ si solleva ad un cappio $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{U}$ che per ipotesi è omotopo al cammino costante, il quale ovviamente si proietta sul cammino costante in $x$, pertanto, per il criterio di sollevamento delle omotopie $\gamma$ è omeomorfo al cammino costante e dunque $X$ è semilocalmente 1-connesso. □

**Teorema 1.4.7.** *Sia $X$ uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi. Allora esiste un rivestimento $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ semplicemente connesso se e solo se $X$ è semilocalmente 1-connesso.*

*Dimostrazione.* L'implicazione diretta è provata nell' osservazione precedente, quella inversa si ha invece mostrando in modo costruttivo che, sotto le opportune ipotesi, vi è di certo un rivestimento semplicemente connesso.
Per meglio comprendere la definizione iniziale di $\tilde{X}$, supponiamo sia $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un rivestimento semplicemente connesso. Ora per ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sia $\gamma$ un cammino da $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}$, allora ogni altro cammino fra quei 2 punti vi è omotopo per la semplice connessione e dunque i punti di $\tilde{X}$ si possono vedere come classi di omotopia di cammini con punto iniziale $\tilde{x}_0$; dal criterio di sollevamento delle omotopie segue infine che queste classi sono in corrispondenza biunivoca con le classi di cammini che iniziano in $p(\tilde{x}_0) = x_0$ e pertanto i punti di $\tilde{X}$ si possono identificare con queste ultime, riconducendosi così a descrivere $\tilde{X}$ solo in funzione di $X$.
Dato uno spazio $X$ che soddisfi le ipotesi e scelto un suo punto $x_0$ si definisce quindi $\tilde{X} = \{[\gamma] | \gamma \text{ è un cammino in } X \text{ con } \gamma(0) = x_0\}$ ove $[\gamma]$ è la classe di omotopia che fissa gli estremi dei cammini descritta sopra. La funzione $p : \tilde{X} \longrightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ è quindi ben definita e poichè $X$ connesso per archi è anche suriettiva.
Sia ora $\mathcal{U}$ la famiglia di aperti connessi per archi $U \subset X$ tali che la mappa $\pi_1(U, x_U) \longrightarrow \pi_1(X, x_U)$ è banale; si osservi che la scelta del punto base è indifferente visto che gli aperti $U$ sono connessi per archi. Se $V \subset U$ è un aperto connesso per archi inoltre si ha $V \in \mathcal{U}$ in quanto tutti i suoi cappi, sono anche cappi di $U$ e quindi vengono già mappati nel cammino costante.
Visto che $X$ è localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso segue che $\mathcal{U}$ è una base per una topologia su $X$.
Ora, scelto $U \in \mathcal{U}$ e un cammino $\gamma$ da $x_0$ ad un punto di $U$, sia $U_{[\gamma]} = \{[\delta \cdot \gamma] | \delta \text{ è un cammino in } U \text{ con } \delta(0) = \gamma(1)\}$; questo insieme, come indica la notazione dipende solamente dalla classe di omotopia $[\gamma]$. Per alleggerire la notazione in seguito non verrà più indicata la classe, che si sot-

tintenderà indicando un cammino che la rappresenta.
Si osserva ora che la mappa $p : U_\gamma \longrightarrow U$ è suriettiva visto che $U$ è connesso per archi e iniettiva in quanto due cammini distinti da $\gamma(1)$ ad $x \in U$ sono certamente omotopi visto che $\pi_1(U, x_U) \longrightarrow \pi_1(X, x_U)$ è banale per ipotesi, pertanto è biunivoca.
Si ha inoltre che se $\gamma' \in U_\gamma$ allora $U_\gamma = U_{\gamma'}$, infatti se $\gamma' = \delta \cdot \gamma$ gli elementi di $U_{\gamma'}$ sono cammini del tipo $\eta \cdot \delta \cdot \gamma$ e dunque sono contenuti in $U_\gamma$, i cui cammini, viceversa, sono del tipo $\zeta \cdot \gamma = \zeta \cdot \delta^{-1} \cdot \delta \cdot \gamma = \zeta \cdot \delta^{-1} \cdot \gamma'$ e quindi appartengono anche a $U_{\gamma'}$. Usando questo risultato si prova ora che gli insiemi del tipo $U_\gamma$ sono una base per una topologia su $\tilde{X}$; l'unica proprietà non banale è che per ogni elemento contenuto nell'intersezione di due aperti della base vi è un altro elemento della base che lo contiene ed è contenuto nell'intersezione. Siano dunque dati $U_\gamma$ e $V_{\gamma'}$ e sia $\gamma^{''} \in U_\gamma \cap V_{\gamma'}$, allora, per la proprietà sopra, $U_\gamma = U_{\gamma''}$ e $V_{\gamma'} = V_{\gamma''}$. Ora visto che $\mathcal{U}$ è una base esiste $W \in \mathcal{U}$ tale che è contenuto in $U \cap V$ e contiene $\gamma''(1)$, pertanto $W_{\gamma''} \subset U_{\gamma''} \cap V_{\gamma''}$ e chiaramente $\gamma'' \in W_{\gamma''}$.
La mappa $p : U_\gamma \longrightarrow U$, oltre che biunivoca, alla luce delle basi per le topologie appena determinate è anche un omeomorfismo (ovvero è anche continua), infatti istituisce una corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi $V_{\gamma'} \subset U_\gamma$ e gli insiemi $V \in \mathcal{U}$ contenuti in $U$, infatti $p(V_{\gamma'}) = V$ e $p^{-1}(V) \cap U_\gamma = V_{\gamma'}$ per ogni $\gamma' \in U_\gamma$ con $\gamma'(1) \in V$, visto che $V_{\gamma'} \subset U_{\gamma'} = U_\gamma$. Da questa osservazione segue inoltre che $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ è continua visto che le preimmagini degli aperti sono aperte.
Si ricava inoltre che è un rivestimento poichè, dato $U \in \mathcal{U}$, gli insiemi del tipo $U_\gamma$ al variare di $\gamma$ costituiscono una partizione di $p^{-1}(U)$ visto che, se $\gamma^{''} \in U_\gamma \cap U_{\gamma'}$, allora $U_\gamma = U_{\gamma''} = U_{\gamma'}$.
Per concludere la costruzione rimane da mostrare che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso. Scelto dunque $\gamma \in \tilde{X}$ sia $\gamma_t$ il cammino in $X$ che è uguale a $\gamma$ su $[0, t]$ e costante in $\gamma(t)$ su $[t, 1]$. La funzione $t \mapsto \gamma_t$ è quindi un sollevamento a $\tilde{X}$ di $\gamma$ che inizia da $x_0 \in \tilde{X}$,il cammino costante, e finisce in $\gamma$. Lo spazio $\tilde{X}$ è dunque connesso per archi.

Si prova ora che $p_*$ manda $\pi_1(\tilde{X}, x_0)$ nel sottogruppo banale. Gli elementi dell'immagine sono i cappi che si sollevano a cappi, ora $t \mapsto \gamma_t$ solleva $\gamma$, su $\tilde{X}$ essere un cappio significa che $x_0 = \gamma_1$, si ricordi che $\gamma_1 = \gamma$ pertanto la condizione diventa $x_0 = \gamma$, ovvero un cappio in $X$ si solleva ad un cappio in $\tilde{X}$ solo se è omotopo al cammino costante in $X$, quindi l'immagine di $p_*$ è il sottogruppo banale e la prova è conclusa. $\square$

Un rivestimento semplicemente connesso, come quello appena costruito si chiama *rivestimento universale* ed è unico a meno di isomorfismi.

**Esempio 1.6.** I rivestimenti degli esempi 1.4 e 1.5 sono i rivestimenti universali perchè $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.
Il rivestimento di $S^1$ dell'esempio 1.3 non è invece un rivestimento universale visto che $\pi_1(S^1, z) \cong \mathbb{Z}$

**Esempio 1.7.** Si mostra ora un esempio di rivestimento universale a 2 fogli. Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}_2$ su $S^n$ con $n \geq 2$, definita da $([0], x) \mapsto x$ e $([1], x) \mapsto -x$. Lo spazio delle orbite $S^n/\mathbb{Z}_2$ è $S^n$ quozientato rispetto alla relazione antipodale e questo, come noto, è omeomorfo a $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$.
La mappa di proiezione $p : S^n \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ è quindi un rivestimento universale ($S^n$ per $n \geq 2$ è semplicemente connessa) a 2 fogli dello spazio proiettivo reale di dimensione $n$. Dai precedenti risultati si ha inoltre che $\pi_1(\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)) \cong \mathbb{Z}_2$.

**Esempio 1.8.** Sia $D = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$, ovvero il disco aperto puntato. Su $D$ si definisce la seguente azione propriamente discontinua di $\mathbb{Z}_n$:

$$([k], \rho e^{2\pi i\theta}) \mapsto (\rho e^{2\pi i(\theta + \frac{k}{n})})$$

La proiezione $p : D \longrightarrow D/\mathbb{Z}_n$ è dunque un rivestimento, ora la mappa $z \mapsto z^n$ costituisce un omeomorfismo naturale fra $D/\mathbb{Z}_n$ e $D$, pertanto $p : D \longrightarrow D$, $z \mapsto z^n$ è un rivestimento di Galois ad $n$ fogli del disco puntato, ma non è il rivestimento universale, infatti $D$ ha gruppo fondamentale non banale.

**Proposizione 1.4.8.** *Sia $X$ uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso.*
*Allora per ogni sottogruppo $H \subset \pi_1(X, x_0)$ vi è un rivestimento $p : X_H \longrightarrow X$ tale che $p_*(\pi_1(X_H,\ \tilde{x}_0)) = H$ per la scelta di un punto base $\tilde{x}_0 \in X_H$ opportuno.*

*Dimostrazione.* Siano $[\gamma], [\gamma']$ due punti del rivestimento universale $\tilde{X}$. Si definisce la seguente relazione $[\gamma] \sim [\gamma']$ se $\gamma(1) = \gamma'(1)$ e $[\gamma'^{-1} \cdot \gamma] \in H$, questa è una relazione di equivalenza infatti il cammino costante è in $H$, inoltre è simmetrica poichè, essendo $H$ un sottogruppo, contiene anche l'inverso di ogni cammino; la transitività segue invece dalla chiusura di $H$ rispetto alla somma. Sia dunque $X_H = \tilde{X}/\sim$, bisogna ora mostrare che è esattamente lo spazio cercato.
Per cominciare si osservi che la proiezione $p : X_H \longrightarrow X$, indotta dal rivestimento universale $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, è un rivestimento poichè se due intorni $U_{[\gamma]}, U_{[\gamma']}$, preimmagine dell'intorno di un punto di $X$, hanno un punto identificato nel quoziente allora sono uguali, infatti dati $\gamma(1) = \gamma'(1)$ segue che $[\gamma] \sim [\gamma']$ se e solo se $[\delta \cdot \gamma] \sim [\delta \cdot \gamma']$. Un buon punto base da scegliere è infine $\tilde{x} = [x_0]$, ovvero la classe del cammino costante, poichè ogni cappio $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ si solleva ad un cammino da $[x_0]$ a $[\gamma]$ che è un cappio se $[x_0] \sim [\gamma]$, cioè se $[\gamma] \in H$ e dunque $p_*(\pi_1(X_H,\ \tilde{x}_0)) = H$. □

Grazie a questi vari risultati, si può ora provare, come anticipato, il teorema che classifica i rivestimenti ponendoli in corrispondenza con i sottogruppi del gruppo fondamentale dello spazio base.

