Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

CUBICHE SINGOLARI E NON SINGOLARI

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MONICA IDA'

Presentata da:
MICHELA EGIDI

I Sessione
Anno Accademico 2009/2010

A Roberto e Paola,
i miei splendidi genitori,
e ad Alessandra,
la mia bellissima sorella.

Indice

Introduzione

Classificare un insieme di curve immerse in un certo spazio (euclideo, affine o proiettivo, ...) significa determinare classi di curve equivalenti, cioè insiemi di curve che hanno la proprietà di poter essere trasformate le une nelle altre per mezzo di opportune trasformazioni dello spazio ambiente (isometrie, affinità, proiettività o altre applicazioni dipendenti dall'ambiente di lavoro).
In questa tesi si è interessati alla classificazione delle cubiche del piano proiettivo complesso, cioè di curve algebriche proiettive rappresentate da polinomi omogenei di grado 3 a coefficienti nel campo complesso. Si mostra inoltre che le cubiche piane singolari irriducibili, cioè quelle per cui esiste esattamente un punto da cui esce più di una tangente alla cubica, si possono ottenere come proiezioni piane della cubica gobba dello spazio proiettivo complesso.
Dopo aver richiamato concetti fondamentali che ricorreranno spesso nella trattazione, si potrà iniziare lo studio vero e proprio delle cubiche. Si mostrerà che per le cubiche non singolari o liscie del piano proiettivo complesso, cioè quelle tali che in ogni punto la tangente è unica, esiste sempre una proiettività che le riconduce ad una cubica rappresentata da un polinomio contenente un parametro che varia nel campo complesso con la sola limitazione di non poter assumere i valori 0 oppure 1. Sarà proprio questo parametro che porterà alla dimostrazione che esistono infinite classi di equivalenza proiettiva per le cubiche piane non singolari, a differenza di quanto avviene per le curve proiettive di grado 2 o 1. Si mostrerà poi che su questo tipo di cubiche si può definire una struttura di gruppo abeliano tramite un'operazione di

somma definita in modo puramente geometrico.
Invece, le cubiche singolari irriducibili si possono ricondurre a due classi di equivalenza proiettive che raggruppano rispettivamente le cubiche con un nodo, cioè un punto singolare in cui le tangenti principali sono distinte, e le cubiche con una cuspide, punto singolare da cui esce una tangente principale di molteplicità 2.
Si mostrerà inoltre che le cubiche singolari sono curve razionali perchè, in una certa carta affine, possono essere rappresentate come il luogo dei punti $(X(t), Y(t))$ con $X(t)$ e $Y(t)$ funzioni razionali in t; l'espressione della curva in funzione di t è detta forma parametrica razionale della curva.
La cubica gobba dello spazio proiettivo complesso è una cubica non contenuta in un piano che può essere espressa in forma parametrica. Focalizzando l'attenzione sulle sue proiezioni piane, si distingueranno quelle di centro un punto della cubica e quelle di centro un punto fuori di essa. Questo perchè dalle prime si ottiene una conica piana non degenere, mentre dalle seconde si ottiene una cubica piana singolare con un nodo o una cuspide secondo i casi. L'idea fondamentale è che non si ottiene mai una cubica singolare liscia perchè non esiste una parametrizzazione razionale di quest'ultima (per una dimostrazione diretta di questo fatto si veda [RE]), mentre la conica non degenere, la cubica singolare e la cubica gobba sono curve razionali.

Il campo in cui si lavora sarà sempre il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Capitolo 1

Richiami e premesse

In questo primo capitolo si richiamano alcune definizioni e teoremi che verranno utilizzati per lo studio delle cubiche piane. Per le dimostrazioni e per ulteriori approfondimenti si rimanda a [SE].

Con $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ si indica l'anello dei polinomio nelle variabili $x_1, ..., x_n$.

1.1 Ipersuperfici e curve

Definizione 1.1. Sia fissato su $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ il riferimento standard. Un'*ipersuperficie algebrica* $\mathcal{S}$ *di* $\mathbb{P}^n$ è la classe di proporzionalità di un polinomio F omogeneo non nullo, $F \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$. Diciamo che $\rho F = 0$ con $\rho \in \mathbb{C} - \{0\}$ è un'equazione per $\mathcal{S}$.

Definizione 1.2. Sia F un polinomio omogeneo non nullo di grado d e sia $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^n$ l'ipersuperficie algebrica di equazione $F = 0$. Il *grado* di $\mathcal{S}$ è il grado di F.
Se $n = 2$ l'ipersuperficie è detta *curva proiettiva piana*.
Se $n = 3$ l'ipersuperficie è detta *superficie di* $\mathbb{P}^3$.
Se $d = 2$ ed $n \geq 4$ l'ipersuperficie è detta *iperquadrica proiettiva*.
Se $d = n = 2$ la curva è detta *conica proiettiva*.
Se $d = 2$ e $n = 3$ la superficie è detta *quadrica proiettiva*.

Se $d = 3, 4, 5, ..$ e $n = 2$ la curva è detta *cubica, quartica, quintica,... proiettiva.*

Definizione 1.3. Sia F un polinomio omogeneo non nullo di grado d e sia $\mathcal{S} \in \mathbb{P}^n$ un'ipersuperficie algebrica di equazione $F = 0$. Si chiama *supporto* di $\mathcal{S}$ il luogo dei punti $P = [a_0, ..., a_n] \in \mathbb{P}^n$ tali che $F(P) := F(a_0, ..., a_n) = 0$, cioè il luogo degli zeri di F.
La definizione è ben posta perchè cambiando rappresentante per P scegliendo il punto $[\rho a_0, ..., \rho a_n]$ con $\rho \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ si verica che $F(\rho a_0, ..., \rho a_n) = \rho^d F(a_0, ..., a_n) = 0$. Quindi la nozione data è indipendente dalla scelta del rappresentante per il punto.

Analoghe definizioni si danno nel caso affine:

Definizione 1.4. Un'*ipersuperficie algebrica* $\mathcal{S}$ *di* $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ è la classe di proporzionalità di un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ non costante. In questo caso si dice che $f(x_1, ..., x_n) = 0$ è un'equazione dell'ipersuperficie.

Definizione 1.5. Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ non costante di grado d e sia $\mathcal{S} \in \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Il *grado* di $\mathcal{S}$ è il grado del polinomio f.
Se $n = 2$ si parla di *curve affini piane.*
Se $n = 3$ si parla di *superfici affine piane.*
Se $d = n = 2$ si parla di *coniche affini.*
Se $d = 2$ ed $n = 3$ si parla di *quadriche affini.*
Se $d = 3, 4, 5, ...$ ed $n = 2$ si parla di *cubiche, quartiche, quintiche,... affini.*
Se $d = 2$ ed $n \geq 4$ si parla di *iperquadriche affini.*

Definizione 1.6. Sia $f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ non costante di grado d e sia $\mathcal{S} \in \mathbb{A}^n$ un'ipersuperficie algebrica di equazione $f = 0$. Il *supporto* di $\mathcal{S}$ è l'insieme dei punti $P = (a_1, .., a_n) \in \mathbb{A}^n$ tali che $f(P) := f(a_1, ..., a_n) = 0$, cioè il luogo degli zeri di f.

Definizione 1.7. Una curva algebrica affine o proiettiva si dice *irriducibile* se lo è il polinomio che la rappresenta. Si dice *riducibile* in caso contrario.

Inoltre si ricorda che due curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si dicono affinemente o proiettivamente equivalenti se esistono rispettivamente un'affinità e una proiettività che portano la prima nella seconda.
Di seguito alcuni risultati generali sulle curve e sulle cubiche che verranno utilizzati nella trattazione a seguire:

Teorema 1.1.1 ([SE], Teorema 33.1)**.**
Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due curve algebriche piane, affini o proiettive, di gradi rispettivamente m ed n. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non hanno infiniti punti in comune esse hanno al più nm punti in comune.
Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono curve proiettive hanno almeno un punto in comune.

Teorema 1.1.2 ([RE], Corollario 2.7)**.**
Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ due cubiche aventi nove punti distinti in comune. Una cubica $\mathcal{D}$ passante per otto dei nove punti passa anche per il nono.

1.2 Molteplicità di intersezione

Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $f(x, y) = 0$ di grado n e sia $r \in \mathbb{A}^2$ una retta di equazione

$$\begin{cases} x = a + lt \\ y = b + mt \end{cases} \quad \text{con} \quad (l, m) \neq (0, 0)$$

L'intersezione di r e $\mathcal{C}$ è data dall'equazione, detta equazione risolvente:

$$f(a + lt, b + mt) = 0 \tag{1.1}$$

Il polinomio f è nullo se la retta è contenuta nella cubica, altrimenti è un polinomio di grado al più n che ha al più $r \leq n$ radici contate con molteplicità $t_0, ..., t_r$. In questo caso i punti di intersezione di r con $\mathcal{C}$ sono i punti $(a + lt_0, b + mt_0), ..., (a + lt_r, b + mt_r)$.
Sia dunque $P \in r$, $P = (a + lt_0, b + mt_0)$.

Definizione 1.8. La *molteplicità di intersezione* di $\mathcal{C}$ ed r in P è:

$$i(\mathcal{C}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathcal{C} \\ m & \text{se } t_0 \text{ è una radice di molteplicità } m \text{ per (1.1)} \end{cases}$$

Analoga definizione si dà nel piano proiettivo:
Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di grado n e sia $r \in \mathbb{P}^2$ una retta di equazione:

$$\begin{cases} x_0 = l_0 s + m_0 t \\ x_1 = l_1 s + m_1 t \\ x_2 = l_2 s + m_2 t \end{cases} \quad \text{con} \quad rg \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} = 2$$

L'intersezione tra r e $\mathcal{C}$ è data dall'equazione, detta equazione risolvente:

$$F(l_0 s + m_0 t, l_1 s + m_1 t, l_2 s + m_2 t) = 0 \tag{1.2}$$

Il polinomio F è nullo se la retta è contenuta nella cubica, altrimenti è un polinomio di grado n che ha n radici contate con molteplicità $(s_0, t_0), ..., (s_n, t_n)$. In questo caso i punti di intersezione tra r e $\mathcal{C}$ sono i punti $[l_0 s_0 + m_0 t_0, l_1 s_0 + m_1 t_0, l_2 s_0 + m_2 t_0], ..., [l_0 s_n + m_0 t_n, l_1 s_n + m_1 t_n, l_2 s_n + m_2 t_n]$.
Per ulteriori approfondimenti si veda [SE] pagg. 385 e 386.
Sia ora $P \in r$, $P = [l_0 s_0 + m_0 t_0, l_1 s_0 + m_1 t_0, l_2 s_0 + m_2 t_0]$.

Definizione 1.9. La *molteplicità di intersezione* di $\mathcal{C}$ ed r in P è:

$$i(\mathcal{C}, r, P) := \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \\ \infty & \text{se } r \subseteq \mathcal{C} \\ m & \text{se } [s_0, t_0] \text{ è una radice di molteplicità } m \text{ per (1.2)} \end{cases}$$

Osservazione 1. La definizione è ben posta poichè non dipende dalla parametrizzazione scelta per la retta e si può verificare con calcolo diretto.

Proposizione 1.2.1 ([SE], Proposizione 33.9).
La molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}$ ed r in P è una proprietà proiettiva, cioè se ϕ è una proiettività di $\mathbb{P}^2$ si ha $i(\phi(\mathcal{C}), \phi(r), \phi(P)) = i(\mathcal{C}, r, P)$.

