ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

LA FORMULA DI EULERO: una prospettiva storica

Tesi di Laurea in Geometria 3

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Valeria Fulvi

I Sessione
Anno accademico 2009/2010

A Lorenzo . . .

Introduzione

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innnanzi agli occhi, l'universo. Ma non si puo intender la lingua e conoscer i caratteri, nè quali è scritta. Egli è scritta in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intender umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.
Galileo Galilei

Con questa tesi mi sono voluta avventurare nel mondo di Eulero e della semplice e breve formula che porta il suo nome; talmente semplice che potrebbe essere spiegata a un bambino, ma che soltanto in pochi conoscono. Questa tesi non vuole soltanto enunciare o dimostrare un concetto matematico; certamente ci soffermeremo anche su questo aspetto, ma è interessante anche scoprire e analizzare il percorso storico che vi è nascosto dietro. Proverò così a guidarvi sui passi di Eulero, e a cogliere come le sue intuizioni lo hanno portato a formulare la famosa relazione.
Con il primo capitolo, vedremo da dove nasce l'Eulero storico, l'uomo oltre che il matematico, e il suo enorme corpus letterario, per poi soffermarci sulla sua formula. Al tempo stesso, osserveremo come si sono evolute storicamente le definizioni di poliedro e dei solidi platonici.
Nel secondo capitolo analizzeremo la dimostrazione della formula e l'imprecisione commessa da Eulero, cercando di darne una interpretazione che permette di correggerla.

Con il terzo capitolo vedremo un'applicazione della formula di Eulero al problema della classificazione delle superfici compatte.

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Eulero

In questo capitolo vogliamo introdurre da un punto di vista storico la figura di Eulero, senza dubbio uno dei più grandi matematici, e la formula che porta il suo nome, che lega il numero di vertici, lati e facce di un poliedro. Mentre la nozione di poliedro ha interessato i più grandi matematici dell'antichità, quali Euclide ed Archimede, è singolare che la formula di Eulero, pur molto semplice, non sia stata scoperta e dimostrata se non più di 2000 anni dopo.

1.1 Storia di un matematico

Figura 1.1: Leonhard Euler

Leonhard Euler, conosciuto in Italia come Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 / San Pietroburgo, 18 settembre 1783), fu un matematico e fisico svizzero, universalmente considerato come il più importante matematico dell'Illuminismo. Allievo di Johann Bernoulli, è noto per essere tra i matematici più prolifici di tutti i tempi ed ha fornito contributi storicamente cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri e teoria dei grafi. Sembra che Pierre Simon Laplace abbia affermato "*Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi*".
Nei suoi settantasei anni di vita, Eulero produsse tanta matematica da riempire settantaquattro volumi completi, più di qualsiasi altro matematico. Quando tutti i suoi lavori furono pubblicati, nonostante nuovo materiale continuasse a comparire sino a settantanove anni dopo la sua morte, la conta effettiva relativa alla sua produzione ammontava a uno sbalorditivo numero di 866 pubblicazioni, inclusi articoli e libri sulle discussioni più importanti, libri di testo elementari, libri per profani e manuali tecnici. Queste cifre non tengono conto dei quindici volumi di corrispondenza e appunti che sono ancora in corso di compilazione. L'importanza di Eulero tuttavia non è dovuta alla sua straordinaria produzione scientifica, ma al profondo e innovativo contributo dato alla matematica in campi tanto diversi. Eulero non si specializzò in nessun settore in particolare, possedeva le conoscenze per muoversi tra tutte le discipline.
Leonhard cominciò i suoi studi formali all'Università di Basilea all'età di quattordici anni. Questa età, pur non inusuale per uno studente universitario dell'epoca, già indica un interesse precoce per lo studio. L'università era abbastanza piccola - contava infatti circa un centinaio di studenti e solo diciannove professori. Suo padre, Paul, sperava che il figlio seguisse la carriera di pastore, così Leonhard studiò teologia e Ebraismo. Ma le sue qualità matematiche erano straordinarie, e così attirò rapidamente l'attenzione di un amico di suo padre, Johann Bernoulli. A quel tempo Johann era uno dei principali matematici in Europa. La famiglia Bernoulli giocò un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica e nella formazione di Eulero.

Poichè il padre voleva che Eulero si laureasse in teologia, continuò a fargli studiare il greco e l'ebraico. Fortunatamente Bernoulli convinse il padre di Eulero che il suo destino era la carriera matematica. Nel 1726 il giovane Leonhard partecipò al Grand Prix dell'Accademia francese delle scienze. Il problema di quell'anno riguardava il miglior modo di disporre gli alberi su di una nave. Eulero arrivò secondo, subito dopo Pierre Bouguer, ora riconosciuto come il padre dell'architettura navale. Quest'impresa sarebbe stata incredibile per qualsiasi ragazzo, ma lo fu ancora di più per un giovane svizzero che non aveva mai visto una nave nell'oceano. Eulero comunque vinse quel premio ben dodici volte nella sua vita.
In quegli anni i due figli di Johann Bernoulli, Daniel e Nicolas lavoravano all'Accademia Imperiale delle scienze di San Pietroburgo. Nel 1726, Nicolas morì e Daniel prese la cattedra di matematica e fisica del fratello, lasciando vacante la sua cattedra in medicina, per la quale fece il nome di Eulero, che accettò. Una volta arrivato in Russia, passò dal dipartimento di medicina a quello di matematica e fisica. Nel 1733, decise di sposare Katharina Gsell, da cui ebbe tredici figli, di cui solo cinque passarono l'infanzia e soltanto tre sopravvissero ai genitori. Essere marito e padre non rallentò il flusso di pubblicazioni di Eulero. Si narra che potesse scrivere matematica mentre faceva giocare un bambino sulle sue ginocchia, e che poteva comporre una dissertazione tra la prima e la seconda chiamata per la cena. Egli scrisse su tutto e di più, persino la cecità non lo fermò, si adattò facilmente alla perdita della vista. Nel suo tipico e modesto modo di fare, osservò "*Ora avrò meno distrazioni*".
Morì all'età di settantasette anni e fu sepolto a San Pietroburgo. La sua produzione matematica continuò fino al giorno della sua morte. I suoi ultimi giorni furono descritti dal Marchese di Condorcet, che nel suo elogio funebre commentò "ha cessato di calcolare e di vivere."
Eulero era anche dotato di una memoria stupefacente. Egli memorizzò innumerevoli poemi; da quando era bambino fino alla vecchiaia fu capace di recitare l'intero testo dell'Eneide, essendo in grado di richiamare la prima e

l'ultima strofa di ogni pagina. La sua prodigiosa memoria matematica gli consentiva di ricordare le prime sei potenze dei primi cento numeri. Per dare un'idea, la sesta potenza di 99 è 941.480.149.401.
È difficile fare un elenco dei più grandi risultati ottenuti da Eulero nel campo della matematica. Potremmo citare il famoso libro di testo "Introduzione all'analisi infinitesimale", che lo storico Carl Boyer ha definito il libro più influente della storia della matematica moderna; oppure i suoi lavori di matematica applicata, come il libro "Meccanica", nel quale per la prima volta le tecniche di calcolo furono sistematicamente applicate alla fisica. Eulero introdusse moltissime notazioni in uso ancora oggi, ad esempio la "e" come base per il logaritmo naturale; rese popolare l'uso del simbolo π (per indicare il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro), usò la i per indicare $\sqrt{-1}$ (notazione in seguito diffusa ulteriormente da Gauss). Inoltre usò a, b e c per indicare i lati di un triangolo tipico con A, B e C per gli angoli opposti; usò il simbolo $\sum$ per le sommatorie e cominciò ad usare il simbolo $f(x)$ per indicare il valore della funzione f in x .
Una recente indagine tra i matematici sostiene che il teorema più bello di tutta la matematica sia la formula di Eulero che lega 0, 1, π , i, ovvero:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

mentre si ritiene che il secondo sia la formula di Eulero, che lega il numero di vertici, facce e spigoli in un poliedro:

$$V - E + F = 2$$

Inoltre Eulerò inventò il campo che lui stesso definì come "Analysis situs", conosciuta oggi come topologia. La geometria è lo studio delle forme solide, mentre la topologia, che ha ereditato il soprannome popolare di "geometria dei fogli di gomma", è lo studio degli spazi geometrici a meno di *omeomorfismi*, cioè a meno di deformazioni continue. Intuitivamente possiamo trasformare uno spazio in un altro come se fosse fatto di gomma e non possiamo strapparlo o tagliarlo. La topologia si caratterizza come lo studio delle

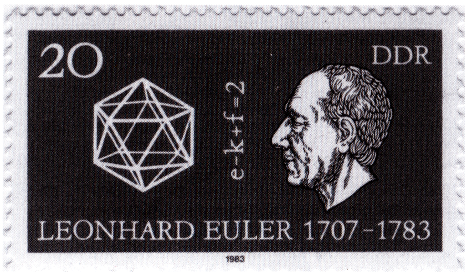

Figura 1.2: Francobollo della Repubblica Democratica Tedesca per commemorare il 200° anniversario della morte di Eulero

proprietà delle figure e delle forme che non cambiano quando viene effettuata una deformazione senza “strappi”, “sovrapposizioni”, “incollature”. Concetti fondamentali utilizzati nei vari campi della matematica come convergenza, limite, continuità, connessione o compattezza trovano nella topologia la loro migliore formalizzazione.