**Teorema 1.4.9.** *Sia $X$ uno spazio connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso.*
*Allora vi è una corrispondenza biunivoca fra i rivestimenti connessi per archi $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, a meno di isomorfismi che ne fissano il punto base, e i sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$, ottenuta associando il sottogruppo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ ad ogni rivestimento e viceversa.*
*Qualora non si fissi il punto base la corrispondenza risulta invece, più in*

*generale, fra le classi di isomorfismo dei rivestimenti connessi per archi e le classi di sottogruppi coniugati di* $\pi_1(X, x_0)$.

*Dimostrazione.* Ad ogni $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ rivestimento connesso per archi si può, come visto, immediatamente associare il sottogruppo $p_*(\pi_1(Y, y_0))$; il viceversa si ha invece per proposizione 1.4.8. Dalla proposizione 1.4.3 segue inoltre che la corrispondenza è definita a meno di isomorfismi fra rivestimenti che ne conservano il punto base.
Rimane dunque da provare che il cambio del punto base all'interno della fibra corrisponde alla scelta di un sottogruppo coniugato.
Sia pertanto $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ il rivestimento e sia $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ un nuovo punto base. Si vuole ora provare che $H_0 = p_*(\pi_1(Y, y_0))$ e $H_1 = p_*(\pi_1(Y, y_1))$ sono sottogruppi coniugati di $\pi_1(X, x_0)$.
Sia $\tilde{\gamma}$ un cammino in $Y$ da $y_0$ a $y_1$, attraverso $p$ questo viene proiettato al cappio $\gamma$, con $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$. Ora $[\gamma]H_0[\gamma]^{-1} \subset H_1$ poichè se $\tilde{\delta}$ è un cappio in $y_0$, $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\delta} \cdot \widetilde{\gamma^{-1}}$ è un cappio in $y_1$ e dunque si proietta ad un elemento di $H_1$, analogamente $[\gamma]^{-1}H_1[\gamma] \subset H_0$. Applicando il coniugio a quest'ultima relazione si trova $H_1 \subset [\gamma]H_0[\gamma]^{-1}$ e pertanto dalla doppia inclusione si ha $H_1 = [\gamma]H_0[\gamma]^{-1}$.
Viceversa, passare da $H_0$ ad un suo coniugato $H_1 = [\gamma]H_0[\gamma]^{-1}$ corrisponde a spostare il punto base $y_0$ del rivestimento associato ad $H_0$ in $y_1 := \tilde{\gamma}(1)$, ove $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento del cappio $\gamma$ con punto iniziale $y_0$. □

## 1.5 Rivestimenti e permutazioni

Un'altra classificazione possibile, che si estende anche a rivestimenti non connessi, si sviluppa a partire dall'azione di monodromia definita in precedenza. Scelto un cappio in $x_0$ nello spazio base $X$, che si suppone sempre connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso, si può trovare un suo sollevamento per ogni foglio del rivestimento, ovvero un cammino fra due punti della fibra di $x_0$. Associando così al punto iniziale di ogni sollevamento quello finale si riesce a definire una permutazione fra

gli elementi della fibra in corrispondenza di ogni cappio, anzi di ogni classe di omotopia di cappi visto che, dai criteri precedenti si ha che questi punti sono invarianti per omotopia. Si osservi infine che la definizione è ben posta in quanto non vi possono essere due sollevamenti distinti che terminano nello stesso punto, altrimenti invertendoli e proiettandoli su $X$ verrebbe meno l'unicità.
A partire da questa associazione classe di cappi - permutazione si può quindi definire un'applicazione dal gruppo fondamentale di $X$ in $x_0$ al gruppo simmetrico con $n$ elementi, ove $n$ è il numero di fogli (volendo si può generalizzare anche al caso con infiniti fogli, ma per semplicità si pensi $n$ finito); si riesce così ad associare ad ogni rivestimento il sottogruppo di $S_n$ che è immagine del gruppo fondamentale.

**Esempio 1.9.** L'idea di questa classificazione viene ben espressa da questo esempio in cui si associano 3 permutazioni diverse a 3 distinti rivestimenti a 3 fogli di $S^1$.
Si considerino dunque i rivestimenti a 3 fogli di $S^1$ formati rispettivamente da 1,2 e 3 componenti connesse, ovvero da un'elica a 3 spire, un'elica a 2 spire e una circonferenza e da 3 circonferenze distinte. Ad un cappio di $S^1$ verranno quindi associati rispettivamente una permutazione di ordine 3, una trasposizione e l'identità; i tre rivestimenti corrispondono dunque, in termini di sottogruppi di $S_3$, a quelli ciclici generati dalle permutazioni sopra elencate.
Il ragionamento, qui visto per 3 fogli, può chiaramente essere generalizzato al caso di $n$ fogli, in cui sulla base del numero di componenti connesse e del numero di spire che ognuna contiene si avrà la successione caratteristica della permutazione da associare (la permutazione sarà definita univocamente una volta numerati i punti della fibra, prima lo è a meno di coniugio).

Si cercherà ora di formalizzare il discorso e di mostrare, analogamente a quanto già fatto in precedenza, come si inverte il processo, ovvero, come, a partire dall'azione del gruppo fondamentale sulla fibra è possibile ricostruire il rivestimento.

*Osservazione* 8. Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento e $\gamma$ un cappio in $X$, allora si può sollevare in modo unico a $\tilde{\gamma}$ per ogni punto della fibra $p^{-1}(\gamma(0))$, pertanto si può definire la mappa $L_\gamma : p^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow p^{-1}(\gamma(1))$ che al punto iniziale di ogni possibile sollevamento $\tilde{\gamma}(0)$ associa il punto finale $\tilde{\gamma}(1)$.
Si osserva subito che, per l'unicità del sollevamento, $L_\gamma$ è biunivoca e la sua inversa è $L_{\gamma^{-1}}$. Se invece si considera la somma di due cammini, $\gamma \cdot \delta$, la funzione loro associata è $L_{\gamma \cdot \delta} = L_\gamma \circ L_\delta$. Come visto, dipendendo $L_\gamma$ solo dalla classe di omotopia di $\gamma$ si ha un omomorfismo $\rho : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow S_n$, con $n$ numero di fogli del rivestimento che opera come $\gamma \mapsto L_\gamma$, chiaramente $L_\gamma \in S_n$ visto che è una biiezione fra insiemi di cardinalità $n$.

**Teorema 1.5.1.** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente 1-connesso.*
*Allora vi è una corrispondenza biunivoca fra i suoi rivestimenti con $n$ fogli e le classi di omomorfismi $\rho : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow S_n$, ove l'equivalenza è data dalla relazione di coniugio ($\sigma^{-1}\rho\sigma, \sigma \in S_n$).*

*Dimostrazione.* Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento ad $n$ fogli e $\gamma$ un cappio in $X$ con $\gamma(0) = x_0$, allora si può sollevare in modo unico a $\tilde{\gamma}$ per ogni punto della fibra $p^{-1}(\gamma(0))$, pertanto si può definire la mappa $L_\gamma : p^{-1}(\gamma(0)) \longrightarrow p^{-1}(\gamma(1))$ che al punto iniziale di ogni possibile sollevamento $\tilde{\gamma}(0)$ associa il punto finale $\tilde{\gamma}(1)$. Si osserva subito che, per l'unicità del sollevamento, $L_\gamma$ è biunivoca e la sua inversa è $L_{\gamma^{-1}}$. Se invece si considera la somma di due cammini, $\gamma \cdot \delta$, la funzione loro associata è $L_{\gamma \cdot \delta} = L_\gamma \circ L_\delta$.
Come visto, dipendendo $L_\gamma$ solo dalla classe di omotopia di $\gamma$ si ha un omomorfismo $\rho : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow S_n$, con $n$ numero di fogli del rivestimento che opera come $\gamma \mapsto L_\gamma$, chiaramente $L_\gamma \in S_n$ visto che è una biiezione fra insiemi di cardinalità $n$.
Viceversa si cerchi di costruire il rivestimento $p : Y \longrightarrow X$ a partire dall'omomorfismo $\rho : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow S_n$, cioè dall'azione del gruppo fondamentale sulla fibra $p^{-1}(x_0)$. Per il teorema 1.4.7 vi è un rivestimento universale, sia $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ i cui elementi come nella costruzione sono rappresentati da classi di cammini da $x_0$ ad ogni punto di $X$, si definisce allora la mappa

$h : \tilde{X} \times p^{-1}(x_0) \longrightarrow Y$, $([\gamma], \tilde{x}_0) \mapsto \tilde{\gamma}(1)$, ove $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento di $\gamma$ con punto iniziale $\tilde{x}_0$. Questa applicazione è continua, infatti gli intorni di $([\gamma], \tilde{x_0})$ sono costituiti da punti del tipo $([\eta \cdot \gamma], \tilde{x}_0)$ ove $\eta$ è un cammino in un intorno opportuno di $\gamma(1)$. È inoltre suriettiva visto che $X$ è connesso per archi, ma non iniettiva, altrimenti $h$ sarebbe un omeomorfismo (globale); è comunque un omeomorfismo locale.
Il rivestimento cercato si può però vedere come un opportuno quoziente di $\tilde{X} \times p^{-1}(x_0)$, rispetto a cui si ha appunto l'omeomorfismo. Si devono pertanto identificare gli elementi con la stessa immagine, supponiamo $h([\gamma], \tilde{x}_0) = h([\gamma'], \tilde{x}'_0)$, allora $\gamma$ e $\gamma'$ sono entrambe cammini da $x_0$ allo stesso punto finale, inoltre anche i loro sollevamenti che iniziano in $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x'_0}$ terminano nello stesso punto quindi $\tilde{x}'_0 = L_{\gamma'^{-1} \cdot \gamma}(\tilde{x}_0)$; posto allora $\delta = \gamma'^{-1} \cdot \gamma$ si ha $h([\gamma], \tilde{x}_0) = h([\gamma \cdot \delta], L_\delta(\tilde{x}_0))$, relazione che viceversa vale per la scelta di ogni cappio $\delta$. Si definisce ora $Y_\rho = \tilde{X} \times p^{-1}(x_0)/\sim$, ove la relazione identifica i punti $([\gamma], \tilde{x}_0)$ e $([\gamma \cdot \delta], L_\delta(\tilde{x}_0))$ per ogni $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$, e sia $h^* : Y_\rho \longrightarrow Y$ la mappa indotta da $h$. Si osservi che la notazione $Y_\rho$ evidenzia come questo quoziente dipenda direttamente dall'omomorfismo $\rho$.
Il rivestimento universale induce infine una mappa di proiezione $Y_\rho \longrightarrow X, ([\gamma], \tilde{x}_0) \mapsto \gamma(1)$ che è un rivestimento in quanto se $U \subset X$ è un aperto con $\pi^{-1}(U) = U \times \pi_1(X, x_0)$ allora passando al quoziente si ottiene $U \times p^{-1}(x_0)$. Si mostra ora che questo rivestimento è proprio quello cercato infatti la mappa $h^* : Y_\rho \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo (si è resa iniettiva grazie al quoziente) e visto che rispetta le fibre è un isomorfismo di rivestimenti.
Rimane ora da provare che a rivestimenti isomorfi è associata la stessa azione di $\pi_1(X, x_0)$; siano dunque $p_1 : Y_1 \longrightarrow X$ e $p_2 : Y_2 \longrightarrow X$ rivestimenti isomorfi. Un isomorfismo $h : Y_1 \longrightarrow Y_2$ si può restringere ad una mappa biunivoca fra le fibre di $x_0$, $h_{x_0} : p_1^{-1}(x_0) \longrightarrow p_2^{-1}(x_0)$ da cui $L_\gamma(h(\tilde{x}_0)) = h(L_\gamma(\tilde{x}_0))$. Con questa proprietà la biiezione $h_{x_0}$ diventa quindi un isomorfismo di insiemi con l'azione di $\pi_1(X, x_0)$; a $p_1$ e $p_2$ corrispondono pertanto azioni fra loro isomorfe. Viceversa se le azioni, siano $\rho_1$ e $\rho_2$, sono isomorfe, l'isomorfismo $h_{x_0} : p_1^{-1}(x_0) \longrightarrow p_2^{-1}(x_0)$ induce una mappa $Y_{\rho_1} \longrightarrow Y_{\rho_2}$ e $h_{x_0}^{-1}$ la sua inversa,

si ha così l'isomorfismo fra i rivestimenti. □

Questo teorema di classificazione, leggermente generalizzato, si può esprimere nel linguaggio della teoria delle categorie nel modo seguente.