Teorema 1.2.2 ([SE], Teorema 33.5 e Teorema 33.7).
a) Siano $\mathcal{C}$ ed r una curva di grado n ed una retta di $\mathbb{P}^2$ con $r \nsubseteq \mathcal{C}$. Allora $\sum_{P \in r} i(\mathcal{C}, r, P) = n$.
b) Siano $\mathcal{C}$ ed r una curva di grado n ed una retta di $\mathbb{A}^2$ con $r \nsubseteq \mathcal{C}$. Allora $\sum_{P \in r} i(\mathcal{C}, r, P) \leq n$. Vale l'uguaglianza se e solo se il punto improprio di r non è un punto improprio di $\mathcal{C}$.

Definizione 1.10. Sia $\mathcal{C}$ una curva piana affine o proiettiva, sia P un punto del piano affine o proiettivo e sia $\mathcal{F}$ il fascio di rette passanti per P. La *molteplicità di $\mathcal{C}$ in P* è:

$$\mu_P(\mathcal{C}) := \min_{r \in \mathcal{F}} i(\mathcal{C}, r, P)$$

Si ha che: $\mu_P(\mathcal{C}) = 0$ se e solo se $P \notin \mathcal{C}$.
Se $\mu_P(\mathcal{C}) = 1$, si dice che P è un *punto semplice* per la curva.
Se $\mu_P(\mathcal{C}) \geq 2$, si dice che P è un *punto multiplo o singolare* per la curva.

Definizione 1.11. Una cubica piana $\mathcal{C}$ affine o proiettiva si dice *liscia o non singolare* se tutti i suoi punti sono semplici. Si dice *singolare* in caso contrario.

1.3 Hessiana e flessi

Definizione 1.12. Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ curva di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ di grado $n \geq 3$. L'*hessiana* di $\mathcal{C}$ è la curva di equazione $H(x_0, x_1, x_2) = 0$ dove

$$H(x_0, x_1, x_2) = det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_0} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

Il *grado* di $H(x_0, x_1, x_2)$ è $3(n-2)$.

L'hessiana di una curva viene utilizzata per individuare i punti di flesso della curva stessa. Si ha la seguente

Proposizione 1.3.1 ([SE], Proposizione 34.8)**.**
I flessi di una curva proiettiva $\mathcal{C}$ sono i punti non singolari che la curva ha in comune con la sua hessiana.

Da questa proposizione e dal teorema (1.1.1) si ricava che

Corollario 1.3.2 ([SE], Corollario 34.9)**.**
Una curva proiettiva di grado $n \geq 3$, se non ha infiniti flessi, ne ha al più $3n(n-2)$ e se non è singolare ne ha almeno uno.

1.4 Il birapporto

Definizione 1.13. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione due e siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ con P_1, P_2, P_3 distinti. Il *birapporto* dei quattro punti considerati nell'ordine è

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

dove y_0, y_1 sono coordinate omogenee di P_4 nel riferimento proiettivo in cui P_1, P_2 sono i punti fondamentali e P_3 è il punto unità.

Osservazione 2. Fissato un riferimento proiettivo rispetto al quale i quattro punti hanno coordinate $P_i = [a_i, b_i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ allora

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Infatti, con calcolo diretto, si ricava che il riferimento in cui P_1 e P_2 sono i punti fondamentali e P_3 è il punto unità è $\mathcal{P} = \{\mu(\frac{a_3b_2-a_2b_3}{a_1b_2-a_2b_1}(a_1, b_1), \frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1b_2-a_2b_1}(a_2, b_2))\}_{\mu \in \mathbb{C}-\{0\}}$

e le coordinate di P_4 in $\mathcal{P}$ sono $y_0 = \frac{a_4b_2-a_2b_4}{a_3b_2-a_2b_3}$ e $y_1 = \frac{a_1b_4-a_4b_1}{a_1b_3-a_3b_1}$ da cui l'espressione voluta.
Inoltre se $a_1a_2a_3a_4 \neq 0$, moltiplicando e dividendo per $a_1a_2a_3a_4$ si ricava:

$$\begin{aligned}\beta(P_1,P_2,P_3,P_4) &= \frac{(a_1b_4-a_4b_1)(a_3b_2-a_2b_3)a_1a_2a_3a_4}{(a_1b_3-a_3b_1)(a_4b_2-a_2b_4)a_1a_2a_3a_4} = \\ &= \frac{a_1b_4-a_4b_1}{a_1a_4}\cdot\frac{a_3b_2-a_2b_3}{a_3a_2}\cdot\frac{1}{\frac{a_1b_3-a_3b_1}{a_1a_3}\cdot\frac{a_4b_2-a_2b_4}{a_2a_4}} = \\ &= \Big(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_1}{a_1}\Big)\Big(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_3}{a_3}\Big)\cdot\frac{1}{\big(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_1}{a_1}\big)\big(\frac{b_2}{a_2}-\frac{b_4}{a_4}\big)} = \\ &= \Big(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_1}{a_1}\Big)\Big(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_2}{a_2}\Big)\cdot\frac{1}{\big(\frac{b_3}{a_3}-\frac{b_1}{a_1}\big)\big(\frac{b_4}{a_4}-\frac{b_2}{a_2}\big)}\end{aligned}$$

Ponendo $X_i = \frac{b_i}{a_i}$ per $i = 1,2,3,4$, si ha:

$$\beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \frac{(X_4-X_1)(X_3-X_2)}{(X_4-X_2)(X_3-X_1)}$$

Il birapporto permette di stabilire quando due quaterne di punti sono in corrispondenza tramite un isomorfismo proiettivo.

Teorema 1.4.1 ([SE], Teorema 27.7)**.**
Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ due rette proiettive e siano $P_1,P_2,P_3,P_4 \in \mathbb{P}(V)$ e $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 \in \mathbb{P}(V')$ con P_1,P_2,P_3 distinti e Q_1,Q_2,Q_3 distinti. Esiste un isomorfismo $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ tale che $f(P_i) = Q_i$ $\forall i = 1,...,4$ se e solo se $\beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \beta(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$

Osservazione 3. Il birapporto di quattro punti di una retta proiettiva dipende dall'ordine in cui essi vengono presi. Posto $\beta = \beta(P_1,P_2,P_3,P_4)$ si hanno le seguenti relazioni

$$\begin{array}{rl}\beta & = \beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \beta(P_2,P_1,P_4,P_3) = \beta(P_3,P_4,P_1,P_2) = \beta(P_4,P_3,P_2,P_1) \\ \frac{1}{\beta} & = \beta(P_1,P_2,P_4,P_3) = \beta(P_2,P_1,P_3,P_4) = \beta(P_4,P_3,P_1,P_2) = \beta(P_3,P_4,P_2,P_1) \\ 1-\beta & = \beta(P_1,P_3,P_2,P_4) = \beta(P_3,P_1,P_2,P_4) = \beta(P_4,P_2,P_1,P_3) = \beta(P_4,P_2,P_3,P_1) \\ \frac{1}{1-\beta} & = \beta(P_1,P_3,P_4,P_2) = \beta(P_3,P_1,P_2,P_4) = \beta(P_4,P_2,P_1,P_3) = \beta(P_2,P_4,P_3,P_1) \\ \frac{\beta-1}{\beta} & = \beta(P_1,P_4,P_2,P_3) = \beta(P_4,P_1,P_3,P_2) = \beta(P_2,P_3,P_1,P_4) = \beta(P_3,P_2,P_4,P_1) \\ \frac{\beta}{\beta-1} & = \beta(P_1,P_4,P_3,P_2) = \beta(P_4,P_1,P_2,P_3) = \beta(P_3,P_2,P_1,P_4) = \beta(P_2,P_3,P_4,P_1)\end{array}$$

Cioè i 24 birapporti che si possono ottenere permutando quattro punti si riducono a 6 che sono in generale distinti. In conclusione il birapporto associato ad una quaterna non è unico.

Questo problema si risolve introducendo il modulo di una quaterna di punti di una retta proiettiva che invece è indipendente dall'ordine scelto come si osserverà più avanti.

Definizione 1.14. Siano $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva e sia $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta$. Si consideri la funzione razionale:

$$\jmath(t) = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$$

Il valore della funzione $\jmath(t)$ in β è denotato con $\jmath(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ed è detto *modulo della quaterna* P_1, P_2, P_3, P_4.

Si può parlare di modulo della quaterna non ordinata perchè vale il seguente:

Lemma 1.4.2 ([SE], Lemma 27.8)**.**
Siano $\beta, \beta' \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$*, allora* $\jmath(\beta) = \jmath(\beta')$ *se e sole se* $t' \in \{\beta, \frac{1}{\beta}, 1 - \beta, \frac{1}{1-\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{\beta}{\beta-1}\}$.

Cioè, il modulo di quattro punti distinti è indipendente dall'ordine in cui si considerano i punti.
La funzione $\jmath(P_1, P_2, P_3, P_4)$ permette di stabilire quando due quaterne di punti ordinati sono proiettivamente equivalenti fra loro, come evidenziato dal seguente risultato:

Teorema 1.4.3 ([SE], Teorema 27.9)**.**
Due quaterne non ordinate di punti distinti P_1, P_2, P_3, P_4 *e* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 *di una retta proiettiva* $\mathbb{P}(V)$ *sono proiettivamente equivalenti se e solo se* $\jmath(P_1, P_2, P_3, P_4) = \jmath(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.

Capitolo 2

Le cubiche non singolari o liscie

Si può ora affrontare lo studio delle cubiche iniziando dalle cubiche liscie. In questo capitolo si presenta la loro classificazione proiettiva e si mostra come una cubica non singolare rappresenta un gruppo abeliano con un'operazione di somma opportunamente definita.

Con $L(A, B)$ si denota la retta congiungente i punti A e B.

2.1 Classificazione proiettiva

Teorema 2.1.1.
Ogni cubica non singolare, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente ad una cubica di equazione affine:

$$Y^2 = X(X-1)(X-c) \tag{2.1}$$

per qualche $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{C}$ è non singolare possiede almeno un punto di flesso P. Si consideri la proiettività ϕ tale che:

a) P viene portato in $Q = [0, 0, 1]$

b) la tangente inflessionale in Q sia $x_0 = 0$

Si osserva che Q è un punto di flesso per $\phi(\mathcal{C})$ perchè “essere di flesso” è una proprietà proiettiva.
L'immagine di $\mathcal{C}$ tramite una qualsiasi proiettività è rappresentata dal generico polinomio omogeneo di grado 3:

$$ax_0^3+bx_1^3+cx_2^3+dx_0^2x_1+ex_0^2x_2+fx_0x_1^2+gx_0x_2^2+hx_1^2x_2+lx_1x_2^2+mx_0x_1x_2=0$$

Deomeogeneizzando $\phi(\mathcal{C})$ rispetto ad x_2 si ottiene la curva $\mathcal{C}'$ di equazione

$$p(X,Y):aX^3+bY^3+dX^2Y+fXY^2+eX^2+hY^2+mXY+gX+lY+c=0$$

e il punto Q diventa l'origine degli assi del piano affine.
Imponendo le condizioni a) e b) sul polinomio p si ottiene l'immagine di $\mathcal{C}$ tramite ϕ deomogeneizzata rispetto ad x_2. Le condizioni si traducono nel seguente modo:

a) $p(0,0)=0$ da cui si ottiene $c=0$

b) $r:X=0$ sia la tangente inflessionale in $(0,0)$ cioè:

$$\frac{\partial p}{\partial Y}(0,0)=0 \text{ da cui si ottiene } l=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial X}(0,0)\neq 0 \text{ da cui si ottiene } g\neq 0$$