1.2 Definizione storica di poliedro

Il termine poliedro deriva dalla radice greca poly (molti) ed hedra (sede); nonostante il termine hedra originariamente significasse sede, fu poi utilizzato a partire da Archimede (Siracusa, circa 287 a.C. / Siracusa, 212 a.C.) per indicare le facce del poliedro. Quindi possiamo affermare che poliedro significhi “molte facce”.
I poliedri sono oggetti tridimensionali costituiti da facce poligonali.
Grazie alla loro bellezza e simmetria, i poliedri hanno trovato un posto rilevante nell’arte, nell’architettura, nei gioielli,nei giochi e in molti altri campi. Molti oggetti microscopici naturali (molecole, protozoi, virus, etc.) hanno forme o simmetrie poliedrali; mentre i cristalli si possono presentare in questa forma anche a livello macroscopico.

Nel passato, per molti anni, diversi matematici hanno lavorato ad una definizione precisa di poliedro, presentando varie proposte, ma con scarsi

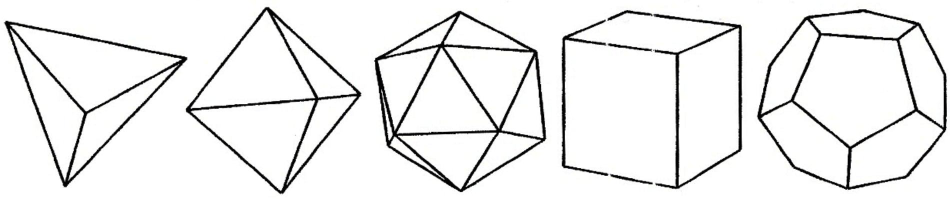

Figura 1.3: Poliedri convessi

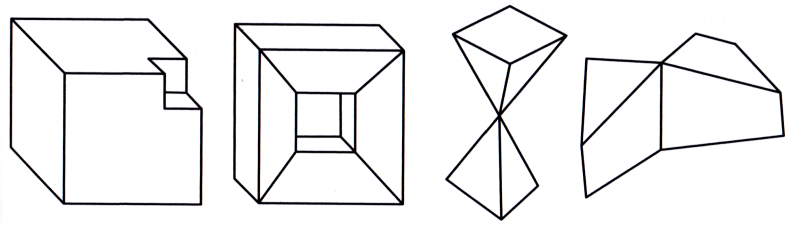

Figura 1.4: Poliedri non convessi

risultati. Inoltre lavorare senza una definizione ben precisa può creare inesattezze e incoerenze; come scrisse Henry Poincarè (1854-1912) "*Gli oggetti di cui si occupano i matematici sono stati a lungo definiti male, pensiamo di conoscerli perchè li rappresentiamo con i sensi o l'immaginazione, ma di loro abbiamo solo un immagine approssimativa e non un concetto preciso su cui fondare un ragionamento.*"
Una prima definizione intuitiva che possiamo dare è la seguente.
"*Un poliedro è una figura costituita da facce poligonali in cui ogni spigolo è condiviso da due facce mentre da ogni vertice si diramano almeno tre spigoli.*"
Certamente questa ci sembra una definizione ragionevole, ma ad un esame più accurato possiamo constatare che ci sono alcuni solidi che esulano dalla nostra concezione intuitiva di poliedro ma tuttavia soddisfano anch'essi la nostra definizione. Certamente gli oggetti nella figura 1.3 sono poliedri, ma lo sono anche quelli nella figura 1.4? Il primo "oggetto", ovvero il cubo con un angolo rimosso, secondo la definizione dei Greci, così come per Eulero, non veniva considerato un poliedro, in quanto essi sostenevano che un poliedro non deve avere delle "intaccature". La seconda figura è una ciambella composta da

facce piatte, la terza sono due poliedri uniti lungo uno spigolo. Secondo la maggior parte delle definizioni, essi non sono dei poliedri, sebbene soddisfino i nostri criteri.
Dato che andremo ad analizzare lo sviluppo storico della formula di Eulero, possiamo restringere la definizione ad una categoria più piccola di poliedri: i poliedri convessi. Un poliedro convesso è un oggetto che soddisfa la definizione data sopra ed ha la seguente proprietà:
Due punti qualsiasi appartenenti all'oggetto possono essere uniti da una linea retta che è completamente contenuta nel poliedro.
Con questa definizione vediamo che gli oggetti della seconda figura non soddisfano la definizione e quindi non sono poliedri convessi. I Greci erano in accordo con questa definizione di poliedro, infatti consideravano le facce di un poliedro come delle sedie su cui il poliedro poteva appoggiarsi. Ogni poliedro della figura 1.3 può appoggiarsi su ognuna delle sue facce, ma ogni poliedro della figura 1.4 ha almeno una faccia che non può fungere da "sedia" per il poliedro.
Come vedremo, il rigore della prova di Eulero sulla sua formula soffre della mancanza di una definizione esplicita di poliedro.
Per concludere vediamo come si definiscono le varie parti di un poliedro:

- *Facce* (F): sono facce poligonali.
- *Spigoli* (E) : ogni coppia di facce adiacenti si incontra in un segmento chiamato spigolo.
- *Vertici* (V): spigoli adiacenti si incontrano nei vertici.

1.3 La formula di Eulero

Se consideriamo un poliedro (vedi sezione precedente), allora vale la seguente relazione:

$$V - E + F = 2$$

ove V è il numero dei vertici, E dei lati, F delle facce del poliedro dato.
Questa relazione, così semplice che potrebbe essere spiegata ad un qualsiasi studente, ma tuttora così fondamentale da essere parte nella sua generalizzazione più ampia dei fondamenti della matematica moderna, fu scoperta dal matematico Leonhard Euler.
Prima di lui, con sua grande sorpresa, nessuno era riuscito a trovare questa semplice relazione, a partire dagli antichi Greci, dai grandi matematici come Pitagora, Euclide e Archimede; nonostante ammirassero enormemente i poliedri. Sfuggì anche al grande astronomo Johannes Keplero, così affascinato dai poliedri da basare un primo modello del sistema solare su di essi. Renè Descartes, a cui dobbiamo innumerevoli concetti matematici tra i quali il piano cartesiano, arrivò ad un passo dalla scoperta di questa formula, senza tuttavia riuscire a formalizzarla.
Il 14 novembre 1750, Eulero scrisse a un suo amico, Christian Goldbach (1690-1794), affermando "*Mi sorprende che quelle proprietà generali sulla geometria dei solidi, per quanto ne sappia, non sono state osservate da nessun altro*".
Iniziò quello che sarebbe stato uno studio sui fondamenti dei poliedri, o stereometria, come la chiamò. All'epoca di Eulero la teoria dei poliedri aveva più di duemila anni, ma era puramente geometrica. I matematici si concentravano esclusivamente sulle proprietà metriche dei poliedri: trovare la lunghezza dei lati e delle diagonali, calcolare le aree delle facce, misurare gli angoli piani, e determinare i volumi, mentre Eulero sperava di scoprire un modo per raggruppare, o classificare, tutti i poliedri contando le loro caratteristiche. Del resto, è così che classifichiamo i poligoni: tutti i poligoni con tre lati sono triangoli, con quattro sono quadrilateri, e così via.
La difficoltà nel classificare i poliedri in questo modo è subito evidente, infatti possiamo sì considerare come caratteristica il numero di facce, ma poliedri con lo stesso numero di facce possono essere completamente diversi. La pri-

ma brillante intuizione di Eulero fu notare che la superficie di un poliedro è composta da componenti a zero-, uno- e due-dimensioni, cioè vertici (o angoli solidi, come li chiamava), spigoli, e facce, e che queste erano le caratteristiche di cui tenere conto.
Eulero scrisse:
"*Perciò in ogni corpo solido si devono considerare tre tipi di confini, ovvero:*
1) punti, 2) linee, e 3) superfici
con i nomi specificatamente utilizzati per questo proposito:
1) angoli solidi, 2) vertici, e 3) facce."
Questi tre tipi di confini determinano completamente il solido.
Incredibilmente, fino a quando Eulero non diede loro un nome, nessuno si era esplicitamente riferito ai vertici di un poliedro. Eulero, scrivendo in latino, usò la parola *acies* per indicare lo spigolo. Nel latino comune la parola "acies" era usata per la parte tagliente di un'arma, un raggio di luce, o per un esercito allineato per la battaglia. Dare un nome a questa caratteristica ovvia può sembrare una sciocchezza, ma non lo è. Per le facce di un poliedro Eulero usò il termine *hedra* che, come abbiamo detto prima, si traduce come "faccia" o "base". Eulero si riferiva al vertice di un poliedro come ad un *angolus solidus* o angolo solido. Prima che Eulero scrivesse sui poliedri, gli angoli solidi erano entità tridimensionali definite dalle facce che si uniscono in un punto. Un angolo solido di un cubo è diverso da un angolo solido di un tetraedro: si distinguono dalla geometria dell'area che includono. Dalla descrizione data sopra - in cui Eulero associava un angolo solido ad un punto - vediamo che egli considerava gli angoli solidi come zero-dimensionali; perciò, quando parlava di angolo solido, egli intendeva la punta di un angolo solido e non l'area tridimensionale che le facce del poliedro racchiudono. La distinzione è sottile, ma il fatto che gli angoli solidi possano essere visti come punti singoli è stato cruciale per il suo teorema. Ciononostante, Eulero perse un'opportunità non dando loro un nuovo nome. Il vertice di un poliedro è diverso dall'angolo solido in cui esso si trova.
Una volta che Eulero perfezionò queste tre definizioni chiave - i vertici, gli