**Teorema 1.5.2.** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso, sia $x_0 \in X$. La categoria dei rivestimenti di $X$ è equivalente alla categoria degli insiemi su cui è definita un'azione sinistra del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.*

# Capitolo 2

# La corrispondenza di Riemann-Hilbert

## 2.1 Fasci localmente costanti e rivestimenti

**Definizione 2.1.** Sia $X$ uno spazio topologico. Un *prefascio di insiemi* $\mathcal{F}$ su $X$ è definito associando ad ogni aperto $U \subset X$ un insieme $\mathcal{F}(U)$ e ad ogni inclusione di aperti $U \subset V$ una mappa $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, detta mappa di restrizione, tale che:

i. $\rho_{UU}$ è la mappa identica

ii. se $W \subset V \subset U$ allora $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono detti *sezioni* di $\mathcal{F}$ su $U$.
Le sezioni di $\mathcal{F}(X)$ sono dette *sezioni globali*.

Questa nozione si può generalizzare a prefascio di una categoria $\mathscr{C}$ qualsiasi (cioè non solo insiemi ma anche gruppi, anelli, anelli commutativi,...) richiedendo che gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ siano oggetti di $\mathscr{C}$ e le mappe $\rho$ siano morfismi.

Ricorrendo alla teoria delle categorie si può riformulare la definizione di prefascio in modo più conciso.

**Definizione 2.2.** Sia $X$ uno spazio topologico.
Sia $\mathscr{C}$ la categoria degli aperti non vuoti $U \subset X$ con i morfismi definiti da $Hom(V, U)$ che è costituito dalla mappa di immersione se $V \subset U$ ed è vuoto altrimenti.
Allora un prefascio di insiemi su $X$ è un funtore controvariante da $\mathscr{C}$ alla categoria degli insiemi.

Si possono ora definire i morfismi tra prefasci.

**Definizione 2.3.** Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due prefasci su uno spazio topologico $X$.
Un morfismo di prefasci $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ è una collezione di morfismi del tipo $\Phi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ tale che per ogni $V \subset U$ il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\rho^{\mathcal{F}}_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho^{\mathcal{G}}_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\Phi_V"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

*Osservazione* 9. I prefasci di insiemi su uno spazio topologico $X$ costituiscono una categoria i cui oggetti sono i prefasci di insiemi su $X$ e i morfismi sono quelli del tipo appena definito.

**Esempio 2.1.** Un primo esempio di prefascio di insiemi si ha associando ad ogni aperto U dello spazio topologico $X$ le funzioni continue a valori reali definite su $U$, con le mappe di restrizione date appunto dalla restrizione della funzione a $V \subset U$.

*Notazione* 1. Visto l'esempio e la terminologia già introdotta di mappe di restrizione, per semplicità si userà la seguente notazione: dato $V \subset U$, la scritturà $s|_V$ si considera equivalente a $\rho_{UV}(s)$ ove $s \in \mathcal{F}(U)$.

**Definizione 2.4.** Un prefascio $\mathcal{F}$ (di insiemi, gruppi, anelli,...) su $X$ è un *fascio* se soddisfa i seguenti assiomi:
Sia dato un aperto $U \neq \emptyset$ in $X$ e un suo ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ con insiemi non vuoti

i. Assioma di identità locale: Se due sezioni $s, t \in \mathcal{F}(U)$ sono tali che $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ per ogni $i \in I$, allora $s = t$

ii. Assioma di incollamento: Se $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i \in I}$ è una famiglia di sezioni tali che $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$ per $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora esiste una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|U_i = s_i$ per ogni $i \in I$; in tal caso $s$ è unica per la condizione precedente.

La categoria dei fasci di insiemi su X è definita come sottocategoria piena della categoria dei prefasci corrispondente e dunque i morfismi di fasci sono quelli fra i prefasci.

**Esempio 2.2.** Il prefascio delle funzioni continue già introdotto è anche un fascio infatti, se due funzioni continue $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ coincidono restringendole agli aperti di un ricoprimento di $U$, allora coincidono su tutto $U$, inoltre è soddisfatto anche il secondo assioma della definizione poichè si può costruire la funzione cercata punto per punto.

**Esempio 2.3.** Sia $D$ un aperto connesso di $\mathbb{C}$. Si definisce fascio delle funzioni olomorfe su $D$ il fascio di anelli $\mathcal{O}$ le cui sezioni $\mathcal{O}(U)$ per $U \subset D$ aperto sono le funzioni olomorfe su $U$. Questa struttura si estende anche alle varietà complesse; analogamente si ha il fascio delle funzioni $C^\infty$ su una varietà $C^\infty$.

**Esempio 2.4.** Siano $S$ e $X$ spazi topologici. Sia può definire allora il fascio $\mathcal{F}_S$ su $X$, le cui sezioni, per $U \subset X$ aperto non vuoto, sono le funzioni continue $f : U \longrightarrow S$. Se $S$ è un insieme discreto, $\mathcal{F}_S$ è detto il *fascio costante* su $X$ a valori in $S$, infatti su un aperto connesso $U \subset X$ le sezioni $\mathcal{F}_S$ sono le funzioni costanti, ovvero $\mathcal{F}_S(U) = S$.

**Esempio 2.5.** Sia $A$ un gruppo abeliano e $x \in X$ spazio topologico, si definisce il prefascio di gruppi abeliani $\mathcal{F}^x$ su $X$ come $\mathcal{F}^x(U) = A$ se $x \in U$ e $\mathcal{F}^x(U) = 0$ altrimenti, con i morfismi di restrizione naturali (morfismo nullo, identità). Questo è anche un fascio detto *fascio grattacielo* con valore $A$ su $x$.

**Definizione 2.5.** Sia $\mathcal{F}$ un fascio di insiemi (gruppi, anelli,...) sullo spazio topologico $X$. Si dice che $\mathcal{G}$ è un *sottofascio* di $\mathcal{F}$ se per ogni aperto $U \subset X$, $\mathcal{G}(U)$ è un sottoinsieme (sottogruppo, sottoanello,...) di $\mathcal{F}(U)$.

**Definizione 2.6.** Sia $U$ un aperto dello spazio topologico $X$ e $\mathcal{F}$ un prefascio su $X$. Si definisce restrizione di $\mathcal{F}$ da $X$ ad $U$, $\mathcal{F}|_U$, il prefascio ottenuto considerando solo le sezioni di $\mathcal{F}$ relative ad aperti in $U$.

**Proposizione 2.1.1.** *Siano $X$ uno spazio topologico, $\{U_i\}_{i\in I}$ un suo ricoprimento aperto e $\mathcal{F}_i$ un fascio di insiemi su $U_i$ per ogni $i \in I$. Sia inoltre dato per ogni $i, j \in I$, $i \neq j$, un isomorfismo*

$$\theta_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j} \longrightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$$

*tale che per ogni $i, j, k \in I$ diversi fra loro $\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = \theta_{ik}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$. Allora esiste un fascio $\mathcal{F}$, unico a meno di isomorfismi, tale che $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$ per ogni $i \in I$. Si dice che il fascio $\mathcal{F}$ è ottenuto per incollamento a partire dai fasci $\mathcal{F}_i$.*

*Dimostrazione.* La prova consiste nel costruire un fascio che soddisfi queste condizioni. Sia $U \subset X$ un aperto, si pone allora

$$\mathcal{F}(U) := \{(s_i)_{i\in I} | s_i \in \mathcal{F}_i(U\cap U_i) \text{ e } \theta_{ij}(s_i|_{U\cap U_i\cap U_j}) = s_j|_{U\cap U_i\cap U_j} \quad \forall i, j \in I, i \neq j\}$$

con le mappe di restrizione indotte da quelle di $\mathcal{F}_i$. In questo modo $\mathcal{F}$ è un prefascio; a partire dagli assiomi di fascio per gli $\mathcal{F}_i$ si prova che sono verificati anche per $\mathcal{F}$, che è dunque un fascio. Chiaramente $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$ è vero per come è stato definito $\mathcal{F}$; proprio da questa condizione segue inoltre l'unicità a meno di isomorfismi. □

**Definizione 2.7.** Sia $\mathcal{F}$ un fascio sullo spazio topologico $X$.
$\mathcal{F}$ si dice *localmente costante* se ogni punto $x \in X$ ha un intorno aperto $U$ tale che $\mathcal{F}|_U$ è isomorfo, come fascio su $U$, al fascio costante.

Nei seguenti risultati si mostreranno alcune relazioni tra fasci e rivestimenti assumendo sempre che gli spazi topologici siano localmente connessi.

**Definizione 2.8.** Sia $p : Y \longrightarrow X$ uno spazio sopra $X$ e $U \subset X$ un aperto. Una sezione di $p$ su $U$ è una mappa continua $s : U \longrightarrow Y$ tale che $p \circ s = id_U$.

**Proposizione 2.1.2.** *Sia $p : Y \longrightarrow X$ uno spazio sopra $X$. Si definisce il prefascio di insiemi $\mathcal{F}_Y$ su $X$ associando ad ogni $U \subset X$ l'insieme $\mathcal{F}_Y(U)$ costituito dalle sezioni di $p$ su $U$. Per $V \subset U$ la mappa di restrizione si ha invece nel modo più naturale restringendo $p$ da $U$ a $V$. Il prefascio $\mathcal{F}_Y$ è un fascio, detto* fascio delle sezioni locali *dello spazio $p : Y \longrightarrow X$ sopra $X$.*

*Dimostrazione.* La prova è immediata infatti le sezioni sono funzioni continue e dunque soddisfano gli assiomi di incollamento. □

**Proposizione 2.1.3.** *Sia $p : Y \longrightarrow X$ un rivestimento di $X$. Allora il fascio $\mathcal{F}_Y$ è localmente costante, inoltre è costante se e solo se il rivestimento è quello banale.*

*Dimostrazione.* Sia $x \in X$, per la proposizione 1.1.1 localmente ogni rivestimento è banale, quindi vi è un intorno $V$ di $x$ il cui rivestimento è isomorfo a $V \times F$, ove $F$ è la fibra di $x$. L'immagine di una sezione $V \longrightarrow Y$ è un aperto connesso isomorfo a $V$ tramite $p$ e dunque è uno degli aperti disgiunti di $p^{-1}(V)$, pertanto vi è una corrispondenza biunivoca fra le sezioni e i punti della fibra. Il fascio $\mathcal{F}_Y$ ristretto a $V$ è allora isomorfo al fascio costante ottenuto sull'insieme $F$. Chiaramente il fascio $\mathcal{F}_Y$ è costante se e solo se l'isomorfismo vale con $V = X$, ovvero il rivestimento è banale. □

Ad ogni rivestimento non banale si può dunque associare un fascio localmente costante ma non costante.