In ultimo, dato che Q è un punto di flesso dovrà verificarsi che $i(\mathcal{C}',r,(0,0))=3$ da cui si ottiene $h=0$.
Quindi $\phi(\mathcal{C})$ è del tipo:

$$\phi(\mathcal{C}):ax_0^3+bx_1^3+dx_0^2x_1+ex_0^2x_2+fx_0x_1^2+gx_0x_2^2+mx_0x_1x_2=0$$

con $b\neq 0$, altrimenti si potrebbe raccogliere x_0, cioè $\phi(\mathcal{C})$ conterrebbe una retta.
Deomogeneizzando rispetto ad x_0 si ha

$$a+bX^3+dX+eY+fX^2+gY^2+mXY=0$$

e operando tramite l'affinità

$$\varphi : \begin{cases} X = \alpha X' + \gamma \\ Y = -\frac{m\alpha}{2g}X' + \beta Y' - \frac{e+m\gamma}{2g} \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, si ottiene una cubica la cui equazione è

$$a' + b'X'^3 + d'X' + f'X'^2 + g'Y'^2 = 0 \quad \text{con} \quad b' \neq 0 \tag{2.2}$$

a cui $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente tramite la composizione di ϕ e la proiettività indotta da φ che è la seguente:

$$\begin{cases} x_0 = x_0' \\ x_1 = \alpha x_1' + \gamma x_0' \\ x_2 = -\frac{m\alpha}{2g}x_1' + \beta x_2' - \frac{e+m\gamma}{2g}x_0' \end{cases}$$

Rinominando le variabili X, Y, il polinomio (2.2) è del tipo

$$Y^2 = g(X) \quad \text{con} \quad g(X) = b'(X^3 + \frac{f'}{b'}X^2 + \frac{d'}{b'}X + \frac{a'}{b'})$$

Tale curva è non singolare allora il polinomo g ammette tre radici distinte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, quindi $g(X) = b'(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$. Operando tramite l'affinità:

$$\begin{cases} X = (\alpha_2 - \alpha_1)X' + \alpha_1 \\ Y = \delta Y' \end{cases}$$

con δ tale che $\delta^2 = b'(\alpha_2 - \alpha_1)^3$, e rinominado le variabili X, Y si ottiene $Y^2 = X(X - 1)(X - c)$ dove $c = \frac{\alpha_3 - \alpha 1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ □

Osservazione 4. In realtà la dimostrazione del teorema precedente dice di più: data una coppia $(\mathcal{C}, P)$ con $\mathcal{C}$ cubica e P un suo punto di flesso è possibile trovare una proiettività ϕ tale che $\phi(\mathcal{C})$ sia la cubica $Y^2 = X(X - 1)(X - c)$ con $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e $\phi(P) = [0, 0, 1]$.

Dal teorema si ricava che due cubiche non singolari sono proiettivamente equivalenti fra loro se sono entrambe proiettivamente equivalenti ad una cubica di equazione (2.1). Si tratta ora di stabilire quante sono le classi di equivalenza proiettiva.
Dal corollario (1.3.2) segue che una cubica possiede al più 9 flessi distinti, se non ne possiede infiniti. In particolare per le cubiche non singolari vale:

Teorema 2.1.2.
a) Una cubica non singolare $\mathcal{C}$ possiede esattamente nove flessi, che hanno la proprietà che una retta che ne contiene due, ne contiene un terzo.
b) Dati comunque due flessi A e B di $\mathcal{C}$, esiste una proiettività $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ che trasforma $\mathcal{C}$ in sè stessa e scambia tra loro A e B lasciando fisso il flesso allineato con A e B.

Dimostrazione. a) Si è già osservato che la cubica $\mathcal{C}$ ha al più 9 flessi. Si dimostra con calcolo diretto che sono esattamente 9.
Si consideri la cubica nella forma (2.1), cioè:

$$\mathcal{C} : Y^2 - X^3 + (c+1)X^2 - cX = 0$$

e si ponga

$$f(X,Y) = Y^2 - X^3 + (c+1)X^2 - cX.$$

Si vede dall'equazione di $\mathcal{C}$ che un punto di flesso è il punto improprio $[0,0,1]$. Infatti omogeneizzando la curva rispetto ad x_0 si ottiene:

$$x_0x_2^2 - x_1^3 + (c+1)x_1^2x_0 - cx_1x_0^2 = 0$$

che deomogeneizzata rispetto ad x_2 diventa:

$$Y^3 - (c+1)XY^2 + cX^2Y - X = 0.$$

Dato che il termine noto è assente ma il complesso dei termini di primo grado è diverso da zero, l'origine è un punto semplice per la curva e la tangente nell'origine si ottiene azzerando il complesso dei termini di primo grado, cioè la tangente è la retta $r : X = 0$. Si verifica che $i(\mathcal{C}, r, (0,0)) = 3$, così $(0,0)$ è un punto di flesso. Omogeneizzando rispetto ad x_2 si ottiene $[0,0,1]$ punto di flesso.

Gli altri flessi si ricavano trovando i punti comuni fra $\mathcal{C}$ e la sua hessiana $h(X,Y)$.

L'hessiana di $\mathcal{C}$ è il polinomio:

$$H(x_0,x_1,x_2) = det \begin{pmatrix} -2cx_1 & 2(c+1)x_1 - 2cx_0 & 2x_2 \\ 2(c+1)x_1 - 2cx_0 & -6x_1 + 2(c+1)x_0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 2x_0 \end{pmatrix}$$

$$= 8[(c+1)x_0 - 3x_1](-cx_1x_0 - x_2^2) - 8[(c+1)x_1 - 2cx_0]^2$$

Deomogeneizzando H rispetto ad x_0 si ottiene $h(X,Y)$, dove:

$$\frac{h(X,Y)}{8} = [c+1-3X](-cX - Y^2) - [(c+1)X - 2c]^2$$

Il risultante di f e $\frac{h}{8}$, rispetto ad Y è

$$R(X) = 3X^4 - 4(c+1)X^3 + 6cX^2 - c^2$$

che ha quattro radici distinte X_1, X_2, X_3, X_4, tutte non nulle. Infatti il discriminante di $R(X)$, cioè il risultante di $R(X)$ e della sua derivata prima, è una costante diversa da zero e vale $c^4(c-1)^4$, allora $R(X)$ non ammette radici multiple perciò queste sono tutte distinte. Allora i punti (X_i, Y_i) per $i = 1,2,3,4$ rappresentano quattro punti comuni tra f ed h e quindi quattro flessi. Ma f e h hanno il termine in Y al quadrato allora per $i = 1,2,3,4$ anche $(X_i, -Y_i)$ sono soluzioni per $R(X)$. Perciò in totale i due polinomi hanno otto punti in comune. Ne segue che i flessi sono: $[0,0,1], (X_i,Y_i), (X_i,-Y_i)$ per $i = 1,2,3,4$ e sono esattamente nove.

Si considerino ora due flessi. E' possibile supporre che uno dei due sia $[0,0,1]$ per l'osservazione 4; l'altro sia, ad esempio, (X_1,Y_1). Il flesso $(X_1,-Y_1)$ è allineato con gli altri due. Infatti la retta proiettiva passante per $[0,0,1]$ e $[1,X_1,Y_1]$ (che è il punto (X_1,Y_1) omogeneizzato rispetto ad x_0) è:

$$\begin{cases} x_0 = t \\ x_1 = X_1 t \qquad \text{con} \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1 \\ x_2 = s + Y_1 t \end{cases}$$

Ponendo $t = 1$ ed $s = X_1 - Y_1$ si ottiene punto $[1, X_1, -Y_1]$ che deomogeneizzato è il terzo flesso.
b) Si considerino tre flessi allineati; per l'osservazione 4 non è restrittivo supporre che uno sia $C = [0, 0, 1]$, quindi gli altri due saranno $A = (X_i, Y_i)$ e $B = (X_i, -Y_i)$ per un certo i. Si vede subito che una proiettività che scambia A e B lasciando invariato C è $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ con $\varphi(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, -x_2)$.
□

Osservazione 5. Sia $\mathcal{F}$ una fascio di rette proiettive passanti per il punto $P = [a_0, a_1, a_2]$; $\mathcal{F}$ è un $\mathbb{P}^1$ identificabile con una retta r non passante per P, che è un $\mathbb{P}^1$, tramite, ad esempio, l'isomorfismo proiettivo che ad ogni retta s del fascio associa il punto di intersezione tra s ed r. Quindi è ben definito il modulo di quattro rette del fascio $\mathcal{F}$.

Teorema 2.1.3 (di Salmon)**.**
Sia $\mathcal{C}$ una cubica non singolare di $\mathbb{P}^2$ e sia P un suo flesso. Allora $\mathcal{C}$ possiede esattamente quattro tangenti distinte che contengono P, inclusa la tangente in P. Inoltre il loro modulo è indipendente dalla scelta di P.

Dimostrazione. Si supponga per ora che $\mathcal{C}$ sia una cubica della forma (2.1) e che il punto di flesso sia $P = [0, 0, 1]$. La cubica omogeneizzata rispetto ad x_0 è:

$$\mathcal{C}' : x_0x_2^2 - x_1^3 + (c+1)x_1^2x_0 - cx_0^2x_1 = 0$$

e la generica retta passante per P è:

$$r : \begin{cases} x_0 = l_0 s \\ x_1 = l_1 s \\ x_2 = l_2 s + t \end{cases} \qquad \text{con} \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

Si trovino ora le rette tangenti a $\mathcal{C}$ in P.

$$\mathcal{C}' \cap r : s[s^2(l_0l_2^2 - l_1^3 + (c+1)l_1^2l_0 - cl_0^2l_1) + 2l_0l_2st + l_0t^2] = 0$$

Risolvendo rispetto ad s:

$s = 0$

$s^2(l_0 l_2^2 - l_1^3 + (c+1)l_1^2 l_0 - c l_0^2 l_1) + 2l_0 l_2 st + l_0 t^2 = 0$
$\Delta = l_1 l_0 (l_1^2 t^2 - (c+1)l_1 l_0 t^2 + c l_0^2 t^2) = 0$
allora si ha
$l_1 = 0$
$l_0 = 0$
$l_1^2 t^2 - (c+1)l_1 l_0 t^2 + c l_0^2 t^2 = 0$
$\Delta = l_0^2 t^4 (c-1)^2$
$l_{1_{1,2}} = \frac{l_0(c+1) \pm l_0(c-1)}{2} \Longrightarrow l_1 = c l_0$ e $l_1 = l_0$

In corrispondenza di questi valori si trovano, nell'ordine, le rette: $x_1 = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = cx_0$, $x_1 = x_0$.
Deomogeneizzando rispetto ad x_0: $X = 0$, la retta impropria, $X = c$, $X = 1$.
Queste sono le quattro rette tangenti passanti per P.
Se $\mathcal{C}$ è una cubica non singolare qualsiasi, per l'osservazione 4 si può sempre trovare una proietttività $\psi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $\psi(\mathcal{C}) : Y^2 - X(X-1)(X-c) = 0$ e $\psi(P) = [0, 0, 1]$. Dato che le tangenti per P e per $\psi(P)$ si corrispondono nella proiettività, anche $\mathcal{C}$ ha quattro tangenti per P.
Il modulo delle tangenti è indipendente dalla scelta del punto perchè due fasci di rette $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ di centro due punti di flesso P e Q si corrispondono nella proiettività φ che lascia invariata la cubica, scambia i flessi tra loro e scambia P con Q. Inoltre φ induce una proiettività tra i due fasci $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, che sono due $\mathbb{P}^1$, e poichè il modulo è invariante per proiettività si ha la tesi. $\square$

Definizione 2.1. Il modulo comune delle quaterne di tangenti passanti per i flessi di una cubica non singolare $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2$ si chiama *modulo della cubica* e si indica con $\jmath(\mathcal{C})$.