spigoli e le facce - e iniziò a far coincidere i loro numeri con le varie famiglie di poliedri, probabilmente trovò subito la relazione. Possiamo immaginare la sua sorpresa quando scoprì che per ogni poliedro vale la relazione

$$V - E + F = 2.$$

Il lavoro di Eulero sulle formule del poliedro è stato segnato da tre importanti documenti, tra cui l'annuncio a Goldbach nel 1750 della sua scoperta di questa relazione. Egli scrisse: "*In ogni solido chiuso da facce piane la somma dei numeri delle facce ed il numero di angoli solidi eccede di due il numero degli spigoli, $H + S = A + 2$*". Eulero usava le lettere H, A ed S per denotare il numero delle facce (hedra), gli spigoli (acies) e i vertici (angoli solidi). Rinominando queste termini con F (face) il numero delle facce, V (vertices) i vertici ed E (edge) gli spigoli, si ha $V - E + F = 2$.
Portiamo alcuni semplici esempi in cui il calcolo è banale:

- Cubo:

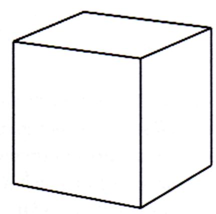

Figura 1.5: Cubo

  - $F = 6$
  - $E = 12$
  - $V = 8$

$$8 - 12 + 6 = 2$$

- Poliedro a forma di pallone da calcio

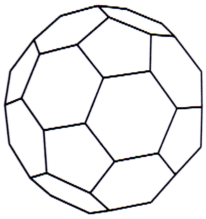

Figura 1.6: Pallone da calcio

- $F = 32$
- $E = 90$
- $V = 60$

$$60 - 90 + 32 = 2$$

Nel capitolo successivo spiegheremo la dimostrazione di Eulero di questa formula, e vedremo che essa può essere applicata solo ai poliedri convessi. Oggi sappiamo che la sua validità è molto più generale: vedremo nei capitoli successivi che la sua applicazione si può estendere a tutte le superfici. Ora andiamo a vedere una applicazione concreta di questa formula, in un campo diverso da quello matematico. Alcuni radiolari, organismi unicellulari, hanno

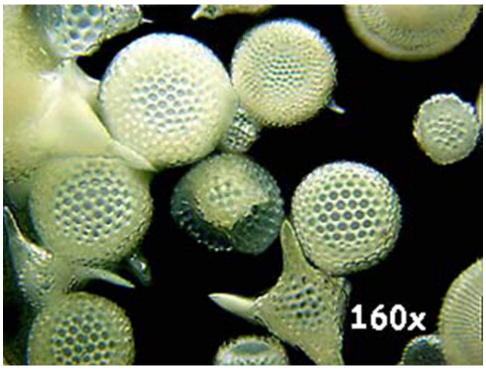

Figura 1.7: Radiolari

uno scheletro poliedrico. Da figure realizzate al microscopio si può osservare che le facce del loro scheletro poliedrico sono esagonali. Quello che possiamo chiederci è: tali facce sono tutti esagonali? Ad una prima osservazione i biologi hanno dato una risposta positiva. Certo non può trattarsi di esagoni regolari, infatti non è possibile costruire un solido utilizzando solamente esagoni regolari. Gli unici solidi costruiti usando poligoni regolari soggetti a simmetrie naturali sono i solidi platonici, di cui parleremo in seguito, le cui facce possono essere soltanto triangoli, quadrati e pentagoni. Tuttavia, nello scheletro dei radiolari potrebbero esserci degli esagoni irregolari e certamente è difficile controllare ogni faccia, perchè si tratta di un organismo microscopico. Possiamo però verificarlo utilizzando il teorema di Eulero. Se F è il numero di facce, tutte esagonali, eventualmente irregolari, il numero di spigoli è $\frac{6F}{2}$, poiché ogni spigolo è comune a due facce; dunque $E = \frac{6F}{2} = 3F$. Poiché in un vertice concorrono tre facce, il numero dei vertici V è $\frac{6F}{3} = 2F$. Se sostituiamo i valori trovati nel primo membro della formula di Eulero, abbiamo che:

$$V - E + F = 2F - 3F + F = 0.$$

Dunque la formula di Eulero non è verificata. Ma poiché la formula vale per ogni poliedro, ne deduciamo che un poliedro formato solo da esagoni, anche se non regolari, non esiste.

I biologi, convinti dalla dimostrazione matematica hanno osservato gli organismi più attentamente ed hanno trovato così che alcune facce del loro scheletro erano effettivamente pentagonali!

I primi studiosi di topologia rimasero affascinati dalla formula di Eulero e si chiesero se potesse valere anche su superfici topologiche diverse dai poliedri. In questo caso il problema consiste nell'individuare i vertici, gli spigoli e le facce su di una superfice topologica. Certamente i topologi non si spaventarono di fronte alla questione e permisero a facce e a spigoli di essere curvi.

Vediamo cosa significa in un esempio concreto. Prendiamo una sfera e vediamo cosa considerare come facce, spigoli e vertici. Per prima cosa dobbiamo creare una partizione, ad esempio disegnando 12 linee longitudinali

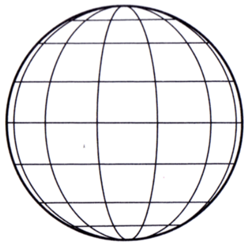

Figura 1.8: Partizione della sfera

che si incontrano ai due poli e 7 linee latitudinali parallele, in questo modo riusciamo ad avere 72 facce curve rettangolari e 24 facce curve triangolari vicino ai poli, per un totale di 96 facce, 180 spigoli e 86 vertici. Sostituendolo nella formula di Eulero otteniamo:

$$96 - 180 + 86 = 2$$

Se cambiamo partizione alla sfera il risultato resta sempre 2, daremo una spiegazione ulteriore di questo fatto nel prossimo capitolo.
A questo punto siamo tentati di ipotizzare che la formula di Eulero si applichi ad ogni superfice topologica, proviamo con un toro.
Il toro è una superficie a forma di ciambella. Può essere ottenuta come superficie di rivoluzione in questo modo: facciamo ruotare una circonferenza (generatrice), intorno ad un asse di rotazione appartenente allo stesso piano della generatrice, ma disgiunto da questa.

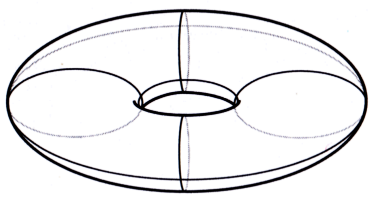

Figura 1.9: Partizione del toro

Se partizioniamo un toro collocando 2 circonferenze attorno al buco centrale e 4 circonferenze attorno al suo tubo circolare, riusciamo ad ottenere 8 facce quadrilatere, 16 spigoli e 8 vertici. Sostituendo tali numeri nella formula di Eulero troviamo un risultato sorprendente:

$$8 - 16 + 8 = 0.$$

Se dovessimo costruire una partizione diversa, il risultato sarebbe ancora 0, invece che l'atteso 2.
Possiamo quindi pensare che ogni superficie topologica abbia la sua propria formula di Eulero, e infatti, come vedremo nei capitoli successivi, questo numero speciale può essere utilizzato per distinguere le superfici così come il numero delle ruote può essere usato per distinguere i mezzi di trasporto stradali. Se un veicolo non ha 4 ruote certamente non è una macchina, se non ha 2 ruote allora non è un motociclo. Allo stesso modo, se $V - E + F$ non è 0 allora la superficie topologica non è omeomorfa ad un toro, in altre parole non si può deformare in modo continuo così da ottenere un toro.
Il numero $V - E + F$ viene denominato il *numero o caratteristica di Eulero* di una superficie; è una quantità intrinseca della superficie, ovvero è un invariante della superficie. Il numero di Eulero è uno strumento importante per lo studio dei poliedri, per la topologia, la teoria dei grafi e più in generale per la geometria.

C'è un vecchio problema, molto interessante, che chiede quanti colori siano necessari per colorare una mappa in modo tale che ogni coppia di regioni confinanti non abbia gli stessi colori. Prendiamo una mappa bianca degli Stati Uniti e coloriamola con il minor numero di matite colorate possibile, secondo il criterio sopra descritto. Scopriremo velocemente che la maggior parte del paese può essere colorato usando solo tre matite, ma una quarta è necessaria per completare la mappa. Per esempio, dal momento che il Nevada è circondato da un numero dispari di stati, avremo bisogno di 3 matite per colorarli - allora avremo bisogno della quarta matita per colorare il Nevada stesso. Se prestiamo attenzione, possiamo finire di colorare senza usarne una quinta - quattro colori sono sufficienti per l'intera mappa degli Stati Uniti.