*Osservazione* 10. Siano $p : Y \longrightarrow X$ e $q : Z \longrightarrow X$ due rivestimenti. Allora ogni $\Phi : Y \longrightarrow Z$ morfismo di rivestimenti induce un morfismo fra fasci localmenti costanti $\mathcal{F}_Y \longrightarrow \mathcal{F}_Z$ portando la sezione locale $s : U \longrightarrow Y$ di $p$ nella sezione locale $\Phi \circ s : U \longrightarrow Z$ di $q$.
In particolare la legge che associa $Y \mapsto \mathcal{F}_Y$ è un funtore.

**Definizione 2.9.** Siano $X$ uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un prefascio su $X$ e $x \in X$. La *spiga* $\mathcal{F}_x$ di $\mathcal{F}$ in $x$ è l'unione disgiunta degli insiemi $\mathcal{F}(U)$ al

variare di $U$ intorno aperto di $x$ in $X$ quozientata rispetto alla relazione di equivalenza seguente: $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V)$ sono equivalenti se vi è un intorno aperto di $x$, $W \subset U \cap V$, tale che $s|_U = t|_V$.
Si ha dunque

$$\mathcal{F}_x = \coprod_{U \ni x} U \Big/ \sim$$

*Osservazione* 11. La definizione di spiga di un prefascio si può riformulare in termini di limite diretto degli $\mathcal{F}(U)$ al variare di $U$ intorno di $x$.

*Osservazione* 12. Un morfismo di prefasci $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ induce un morfismo $\psi : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ sulle spighe. Inoltre se $\mathcal{F}$ è un prefascio di insiemi (gruppi, anelli,...) la sua spiga $\mathcal{F}_x$ eredita una struttura di insieme (gruppo, anello,...), quindi scelto $x \in X$ si ha un funtore fra la categoria dei prefasci di insiemi (gruppi, anelli,...) su X e quella degli insiemi (gruppi, anelli,...), associando ad ogni prefascio la sua spiga in x ed ad ogni morfismo di fasci il relativo morfismo di spighe.

**Teorema 2.1.4.** *Il funtore $Y \mapsto \mathcal{F}_Y$ intodotto nell' osservazione 10 induce una equivalenza fra la categoria dei rivestimenti di $X$ e quella dei fasci localmente costanti su $X$.*

La dimostrazione del teorema è preceduta da alcuni risultati preparatori, inizialmente si costruisce infatti un funtore nella direzione inversa e soltanto in seguito si mostra che componendolo con l'altro si trova un funtore isomorfo a quello identico.

*Osservazione* 13. Per provare il teorema, bisogna costruire un funtore dalla categoria dei prefasci di insiemi localmente costanti su $X$ a quella dei rivestimenti di $X$.
Per arrivare a questo funtore si procede ad una costruzione più generale. Si cerca di associare al prefascio di insiemi $\mathcal{F}$ uno spazio sopra $X$, $p_{\mathcal{F}} : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$, in modo che $p_{\mathcal{F}}^{-1}(x) = \mathcal{F}_x, \forall x \in X$.
Vista questa proprietà $X_{\mathcal{F}}$ deve pertanto essere l'unione disgiunta delle spighe $\mathcal{F}_x$ per ogni $x$ e la mappa di proiezione $p_{\mathcal{F}}$ è definita mandando ogni

elemento di $X_{\mathcal{F}}$, che apparterrà ad una spiga $\mathcal{F}_x$, proprio in $x$ (si noti che la mappa è ben definita essendo l'unione disgiunta), cioè $\mathcal{F}_x \ni a \mapsto x$.
Per definire una topologia opportuna su $X_{\mathcal{F}}$ si osservi che, scelto un aperto $U \subset X$, ogni sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ induce una mappa $i_s : U \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$, infatti ad ogni $x \in U$ si associa la classe di $s$ nella spiga $\mathcal{F}_x$, che a sua volta è inclusa in $X_{\mathcal{F}}$ per definizione. La topologia di $X_{\mathcal{F}}$ è quella meno fine per cui gli insiemi $i_s(U)$ sono aperti, per ogni $U$ ed ogni $s$. Si verifica che in questa topologia le mappe $p_{\mathcal{F}}$ e $i_s$ sono continue. Inoltre, se $\mathcal{F}$ è un fascio localmente costante allora $X_{\mathcal{F}}$ è un rivestimento di X. Per ogni punto di $X$, vi è infatti $U$, un aperto connesso di $X$ per cui $\mathcal{F}|_U$ è isomorfo al fascio costante ottenuto da un insieme opportuno dotato di topologia discreta, sia $F$. Ora si ha che $\mathcal{F}_x = F$ per ogni $x \in U$ visto che $F$ è proprio la spiga del fascio costante e localmente vi è isomorfismo, quindi $p_{\mathcal{F}}^{-1}(U)$ è isomorfo $U \times F$, essendo $X_{\mathcal{F}}$ unione disgiunta delle spighe e dunque $p_{\mathcal{F}}$ è localmente isomorfo ad un rivestimento banale; ne segue allora che è un rivestimento.
Ora si osservi infine che, un morfismo $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ di prefasci, inducendo un morfismo $\psi : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ fra le spighe, permette di definire un'altra mappa $\Phi : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X_{\mathcal{G}}$ compatibile con le proiezioni visto che deriva da mappe del tipo $\psi$ che ovviamente conservano le spighe.

**Lemma 2.1.5.** *La mappa $\Phi : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X_{\mathcal{G}}$ è un morfismo di spazi sopra X.*

*Osservazione* 14. L'osservazione e il lemma precedenti implicano dunque che la legge $\mathcal{F} \mapsto X_{\mathcal{F}}$ è un funtore fra la categoria dei fasci su $X$ a quella degli spazi su $X$. L'osservazione prova inoltre che, in particolare, il funtore manda la sottocategoria piena dei fasci localmente costanti in quella dei rivestimenti e dunque, in tal caso, la spiga $\mathcal{F}_x$ è esattamente la fibra di $x$ in $X_{\mathcal{F}}$ per costruzione.

*Dimostrazione del teorema 2.1.4.* Siano $T$ il funtore $Y \longrightarrow \mathcal{F}_Y$ e S il funtore $\mathcal{F} \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$, costruiti in precedenza fra rivestimenti e fasci localmente costanti.

Componendoli si ha

$$\mathcal{F} \xrightarrow{S} X_{\mathcal{F}} \xrightarrow{T} \mathcal{F}_{X_{\mathcal{F}}}$$

$$Y \xrightarrow{T} \mathcal{F}_Y \xrightarrow{S} X_{\mathcal{F}_Y}$$

Dato un fascio localmente costante $\mathcal{F}$ si deve provare che vale l'isomorfismo fra funtori $S \circ T(\mathcal{F}) \cong id(\mathcal{F})$ e dunque $\mathcal{F}_{X_{\mathcal{F}}} \cong \mathcal{F}$.
Viceversa dato un rivestimento $p : Y \longrightarrow X$ deve valere $T \circ S(Y) \cong id(Y)$ e dunque $X_{\mathcal{F}_Y} \cong Y$ funtorialmente in $Y$. Ora, il morfismo di fasci $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_{X_{\mathcal{F}}}$ manda una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ nella sezione locale $i_s : U \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$, mentre il morfismo di rivestimenti $Y \longrightarrow X_{\mathcal{F}_Y}$ mappa un punto $y \in Y$ della fibra $Y_x$ di $x$ in $Y$ nel punto corrispondente nella fibra $(\mathcal{F}_Y)_x = Y_x$ di $x$ in $X_{\mathcal{F}_Y}$.
Per mostrare che sono isomorfismi basta verificare che lo sono le loro restrizioni ad un opportuno ricoprimento aperto di X. Si scelga dunque un rivestimento $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che per ogni $i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ è isomorfo al fascio costante. Sostituendo $U_i$ con $X$ si può allora supporre che $\mathcal{F}$ sia isomorfo al fascio costante ottenuto da un insieme $F$, pertanto $X_{\mathcal{F}} \cong X \times F$ e viceversa il fascio delle sezioni locali del rivestimento banale $X \times F \longrightarrow X$ è il fascio costante ottenuto da $F$. □

Da questo risultato e dal teorema 1.5.2 segue quindi

**Teorema 2.1.6.** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso e $x \in X$. La categoria dei fasci localmente costanti su $X$ è equivalente alla categoria degli insiemi su cui è definita un'azione sinistra del gruppo fondamentale $\pi_1(X, x)$. L'equivalenza è indotta dal funtore che porta un fascio $\mathcal{F}$ nella sua spiga $\mathcal{F}_x$ in $X$.*

Per il teorema successivo è necessario introdurre la nozione di anello di gruppo.

**Definizione 2.10.** Sia $R$ un anello commutativo con identità e sia $G$ un gruppo moltiplicativo. Si chiama *anello di gruppo* di $G$ a coefficienti in $R$ e si indica con $R[G]$ l'insieme delle somme formali

$$\sum_i a_i g_i$$

con $a_i \in R$ tutti nulli tranne che un numero finito e $g_i \in G$. La somma fra elementi dell'anello di gruppo è definita componente per componente, ovvero dati due elementi di $R[G]$, $x = a_1 g_1 + ... + a_n g_n$ e $y = b_1 g_1 + ... + b_m g_m$ con $n \geq m$ si ha

$$x + y = (a_1 + b_1)g_1 + ... + (a_m + b_m)g_m + a_{m+1}g_{m+1} + ... + a_n g_n$$

La moltiplicazione invece si ha applicando la proprietà distributiva ai componenti e riducendosi così al caso $(ag_i)(bg_j) = (ab)(g_i g_j)$, posto per definizione. Nel caso in cui $R$ sia un campo, accettate le identificazioni $g_i = 1_R g_i$ e $a1_G = a$, si ha che sia gli elementi del campo $R$ che quelli del gruppo $G$ sono elementi di $R[G]$. In particolare vale

$$b(\sum_i a_i g_i) = \sum_i (ba_i)g_i \text{ per ogni } b \in R$$

Si ha così che $R[G]$ è uno $R$-spazio vettoriale.