Proposizione 2.1.4.
Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica non singolare proiettivamente equivalente alla cubica affine $Y^2 = X(X-1)(X-c)$.
Allora $\jmath(\mathcal{C}) = \jmath(c) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$.

Dimostrazione. Si ripercorra quanto visto nella dimostrazione del teorema di Salmon: dato che $\mathcal{C}$ è non singolare, possiede almeno un punto di flesso P. Sia ψ la proiettività che porta $\mathcal{C}$ in una cubica della forma (2.1) e tale che $\psi(P) = [0,0,1]$; ψ porta le quattro tangenti passanti per P nelle quattro tangenti passanti per $[0,0,1]$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di rette passanti per $\psi(P)$ ed r la retta di equazione $x_2 = 0$, per l'osservazione 5 esiste l'isomorfismo proiettivo:

$$\phi : \mathcal{F} \to r \quad \text{tale che} \quad s \mapsto s \cap r$$

La ϕ opera sulle quattro tangenti per $[0,0,1]$ associando loro i seguenti punti:

$$x_1 = 0 \mapsto [1,0,0]$$

$$x_0 = 0 \mapsto [0,1,0]$$

$$x_1 = x_0 \mapsto [1,1,0]$$

$$x_1 = cx_0 \mapsto [1,c,0]$$

Ricordando che la retta r è un $\mathbb{P}^1$ e un isomorfisomo $g : r \longrightarrow \mathbb{P}^1$ è dato da $g([a,b,0]) = [a,b]$, questi punti diventano i punti $P_1 = [1,0], P_2 = [0,1], P_3 = [1,1], P_4 = [1,c]$. Il birapporto tra P_1, P_2, P_3, P_4 è:

$$\beta(P_1,P_2,P_3,P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = c$$

Allora il modulo dei quattro punti, cioè delle tangenti per $[0,0,1]$ è:

$$\jmath(c) = \frac{(c^2-c+1)^3}{c^2(c-1)^2}$$

Questo è anche il modulo delle tangenti per P perchè il modulo è invariante per proiettività e ψ induce una proiettività tra il fascio di rette di centro P e il fascio di rette di centro $[0, 0, 1]$. Perciò vale:

$$\jmath(\mathcal{C}) = \jmath(c) = \frac{(c^3 - c + 1)^3}{c^2(c-1)^3}$$

□

Corollario 2.1.5.
Due cubiche non singolari $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ di $\mathbb{P}^2$ sono proiettivamente equivalenti se e sole se $\jmath(\mathcal{C}) = \jmath(\mathcal{C}')$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono proiettivamente equivalenti allora sono entrambe equivalenti ad una cubica della forma (2.1). Quindi $\jmath(\mathcal{C}) = \jmath(c) = \jmath(\mathcal{C}')$.
Viceversa, se $\jmath(\mathcal{C}) = \jmath(\mathcal{C}')$ allora esisitono $c, c' \in \mathbb{C}$ tali che $\jmath(c) = \jmath(c')$ e $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sono rispettivamente proiettivamente equivalenti a due cubiche di equazioni affini:

$$Y^2 - X(X-1)(X-c) = 0 \tag{2.3}$$

$$Y^2 - X(X-1)(X-c') = 0 \tag{2.4}$$

Supponendo che $c \neq c'$ e dato che $\jmath(c) = \jmath(c')$, c' può assumere i seguenti valori: $\frac{1}{c}$, $\frac{c}{c-1}$, $1-c$, $\frac{c-1}{c}$, $\frac{1}{1-c}$. Ora è sufficiente determinare una proiettività che porta (2.3) in (2.4) nei casi in cui $c' = \frac{1}{c}$ e $c' = 1-c$. Per tutti gli altri casi la proiettività cercata sarà composizioni delle due che ora si determinano.
Se $c' = \frac{1}{c}$, l'equazione (2.4) diventa $Y^2 = X(X-1)(X-\frac{1}{c})$. Vista la scrittura delle due curve si può intuire che la proiettività cercata sarà indotta da un'affinità del tipo:

$$\psi : \begin{cases} X = aX' \\ Y = bY' \end{cases}$$

Operando con la ψ su (2.3) si ottiene

$$b^2Y'^2 = aX'(aX'-1)(aX'-c)$$

da cui

$$b^2Y'^2 = a^3X'\Big(X' - \frac{1}{a}\Big)\Big(X' - \frac{c}{a}\Big)$$

e dovrà verificarsi che

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{c} \\ \frac{c}{a} = 1 \\ \frac{b^2}{c^3} = 1 \end{cases}$$

ricavando $a = c$ e $b = \alpha$ tale che $\alpha^2 = c^3$. Quindi la proiettività cercata è:

$$\begin{cases} x_0 = x'_0 \\ x_1 = cx'_1 \\ x_2 = \alpha x'_2 \end{cases}$$

Se $c' = 1 - c$ l'equazione (2.4) diventa $Y^2 = X(X-1)(X-1+c)$. In questo caso un'affinità come la ψ non va bene, bisogna operare con una del tipo:

$$\varphi : \begin{cases} X = aX' + d \\ Y = bY' \end{cases}$$

La (2.3) diventa

$$b^2Y'^2 = (aX' + d)(aX' + d - 1)(aX' + d - c)$$

cioè

$$b^2Y'^2 = a^3\Big(X' + \frac{d}{a}\Big)\Big(X' + \frac{d-1}{a}\Big)\Big(X' + \frac{d-c}{a}\Big)$$

e deve verificarsi che

$$\begin{cases} \frac{d}{a} = -1 \\ \frac{d-1}{a} = 0 \\ \frac{d-c}{a} = c - 1 \\ \frac{b^2}{a^3} = 1 \end{cases}$$

da cui $a = -1, b = i, d = 1$. La proiettività associata è:

$$\begin{cases} x_0 = x'_0 \\ x_1 = -x'_1 + x'_0 \\ x_2 = ix'_2 \end{cases}$$

□

Dalla proposizione (2.1.4) e da questo corollario si ricava che *le classi di equivalenza proiettive delle cubiche non singolari sono infinite*. In particolare, posto $\mathcal{M} = \{$*insieme delle classi di equivalenza proiettiva delle cubiche non singolari*$\}$ si ottiene una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{M}$ e tutti i possibili valori di $\jmath(c)$ con $c \neq \{0, 1\}$. Ma tali valori sono infiniti, allora anche $\mathcal{M}$ è infinito.

2.2 La legge di gruppo su una cubica non singolare

Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica non singolare e si fissi un punto O qualsiasi della cubica. Una retta passante per O e un altro punto P della cubica la incontra in tre punti contati con molteplicità, di cui due già noti. Si ponga $R(O, P)$ il terzo punto di intersezione della retta per O e P con la cubica assegnata. Dato che le intersezioni si intendono contate con molteplicità, se la retta per O e P è tangente a $\mathcal{C}$ in P oppure in O, si avrà $R(O, P) = P$ oppure $R(O, P) = O$.
Si ha la seguente definizione:

Definizione 2.2. Sia $\mathcal{C}$ una cubica non singolare di $\mathbb{P}^2$ ed O un suo punto fissato. L'*applicazione somma* è definita nel modo seguente:

$$+ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \quad \text{tale che} \quad A + B = R(R(A, B), O)$$

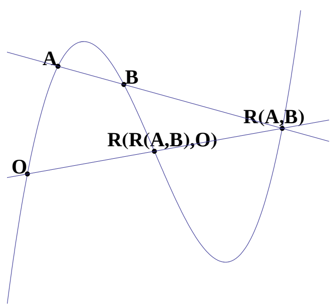

Figura 2.1: Esempio di somma A+B.

L'applicazione è ben definita perchè è ben definito $R(A, B)$, grazie al fatto che $\mathcal{C}$ è liscia e quindi la tangente in ogni punto è unica.

Si ha il seguente:

Teorema 2.2.1.
Con l'operazione $+$, la cubica non singolare $\mathcal{C}$ è un gruppo abeliano il cui elemento neutro è O.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema viene data solo in modo parziale.
Si deve provare che per l'applicazione somma il punto O è elemento neutro, che esiste l'opposto per ogni punto della cubica e che valgono le proprietà commutativa e associativa, ma quest'ultima non verrà provata in generale.

a) E' semplice verificare che O è l'elemento neutro. Sia $A \in \mathcal{C}$, la retta passante per A ed O interseca la cubica nel terzo punto $L = R(A, O)$ e d'altra parte l'intersezione tra la retta per L ed O con la cubica dà A come terzo punto. Allora: A+O=R(R(A,O),O)=R(L,O)=A.

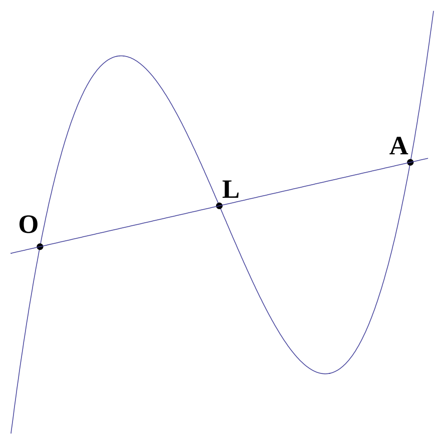

Figura 2.2: Costruzione per la verifica che O sia elemento neutro.

b) Per verificare che esiste l'elemento opposto, bisogna provare che per ogni $A \in \mathcal{C}$ esiste un $B \in \mathcal{C}$ tale che $A + B = R(R(A, B), O) = O$. Sia

$A \in \mathcal{C}$, l'intersezione tra la retta tangente a $\mathcal{C}$ in O e la cubica dà come terzo punto $M = R(O, O)$. Sia poi $M' = R(A, M)$. Per costruzione M' è l'opposto di A. Infatti $A + M' = R(R(A, M'), O) = R(M, O) = O$.

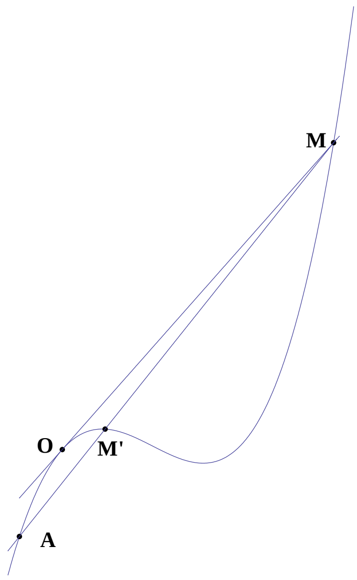

Figura 2.3: Costruzione dell'opposto di A.

c) La proprietà commutativa è valida perchè la retta generata da A e B, o la tangente in A se $A = B$, è unica e lo è anche $R(A, B)$, quindi $A + B = R(R(A, B), O) = R(R(B, A), O) = B + A$.

d) Dati $A, B, C \in \mathcal{C}$, per verificare l'associatività, cioè $A + (B + C) = (A + B) + C$, basta verificare che $R(A, B + C) = R(A + B, C)$.
Per la costruzione di $R(A+B, C)$ sono necessarie le rette: $r_1 = L(A, B), r_2 = L(R(A, B), O), r_3 = L(C, A + B)$.
Per la costruzione di $R(A, B + C)$ vengono utilizzate le rette: $q_1 = L(B, C), q_2 = L(R(B, C), O), q_3 = L(A, B + C)$.
Si considerino ora le curve

$$\mathcal{D}_1 = r_1 + q_2 + r_3$$

$$\mathcal{D}_2 = q_1 + r_2 + q_3$$

Per costruzione vale:

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_1 = \{A, B, C, O, R(A, B), A + B, R(B, C), B + C, R(A + B, C)\}$$

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}_2 = \{A, B, C, O, R(A, B), A + B, R(B, C), B + C, R(A, B + C)\}$$

Si supponga che i nove punti trovati siano tutti distinti.
Le cubiche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_1$ soddisfano le ipotesi del teorema (1.1.2), allora $\mathcal{D}_2$ deve passare per $R(A + B, C)$. Ma questo accade solo quando $R(A + B, C) = R(A, B + C)$.
Se invece i punti non sono tutti distinti bisogna ricorrere a tecniche più avanzate.