Fu a lungo ipotizzato che ogni mappa può essere colorata con quattro colori o meno. Questa congettura divenne nota come *problema dei quattro colori.*

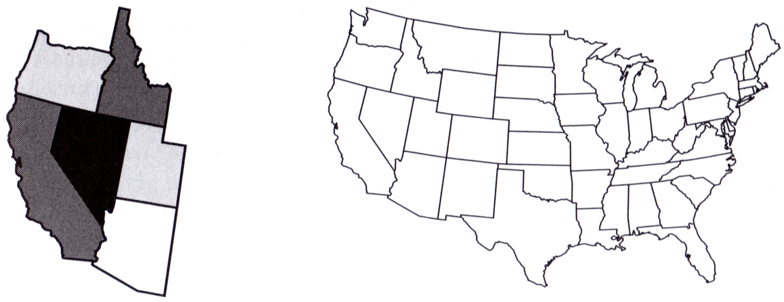

Figura 1.10: Nevada - Stati Uniti

1.4 Solidi Platonici: i 5 corpi perfetti

"*Ogni volta che i Greci hanno preso in prestito qualcosa dei non-greci, l'hanno portata ad un livello di perfezione superiore*", è ciò che dice Platone nell'Epidominie. A differenza delle civiltà precedenti, i Greci volevano capire le idee dei matematici che li avevano preceduti, ma soprattutto fornirne una dimostrazione precisa e rigorosa. La precisione, la logica e la verità erano gli obiettivi delle loro indagini. I Greci erano affascinati dalla geometria; ci sono tanti risultati scoperti da loro, e ora ne citiamo uno riguardo i poliedri regolari, certamente uno dei più bei teoremi di tutti i tempi:
Ci sono esattamente cinque poliedri regolari

- Tetraedro
- Cubo
- Ottaedro
- Dodecaedro
- Icosaedro

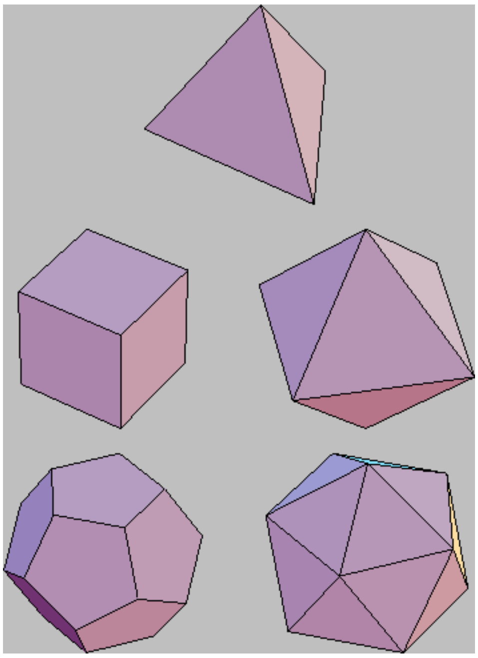

Figura 1.11: 5 Poliedri regolari

La dimostrazione si trova nell'ultimo libro di Euclide. Le cinque figure mostrate in 1.11 costituiscono gli unici poliedri regolari possibili. Trovare la regolarità nei poligoni è semplice: ogni lato deve avere la stessa lunghezza mentre ogni angolo interno ha la stessa misura. Esistono infiniti poligoni regolari: abbiamo infatti un poligono regolare con n-lati per ogni numero intero n maggiore di 2. Le proprietà che deve avere un poliedro per essere regolare, tengono ben presente la definizione di poliedro che abbiamo dato nel capitolo precedente e sono le seguenti:

- Il poliedro è convesso
- Ogni faccia è un poligono regolare
- Tutte le facce sono congruenti
- Ogni vertice è circondato dallo stesso numero di facce

Ci sono tre passi importanti nello sviluppo della teoria sui poliedri regolari.

1. *La costruzione degli oggetti* - si tratta solo di dare una forma, ma in fondo, essendo una questione matematica, devono essere costruiti geometricamente;

2. *La scoperta della nozione astratta di regolarità* - come dice Waterhouse, "*la scoperta di questo e di quel particolare corpo è secondaria; la scoperta cruciale è stata quella del vero concetto di solido regolare*";

3. *La dimostrazione che esistono solo cinque poliedri regolari* - La dimostrazione deve essere svolta attraverso rigorosi calcoli matematici, e come abbiamo detto prima la dimostrazione si trova nell' ultimo libro di Euclide e costituisce la conclusione dell'opera. Ma dobbiamo anche dire che una delle più eleganti applicazioni della formula di Eulero è proprio una dimostrazione breve che esistono soltanto cinque solidi regolari.

I poliedri regolari si trovano in natura, i cristalli ne sono un chiaro esempio. Il cloruro di sodio può prendere la forma di un cubo, il sodio solfato antinomatio può prendere la forma di un tetraedro, mentre l'alluminio cromato può prendere la forma di un ottaedro.
Il cubo e il tetraedro, essendo relativamente semplici, appaiono molte volte nel corso della storia. Nel monte Loffa, vicino a Padova, è stato dissotterato un dodecaedro risalente al 500 a.C. Un antico stampo icoesadrale è stato trovato in Egitto, ma la sua origine è ignota.
L'ottaedro non era considerato speciale fino a che non si scoprì il fatto che anche lui rientrava nella classe dei poliedri regolari, infatti, come dice lo storico matematico William Waterhouse: "*L'ottaedro diventò oggetto di uno speciale studio matematico solo quando qualcuno scoprì un ruolo da dargli.*"
Perchè vengono chiamati solidi platonici? Platone certamente oggi è noto come filosofo, ma uno dei suoi più importanti contributi è rappresentato dalla creazione della scuola "Accademia", che preparava i giovani alla vita pubblica attraverso la scienza e la matematica. Egli credeva che studiando la matematica si potesse imparare a separare l'intelletto dai sensi e dalle

opinioni. Platone imparò da Teeteto la teoria dei cinque solidi regolari. Egli conosceva la visione dell'universo diffusa da Empedocle (492-432 a.C) secondo il quale tutta la materia fu creata a partire da quattro elementi primari: terra, aria, fuoco, acqua. Per mezzo del lungo monologo del pitagorico Timeo, Platone espone un modello atomico, associando ad ogni elemento un solido regolare. Alla terra il cubo, al fuoco il tetraedro, all'aria un ottaedro e all'acqua un icosaedro. Il quinto solido regolare, il dodecaedro, non poteva essere un elemento, esso "*è stato usato da Dio per l'intero universo, abbellendolo con queste figure*". Così, da quando Platone trattò i solidi regolari nel Timeo, i cinque poliedri regolari sono noti come solidi platonici.

È interessante anche soffermarci sui *solidi archimedei*, traggono il loro nome da Archimede, che li ha trattati in un'opera ora perduta. In geometria, un *solido archimedeo* o semiregolare è un poliedro convesso le cui facce sono costituite da due o più tipi di poligoni regolari e i cui vertici sono omogenei (per ogni coppia di questi esiste una simmetria del solido che sposta il primo nel secondo). Si richiede inoltre che il poliedro non sia un prisma o un antiprisma (un poliedro le cui facce sono due poligoni regolari con n lati della stessa grandezza, connesse da un ciclo di triangoli equilateri).
Vi sono 13 solidi archimedei, due dei quali sono chirali, non sono cioè equivalenti alla loro immagine riflessa; per questo motivo, in alcuni contesti questi poliedri sono contati due volte e si parla di 15 solidi archimedei.

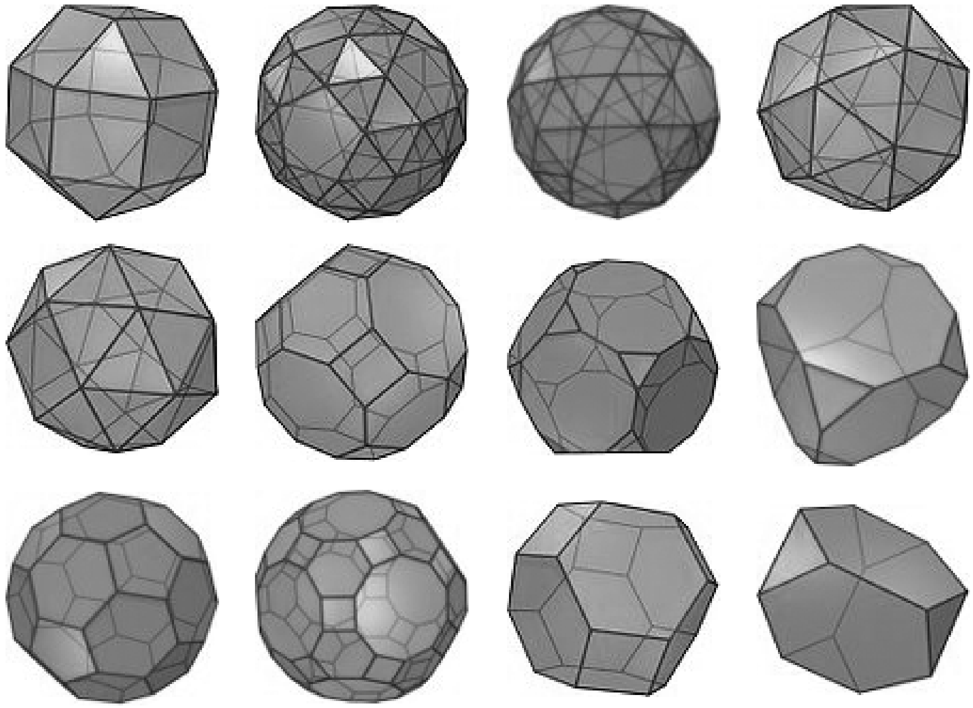

Figura 1.12: Solidi archimedei

Capitolo 2

La formula di Eulero

In questo capitolo prenderemo in esame l'idea della dimostrazione originale di Eulero sulla sua formula riguardo i poliedri convessi. Tale dimostrazione contiene una imprecisione che tuttavia può essere corretta e dunque forniremo una dimostrazione elementare della formula di Eulero.