**Teorema 2.1.7.** *Siano $X$ uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso, $x \in X$ e $R$ un anello commutativo.*
*La categoria dei fasci localmente costanti di $R$-moduli su $X$ è equivalente alla categoria dei $R[\pi_1(X, x)]$-moduli sinistri, ove $R[\pi_1(X, x)]$ è l'anello di gruppo di $R$ a coefficienti in $\pi_1(X, x)$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathcal{F}$ un fascio localmente costante di $R$-moduli, allora per quanto già osservato anche la sua spiga $\mathcal{F}_x$ presenta la struttura di R-modulo, inoltre, dalla corrispondenza del teorema 2.1.4 segue che $\mathcal{F}_x$ è proprio la fibra di $x$ nel rivestimento corrispondente e su questa, vista come insieme, si può definire un'azione di $\pi_1(X, x)$ (azione di monodromia).
Bisogna dunque provare che questa azione è compatibile con la struttura di $R$-modulo, così $\mathcal{F}_x$ potrà diventare un $R[\pi_1(X, x)]$-modulo. Per questa verifica

è necessario introdurre l'operazione di somma sull' $R$-modulo $\mathcal{F}_x$. Sia dunque $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ il prodotto diretto di fasci definito da $(\mathcal{F} \times \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U)$ per ogni $U \subset X$ e sia $\mathcal{F}_x \times \mathcal{F}_x$ la sua spiga su $x$. La somma su $\mathcal{F}$ è data, scelto un aperto $U \subset X$, da un morfismo di fasci $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$, la somma su $\mathcal{F}_x$ si ha dal morfismo indotto sulla spiga. Questo è sia una mappa fra insiemi con l'azione di $\pi_1(X, x)$, sia fra $R$-moduli e dunque per ogni $s_1, s_2 \in \mathcal{F}_x$, $\sigma \in \pi_1(X, x)$ e $r \in R$ si ha $\sigma(s_1 + s_2) = \sigma s_1 + \sigma s_2$ e $r(s_1 + s_2) = rs_1 + rs_2$.
La seconda parte della prova, qui omessa, consiste, in modo del tutto analogo a quanto fatto per il teorema 2.1.4, nel provare l'equivalenza fra le categorie.

□

## 2.2 Sistemi locali e rappresentazioni del gruppo fondamentale

**Definizione 2.11.** Un *sistema locale complesso* su uno spazio topologico $X$ è un fascio localmente costante di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali di dimensione finita.
Se $X$ è connesso tutte le spighe hanno la stessa dimensione che è detta dimensione del sistema locale.

**Definizione 2.12.** Siano $G$ un gruppo e $F$ un campo.
Una *rappresentazione del gruppo* $G$ è un omomorfismo $\phi : G \longrightarrow GL_n(F)$.
L'ordine della matrice, $n$, è detto grado della rappresentazione.

*Osservazione* 15. Siano $G$ un gruppo e $F$ un campo.
Vi è una corrispondenza biunivoca fra le rappresentazioni di $G$ su un $F$-spazio vettoriale e gli $F[G]$-moduli.

*Dimostrazione.* Si mostra come, a partire da una rappresentazione di $G$ si può costruire un $F[G]$-modulo e viceversa. Sia dunque $\phi : G \longrightarrow GL_n(F)$ una rappresentazione di $G$ sullo spazio vettoriale $V = F^n$. Allora $\forall g \in G$ si ha che $\phi(g)$ è un automorfismo su $V$ e dunque si può mettere su $V$ la struttura di $F[G]$-modulo definendo la seguente azione sugli elementi di $V$:

$$(\sum_i a_i g_i) \cdot v = \sum_i a_i \phi(g_i)(v)$$

per ogni $\sum_i a_i g_i \in F[G]$, $v \in V$ ove $a_i \in F, g_i \in G$ Si omette la verifica che questa azione verifica gli assiomi di modulo.
Viceversa sia $V$ un $F[G]$-modulo, si osservi che $F$ è un sottoanello di $F[G]$ e che l'azione di un elemento $a \in F$ su $V$ è uguale a quella di $a1_G \in F[G]$, quindi da $V$ si può estrarre la struttura di $F$-spazio vettoriale.
Ad ogni elemento $g \in G$ si può allora associare la seguente mappa da $V$ a $V$:

$$\phi(g)(v) = g \cdot v \text{ per ogni } v \in V$$

Dopo aver mostrato che la mappa definita è un automorfismo e che $\phi$ è un omomorfismo si ha subito che $\phi$ è proprio una rappresentazione di $G$. $\square$

Dal teorema 2.1.7 per $R = \mathbb{C}$ e vista l'osservazione sopra si ha quindi il seguente corollario.

**Corollario 2.2.1.** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso e localmente semplicemente connesso e $x \in X$. La categoria dei sistemi locali complessi su $X$ è equivalente alla categoria delle rappresentazioni sinistre di dimensione finita di $\pi_1(X, x)$.*

**Definizione 2.13.** L'equivalenza di categorie del corollario sopra permette di associare ad ogni sistema locale complesso un omomorfismo $\phi : \pi_1(X, x) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ con $n \in \mathbb{N}$ opportuno e viceversa. Questa rappresentazione è detta *rappresentazione di monodromia del sistema locale.*

Si presenta ora un esempio di sistema locale complesso.

**Esempio 2.6.** Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso.
Si consideri su $D$ l'equazione differenziale lineare omogenea di grado $n$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

i cui coefficienti $a_i$ sono funzioni olomorfe su $D$.
Come noto dalla teoria delle equazioni differenziali, su ogni aperto $U \subset D$ l'equazione ammette come soluzioni locali delle funzioni olomorfe e queste costituiscono un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione $n$, dunque per ogni punto di $D$ vi è un intorno aperto $U$ e lo spazio delle soluzioni $\mathcal{S}(U)$ ha una base $x_1, ..., x_n$. Si ha inoltre che sono verificati gli assiomi di fascio, in particolare le soluzioni costituiscono un sottofascio $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}^n$ della somma diretta di $n$-copie del fascio delle funzioni olomorfe su $D$, che è un fascio di $\mathcal{C}$-spazi vettoriali. Si osserva infine che restringendo le funzioni $x_1, ..., x_n$ di una base di $\mathcal{S}(U)$ ad un aperto $V \subset U$ queste sono una base di $\mathcal{S}(V)$, dunque $\mathcal{S}$ è localmente costante, perciò costituisce un sistema locale complesso di dimensione $n$.
Analogo ragionamento si può fare per le soluzioni di un sistema lineare di $n$ equazioni differenziali in $n$ incognite del tipo $y' = Ay$ con $A$ matrice $n \times n$ di funzioni olomorfe, infatti come noto questo sistema è equivalente ad un'unica equazione di grado $n$ del tipo appena esaminato.

*Osservazione* 16. Ad ogni sistema locale, si pensi quindi, per esempio, ad un'equazione differenziale lineare omogenea, per il corollario 2.2.1 si può associare una rappresentazione di monodromia; si mostra ora come ricavarla esplicitamente.
Siano $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e localmente semplicemente connesso, $x \in D$ e $\gamma \in \pi_1(D, x)$. Siano inoltre $\mathcal{S}$ un sistema locale e $s \in \mathcal{S}_x$ un elemento della sua spiga in $x$. Per l'osservazione 13, dal fascio $\mathcal{S}$ si costruisce il rivestimento $p_{\mathcal{S}} : D_{\mathcal{S}} \longrightarrow D$ e $s$ è un elemento della fibra di $x$. Ora l'azione di monodromia di $\gamma$ porta $s$ nel punto della fibra di $x$ in cui termina l'unico sollevamento del cappio $\gamma$ che inizia in $s$.
Si definisce così per ogni elemento del gruppo fondamentale un'applicazione lineare da un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione $n$, la spiga $\mathcal{S}_x$, in sè.

**Esempio 2.7.** Si vuole ora sviluppare maggiormente nel dettaglio il caso più semplice dell'esempio precedente, ovvero trovare il fascio delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea di grado 1 e calcolare la rappresentazione di monodormia associata.

Sia $D \subset \mathbb{C}$ il disco puntato (cioè privato dello 0) aperto e centrato in 0 con raggio $1 < R \leq \infty$. Per fissare le idee, sia 1 il punto base del gruppo fondamentale di $D$. Si consideri infine l'equazione differenziale $y' = fy$, ove $f$ è una funzione olomorfa su $D$ estendibile a 0 in modo meromorfo.
Le soluzioni dell'equazione in un intorno di un punto $x \in D$, come noto, sono, a meno di opportune costanti moltiplicative, del tipo $e^F$, con $F$ primitiva di $f$ nell'intorno considerato e costituiscono un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione 1. Poichè $D$ non è semplicemente connesso, in generale, $f$ non ammette un'unica primitiva su tutto $D$ e pertanto il fascio delle soluzioni $\mathcal{S}$ è localmente costante e non costante. Si considerino allora i due aperti semplicemente connessi $U_- = D \setminus (0, -iR)$ e $U_+ = D \setminus (0, iR)$ su cui sono definite rispettivamente le primitive $F_-$ ed $F_+$ di $f$. L'intersezione $U_- \cap U_+$ e costituita da due componenti connesse $C_- = U_- \cap \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) < 0\}$ e $C_+ = U_+ \cap \{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 0\}$ su cui le primitive $F_-$ ed $F_+$ differiscono al più di una costante, allora si possono scegliere in modo che $F_- = F_+$ su $C_-$.
Il sistema locale delle soluzioni su $U_-$ è pertanto isomorfo al fascio costante ottenuto a partire dal sottospazio di $\mathcal{O}(U_-)$ generato da $\exp^{F_-}$ e analogamente si ha con $U_+$.
Si può ora procedere al calcolo della rappresentazione di monodromia $\phi : \pi_1(D, 1) \longrightarrow GL_1(\mathbb{C})$ col metodo indicato all'osservazione precedente.
Si noti subito che, poiche il disco è puntato il suo gruppo fondamentale è $\pi_1(D, 1) \cong \mathbb{Z}$ e che $GL_1(\mathcal{C}) \cong \mathbb{C}^*$. Per fissare l'omomorfismo è necesssario stabilire l'immagine di un generatore del dominio, essendo quest'ultimo ciclico. Sia pertanto $\gamma \in \pi_1(D, 1)$ il generatore costituito dalla circonferenza percorsa una volta in senso antiorario, $g : [0, 1] \longrightarrow D, t \mapsto \exp^{2\pi i t}$.
Ora si consideri una soluzione dell'equazione, $u \in \mathcal{S}_1$ del tipo $u = \exp^{F_-}$; prolungando analiticamente la soluzione lungo il cammino $g$, rappresentante della classe $\gamma$, questa rimane uguale fino a quando non si arriva all'intersezione con il semiasse immaginario negativo, lungo cui $F_-$ non è definita; in un punto di $C_-$, su cui, si ricorda, $F_- = F_+$, bisogna pertanto passare ad $u_1 = \exp^{F_+}$, che rimane invariata fino al termine del cammino $g$ su cui si sta

effettuando il prolungamento. Le due soluzioni su $C_+$ e in particolare nel punto 1 differiscono di una costante moltiplicativa che è proprio l'immagine di $\gamma$ cercata, sia $m$, si ha cioè $u_1 = mu$ e quindi

$$m = u_1 u^{-1} = e^{F_+(1)}(e^{F_-(1)})^{-1} = \exp(F_+(1) - F_+(-1) + F_-(-1) - F_-(1))$$

$$= \exp(\int_\gamma f) = \exp(2\pi i Res_0 f)$$

ove si è usato nuovamente che $F_- = F_+$ su $C_-$ e il teorema dei residui per il calcolo dell'integrale. Si è dunque riusciti ad esprimere esplicitamente l'immagine $m$ del generatore $\gamma$ in termini di $f$.
Viceversa, a partire da una rappresentazione del disco puntato, cioè data $m = \phi(\gamma)$ si può ritrovare un'equazione differenziale del tipo $y' = fy$. Sia $\alpha$ tale da soddisfare la relazione $e^{2\pi i\alpha} = m$, allora basta scegliere una funzione olomorfa su $D$ e meromorfa in 0, il cui residuo in 0, cioè il suo coefficiente del termine di grado -1 dello sviluppo di Laurent in 0, sia $\alpha$. La funzione più semplice è chiaramente $f(z) = \frac{\alpha}{z}$ da cui si ha subito l'equazione cercata.