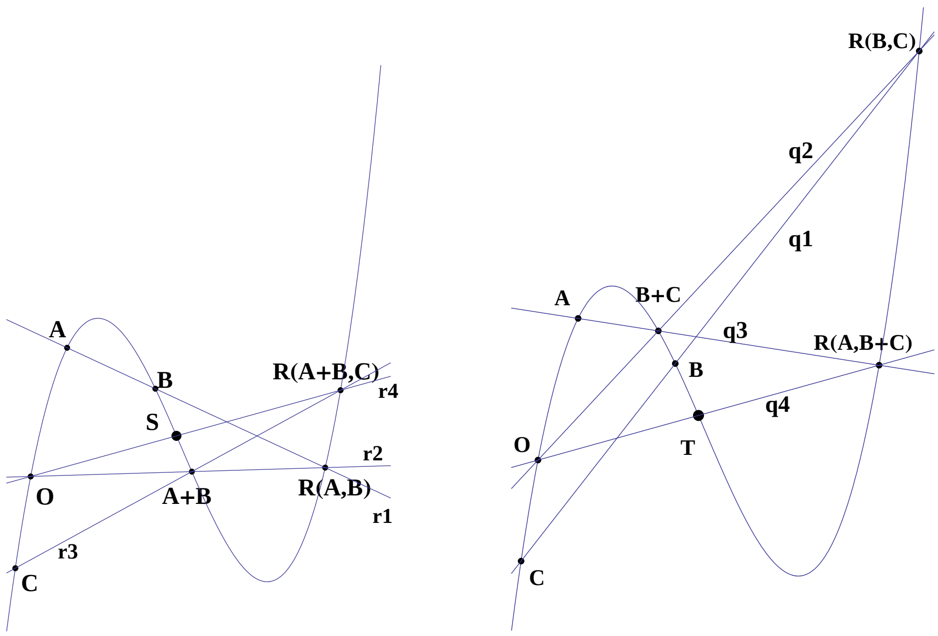

Figura 2.4: Costruzione dei punti R(A+B,C) e R(A,B+C).

□

Nel caso che il punto O considerato sia un punto di flesso per la conica si ottiene una costruzione molto semplice. Infatti si può sempre trovare una

proiettività che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}' : Y^2 = X(X-1)(X-c)$ e tale che il punto di flesso di $\mathcal{C}$ venga portato nel punto improprio $[0,0,1]$ che è un punto di flesso per $\mathcal{C}'$. Perciò si può lavorare su $\mathcal{C}'$ fissando il punto $O = [0,0,1]$. Si verifica che le rette proiettive per O sono della forma $\mu x_0 - \nu x_1 = 0$ che nell'affine sono le rette $X = \lambda$ con $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ deomogeneizzando rispetto ad x_0. Tali rette incontrano la cubica nei due punti $(\lambda, \pm\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-c)})$ e nel punto improprio. Quindi dato un punto $P = (a,b)$ si ha che $R(P,O) = (a,-b)$, cioè il suo simmetrico rispetto all'asse X. Inoltre l'intersezione tra la retta tangente in O alla cubica e la cubica stessa dà O come radice di molteplicità 3, ciò significa che $R(O,O) = O$ e seguendo la traccia della dimostrazione di cui sopra si verifica facilmente che l'inverso di $P = (a,b)$ è proprio $(a,-b)$ il suo simmetrico rispetto all'asse X.
Si può perciò enunciare il seguente teorema:

Teorema 2.2.2. *Sia $\mathcal{C}$ una cubica nella forma $Y^2 = X(X-1)(X-c)$. Allora esiste un'unica legge di gruppo avente il punto di flesso $[0,0,1]$ come elemento neutro, l'elemento opposto dato $-(a,b) = (a,-b)$ e tale che per ogni $P, Q, R \in \mathcal{C}$ valga: $P + Q + R = O \iff P, Q, R$ sono allineati.*

Capitolo 3

Le cubiche singolari

In questo terzo capitolo si affronta la classificazione delle cubiche singolari distinguendo il caso di una cubica singolare irriducibile da quello di una riducibile poichè le due non possono essere proiettivamente equivalenti. Questo dipende dal fatto che l'isomorfismo di anelli indotto da una proiettività ψ, cioè $\tilde{\psi} : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tale che $\tilde{\psi}(x_i) = a_{i,0}x_0 + a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2$ fa corrispondere polinomi irriducibili a polinomi irriducibili. Si presenta poi la parametrizzazione razionale, ovvero una rappresentazione delle cubiche singolari in cui le variabili X, Y nel caso affine e x_0, x_1, x_2 nel caso proiettivo, si esprimono come funzioni razionali.

3.1 Classificazione delle cubiche singolari irriducibili

Una cubica irriducibile singolare proiettiva ha al più un punto singolare che deve essere doppio. Infatti: sia $\mathcal{C}$ una cubica di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$; si supponga per assurdo che $P, P' \in \mathcal{C}$ siano due punti singolari e sia r la retta che li contiene. Si verifica che $\sum_{Q \in r} i(\mathcal{C}, r, Q) > 3$ ma il teorema (1.2.2) implica allora che $r \subseteq \mathcal{C}$ e questo a sua volta implica che il polinomio lineare che definisce r divide il polinomio F (si veda [RE] Lemma 2.5 parte (i)), cioè $\mathcal{C}$ è riducibile contro l'ipotesi. Allora la cubica ammette un unico punto singolare. Dato che la sommatoria di cui sopra è esattamente uguale a tre, l'unico punto singolare può essere triplo o doppio. La prima possibilità non può verificarsi perchè altrimenti la cubica risulterebbe riducibile, spezzandosi nell'unione di tre rette per P (si veda [SE] Complementi 34.11 punto (1)). Così l'unico punto singolare è un punto doppio.

Sia ora $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica irriducibile di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ e sia P il suo punto doppio.
Si supponga che P sia un nodo. Si può sempre trovare una proiettività ϕ che porta P in $Q = [0, 0, 1]$ in modo tale che le tangenti principali in Q siano $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$.
Sia $\phi(\mathcal{C}) : G(x_0, x_1, x_2) = 0$, l'immagine di $\mathcal{C}$ tramite ϕ dove $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ è il generico polinomio:

$$G(x_0, x_1, x_2) : ax_0^3+bx_0^2x_1+cx_0^2x_2+dx_0x_2^2+ex_0x_1^2+fx_0x_1x_2+mx_1^3+hx_2^3+ix_1x_2^2+lx_1^2x_2 = 0$$

Deomogeneizzando rispetto ad x_2 si ottiene:

$$g(X, Y) = aX^3+bX^2Y+cX^2+dX+eXY^2+fXY+mY^3+h+iY+lY^2 = 0$$

e il punto Q diventa l'origine. Per trovare la proiettività bisogna imporre le seguenti condizioni:

a) $(0, 0) \in g(X, Y)$ cioè $g(0, 0) = 0$ da cui si ricava $h = 0$

b) $(0, 0)$ sia un punto doppio, cioè tutte le derivate prime calcolate in $(0, 0)$ devono essere zero:
$\frac{\partial g}{\partial X}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $d = 0$

$\frac{\partial g}{\partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $i = 0$

c) Le tangenti principali in $(0, 0)$ siano $X = 0$ e $Y = 0$:
$\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(0, 0) \neq 0$ da cui si ricava che $f \neq 0$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(0,0) = 0 \text{ da cui si ricava } c = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(0,0) = 0 \text{ da cui si ricava } l = 0$$

Ora, dividendo per f e rinominando i coefficienti, si può scrivere:

$$\phi(\mathcal{C}) : ax_0^3 + bx_0^2x_1 + ex_0x_1^2 + x_0x_1x_2 + mx_1^3 = 0.$$

Applicando a $\phi(\mathcal{C})$ la seguente proiettività:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_1 x_0' \\ x_1 = \gamma_2 x_1' \\ x_2 = \gamma_3 x_2' - b\gamma_1 x_0' - e\gamma_2 x_1' \end{cases}$$

con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tali che $\gamma_1^3 = a^{-1}, \gamma_2^3 = m^{-1}, \gamma_3^3 = am$ e $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = 1$, si ottiene la cubica

$$x_0'x_1'x_2' + x_1'^3 + x_0'^3 = 0.$$

Deomogeneizzando rispetto ad x_0' e rinominando le variabili affini X e Y si ha:

$$XY + X^3 + 1 = 0$$

In conclusione ogni cubica irriducibile $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente alla cubica singolare irriducibile affine $XY + X^3 + 1 = 0$. Si deduce, quindi, che *tutte le cubiche irriducibili con un nodo sono proiettivamente equivalenti tra loro.*

In particolare tali cubiche sono proiettivamente equivalenti alla cubica di equazione affine

$$Y^2 = X^2(X - 1)$$

la cui equazione proiettiva è: $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_0x_1^2$. Tale cubica ha un nodo nel punto $[1,0,0]$ e un flesso nel punto $[0,0,1]$.

Allora, le cubiche irriducibili con un nodo, oltre ad essere proiettivamente equivalenti tra loro, possiedono almeno un flesso.

Se, invece, P è un punto doppio non ordinario, il cono tangente in P è formato da una sola retta e P è una cuspide. In particolare è una cuspide ordinaria poichè detta t la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P, il polinomio dato dall'intersezione della cubica con t ha grado 3 ed ha perciò tre radici contate con molteplicità. Allora $i(\mathcal{C}, t, P) = 3$. Si può sempre trovare una proiettività che porta P in $Q = [0, 0, 1]$ e tale che la sua tangente principale in Q sia $x_0 = 0$. Come prima, sia $\phi(\mathcal{C}) : G(x_0, x_1, x_2) = 0$ l'immagine di $\mathcal{C}$, dove $G(x_0, x_1, x_2) = 0$ è il generico polinomio:

$$G(x_0, x_1, x_2) : ax_0^3+bx_0^2x_1+cx_0^2x_2+dx_0x_2^2+ex_0x_1^2+fx_0x_1x_2+hx_1^3+ix_2^3+lx_1x_2^2+mx_1^2x_2 = 0$$

Deomogeneizzando rispetto ad x_2 si ottiene:

$$g(X, Y) = aX^3+bX^2Y+cX^2+dX+eXY^2+fXY+hY^3+i+lY+mY^2 = 0$$

e il punto Q diventa l'origine. Per trovare la proiettività bisogna imporre le seguenti condizioni:

a) $(0, 0) \in g(X, Y)$ cioè $g(0, 0) = 0$ da cui si ricava $i = 0$

b) $(0, 0)$ sia un punto doppio, quindi tutte le derivate prime calcolate in $(0, 0)$ valgono zero:
$\frac{\partial g}{\partial X}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $d = 0$

$\frac{\partial g}{\partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $l = 0$

c) la tangente principale in $(0, 0)$ sia $X = 0$:
$\frac{\partial^2 g}{\partial X \partial Y}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $f = 0$