2.1 La dimostrazione di Eulero

In una lettera del 1750 destinata a Christian Goldbach, Eulero accenna alla sua difficoltà nella dimostrazione della formula. Egli infatti scrisse: "*E' così difficile la formula che non sono stato ancora capace di dimostrare in modo soddisfacente*".
L'anno seguente Eulero pubblicò un saggio dal titolo "Demonstratio nonnullarum insignum proprietarium quibus solida hedris planis inclusa sunt praedit" ("Dimostrazione di alcune notevoli proprietà di cui sono dotati i solidi racchiusi da facce piane"), nel quale riuscì infine a dare una dimostrazione della sua formula sui poliedri, che ora andremo a discutere.
Nonostante il fatto che la formula di Eulero sia una delle più famose in matematica, la dimostrazione di Eulero è praticamente sconosciuta ai matematici di oggi, per diverse ragioni. Come vedremo, la dimostrazione di Eulero non soddisfa gli standard moderni di rigore matematico. Inoltre, nel corso

degli anni ci sono state diverse dimostrazione della formula di Eulero più semplici e più trasparenti della sua.
Eulero usò il metodo della *riduzione*: partendo da un poliedro convesso qualsiasi è possibile ridurlo sistematicamente sezionandolo, fino ad ottenere un poliedro molto più semplice: una piramide. Eulero suggerì di rimuovere i vertici dal poliedro uno alla volta, sezionando il poliedro e rimuovendo ogni volta una o più piramidi fino a fare rimanere soltanto quattro vertici e dunque ottenere una piramide triangolare, ovvero un tetraedro, per il quale ovviamente vale la formula di Eulero. Tenendo sotto controllo il numero dei vertici, dei bordi, e delle facce ad ogni stadio, e usando le proprietà della piramide triangolare, egli fu in grado di concludere che $V - E + F = 2$ per il poliedro originale.
Prima di passare alla dimostrazione di Eulero, guardiamo un esempio. Consideriamo la scomposizione del cubo mostrato nella figura 2.1

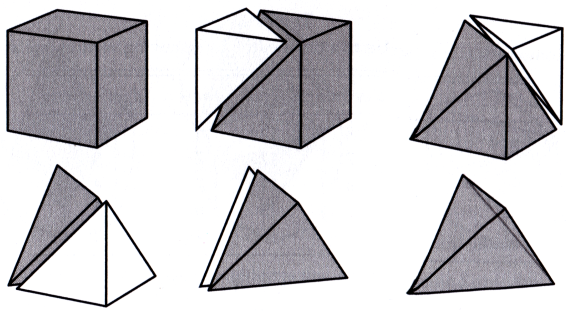

Figura 2.1: Scomposizione del cubo in un tetraedro rimuovendo i vertici uno alla volta.

Ad ogni stadio rimuoviamo un vertice del cubo sezionando una piramide triangolare, e continuiamo fino a quando non otteniamo una singola piramide triangolare. Poiché il cubo è un poliedro relativamente semplice, siamo in grado di rimuovere ogni vertice tagliando via una singola piramide. In generale, come vedremo, dovremo tagliare diverse piramidi per rimuovere un singolo vertice.

	vertici	spigoli	facce	$spigoli - facce$
cubo	8	12	6	**6**
	7	12	7	**5**
	6	11	7	**4**
	5	9	6	**3**
tetraedro	4	6	4	**2**

Tabella 2.1: la scomposizione di un cubo

La Tabella 2.1 mostra il numero di vertici, bordi, e facce ad ogni stadio. Si potrebbe pensare che quando il numero dei vertici diminuisce, il numero delle facce e dei bordi diminuisca secondo uno schema prevedibile. Come possiamo vedere nella tabella invece la sequenza non ha un ordine ovvio. In questo esempio infatti il numero delle facce aumenta prima di diminuire. Il poliedro inizia con sei facce, poi a mano a mano che i vertici vengono tagliati ne ha sette, poi ancora sette, poi sei e infine quattro. La chiave nella dimostrazione di Eulero è la sua acuta osservazione sul fatto che la *differenza* tra il numero dei bordi e il numero delle facce diminuisca tutte le volte che viene eliminato un vertice (come si vede nella colonna all'estrema destra della tabella).
Prendiamo un poliedro con V vertici, E bordi, e F facce. Vogliamo descrivere un algoritmo che ci permetta, in un numero finito di passi, sezionando ogni volta, di ottenere una piramide triangolare. Ad ogni passo inoltre vogliamo essere in grado di determinare il numero delle facce e dei bordi del poliedro risultante a partire dal numero di facce e bordi del poliedro originale. Se O è il vertice che viene rimosso, supponiamo che n facce (e perciò n bordi) si incontrino in O. Eulero notò che O poteva sempre essere rimosso tagliando via $n - 2$ piramidi triangolari aventi O come vertice. Se prendiamo l'esempio precedente, e vogliamo eliminare un vertice del cubo, quanti tetraedri dobbiamo eliminare? Come abbiamo visto dalla figura dobbiamo eliminarne

soltanto uno, infatti le facce che incontrano O sono 3 quindi $3 - 2 = 1$.
Adesso ci poniamo il problema di capire qual è il numero delle facce e degli spigoli dopo che abbiamo ridotto il poliedro, sezionandolo nel modo descritto sopra.
Esaminiamo i vari casi possibili:

1. Assumiamo che tutte le n facce che si incontrano in O siano triangolari.

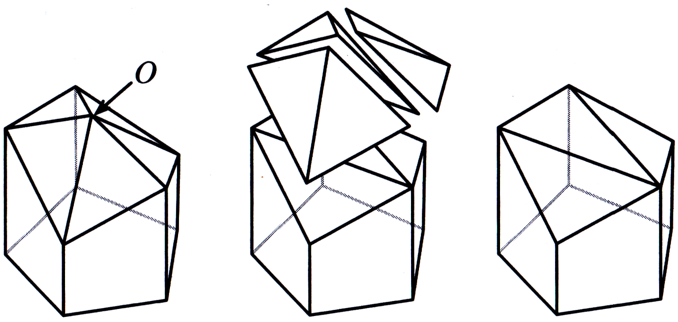

Figura 2.2: Rimuovere il vertice O tagliando via 3 piramidi.

Eliminiamo il vertice O rimuovendo queste n facce; sotto le $n-2$ piramidi tagliate via possiamo trovare $n-2$ nuove facce triangolari. Assumendo che tutte queste nuove facce triangolari stiano in piani diversi, il numero delle facce nel poliedro ottenuto è

$$F - n + (n - 2) = F - 2$$

dove F è il numero originale delle facce.
Durante questo processo rimuoviamo anche gli n bordi che si incontrano al vertice O, ma aggiungiamo $n-3$ bordi che si trovano tra le $n-2$ nuove facce triangolari. Così, il numero dei bordi del nuovo poliedro è

$$E - n + (n - 3) = E - 3$$

dove E è il numero originale dei bordi.

2. Supponiamo che una delle facce che si incontrano in O non sia triangolare.

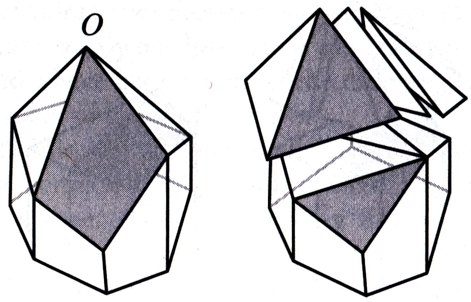

Figura 2.3: Una faccia non triangolare aggiunge una nuova faccia e un nuovo bordo al nuovo poliedro.

Quando la piramide triangolare che condivide questa faccia è rimossa, la faccia non sparisce completamente dal poliedro. Inoltre, si aggiunge un nuovo bordo dove la faccia è tagliata in due. Perciò, il numero di facce e bordi nel nuovo poliedro è in entrambi i casi maggiore di uno rispetto a quanto accade precedentemente. In generale, se il poliedro originale ha s facce non triangolari che si incontrano nel punto O, allora il numero delle facce e dei bordi sarà s volte più grande di quanto calcolato precedentemente. Quindi il numero di facce è

$$F - 2 + s$$

e i numero di bordi è

$$E - 3 + s.$$

3. Una volta avvenuta la riduzione, come nei casi 1 e 2 già esaminati, può presentarsi il caso in cui due facce, situate l'una vicino all'altra, si trovino sullo stesso piano.