Questo esempio, visto nel caso di dimensione 1 può inoltre venir generalizzato per una dimensione $n$ arbitraria.

## 2.3 Corrispondenza di Riemann-Hilbert

**Definizione 2.14.** Una *superficie di Riemann* è uno spazio topologico Hausdorff a base numerabile con una classe di atlanti complessi, ovvero con una classe di atlanti in cui i cambi di carta sono olomorfi.

**Definizione 2.15.** Sia $\mathcal{O}$ il fascio di anelli delle funzioni olomorfe su uno spazio topologico $X$. Un fascio di $\mathcal{O}$-moduli è un fascio di gruppi abeliani $\mathcal{F}$ su $X$ tale che per ogni $U \subset X$ il gruppo $\mathcal{F}(U)$ è dotato di una struttura di $\mathcal{O}$-modulo rispetto alla quale il seguente diagramma commuta per ogni aperto $V \subset U$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

Un morfismo di fasci di $\mathcal{O}$-moduli è un morfismo di fasci di gruppi abeliani compatibile con la struttura di $\mathcal{O}$-modulo.

**Definizione 2.16.** Un fascio di $\mathcal{O}$-moduli $\mathcal{F}$ si dice *localmente libero* di rango $n$ ($n > 0$) se $\forall x \in X$ vi è un intorno $V \subset X$ tale che $\mathcal{F}|_V \cong \mathcal{O}^n|_V$; se invece vale $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}^n$ su tutto $X$ allora $\mathcal{F}$ è un *fascio libero* di rango $n$.

**Definizione 2.17.** Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso.
Se $f$ è una funzione olomorfa su $U \subset D$, sia $df : U \longrightarrow \mathbb{C}$ la funzione $z \mapsto f'(z)$. Si può costruire un fascio di 1-forme olomorfe su $D$ e questo viene indicato con $\Omega^1_D$. Una sezione su $U \subset D$ è una funzione $\omega_U : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che, localmente, cioè su un intorno opportuno $V \subset U$ di ogni $z \in U$, si scrive come $\omega_U|_V = fdg$, ove $g \in \mathcal{O}(V)$ è un isomorfismo fra $V$ e un disco aperto di $\mathbb{C}$ centrato in 0 e $f$ è una funzione olomorfa su $V$.
Si osservi che, vista la scrittura locale delle sezioni, su $\Omega^1_D(U)$ è definita in modo naturale un'azione di $(U)$ che rende $\Omega^1_D$ un fascio di $\mathcal{O}$-moduli.

*Osservazione* 17. Si osservi che $dz : D \longrightarrow \mathbb{C}$ è una sezione globale di $\Omega^1_D$, infatti per ogni $x \in D$, scelto $g(z) = z - x$ come isomorfismo da un disco in $D$ centrato in $x$ a quello traslato centrato in 0 e $f = id_D$ si ha $dg = d(z-a) = dz$ che è proprio la condizione richiesta. Da questo segue subito che anche $df = f'dz$ è una sezione globale per ogni $f \in \mathcal{O}(D)$.

**Definizione 2.18.** Una *connessione olomorfa* su $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso è una coppia $(\mathcal{E}, \nabla)$ ove $\mathcal{E}$ è un fascio localmente libero su $D$ e $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D$ è un morfismo di fasci di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali che soddisfa la regola di Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

per ogni $U \subset D$, $f \in \mathcal{O}(U)$ e $s \in \mathcal{E}(U)$.
Il prodotto tensoriale tra fasci di $\mathcal{O}$-moduli si intende definito fra gli $\mathcal{O}$-moduli che si hanno al variare di $U$.
Il morfismo $\nabla$ è detto mappa di connessione.

**Definizione 2.19.** Siano $(\mathcal{E}, \nabla)$ e $(\mathcal{E}', \nabla')$ due connessioni olomorfe su $D$.
Un morfismo $(\mathcal{E}, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{E}', \nabla')$ fra le connessioni olomorfe è un morfismo $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ tale che il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi\otimes id} \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow{\nabla'} & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D \end{array}$$

*Osservazione* 18. Le connessioni olomorfe con i morfismi sopra definiti formano una categoria.

*Osservazione* 19. Si supponga che $\mathcal{E}$ sia un fascio libero di $\mathcal{O}$-moduli su $D$, ovvero $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}^n$. In tal caso ad ogni sezione $s \in \mathcal{E}(U)$, con $U \subset D$ aperto, corrisponde una sezione di $\mathcal{O}(U)$, cioè una $n$-upla $(f_1, ..., f_n)$ di funzioni olomorfe su $U$. Si osservi ora che $\mathcal{O}^n \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D \cong (\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1_D)^{\oplus n} \cong (\Omega^1_D)^{\oplus n}$ poichè il prodotto tensoriale è distributivo rispetto alla somma diretta e ogni $R$-modulo è isomorfo alla sua tensorizzazione con $R$.
Si può dunque scrivere, considerando questi isomorfismi, la mappa di connessione $d : \mathcal{O}^n \longrightarrow (\Omega^1_D)^{\oplus n}$ tale che $(f_1, ..., f_n) \mapsto (df_1, ..., df_n)$.
Si noti che la regola di Leibnitz è soddisfatta, infatti usando la sua formulazione più nota nel caso di prodotto di funzioni differenziabili si ha $d(f(f_1, ..., f_n)) = d(ff_1, ..., ff_n) = (d(ff_1), ..., d(ff_n)) = df(f_1, ..., f_n) + f(df_1, ..., df_n) = df(f_1, ..., f_n) + fd(f_1, ..., f_n)$ a cui corrisponde $df \otimes (f_1, ..., f_n) + fd(f_1, ..., f_n)$ grazie all'isomorfismo già usato del prodotto tensoriale. Sia data ora un'altra mappa di connessione $\nabla$, allora la mappa $\nabla - d : \mathcal{O}^n \longrightarrow (\Omega^1_D)^{\oplus n}$, definita a partire da $\nabla$ e da $d$ con la sottrazione punto per punto, soddisfa la relazione $(\nabla - d)(fs) = f(\nabla - d)(s)$ per ogni $f \in \mathcal{O}(D)$ e $s \in \mathcal{E}(D)$, ovvero è omogenea di grado 1 su $D$. Questa proprietà si ricava subito dalla sottrazione membro a membro fra la regola di Leibniz di $\nabla$ e quella di $d$.

Ne segue che la mappa $\nabla - d$, a valori in $(\Omega^1_D)^{\oplus n}$, è determinata da una matrice $n \times n$ di 1-forme olomorfe, sia $\Omega$, chiamata matrice di connessione di $\nabla$. Dalla scrittura

$$(\nabla - d)((f_1, ..., f_n)) = \Omega(f_1, ..., f_n)$$

segue che

$$\nabla((f_1, ..., f_n)) = (df_1, ..., df_n) + \Omega(f_1, ..., f_n)$$

Ora gli elementi $\omega_{ij}$ della matrice $\Omega$, come detto, sono 1-forme olomorfe e dunque per l'osservazione 17 sono del tipo $f_{ij}dz$, con $f_{ij} \in \mathcal{O}(D)$.
Alla matrice $\Omega$ si può dunque associare, rimuovendo i $dz$ di ogni 1-forma olomorfa, una matrice $M$ costituita dai termini $f_{ij}$ e dunque di funzioni olomorfe su $D$.
Si osserva infine che, posto $f = (f_1, ..., f_n)$ e $A = -M$, vale $\nabla(f) = 0$ se e solo se $f$ è soluzione del sistema linare $y' = Ay$

**Definizione 2.20.** Sia $(\mathcal{E}, \nabla)$ una connessione olomorfa su $D$ e $U \subset D$.
Una sezione $s \in \mathcal{E}(U)$ si dice *orizzontale* se vale $\nabla(s) = 0$.
La sezioni orizzontali formano un sottofascio di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali $\mathcal{E}^\nabla \subset \mathcal{E}$.

**Lemma 2.3.1.** *Il fascio $\mathcal{E}^\nabla$ su $D$ è un sistema locale con dimensione pari al rango di $\mathcal{E}$.*

*Dimostrazione.* Lo spazio topologico $D$ è un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e dunque è una superficie di Riemann, in particolare è una superficie non compatta. Su superfici di Riemann non compatte si può provare che ogni fascio localmente libero è libero. Supponendo vero questo risultato di cui è omessa la dimostrazione si è nel caso visto nell'osservazione precedente e quindi per ogni aperto $U \subset D$ le sezioni di $\mathcal{E}^\nabla$ corrispondono a soluzioni locali di un sistema lineare omogeno $y' = Ay$ di equazioni differenziali olomorfe su $D$.
Ora, come mostrato nell'esempio 2.6, le soluzioni locali di quel sistema costituiscono un fascio e in particolare un sistema locale. $\square$

Il termine corrispondenza di Riemann-Hilbert indica una serie di risultati volti a mettere in relazione le connessioni olomorfe su una superficie di Riemann o più in generale su una varietà complessa e le rappresentazioni del gruppo fondamentale di questi spazi. La trattazione qui svolta sarà tuttavia limitata al caso di particolari superfici di Riemann, essenzialmente aperti connessi del piano complesso.

**Teorema 2.3.2.** *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso.*
*Il funtore $(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^{\nabla}$ induce un'equivalenza fra la categoria delle connessioni olomorfe su $D$ e quella dei sistemi locali complessi su $D$.*

*Dimostrazione.* È sufficiente costruire un funtore nella direzione inversa e mostrare che componendolo con l'altro si ottiene, a meno di isomorfismi, il funtore identico.
Sia $\mathcal{L}$ un sistema locale su $D$. A partire da $\mathcal{L}$ si costruisce un fascio $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ localmente libero su $D$, grazie alla mappa $U \mapsto \mathcal{L}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(U)$ che ad aperto $U \subset D$ associa $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(U)$.
Rimane ora da definire una mappa di connessione $\nabla_{\mathcal{L}}$ su $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. La mappa si definisce in primo luogo localmente, sfruttando una particolare scrittura delle sezioni di $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. Sia $U$ un aperto di $D$ tale che $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{C}^n$ e sia $s_1, ..., s_n$ una sua base come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Tutte le sezioni di $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(U)$ si possono allora scrivere come $\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes f_i$, ove $f_i \in \mathcal{O}(U)$ è una funzione olomorfa opportuna su cui, grazie alle proprietà del prodotto tensoriale, si sono scaricati i coefficienti complessi degli $s_i$. Si pone ora per definizione

$$\nabla_{\mathcal{L}}|_U(\sum s_i \otimes f_i) := \sum s_i \otimes df_i$$

Si osservi infine che la definizione è indipendente dalla scelta della base di $\mathcal{L}(U)$, infatti i termini delle due basi sono legati da relazioni lineari e i coefficienti delle trasformazioni di possono trasferire alle $f_i$, si conclude poi grazie alla linearità del differenziale. La mappa $\nabla\mathcal{L}$ si ottiene quindi incollando le mappe locali $\nabla_{\mathcal{L}}|_U$ al variare di $U$ e l'incollamento è possibile proprio per quanto appena osservato sulle basi.