$\frac{\partial^2 g}{\partial Y^2}(0, 0) = 0$ da cui si ricava $m = 0$

$\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(0, 0) \neq 0$ da cui si ricava $c \neq 0$

Perciò, dividendo per c e rinominando i coefficienti, si ottiene l'equazione:

$$\phi(\mathcal{C}) = ax_0^3 + bx_0^2x_1 + x_0^2x_2 + ex_0x_1^2 + hx_1^3 = 0$$

con $h \neq 0$ altrimenti $\phi(\mathcal{C})$ contiene la retta $x_0 = 0$.
Deomogeneizzando rispetto ad x_0 si ottiene il polinomio:

$$a + bX + Y + eX^2 + hX^3 = 0$$

Operando su questo polinomio con l'affinità

$$\psi : \begin{cases} X = X' - \frac{e}{3h} \\ Y = (\frac{e^2}{3h} - b)X' + Y' \end{cases}$$

e rinominando le variabili si ottiene:

$$Y + hX^3 + \alpha = 0 \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

In ultimo applicando:

$$\begin{cases} X = \beta X' \\ Y = Y' - \alpha \end{cases}$$

con β tale che $\beta^3 = h^{-1}$, e rinominando di nuovo le variabili si ha:

$$Y + X^3 = 0$$

In conclusione una cubica singolare con un punto doppio non ordinario in P è proiettivamente equivalente ad una cubica di equazione affine $Y + X^3 = 0$ in cui non compaiono coefficienti del polinomio rappresentante la cubica iniziale, allora *tutte le cubiche irriducibili con una cuspide ordinaria sono proiettivamente equivalenti tra loro.*
In particolare, considerando la cubica

$$Y^2 = X^3$$

che è irriducibile con una cuspide ordinaria nell'origine e un flesso in $[0, 0, 1]$, si deduce che tali cubiche hanno almeno un flesso.
Riassumendo i risultati ottenuti:

Teorema 3.1.1.
a) Esistono due classi di equivalenza proiettiva di cubiche irriducibili e singolari che sono rappresentate dalle cubiche di equazioni:

$$Y^2 = X^2(X - 1) \tag{3.1}$$

$$Y^2 = X^3 \tag{3.2}$$

Le cubiche della forma (3.1) hanno un nodo nell'origine e quelle della forma (3.2) hanno una cuspide nell'origine.
b)Ogni cubica irriducibile ha almeno un flesso.

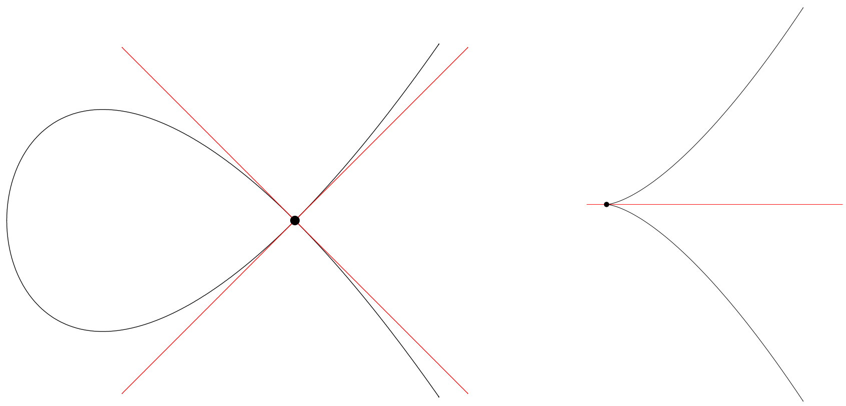

Figura 3.1: A sinistra una cubica con un nodo; a destra una cubica con una cuspide.

Si vuole concludere la sezione mostrando alcune caratteristiche delle cubiche irriducibili.

Proposizione 3.1.2. *Una cubica irriducibile con una cuspide possiede un unico flesso.*

Dimostrazione. Le cubiche irriducibili sono tutte proiettivamente equivalenti tra loro perciò basta dimostrare l'asserto per la cubica $\mathcal{C} : Y^2 = X^3$.

Omogeneizzando rispetto ad x_0 si ottiene $x_0x_2^2 = x_1^3$ e la sua hessiana è $24x_1x_2^2 = 0$. L'intersezione tra le due curve dà i punti $[1,0,0]$ e $[0,0,1]$. Ma $[1,0,0]$ è il punto singolare di $\mathcal{C}$ allora esiste un unico flesso che è $[0,0,1]$. $\square$

Proposizione 3.1.3. *Una cubica irriducibile con un nodo possiede tre flessi che sono allineati.*

Dimostrazione. Anche in questo casa basta dimostrare l'asserto per la cubica $\mathcal{C} : XY + X^3 + 1 = 0$ perchè vale l'equivalenza proiettiva.
Omogeneizzando rispetto ad x_0 si ottiene $x_0x_1x_2 + x_1^3 + x_0^3 = 0$ e la sua hessiana è $x_0x_1x_2 - 3x_0^3 - 3x_1^3 = 0$. L'intersezione tra le due curve dà i punti $[0,0,1], [-1,1,0], [\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 0], [\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, 0]$. Ma il punto $[0,0,1]$ è un nodo quindi i flessi sono gli altri tre punti ottenuti. La retta passante per $[-1,1,0], [\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, 0]$ è $r : x_2 = 0$ a cui appartiene anche l'ultimo flesso. $\square$

3.2 Classificazione delle cubiche singolari riducibili

Sia $\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 0$ una cubica singolare riducibile, il polinomio $F(x_0, x_1, x_2)$ può spezzarsi in due modi possibili:

a) $F = L \cdot G$ con $deg\ L = 1$ e $deg\ G = 2$ irriducibile o viceversa. In questo caso si hanno le seguenti configurazioni:

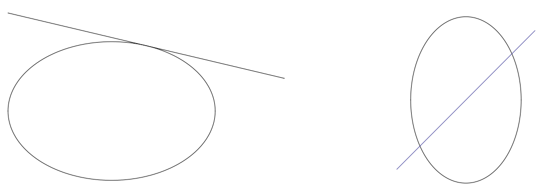

Figura 3.2: A sinistra una conica non degenere e una sua tangente; a destra una conica non degenere e una sua secante.

b) $F = L \cdot G \cdot H$ con $deg\ L = deg\ G = deg\ H = 1$. In questo secondo caso si hanno le configurazioni di seguito:

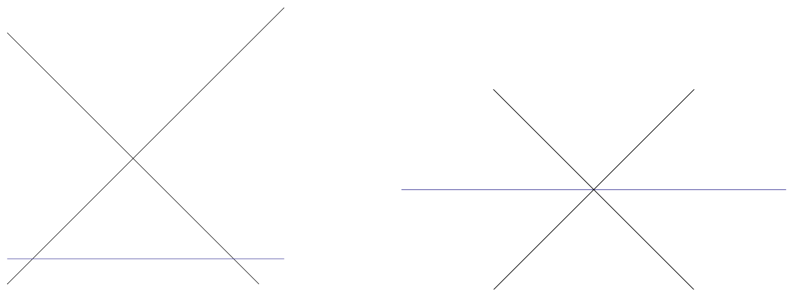

Figura 3.3: A sinistra tre rette distinte incidenti in tre punti distinti; a destra tre rette distinte incidenti in un unico punto.

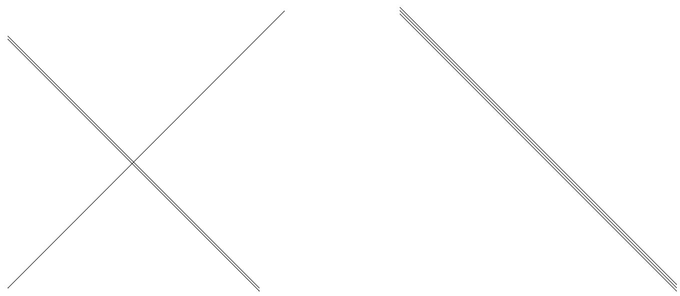

Figura 3.4: A sinistra tre rette incidenti di cui due coincidenti; a destra tre rette coincidenti.

3.3 Parametrizzazione razionale

Sia $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$ una cubica singolare con un punto doppio in P.
Supponendo che P sia un nodo, per il teorema (3.1.1) esiste una proiettività ϕ che porta $\mathcal{C}$ in una cubica $\mathcal{C}'$ di equazione (3.1) tale che P venga portato nell'origine, nodo di $\mathcal{C}'$. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di rette passanti per $(0,0)$. Una generica retta r del fascio ha equazione:

$$r : \begin{cases} X = lt \\ Y = mt \end{cases} \quad \text{con} \quad (l, m) \neq (0,0)$$

L'equazione risolvente è:

$$m^2t^2 + l^2t^2 - l^3t^3 = 0$$

da cui si ricavano le soluzioni $t = 0$ di molteplicità due, da cui si ottiene il nodo, e $t = \frac{m^2+l^2}{l^3}$. Scartando la soluzione doppia trovata e sostituendo la seconda nell'equazione di r si ottiene:

$$\begin{cases} X = \frac{m^2+l^2}{l^2} \\ Y = \frac{m(m^2+l^2)}{l^3} \end{cases}$$

Questa parametrizzazione della curva è detta *parametrizzazione razionale di* $\mathcal{C}'$. Razionale perchè X e Y sono funzioni razionali di l, m.
In questo modo si rappresenta la cubica al variare di $r \in \mathcal{F}$ in modo che ogni coppia di parametri (l, m) individui un suo punto.
Si stabilisce quindi la seguente applicazione:

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C}', \qquad \varphi(r) = (\frac{m^2 + l^2}{l^2}, \frac{m(m^2 + l^2)}{l^3})$$

O meglio, passando al piano proiettivo omogeneizzando rispetto ad x_0 ed identificando il fascio omogeneizzato con $\mathbb{P}^1$ si ha

$$\psi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{C}'^{hom}, \qquad \psi([l, m]) = [l^3, l(m^2 + l^2), m(m^2 + l^2)]$$

Si noti che entrambe le applicazioni scritte sono suriettive ma non iniettive in quanto le tangenti principali in $(0, 0)$ identificano lo stesso punto $(0, 0)$.
Ora, operando con ϕ^{-1} sulla parametrizzazione ottenuta se ne ha una anche per $\mathcal{C}$ e valgono le stesse considerazioni. Oppure si può parametrizzare direttamente $\mathcal{C}$ procedendo allo stesso modo con il fascio di rette di centro P.
Analogo discorso per una cubica irriducibile con una cuspide.

Esempio 3.1. Sia $\mathcal{C} : Y^2 + 2Y - X^3 - 3X^2 - 3X = 0$ una cubica con una cuspide in $P = (-1, -1)$. L'affinità

$$\begin{cases} X = X' - 1 \\ Y = Y' - 1 \end{cases}$$

rende $\mathcal{C}$ equivalente alla cubica $\mathcal{C}' : Y^2 - X^3 = 0$ che ha una cuspide in $(0,0)$. La generica retta per $(0,0)$ è:

$$r : \begin{cases} X = lt \\ Y = mt \end{cases} \quad \text{con} \quad (l,m) \neq (0,0)$$

L'equazione risolvente di $\mathcal{C}'$ ed r è:

$$m^2t^2 - l^3t^3 = 0$$

da cui si ricavano le soluzioni $t = 0$ di molteplicità due che non si considera e $t = \frac{m^2}{l^3}$. Sostituendo quest'ultima nell'equazione di r si ottiene:

$$\begin{cases} X = \frac{m^2}{l^2} \\ Y = \frac{m^3}{l^3} \end{cases}$$

Operando con l'affinità trovata, la parametrizzazione di $\mathcal{C}$ è:

$$\begin{cases} X = \frac{m^2-l^2}{l^2} \\ Y = \frac{m^3-l^3}{l^3} \end{cases}$$

Capitolo 4

La cubica gobba e le sue proiezioni piane

Lo scopo di quest'ultimo capitolo è quello di studiare le proiezioni della cubica gobba di $\mathbb{P}^3$ su un piano. Si mostrerà che le proiezioni della cubica gobba di $\mathbb{P}^3$ su di un piano di centro un punto non appartenente alla cubica stessa sono cubiche piane singolari irriducibili: il grado rimane 3 ma la curva acquista una singolarità. Le proiezioni piane della cubica gobba di centro un punto che le appartiene danno invece una conica liscia: in questo caso, quindi, cala il grado ma la curva non acquista una singolarità. L'idea di fondo è che non si ottiene mai una cubica singolare liscia perchè questa non ammette una parametrizzazione razionale (si veda [RE] per ulteriori approfondimenti) mentre la conica non degenere, la cubica singolare e la cubica gobba sono curve razionali.