In questo caso non abbiamo due facce distinte nel poliedro risultante, ma una singola faccia e pertanto ci sarà una faccia in meno di quanto

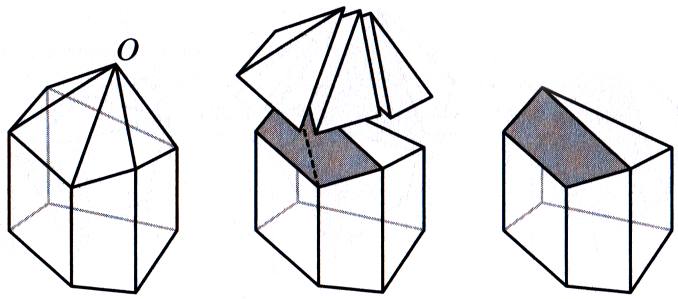

Figura 2.4: Due facce complanari diminuiscono il numero delle facce e dei bordi di uno.

previsto. Poiché non c'è nessun bordo tra queste due facce, ci sarà anche un bordo in meno. Più in generale, se ho t facce situate l'una vicino all'altra posizionate sullo stesso piano, allora il numero delle facce è

$$F - 2 + s - t$$

e il numero dei bordi è

$$E - 3 + s - t.$$

Ora per capire meglio facciamo tre esempi relativi a questi tre casi:

1. Poliedro con 11 facce e 20 bordi. Ha un vertice in cui si incontrano 5 facce triangolari. Tale vertice viene rimosso eliminando $5 - 2 = 3$ tetraedri. Così abbiamo un nuovo poliedro con $F - 2 = 11 - 2 = 9$ facce e $E - 3 = 20 - 3 = 17$ bordi.

2. Poliedro con 12 facce e 23 bordi. Supponiamo che solo una delle facce che si incontrano in O non sia triangolare ($s = 1$). Dopo che le tre piramidi sono state rimosse e quindi il vertice O è stato eliminato, otteniamo un poliedro con $F-2+s = 12-2+1 = 11$ facce e $E-3+s = 23 - 3 + 1 = 21$ bordi.

3. Poliedro avente 11 facce e 20 bordi. Dopo che le piramidi sono state rimosse si presenta il caso in cui due facce si trovano sullo stesso piano

($t = 1$). Allora il numero delle facce del nuovo poliedro sarà $F-2-t = 11-2-1 = 8$ facce e $E-3-t = 20-3-1 = 16$ bordi.

Queste formule rappresentano il numero delle facce ed il numero dei bordi dopo che un singolo vertice è stato rimosso. L'idea di mantenere un conteggio preciso mano a mano che rimuoviamo i vertici è poco praticabile. Comunque, l'importante osservazione di Eulero ci aiuta: se prendiamo il numero dei bordi e sottraiamo il numero delle facce del nuovo poliedro ottenuto eliminando un vertice, otteniamo:

$$(E-3+s-t)-(F-2+s-t) = E-F-1.$$

In altre parole, la differenza tra il numero dei bordi ed il numero delle facce cala esattamente di uno rispetto a prima che il vertice fosse rimosso.
Dopo che n vertici sono stati rimossi, la differenza tra il numero dei bordi e il numero delle facce è $E-F-n$. Con questo, possiamo concludere la prova di Eulero. Infatti, iniziamo con un poliedro con V vertici, E bordi, e F facce e supponiamo di rimuovere i vertici uno alla volta, n in tutto, fino a che ne rimangano solo quattro. Quindi $V-n=4$, o $n=V-4$. L'unico poliedro con quattro vertici è una piramide triangolare (che ha quattro facce e sei bordi), per la quale, la differenza tra il numero di bordi e il numero di facce è $6-4=2$.
Supponiamo che, a partire da un poliedro dato, dopo aver eliminato n vertici si ottenga un tetraedro. Da quanto visto, poichè ad ogni passo la differenza tra facce e spigoli cala di 1, avendo effettuato n passi avremo che

$$E-F-n=2$$

in quanto tale differenza nel tetraedro vale 2.
Poichè, come già detto

$$n=V-4,$$

sostituendo l'espressione di n nell'equazione precedente e otteniamo:

$$V-E+F=2$$

cioè la *formula di Eulero.*

2.2 Una piccola imprecisione

Eulero non dà una dimostrazione completamente rigorosa della formula di Eulero relativa ai poliedri convesi. Ciò accade in quanto nella dimostrazione non si presta sufficiente attenzione al mantenimento della convessità durante il processo di scomposizione del solido. È infatti possibile rimuovere un vertice eliminando delle piramidi e ottenere un poliedro non convesso. Eulero non definisce un algoritmo preciso che spieghi come rimuovere un vertice in maniera da garantire come risultato ad ogni passo un poliedro convesso. Invece di una dimostrazione completa Eulero propone un esempio, tuttavia l'esempio scelto non è sufficientemente generale per poterne dedurre un algoritmo. La difficoltà nasce dal fatto che lui prevede solo una proiezione del segmento del poliedro sul piano, e in questo modo viene a mancare l'aiuto della prospettiva di una figura tridimensionale.
Per mostrare come questo metodo possa indurre all'errore, prendiamo l'esempio proposto da Eulero stesso. Consideriamo un poliedro, il cui vertice che deve essere rimosso, O, ha quattro vertici adiacenti, A, B, C e D (figura 2.5)

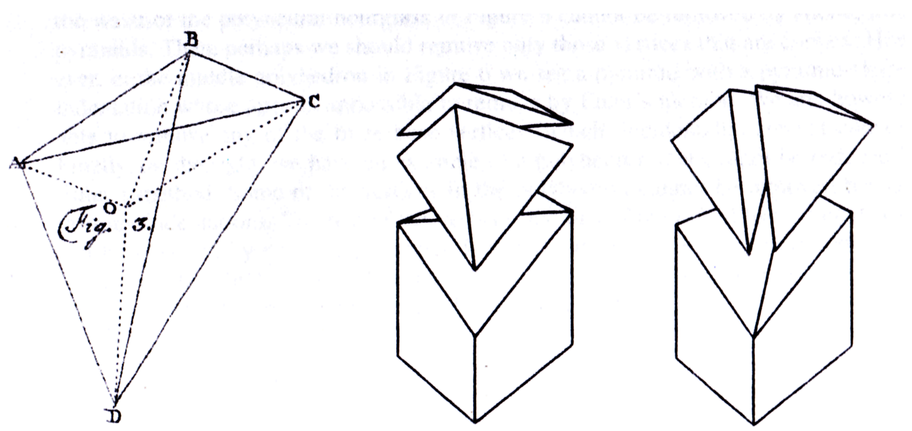

Figura 2.5: Errore di Eulero

A proposito della rimozione del vertice O, Eulero scrive: "*Ciò può essere fatto in due modi: due piramidi saranno tagliate via, siano OABC e OACD*

o OABD e OBCD. E se i punti A, B, C, e D non sono nello stesso piano, il solido risultante avrà di conseguenza una forma diversa."
Non è difficile notare che se A, B, C e D non sono complanari, allora solo uno dei due solidi sarà convesso. Eulero non riconosce che solo una scomposizione è accettabile, mentre l'altra non lo è.
Aiutandoci con la figura tridimensionale, vediamo subito che solo la seconda scomposizione è accettabile, cioè il poliedro ottenuto è convesso.

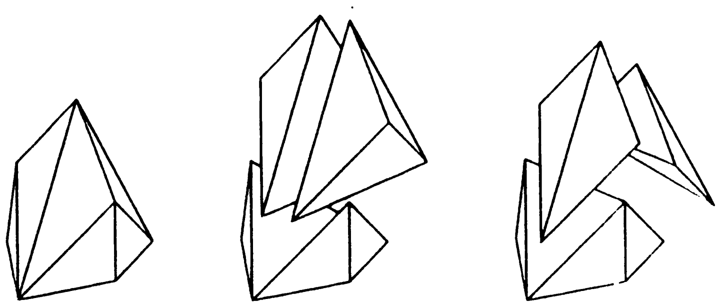

Figura 2.6: Due scomposizioni: Nella prima otteniamo un poliedro non convesso, nella seconda convesso.

Possiamo esaminare un altro esempio grazie alla figura 2.6; osserviamo che ci sono due diverse possibilità di scomposizione, la seconda produce un poliedro convesso, la prima no, si ottiene infatti un solido costituito da due piramidi con uno spigolo in comune.
Nonostante le difficoltà incontrate in questi esempi, in entrambi i casi esiste una scomposizione che produce poliedri convessi e dunque ci sono speranze che la dimostrazione di Eulero possa essere corretta, come infatti vedremo nella sezione successiva.