Si tralascia l'ultima parte della prova, ovvero la verifica che i due funtori, $(\mathcal{E}, \nabla) \mapsto \mathcal{E}^{\nabla}$ e $\mathcal{L} \mapsto (\mathcal{E}_{\mathcal{L}}, \nabla_{\mathcal{L}})$ composti sono isomorfi al funtore identico. □

**Corollario 2.3.3.** *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso.*
*Allora ogni rappresentazione di $\pi_1(D, x)$, con $x \in D$, è la rappresentazione di monodromia di un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali olomorfe su $D$.*

*Dimostrazione.* Per il corollario 2.2.1 ad ogni rappresentazione di $\pi_1(D, x)$ si può associare un sistema locale complesso, che a sua volta, per il teorema precedente , corrisponde ad una connessione olomorfa. Ora i fasci localmente liberi su $D$ sono in realtà liberi e dunque per l'osservazione 19 da ogni connessione olomorfa si può costruire un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali olomorfe su $D$. □

*Osservazione* 20. La corrispondenza qui presentata nel caso di aperti connessi di $\mathbb{C}$ vale in generale per ogni superficie di Riemann, ovvero per ogni varietà complessa di dimensione 1. Si può inotre estendere a varietà complesse di dimensione $n$, in tal caso è però necessario che la connessione olomorfa sia anche piatta, proprietà sempre verificata in dimensione 1.
Il teorema in generale afferma allora che la categoria delle connessioni piatte olomorfe su una varietà complessa $X$ è equivalente a quella dei sistemi locali complessi su $X$.

Si procede ora ad analizzare un caso particolare. Se $D$ è il complementare di un insieme finito di punti si vuole costruire una rappresentazione del suo gruppo fondamentale che sia rappresentazione di monodromia di un sistema lineare di equazioni differenziali olomorfe in cui i coefficienti sono funzioni olomorfe su $D$ e che presentano particolarità (e.g. punti di polo) su $\mathbb{C} \setminus D$. La trattazione del problema verrà effettuata su una particolare superficie di Riemann, la retta proiettiva complessa.

*Osservazione* 21. La retta proiettiva complessa, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è una varietà complessa di dimensione 1, omeomorfa alla sfera di Riemann. Visto che questa superficie è costituita anche da un punto particolare, detto all'$\infty$, si ricorda

che un intorno aperto dell'$\infty$ è definito come il complementare di un disco chiuso centrato in 0 e che una funzione $f$ si dice olomorfa all'$\infty$ se la mappa $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ lo è in 0. La definizione già introdotta di fascio di $\mathcal{O}$-moduli si intende ancora valida con queste precisazioni. Si osservi infine che i fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non sono necessariamente anche liberi; il risultato enunciato in precedenza vale infatti soltanto per superfici di Riemann non compatte, mentre questa è compatta.
Grothendieck, nel 1957, ha classificato i fasci localmente liberi di rango $n$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mostrando che si possono decomporre in modo unico come somma diretta di fasci localmente liberi di rango 1 (cf. [4]).

Nei successivi risultati si assumano sempre le seguenti condizioni.
Sia $S = \{x_1, ..., x_n\}$ un insieme finito di punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e per semplicità si supponga che fra questi vi sia il punto all'infinito.
Si pone allora $D := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$.

**Definizione 2.21.** Il fascio $\Omega^1_D$ delle 1-forme olomorfe su $D$ si estende ad un fascio di $\mathcal{O}$-moduli su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, indicato con $\Omega^1(S)$ e detto fascio delle 1-forme con *poli logaritmici* su $S$. Per ogni $U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ aperto, le sezioni di $\Omega^1(S)(U)$ sono funzioni $\omega_U : U \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tali che se $U \subset D$ sono sezioni di $\Omega^1_D(U)$ mentre se $x_i \in U$ allora in un suo intorno si scrive come $fdz$ e $f$ ha al più un polo semplice in $x_i$ (se $x_i = \infty$, per quanto appena osservato la funzione si scriverà $fd(\frac{1}{z})$). Il termine polo logaritmico deriva dal fatto che la funzione $f$ con polo semplice in $x_i$ si può scrivere, intorno a questo punto, come $g(z - x_i)^{-1}$ ove $g$ è olomorfa; da ciò segue che $fdz = \frac{g}{z-x_i}d(z - x_i)$ e in questa scrittura è presente la derivata logaritmica di $z - x_i$.

**Definizione 2.22.** Una *connessione su* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *con poli logaritmici su* $S$ è una coppia $(\overline{\mathcal{E}}, \overline{\nabla})$ ove $\overline{\mathcal{E}}$ è un fascio localmente libero su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\overline{\nabla} : \overline{\mathcal{E}} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(S)$ è un morfismo di fasci di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali che soddisfa la regola di Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\overline{\nabla}(s)$$

per ogni $U \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $f \in \mathcal{O}(U)$ e $s \in \overline{\mathcal{E}}(U)$.

*Osservazione* 22. Analogamente a quanto visto nel caso di connessioni olomorfe su un aperto connesso di $\mathbb{C}$, se $\overline{\mathcal{E}}$ è un fascio libero allora vi è una corrispondenza biunivoca fra le connessioni su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$ e i sistemi lineari di equazioni differenziali del tipo $y' = Ay$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, in questo caso però gli elementi di $A$ sono funzioni olomorfe su $D$, che possono presentare al più poli semplici nei punti di $S$. Questi sistemi si dicono *fuchsiani.*

**Proposizione 2.3.4.** *Sia* $(\mathcal{E}, \nabla)$ *una connessione olomorfa su* $D$.
*Allora vi è una connessione* $(\overline{\mathcal{E}}, \overline{\nabla})$ *su* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *con poli logaritmici su* $S$ *tale che* $(\overline{\mathcal{E}}, \overline{\nabla})|_D \cong (\mathcal{E}, \nabla)$.

*Dimostrazione.* La prova consiste nel costruire connessioni su dischi attorno ad ogni punto di S ed incollarle fra loro in modo da avere una connessione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su S.
Per ogni $i = 1, ..., n$ sia $D_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un disco aperto centrato in $x_i$ e di raggio tale che $D_i \cap D_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Sia inoltre n il rango di $\mathcal{E}$.
Ad ogni connessione olomorfa su un aperto connesso di $\mathbb{C}$, come mostrato, si può associare un sistema lineare di equazioni differenziali olomorfe; ora restringendo la connessione data ai dischi puntati $D_i \setminus \{x_i\}$ si possono trovare dunque, al variare di $i$, dei sistemi lineari del tipo $y' = A_i y$ con i coefficienti olomorfi su $D_i \setminus \{x_i\}$ e, per l'esempio 2.7, con un polo semplice in $x_i$.
Su ogni disco $D_i$ si definisce dunque la connessione $(\mathcal{E}_i, \nabla_i)$ ove $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}|^n_{D_i}$ e $\nabla_i((f_1, ..., f_n)) = (df_1, ..., df_n) - A_i(f_1, ..., f_n)$.
Si vuole ora ottenere la connessione desiderata incollando fra loro quella iniziale su $D$ e quelle appena definite sui dischi. Si osservi che il processo di incollamento di fasci descritto nella proposizione 2.1.1 permette di costruire un fascio che ristretto coincida con quelli di partenza, quindi localmente mantiene le proprietà di quelli iniziali; in particolare si trova un fascio localmente libero a partire da fasci localmente liberi su un aperto connesso di $\mathbb{C}$ e un fascio localmente costante a partire da fasci localmente costanti su

uno spazio toplogico. Ora, ogni intersezione $D \cap D_i = D \setminus x_i$, cioè ogni disco puntato, ammette, come visto nell'esempio 2.7, un ricoprimento costituito da due aperti semplicementi connessi, $U_{i+}$ e $U_{i-}$, su cui i fasci localmente costanti $\mathcal{E}^\nabla$ e $\mathcal{E}_i^{\nabla_i}$ sono costanti e con dimensione n. Si possono quindi incollare i fasci localmente costanti $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\nabla \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$ e $\mathcal{E}_i \cong \mathcal{E}_i^{\nabla_i} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$, ove gli isomorfismi si hanno per quanto visto nella dimostrazione del teorema 2.3.2, ottenendo un fascio localmente costante su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, sia $\overline{\mathcal{E}}$. Analogamente le restrizioni di $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}_i$ ad $U_{i+}$ e $U_{i-}$, a cui corrispondono sistemi locali costanti (cioè costituiti da un fascio costante), hanno associate mappe di conessione banali, che dunque si possono incollare formando la mappa $\overline{\nabla}$. $(\overline{\mathcal{E}}, \overline{\nabla})$ è quindi una connessione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$ e, per costruzione, la sua restrizione a $D$ è isomorfa a $(\mathcal{E}, \nabla)$. □

**Corollario 2.3.5.** *Esiste un funtore suriettivo dalla categoria delle connessioni su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$ a quella delle rappresentazioni sinistre con dimensione finita di $\pi_1(D, x)$ per $x \in D$ fissato.*

*Dimostrazione.* Ogni connessione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$ si può restringere ad una connessione olomorfa su $D$ e questa per il teorema 2.3.2 corrisponde ad un sistema locale complesso su $D$, che per il corollario 2.2.1 è equivalente ad una rappresentazione sinistra di dimensione finita di $\pi_1(D, x)$. Il funtore è suriettivo perchè, a partire dalla rappresentazione, grazie alle equivalenze di categoria già impegate si ottiene una connessione olomorfa su $D$ e questa, per la proposizione 2.3.4 si può estendere ad una connessione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$.
In particolare si osservi però che a quest'ultima connessione non si può associare sempre un sistema fuchsiano perchè i fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, superficie di Riemann compatta, non sono necessariamente liberi. □

*Osservazione* 23. Si osservi che ad una connessione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con poli logaritmici su $S$ non si può associare sempre un sistema fuchsiano perchè i fasci localmente liberi su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, superficie di Riemann compatta, non sono necessariamente liberi e dunque, in generale, la risposta al 21° problema di Hilbert è negativa. La prima risposta che fu data al problema, nel 1908 da Plemelj, era tuttavia opposta; la sua dimostrazione, per risultare corretta, necessitava però di alcune ipotesi aggiuntive tanto che nel 1989 vennero inoltre presentati da Bolibrukh alcuni controesempi.

Per concludere la trattazione del problema di Riemann-Hilbert si accenna ad un esempio molto noto, per cui è possibile trovare una soluzione generale e precisamente al caso in cui è una data rappresentazione di monodromia con dimensione 2 del gruppo fondamentale della retta proiettiva complessa privata di 3 punti. Prima di procedere è tuttavia necessario introdurre alcune nozioni preliminari.