Siano O e α rispettivamente un punto e un piano di $\mathbb{P}^3$ con $O \notin \alpha$. Si ricorda che la *proiezione di centro O sul piano α* è l'applicazione:

$$\pi : \mathbb{P}^3 - \{O\} \longrightarrow \alpha \quad \text{tale che} \quad P \mapsto L(O,P) \cap \alpha$$

dove $L(P,O)$ indica la retta congiungente i punti P ed O.

4.1 La cubica gobba di $\mathbb{P}^3$

La *cubica gobba* $\mathcal{C}$ *di* $\mathbb{P}^3$ è l'immagine del morfismo di Veronese

$$\varphi_{1,3} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3, \qquad \varphi_{1,3}([l,m]) = [l^3, l^2m, lm^2, m^3].$$

Da qui si ricava subito la forma parametrica della cubica gobba:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_0 = l^3 \\ x_1 = l^2m \\ x_2 = lm^2 \\ x_3 = m^3 \end{cases} \quad \text{con} \quad [l,m] \in \mathbb{P}^1 \tag{4.1}$$

La parametrizzazione è razionale, per cui la *cubica gobba è una curva razionale.* Si dimostra che la *cubica gobba non è piana.* Infatti sia $\alpha : ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$ un generico piano di $\mathbb{P}^3$; si studi l'intersezione tra la cubica ed il piano.
Si consideri il polinomio:

$$G(l,m) = al^3 + bl^2m + clm^2 + dm^3 \tag{4.2}$$

omogeneo di grado 3 nelle variabili l,m; le radici di questo polinomio sostituite nella (4.1) danno i punti di $\mathcal{C} \cap \alpha$. Dire che $\mathcal{C} \subseteq \alpha$ equivale quindi a dire che la (4.2) è identicamente nulla in $[l,m]$, cioè che $G(l,m)$ dà una relazione lineare tra i monomi linearmente indipendenti l^3, l^2m, lm^2, m^3; ne segue $a = b = c = d = 0$, cioè $\mathcal{C}$ non è una curva piana. Allora $G(l,m)$ ammette tre radici contate con molteplicità; cioè l'intersezione tra la cubica e il piano è data da tre punti contati con molteplicità.
Il fatto che un piano interseca la cubica gobba in tre punti contati con molteplicità si esprime dicendo che la cubica gobba è una curva di $\mathbb{P}^3$ di grado 3.
Per lavorare sulla cubica gobba è anche utile scrivere la sua forma parametrica in una certa carta affine, per esempio $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{P}^3 \mid x_0 \neq 0\}$, quindi supponendo $l \neq 0$ e usando un solo parametro, si pone $t = \frac{m}{l}$ e si

ottiene:

$$\mathcal{C} \cap U_0 : \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = t \\ x_2 = t^2 \\ x_3 = t^3 \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{A}^1. \tag{4.3}$$

D'ora in poi con $\mathcal{C}$ si indicherà sempre la cubica gobba sia in $\mathbb{P}^3$ sia in $U_0 \cong \mathbb{A}^3$, specificando di volta in volta in quale forma la si considera.

4.2 Proiezioni piane della cubica gobba da un suo punto

Sia $V = [1, u, u^2, u^3] \in \mathcal{C}$ e si consideri la proiezione π di centro V sul piano α scelto come uno degli iperpiani coordinati, ad esempio sia $\alpha : x_0 = 0$.
La proiezione π induce un'applicazione su $\mathcal{C} - \{V\}$:

$$\pi_{|\mathcal{C}-\{V\}} : \mathcal{C} - \{V\} \longrightarrow \mathcal{D}$$

dove $\mathcal{D}$ *è una conica non degenere*. Infatti: il piano β, generato da V e da una generica retta r appartenente ad α, interseca la cubica gobba in tre punti: O, P_1, P_2. Le rette $s = L(V, P_1)$ e $t = L(V, P_2)$ giacciono su β e incontrano la retta r, e di conseguenza il piano α, in due punti B_1, B_2. Inoltre $B_1 = \pi(P_1)$ e $B_2 = \pi(P_2)$, così appartengono a $\mathcal{D}$. Cioè la retta r incontra $\mathcal{D}$ in due punti, perciò $\mathcal{D}$ ha grado 2 ed è una conica.
Per verificare che è non degenere si può vedere direttamente. Dato che $V \in \mathcal{C}$, è della forma $V = [1, u, u^2, u^3]$ per $u \neq 0$ fissato, sia poi $Q \neq V$ un punto generico della cubica gobba che non sta su α, e quindi della forma $Q = [1, v, v^2, v^3]$ con $v \neq 0$ e $v \neq u$ e sia $Q' = [0, 0, 0, 1]$ l'unico punto di intersezione di $\mathcal{C}$ con α (con molteplicità 3). La retta per V e Q ha equazione

parametrica:

$$L(V,Q):\begin{cases} x_0=\lambda+\mu \\ x_1=u\lambda+v\mu \\ x_2=u^2\lambda+v^2\mu \\ x_3=u^3\lambda+v^3\mu \end{cases} \quad \text{con} \quad [\lambda,\mu]\in\mathbb{P}^1$$

mentre

$$L(V,Q'):\begin{cases} x_0=\lambda \\ x_1=u\lambda \\ x_2=u^2\lambda \\ x_3=u^3\lambda+\mu \end{cases} \quad \text{con} \quad [\lambda,\mu]\in\mathbb{P}^1$$

Così $\pi(Q) = L(V,Q)\cap\alpha = R = [0, v-u, v^2-u^2, v^3-u^3] = [0,1,v+u, v^2+uv+u^2]$, poichè $u\neq v$ e $\pi(Q')=Q'$. Tramite l'isomorfismo $g:\alpha\longrightarrow\mathbb{P}^2$ tale che $g([0,a,b,c])=[a,b,c]$, il generico punto R viene portato in $R'=[0,1,v+u,v^2+uv+u^2]$ e, chiamando y_0,y_1,y_2 le coordinate su $\mathbb{P}^2$, l'immagine di $\mathcal{C}$ è la conica $\mathcal{D}$ nella forma parametrica:

$$\begin{cases} y_0=1 \\ y_1=v+u \\ y_2=v^2+uv+u^2 \end{cases}$$

a cui bisogna aggiungere $g(Q')=[0,0,1]$. Quindi in coordinate affini $X=\frac{y_1}{y_0}, Y=\frac{y_2}{y_0}$ si ha $\mathcal{D}': Y-X^2+uX+u^2=0$. Omogeneizzando rispetto ad y_0 si ritrova la conica $\mathcal{D}: y_2y_0-y_1^2-uy_0y_1+u^2y_0^2=0$, che naturalmente dipende da u, cioè dal centro di proiezione. Si osservi che $g(Q')\in\mathcal{D}$. La matrice associata alla conica è:

$$A=\begin{pmatrix} u^2 & -\frac{1}{2}u & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}u & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3, quindi la conica è non degenere.

4.3 Proiezioni piane della cubica gobba da un punto fuori di essa

Si consideri ora un punto $V = [a_0, a_1, a_2, a_3] \notin \mathcal{C}$, questa volta π induce un'applicazione suriettiva:

$$\pi_{|\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

dove $\mathcal{D}$ *è una cubica piana*. Ciò si può dimostrare con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente: sia r una generica retta del piano α. Il piano β generato da r e V incontra la cubica in tre punti P_1, P_2, P_3 non tutti e tre allineati. Infatti, se per assurdo ciò accadesse, preso un quarto punto P_4 fuori dalla retta comune p, il piano generato da P_4 e da p avrebbe almeno 4 punti (contati con molteplicità) in comune con $\mathcal{C}$, e ciò non è possibile. Le rette $s = L(V, P_1), t = L(V, P_2)$ e $q = L(V, P_3)$ giacciono su β e incontrano la retta r, e quindi il piano α, in tre punti B_1, B_2, B_3 che rappresentano anche le proiezioni di P_1, P_2, P_3. Perciò B_1, B_2, B_3 appartengono a $\mathcal{D}$. Quindi la retta r incontra $\mathcal{D}$ in tre punti e la curva ha grado 3.
Si dimostra poi che *per il punto V passa una ed una sola secante o una tangente a* $\mathcal{C}$, dove con secante si intende una retta che incontra $\mathcal{C}$ in due punti distinti (si veda, ad esempio, [BC] Esempio 7.5.2). Si consideri $\mathcal{C}$ nella forma parametrica (4.3); siano $P = [1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3], \lambda \neq 0$ e $Q = [1, \mu, \mu^2, \mu^3], \mu \neq 0$ due punti di $\mathcal{C}$ collineari con V. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, quindi in particolare

$$\lambda\mu \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & \mu & \mu^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} a_0\lambda\mu(\lambda-\mu) - a_1(\lambda-\mu)(\lambda+\mu) + a_2(\lambda-\mu) = 0 \\ a_1\lambda\mu(\lambda-\mu) - a_2(\lambda-\mu)(\lambda+\mu) + a_3(\lambda-\mu) = 0 \end{cases}$$

Se $P \neq Q$ si ha $\lambda \neq \mu$, quindi si può dividere per $\lambda - \mu$ ottenendo:

$$\begin{cases} a_0\lambda\mu - a_1(\lambda+\mu) + a_2 = 0 \\ a_1\lambda\mu - a_2(\lambda+\mu) + a_3 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo in $\lambda + \mu$ e $\lambda\mu$:

$$\begin{cases} \lambda\mu = \frac{-a_2^2+a_1a_3}{a_2a_0-a_1^2} \\ \lambda+\mu = \frac{a_0a_3-a_2a_1}{a_2a_0-a_1^2} \end{cases}$$

si ottiene un sistema simmetrico le cui soluzioni λ e μ si ricavano dalla equazione $x^2 - (\lambda+\mu)x + \lambda\mu = 0$, cioè dall'equazione:

$$x^2(a_2a_0 - a_1^2) - x(a_0a_3 - a_2a_1) - a_2^2 + a_1a_3 = 0. \tag{4.4}$$

Quindi se il discriminante di (4.4) è diverso da zero, si hanno due radici distinte per λ e μ, cioè due punti distinti di $\mathcal{C}$ allineati con V. Si osservi che il discriminante di (4.4) è uguale a zero se e solo se V appartiene alla superficie quartica $(x_0x_3 - x_2x_1)^2 - 4(x_2x_0 - x_1^2)(x_2^2 + x_1x_3) = 0$.
Dato che P e Q appartengono alla stessa retta, vengono proiettati sullo stesso punto da π, così $P' = \pi(P) = \pi(Q)$ è un punto doppio per $\mathcal{D}$. Il punto P' è un nodo per la cubica piana $\mathcal{D}$ se da V esce una secante e quindi $P \neq Q$, mentre è una cuspide se da V esce la tangente a P che in questo caso coincide con Q, come si vede nei seguenti esempi.
La cubica gobba $\mathcal{C}$ è considerata nella forma parametrica (4.1).