2.3 La soluzione

La domanda che ci poniamo è la seguente: possiamo in qualche modo recuperare la dimostrazione di Eulero? È possibile rimuovere un vertice di un poliedro convesso in modo da ottenere un poliedro convesso (con un vertice

in meno)? Come sostiene Samelson, la risposta a queste domande è si.
Il concetto chiave moderno che Samelson (Strassburg 3 marzo 1916 - 2006) introduce nella dimostrazione è quello di *inviluppo convesso*. L'inviluppo convesso di un insieme di punti X è il più piccolo insieme convesso contenente X. Poiché l'intersezione di due insieme convessi è convessa, possiamo costruire l'inviluppo convesso di X prendendo l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti X. Per esempio, in $\mathbb{R}^2$ l'inviluppo convesso di un insieme finito di punti non collineari (ovvero che giaciono sulla stessa retta) è un poligono convesso e in $\mathbb{R}^3$ l'inviluppo convesso di un insieme di punti non complanari è un poliedro convesso. In particolare, un poliedro è convesso se e solo se è l'inviluppo convesso dei suoi vertici.
La lacuna principale dell'argomentazione di Eulero, spiegata nella sezione precedente, è che non c'è garanzia che la sua tecnica per rimuovere un vertice da un poliedro convesso produca un poliedro convesso.
Usando il linguaggio degli inviluppi convessi, si può rimuovere un vertice senza incorrere in una scelta arbitraria e con la certezza di riottenere sempre un poliedro convesso.
Consideriamo dunque P un poliedro convesso con insieme di vertici V e prendiamo un vertice p appartenente a V. Per rimuovere il vertice p da P prendiamo l'insieme convesso di $V \setminus \{p\}$. Se V contiene più di quattro vertici, allora è sempre possibile scegliere p in V così che gli elementi restanti di V non siano complanari, assicurando in questo modo che il poliedro ottenuto sia un poliedro convesso. Una conseguenza interessante è che quando rimuoviamo un vertice da un poliedro convesso utilizzando questo metodo, il poliedro che otteniamo è unico. Al contrario, nel procedimento descritto da Eulero, quando rimuoviamo un vertice, possiamo farlo in vari modi, cioè rimuovendo diverse combinazioni di piramidi triangolari.
Così, è possibile recuperare la dimostrazione di Eulero. Egli infatti ne diede una quasi corretta; ovvero il metodo di Eulero può funzionare, semplicemente si deve applicare con più attenzione.
Come abbiamo detto, la prova di Eulero si può applicare solo ai poliedri con-

vessi. Dall'altra parte, la sua formula può essere applicata ai poliedri non convessi se sono palle topologiche con facce contraibili. Quindi ci chiediamo: è possibile modificare la dimostrazione di Eulero in modo che sia vera anche per questi poliedri? Vedremo che la risposta è no.

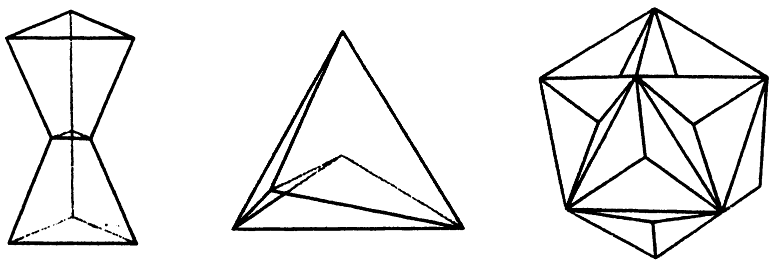

Figura 2.7: La formula di Eulero vale solo per poliedri convessi

Per esempio, analizzando la figura 2.7 i vertici a forma di sella attorno alla vita della clessidra poliedrale non possono essere rimossi sezionando le piramidi; nel mezzo vediamo una piramide con un'intaccatura a forma di piramide, il cui apice è impossibile da rimuovere con il metodo di Eulero; siamo comunque in grado di rimuovere ognuno dei tre vertici di base. Infine, a destra, abbiamo l'esempio di un poliedro che non può essere ridotto con il metodo di Eulero. Alcuni dei vertici nel poliedro non possono essere rimossi perché sono delle intaccature. Il resto dei vertici invece possono essere rimossi dalle piramidi che abbiamo sezionato. Comunque, anche in questo modo, restiamo con una faccia pentagonale e un poliedro avente sei vertici in meno dell'originale. Perciò, a meno che non si voglia riformulare il problema, il metodo descritto da Eulero per dimostrare la formula che porta il suo nome, in questo caso fallisce.

Capitolo 3

Classificazioni delle superfici compatte

In questo capitolo vogliamo dare un'applicazione della formula di Eulero. Vedremo infatti che ci permette di definire un invariante associato a ciascuna varietà topologica e risulterà fondamentale nella risoluzione del problema della classificazione delle superfici compatte.

3.1 Premesse

In questa sezione ci interesseremo delle superfici compatte, che sono varietà topologiche connesse e compatte di dimensione 2. Cominciamo con il dare alcune definizioni fondamentali.

Definizione 3.1. Sia X un insieme, e sia Ω una famiglia di sottoinsiemi di X che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\emptyset \in \Omega$ e $X \in \Omega$.
2. L'intersezione di due elementi di Ω appartiene a Ω.
3. L'unione di una qualsiasi famiglia di elementi di Ω appartiene a Ω.

Una famiglia Ω con queste proprietà viene detta *topologia* su X e l'insieme X con la famiglia Ω viene chiamato *spazio topologico* e viene indicato con (X, Ω), o più semplicemente con X. Gli elementi $U \in \Omega$ sono chiamati *insiemi aperti* o semplicemente *aperti* di X.

Definizione 3.2. Uno spazio X è detto di *Hausdorff* se per ogni coppia di punti distinti *x,y* di X esistono due aperti U_x e U_y contenenti rispettivamente x e y, tali che $U_x \bigcap U_y = \emptyset$

Definizione 3.3. Siano X ed Y due spazi topologici, si dice che X ed Y sono *omeomorfi* se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$, una l'inversa dell'altra (ossia $fg = 1_Y$ e $gf = 1_X$). In tal caso scriveremo $X \backsimeq Y$ e diremo che f e g sono *omeomorfismi* fra X ed Y.

Definizione 3.4. Sia n è un numero naturale, una *varietà topologica* di dimensione n, è uno spazio topologico di Hausdorff nel quale ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo al disco aperto D^n di dimensione n, ove $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < 1\}$.
Poichè $D^n \simeq \mathbb{R}^n$ ciò è equivalente a richiedere che ogni punto abbia un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Una varietà di dimensione n si dice una *n-varietà*, e un aperto omeomorfo a D^n una *carta*.
Una varietà di dimensione 2 si chiama *superficie*.

Vediamo alcuni esempi di superfici.

1. Sfera:

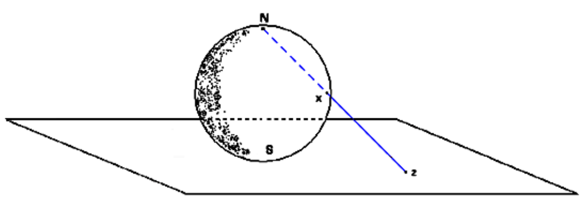

Figura 3.1: Proiezione stereografica

S^2 è una varietà di dimensione 2. Lo dimostriamo utilizzando le *proiezioni stereografiche*. Chiamiamo il punto $(0,0,1)$ polo nord (N), mentre il punto $(0,0,-1)$ polo sud (S).
Definiamo $\varphi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$. Sia $x \in S^2 \setminus \{N\}$, tracciamo una semiretta uscente da N e passante per x, estesa fino ad incontrare $\mathbb{R}^n$ (vedi figura 3.1). Il punto di intersezione fra questa semiretta e $\mathbb{R}^n$ definisce in modo unico $\varphi(x)$.

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

Si vede facilmente che φ è continua e biettiva, inoltre non è difficile definire $\psi = \varphi^{-1}$ e dimostrare la sua continuità. Per vedere ciò e avere una espressione esplicita di ψ, si veda [5] (pag. 306).
In questo modo abbiamo dimostrato che ogni punto $x \in S^2$, diverso da N, è contenuto in una carta (precisamente $S^2 \setminus \{N\}$). Inoltre il punto N è contenuto nell'aperto $S^2 \setminus \{S\}$ che è omeomorfo, anche esso, a $\mathbb{R}^n$ tramite la funzione φ' definita da:

$$\varphi'(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right)$$

Quindi anche N è contenuto in una carta, ne segue che S^2 è una superficie.

2. Nastro di Möbius:

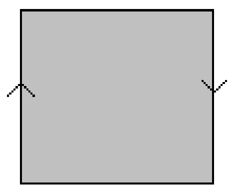

Figura 3.2: Nastro di Möbius

Consideriamo un cilindro:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |x| \leq 1\}$$

con la topologia indotta, e definiamo M come l'insieme delle coppie non ordinate di punti di C del tipo $\{p, -p\}$, ossia

$$M = \{\{p, -p\} \mid p \in C\}.$$

L'esistenza di una applicazione suriettiva da C ad M permette di dotare M della topologia quoziente: lo spazio che ne risulta è chiamato *nastro di Möbius*.
Alternativamente M è lo spazio che si ottiene come quoziente:
$[0,1] \times [0,1]/S$ ove S è il sottospazio $\{(0,y),(1,1-y), y \in [0,1]\} \subset [0,1] \times [0,1]$.