**Definizione 2.23.** L'equazione differenziale lineare omogenea di grado $n$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

si dice *fuchsiana* se i suoi coefficienti $a_i$ sono funzioni olomorfe su $D$, mentre su tutti i punti di $S$ ogni $a_i$ ha al più un polo di ordine $i$.

*Osservazione* 24. Il problema può venir riformulato chiedendo di associare non un sistema fuchsiano di $n$ equazioni ma un' equazione fuchsiana di ordine $n$. Queste due nozioni sono fra loro collegate nel modo cui si accenna ora; si omette tuttavia una prova dettagliata, che sarebbe basata su risultati di teoria delle equazioni differenziali lineari. Per semplicità si supponga $S = \{0\}$ e sia $\partial$ l'operatore differenziale $y \mapsto zy'$, moltiplicando l'equazione differenziale fuchsiana per $z^n$ si trova $z^n y^{(n)} + z^n a_1 y^{(n-1)} + ... + z^n a_n y = 0$, in questo modo si osservi che i nuovi coefficienti sono tutti olomorfi in 0 (moltiplicando per $z^n$, ogni eventuale polo in 0 viene rimosso).
Questa equazione si può riscrivere come

$$\partial^n y + b_1 \partial^{n-1} y + ... + b_n y = 0$$

con i $b_i$ olomorfi anche in 0. Ora la n-upla $(\partial^{n-1} y, \partial^{n-2} y, ..., \partial y, y)$ ottenuta dalla soluzione dall'equazione soddisfa un sistema del tipo $y' = \frac{B}{z} y$ con i coefficienti di $B$ olomorfi (e quindi quelli di $\frac{B}{z}$ con al più un polo semplice in 0), pertanto si è ricavato un sistema fuchsiano.

**Definizione 2.24.** Sia data un'equazione fuchsiana di ordine $n$, con un punto singolare $x_j = 0$ per semplicità. Si dicono *esponenti locali* in $x_j = 0$ dell'equazione le radici di

$$x^n + b_1(0)x^{n-1} + ... + b_{n-1}(0)x + b_n(0) = 0$$

ovvero dell'equazione caratteristica della sua riscrittura $\partial^n y + b_1 \partial^{n-1} y + ... + b_n y = 0$ vista nell'osservazione precedente.

**Esempio 2.8.** Il problema di Riemann-Hilbert, come anticipato, nel caso 2-dimensionale e con tre punti singolari è risolubile. Siano allora $S = \{0, 1, \infty\}$ e rispettivamente $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'), (\gamma, \gamma')$ le coppie di esponenti locali dei tre punti singolari. Imponendo inoltre che $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ si trova un'unica equazione fuchsiana del secondo ordine su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$ con funzioni razionali come coefficienti e con gli esponenti locali dati:

$$y'' + \frac{(1 + \gamma + \gamma')z + (\alpha + \alpha' - 1)}{z(z-1)} y' + \frac{\gamma\gamma' z^2 + (\beta\beta' - \gamma\gamma' - \alpha\alpha')z + \alpha\alpha'}{z^2(z-1)^2} y = 0$$

Nel caso in cui $\alpha = \beta = 0, \gamma = a, \gamma' = b, \alpha' = 1 - c, \beta' = c - a - b$ si ottiene una particolare equazione differenziale, detta *ipergeometrica*

$$y'' + \frac{(1 + a + b)z - c}{z(z-1)} y' + \frac{ab}{z(z-1)} y = 0$$

Questa equazione prende il nome da un'importante serie, la serie ipergeometrica, che ne è la soluzione e viene inizialmente studiata da Eulero e da Gauss. Riemann associa in seguito la serie all'equazione proprio interessandosi al caso trattato in questo esempio; qualche decennio dopo, attorno al 1880, il problema viene generalizzato da Picard al caso di due variabili.
Ulteriori e recenti sviluppi sono dovuti a Deligne e Mostow che, oltre a fornire una prova corretta del teorema di Picard, secondo cui, nel caso di 2 variabili, sotto opportune condizioni, l'immagine del gruppo fondamentale attraverso una sua rappresentazione è un gruppo discreto, hanno studiato ulteriori generalizzazioni dell'equazione (cf. [2]).
Si può provare che, portando $0, 1, \infty$ in altri tre punti distinti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con

un'opportuna trasformazione di Möbius, è sempre possibile ricondursi dall'equazione fuchsiana generale a quella ipergeometrica.
Si possono calcolare ora le rappresentazioni di monodromia associate.
Per fissare una rappresentazione $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S, x) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$, visto che il gruppo fondamentale ha una presentazione del tipo $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 | \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1 \rangle$ ove ogni $\gamma_i$ è un cappio attorno all'$i$-esimo punto singolare, è sufficiente fissare l'immagine di due generatori, quella del terzo si ricava grazie al relatore.
Nel caso in cui nessuna delle differenze $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$ sia un numero intero le immagini dei cappi attorno a 0 e a 1, $\gamma_1$ e $\gamma_2$ risultano

$$\rho(\gamma_0) = \begin{pmatrix} e^{(2\pi i \alpha)} & 0 \\ 0 & e^{(2\pi i \alpha')} \end{pmatrix}$$

$$\rho(\gamma_1) = \begin{pmatrix} \frac{\tau e^{(2\pi i \beta)} - e^{(2\pi i \beta')}}{\tau - 1} & \frac{e^{(2\pi i \beta)} - e^{(2\pi i \beta')}}{\tau - 1} \\ \frac{\tau e^{(2\pi i \beta')} - \tau e^{(2\pi i \beta)}}{\tau - 1} & \frac{\tau e^{(2\pi i \beta')} - e^{(2\pi i \beta)}}{\tau - 1} \end{pmatrix}$$

ove

$$\tau = \frac{\sin((\beta' + \alpha + \gamma)\pi) \sin((\beta + \alpha' + \gamma)\pi)}{\sin((\beta + \alpha + \gamma)\pi) \sin((\beta' + \alpha' + \gamma)\pi)}$$

# Appendice A

# Richiami di teoria delle categorie

Nel corso della tesi si utilizza in vari punti il linguaggio della teoria delle categorie quindi in questa appendice si richiamano le definizioni principali.

**Definizione A.1.** Una *categoria* $\mathscr{C}$ consiste di una classe di elementi, detti oggetti della categoria ($Ob(\mathscr{C})$) e insiemi di morfismi fra questi oggetti.
Per ogni coppia di oggetti $A, B \in \mathscr{C}$ vi è l'insieme $Hom(A, B)$ composto dai morfismi da $A$ in $B$, mentre per ogni terna $A, B, C \in \mathscr{C}$ vi è una legge di composizione fra i morfismi

$$Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \longrightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$$

tale che $(f, g) \mapsto g \circ f$.
Gli oggetti e i morfismi soddisfano inoltre i seguenti assiomi:
Siano $A, B, C, D \in Ob(\mathscr{C})$

i. se $A \neq B$ oppure $C \neq D$, allora $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ e $Hom_{\mathscr{C}}(C, D)$ sono insiemi disgiunti

ii. la composizione di morfismi è associativa

iii. per ogni oggetto $A$ vi è un morfismo $1_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$, detto morfismo identico

**Definizione A.2.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due categorie.
$\mathscr{C}$ è una *sottocategoria* di $\mathscr{D}$ se:

i. $Ob(\mathscr{C}) \subset Ob(\mathscr{D})$

ii. $\forall A, B \in \mathscr{C}\ Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \subset Hom_{\mathscr{D}}(A,B)$

Nel caso in cui vale $Hom_{\mathscr{C}}(A,B) = Hom_{\mathscr{D}}(A,B)$ si dice che la sottocategoria è piena.

**Definizione A.3.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due categorie.
Un *funtore covariante* $F$ da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ è:

i. una funzione fra gli oggetti delle categorie che ad ogni $A \in Ob(\mathscr{C})$ associa un $B \in Ob(\mathscr{D})$

ii. una funzione fra i morfismi che ad ogni $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ associa $F(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ e tale che

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ per ogni morfismo identico
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ per ogni coppia di morfismi per cui è definita la composizione

**Definizione A.4.** Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due categorie.
Un *funtore controvariante* $F$ da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ è:

i. una funzione fra gli oggetti delle categorie che ad ogni $A \in Ob(\mathscr{C})$ associa un $B \in Ob(\mathscr{D})$

ii. una funzione fra i morfismi che ad ogni $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ associa $F(f) \in Hom_{\mathscr{D}}(F(B), F(A))$ e tale che

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ per ogni morfismo identico
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ per ogni coppia di morfismi per cui è definita la composizione

I funtori controvarianti pertanto invertono la direzione dei morfismi

In modo del tutto naturale si definisce la composizione di funtori come composizione delle funzioni che li costituiscono.

*Notazione* 2. Nel seguito, quando non vi è ambiguità si ometterà di indicare la categoria nell'insieme dei morfismi, ovvero $Hom(A,B) = Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$.
Il termine funtore indicherà inoltre, se non diversamente specificato, funtori covarianti.

**Definizione A.5.** Siano $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorie e $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtori covarianti. Una *trasformazione naturale* o morfismo di funtori (covarianti) è una funzione $\alpha : F \longrightarrow G$ che associa ad ogni oggetto $A \in Ob(\mathscr{C})$ un morfismo $\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ in modo che per ogni morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ il seguente diagramma commuti.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Se $\alpha_A$ è un isomorfismo per ogni oggetto $A$, allora $\alpha$ è un *isomorfismo naturale* di funtori.

**Definizione A.6.** Siano $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorie e $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtori controvarianti. Una *trasformazione naturale* o morfismo di funtori (controvarianti) è una funzione $\alpha : F \longrightarrow G$ che associa ad ogni oggetto $A \in Ob(\mathscr{C})$ un morfismo $\beta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ in modo che per ogni morfismo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ il seguente diagramma commuti.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\beta_A"] & G(A) \\ F(B) \arrow[r, "\beta_B"] \arrow[u, "F(f)"] & G(B) \arrow[u, "G(f)"'] \end{tikzcd}$$

Se $\alpha_A$ è un isomorfismo per ogni oggetto $A$, allora $\alpha$ è un *isomorfismo naturale* di funtori.

**Definizione A.7.** Siano $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorie.
Si dice che $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono categorie *isomorfe* se vi sono due funtori, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tali che $F \circ G = Id_{\mathscr{D}}$ e $G \circ F = Id_{\mathscr{C}}$.

**Definizione A.8.** Siano $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorie.
Si dice che le categorie $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono *equivalenti* se vi sono due funtori, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ e $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tali che $F \circ G$ è un funtore naturalmente isomorfo ad $Id_{\mathscr{D}}$ e $G \circ F$ è naturalmente isomorfo ad $Id_{\mathscr{C}}$.

# Bibliografia


[1] Frits Beukers, Gauss' hypergeometric function, in R-P. Holzapfel et al. (eds.) *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions*, Birkhäuser, Basel, 2007

[2] Pierre Deligne, George D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. IHES*, vol.63, 1986

[3] David S. Dummit, Richard M. Foote, *Abstract Algebra* (3rd ed.), John Wiley & Sons, 2003

[4] Alexander Grothendieck, Sur la classification des fibrès holomorphes sur la sphère de Riemann, *Amer. J. Math.*, vol. 79, 1957

[5] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002

[6] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1980

[7] Tamás Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge University Press, 2009