Esempio 4.1. Sia $V = [1, 0, 1, 0] \notin \mathcal{C}$ e sia $\alpha : x_2 = 0$, $V \notin \alpha$.
Sia $\pi : \mathbb{P}^3 - \{V\} \longrightarrow \alpha$ la proiezione di centro V.
La retta per un punto $Q = [a_0, a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^3$ e per V è:

$$r : \begin{cases} x_0 = a_0s + t \\ x_1 = a_1s \\ x_2 = a_2s + t \\ x_3 = a_3s \end{cases} \quad \text{con} \quad [s,t] \in \mathbb{P}^1$$

Ora:

$$r \cap \alpha : a_2 s + t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -a_2 s$$

quindi $\pi(Q) = [a_0 - a_2, a_1, 0, a_3]$ e $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{C})$ è il luogo dei punti $R = [l^3 - lm^2, l^2m, 0, m^3]$. Tramite l'isomorfismo $g : \alpha \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $g([a, b, 0, c]) = [a, b, c]$ e chiamando y_0, y_1, y_2 le coordiante su $\mathbb{P}^2$, $\mathcal{D}$ è una cubica piana la cui forma parametrica è:

$$\begin{cases} y_0 = l^3 - lm^2 \\ y_1 = l^2 m \\ y_2 = m^3 \end{cases}$$

Deomogeneizzando rispetto ad y_2, e quindi supponendo $m \neq 0$, ponendo $u = \frac{l}{m}$ si ottiene la cubica affine:

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} X = u^3 - u \\ Y = u^2 \end{cases}$$

Operando con l'affinià

$$\phi : \begin{cases} X' = Y - 1 \\ Y' = X \end{cases}$$

si riconduce $\mathcal{D}$ ad una cubica della forma

$$\mathcal{D}'' : \begin{cases} X' = u^2 - 1 \\ Y' = u^3 - u \end{cases}$$

Eliminando il parametro si ottiene $\mathcal{D}'' : X^3 + X^2 - Y^2 = 0$, che è una cubica irriducibile con un nodo in $(0, 0)$ (si veda capitolo 3 paragrafo 1). Il nodo di $\mathcal{D}$ è il punto $\phi^{-1}((0, 0)) = (0, 1)$. Omogeneizzando rispetto ad y_2 e applicando g^{-1} si trova il punto $N = [0, 1, 0, 1]$ che è l'immagine di due punti della cubica gobba.

La retta per V ed N è:

$$s : \begin{cases} x_0 = x_2 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Per trovare i punti dell'intersezione fra s e $\mathcal{C}$ si deve risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} l^3 = lm^2 \\ m^3 = l^2 m \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono $l = -m$, $l = m$ e $l = m = 0$, ma quest'ultima non è accettabile. In corrispondenza di questi valori si trovano i punti $Q = [1, 1, 1, 1,]$ e $Q' = [-1, 1, -1, 1]$, che sono due punti distinti della cubica gobba.

Esempio 4.2. Sia $V = [0, 1, 0, 0] \notin \mathcal{C}$ e sia $\alpha : x_1 = 0$, $V \notin \alpha$. Si consideri la proiezione π di centro V sul piano α.
La retta passante per $Q = [a_0, a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{P}^3$ e per V è:

$$r : \begin{cases} x_0 = a_0 s \\ x_1 = t + a_1 s \\ x_2 = a_2 s \\ x_3 = a_3 s \end{cases} \quad \text{con} \quad [s, t] \in \mathbb{P}^1$$

e $\pi(Q) = r \cap \alpha$ è il punto $R = [a_0, 0, a_2, a_3]$. La cubica $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{C})$ è il luogo dei punti $T = [l^3, 0, lm^2, m^3]$. Tramite l'isomorfismo $g : \alpha \longrightarrow \mathbb{P}^2$ tale che $g([a, 0, b, c]) = [a, b, c]$, chiamando y_0, y_1, y_2 le coordinate su questo $\mathbb{P}^2$ e poi deomogeneizzando rispetto ad y_0 e ponendo $u = \frac{m}{l}$, si ottiene la cubica affine in forma parametrica:

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} X = u^2 \\ Y = u^3 \end{cases}$$

Eliminando il parametro si ha $\mathcal{D}' : Y^2 = X^3$, cioè una cubica irriducibile con una cuspide in $(0, 0)$. Andando a ritroso con i passaggi, ovvero omogeneizzando rispetto ad y_0 e operando con g^{-1} si trova la cuspide di $\mathcal{D}$, $N = [1, 0, 0, 0]$.
La retta per N e V è:

$$s : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

L'intersezione tra s e la cubica gobba insiemisticamente si ha per $m = 0$, cioè è $N = [1, 0, 0, 0]$. Si verifica che s è la retta tangente a $\mathcal{C}$ in N.

Tutto ciò si può spiegare geometricamente.
a) Se da V parte una secante s alla cubica gobba, s incontra $\mathcal{C}$ in due punti

distinti P_1, P_2 in cui le rette tangenti siano t_1 e t_2. Le proiezioni di t_1 e t_2 sul piano α sono due rette r_1 ed r_2 incidenti nel punto $N = \pi(P_1) = \pi(P_2)$, nodo di $\mathcal{D} = \pi(\mathcal{C})$. Infatti se β è il piano generato da V e dalla retta generica l passante per N, questo contiene s ed incontra la cubica gobba in P_1, P_2 ed un altro punto P_3 non allineato con gli altri due. Se N non fosse un punto doppio si avrebbe $i(\mathcal{D}, l, N) = 1$ ed $i(\mathcal{D}, l, \pi(P_3)) = 2$ perchè la retta l deve intersecare $\mathcal{D}$ in tre punti avendo questa grado 3. Così da N uscirebbe la retta tangente a $\mathcal{D}$ in $\pi(P_3)$ e questo per l generica, quindi da N uscirebbero troppe tangenti a $\mathcal{D}$. Inoltre N è un nodo perchè il piano β passante per V e t_1 incontra $\mathcal{C}$ due volte in P_1 e una volta in P_2, infatti contiene la retta s. Così la retta r_1, proiezione di t_1 e anche intersezione tra α e β è una tangente principale a $\mathcal{D}$. Con un'analoga costruzione utilizzando la retta t_2 si verifica che $r_2 = \pi(t_2)$ è un'altra tangente principale a $\mathcal{D}$. Inoltre r_2 è distinta da r_1 perchè se fosse $\pi(t_1) = \pi(t_2) = r_1$ il piano α conterrebbe anche t_2, e quindi incontrerebbe $\mathcal{C}$ con molteplicità 4. Così N è un nodo.

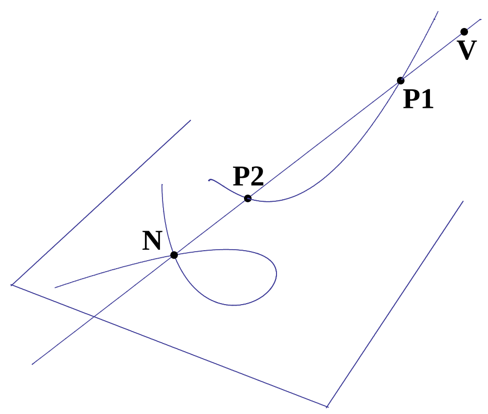

Figura 4.1: Proiezione piana della cubica gobba quando da V esce una secante.

b) Se da V parte una tangente t alla cubica gobba, t la incontra nel punto

P contato due volte. Il piano β generato da O e dalla generica retta l passante per $T = \pi(P)$ contiene la retta t, così incontra la cubica gobba nel punto P un numero di volte maggiore o uguale a 2. Quindi la retta l incontra $\mathcal{D}$ in T un numero di volte maggiore o uguale a 2, perciò T è un punto doppio per $\mathcal{C}$. In particolare T è una cuspide perchè tra il fascio di piani di asse t ne esiste solo uno che interseca $\mathcal{C}$ in P esattamente tre volte, cioè il piano osculatore. La sua proiezione su α è quell'unica retta che incontra $\mathcal{C}$ in T esattamente tre volte ed è quindi la sua tangente principale, così T è una cuspide.

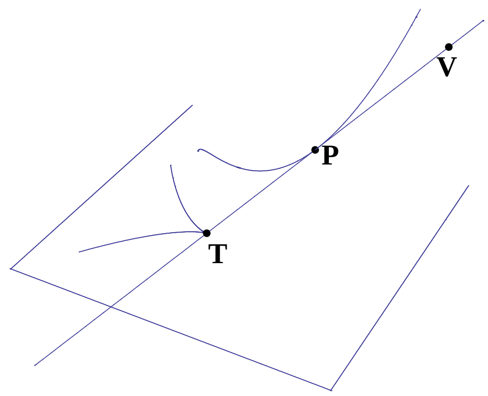

Figura 4.2: Proiezione piana della cubica gobba quando da V esce una tangente.

Ringraziamenti

Di tutto ciò che ho scritto in questa tesi questa è la parte più difficile perchè si deve molto a molte persone ed è facile dimenticare qualcuno.
La cosa migliore è iniziare dalle persone a me più vicine, quindi i primi ringraziamenti vanno ai miei genitori, Roberto e Paola, e a mia sorella, Alessandra, che con il loro sostegno mi hanno permesso di raggiungere questo traguardo, e ai miei nonni, Giuseppe e Renata, Francesco e Giuseppina, anche se questi ultimi non ci sono più, perchè mi hanno fatto sentire la nipote migliore che abbiano mai potuto avere.
Grazie a tutti i miei parenti, che non elenco perchè sarebbe troppo lungo.
Grazie alle amiche e ai compagni di corso: Valeria, Marta, Roberta, Anna Maria, Giulia, Dea, Giacomo, Fabrizio, Stefano, Lidia e Andrea, con cui ho affrontato lo studio, gli esami e i momenti belli e brutti vissuti in questi tre anni.
Grazie a tutte le ragazze che alloggiano e hanno alloggiato alla residenza delle Ancelle del Sacro Cuore di Gesù, alle suore e alle collaboratrici, che sono state mie compagnie, da cui ho ricevuto e a cui ho dato consigli, che mi hanno fatto sentire un po' come a casa.
Grazie ad Elisa e Lucia, perchè la nostra amicizia non si è deteriorata nonostante la lontananza.
Grazie alla prof.ssa Lara Cocchi, con cui ho svolto il tirocinio presso l'"Istituto Salesiano Beata Vergine di San Luca" e che mi ha trasmesso un po' del suo amore per l'insegnamento.
In ultimo, ma non per ultimo, grazie a tutti i professori che ho incontrato

nei vari corsi perchè sono gli artefici del mio attuale bagaglio culturale. In particolare grazie alla prof.ssa Monica Idà che ha seguito questo lavoro e acceso un interesse ancora più forte per questa materia.
Grazie a tutti voi che mi avete accompagnato in questi tre anni.

Bibliografia

[BC] M. C. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallati e G. Monti Bragadin, *Letture su curve, superficie e varieta' proiettive speciali: un'introduzione alla geometria algebrica*, Bollati Boringhieri, 2002.

[ID] M.Idà, *Appunti di geometria proiettiva*, a.a.2009/2010.

[RE] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, Cambridge University Press, 1990.

[SE] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, 1998.