3. Spazio proiettivo:
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus 0 \diagup \sim$, ove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita in questo modo: $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $n = 2$.
Chiamiamo $H_i = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_i \neq 0\}$ con $i = 0, 1, 2$, *i-esimo iperpiano* cordinato.
Sia $i = 0, 1, 2$; $U_i = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \smallsetminus H_i$ è la i-esima carta affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
Infatti,

$$\begin{aligned} J_0 : U_0 &\to \mathbb{R}^2 \\ [x_0, x_1, x_2] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \end{aligned}$$

è una funzione continua dotata di inversa ([5] (pag. 299)). Allo stesso modo esistono anche J_1 e J_2 che vanno rispettivamente da U_1 e U_2 a $\mathbb{R}^2$.
Così abbiamo trovato rispettivamente tre modi di immergere $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ed inoltre $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è ricoperto dagli aperti U_0, U_1, U_2, ciascuno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$; cioè se $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $p = [a_0, a_1, a_2]$, almeno uno degli a_i è $\neq 0$, quindi $p \in U_i$.
In questo modo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = U_0 \bigcup U_1 \bigcup U_2$.
Quindi tutti i punti hanno una carta che li contiene, ne segue che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è una superficie.

4. Toro:

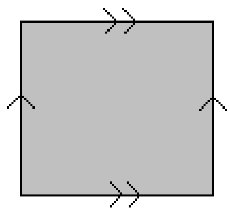

Figura 3.3: Toro

Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X.
$X = [0,1] \times [0,1]$; le relazioni non banali su X sono:

$$(0,y) \sim (1,y), \qquad (x,0) \sim (x,1).$$

Quozientando X con la relazione di equivalenza, $X \diagup \sim$ ottengo il toro.

Definizione 3.5. Una superficie è *orientabile* se non contiene nessun nastro di Möbius, mentre *non orientabile* se contiene un nastro di Möbius.

Il piano proiettivo reale è una superficie non orientabile; mentre la sfera e il toro sono superfici orientabili.

Definizione 3.6. Se S_1 e S_2 sono due superfici disgiunte, la loro somma connessa $S_1 \sharp S_2$ si ottiene tagliando via da entrambe un piccolo disco aperto e "ricucendo" le superfici lungo il bordo dei fori risultanti.
Per una definizione più rigorosa, osserviamo che se x è un punto della superficie, N una carta contenente x e $H : N \to D^2$ è un omeomorfismo, indicando con $\overline{D^2_{\frac{1}{2}}} \subset \overline{D^2}$ il disco chiuso con centro l'origine e raggio $\frac{1}{2}$, avremo che $h^{-1}\overline{(D^2_{\frac{1}{2}})}$ è un intorno di x omeomorfo a $\overline{D^2}$ tramite l'omeomorfismo

$$h^{-1}\overline{(D^2_{\frac{1}{2}})} \to \overline{D^2}$$

Date due superfici S_1 e S_2, possiamo quindi scegliere due sottoinsiemi $\overline{D_1} \subset S_1$ e $\overline{D_2} \subset S_2$ omeomorfi a $\overline{D^2}$ e due omeomorfismi $h_1 : \overline{D_1} \to \overline{D^2}$ e

$h_2 : \overline{D_2} \to \overline{D^2}$. Definiamo $S_1 \sharp S_2$ come

$$S_1 \sharp S_2 = \frac{(S_1 - D_1) \bigcup (S_2 - D_2)}{\sim}$$

dove $\sim$ è una relazione di equivalenza che risulta non banale solo su $\partial(S_1 - D_1) \bigcup \partial(S_2 - D_2) = \partial\overline{D_1} \bigcup \partial\overline{D_2}$, dove è definita da $x \sim h_2^{-1} h_1(x)$ per $x \in \overline{D_1}$.

Intuitivamente possiamo pensare che la somma connessa di una superficie con un toro sia ottenuta attaccando un manico alla superficie: un manico infatti non è altro che un toro da cui è stato tagliato via un disco.
La somma connessa di una superficie con il piano proiettivo reale può essere

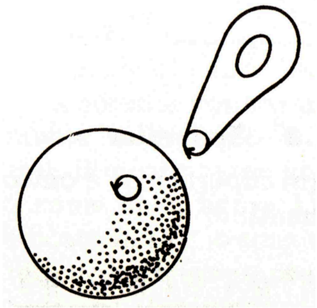

Figura 3.4: Somma connessa di una superficie con un toro

invece pensata come la superficie stessa a cui è stata attaccato un nastro di Möbius. Infatti un piano proiettivo reale da cui è stato tagliato via un disco aperto è omeomorfo ad un nastro di Möbius ([3] (pag. 37)).

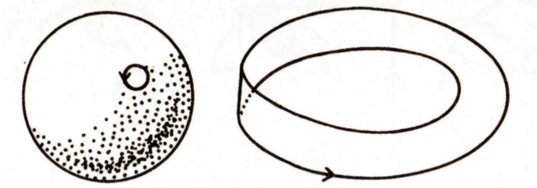

Figura 3.5: Somma connessa di una superficie con un piano proiettico

3.2 Superfici

In questa sezione restringiamo la nostra attenzione alle superfici, cioè alle varietà bidimensionali.

Definizione 3.7. Una triangolazione di una superficie compatta S consiste in una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ che coprono S, e una famiglia di omeomorfismi $\varphi_i : T_i' \to T_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, ove T_i' è un triangolo nel piano $\mathbb{R}^2$, cioè un insieme compatto di $\mathbb{R}^2$ delimitato da tre rette distinte. I sottinsiemi T_i sono chiamati *triangoli.* I sottoinsiemi di T_i che sono le immagini dei vertici e degli spigoli del triangolo T_i' attraverso la φ_i, sono chiamati rispettivamente *vertici* e *spigoli.* Come ultima cosa richiediamo che per ogni coppia di triangoli T_j e T_i, entrambi disgiunti, l'elemento in comune sia un singolo vertice o un intero spigolo.

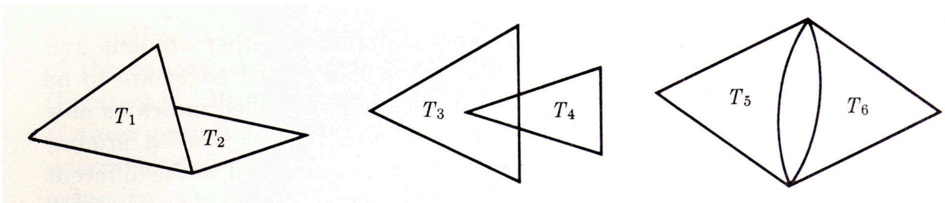

Figura 3.6: 3 tipi di intersezioni di triangoli, che non portano a una triangolazione

Consideriamo una superficie triangolata, che sia stata costituita incollando insieme diversi triangoli. Poichè due triangoli differenti in una triangolazione non possono avere in comune tutti i vertici, possiamo precisare completamente una triangolazione di una superficie numerando i vertici e dando i triangoli come terne di vertici.

ESEMPI

1. La superficie di un comune tetraedro nello spazio euclideo tridimensionale è omeomorfa alla sfera S^2, inoltre i quattro triangoli soddisfano

tutte le condizioni per la triangolazione di S^2. In questo caso ci sono quattro vertici, e ogni terna di vertici è l' insieme di vertici di un triangolo. Nessun'altra triangolazione di una superficie non omeomorfo ad S^2 può avere questa proprietà.

2. Triangolazione di un piano proiettivo

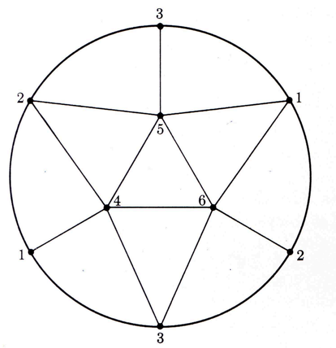

Figura 3.7: Triangolazione piano proiettivo

3. Triangolazione di un toro

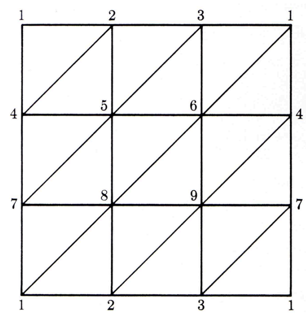

Figura 3.8: Triangolazione toro

E possibile dare un risultato che ci permette di giungere alla classificazione completa delle superfici compatte. Noi ci limiteremo ad enunciarlo, rimandando a [3] (pag. 89) per la dimostrazione completa

Teorema 3.2.1. *Ogni superficie S compatta è omeomorfa ad una ed una sola delle superfici seguenti:*

$$S^2$$

$$\underbrace{T\sharp T\sharp\ldots\sharp T}_{m} \quad (\, m \geq 0)$$

$$\underbrace{RP^2\sharp RP^2\sharp\ldots\sharp RP^2}_{n} \quad (\, n \geq 1)$$

Il teorema si può dividere in due parti. La prima asserisce che ogni superficie è omeomorfa ad almeno una delle superfici sopra elencate. Questa parte non verrà dimostrata in questa tesi. Mentre la seconda parte dice che le superfici sopra elencate sono due a due non omeomorfe; noi ci soffermeremo su questa seconda osservazione, giustificandola attraverso la formula di Eulero.

È possibile che la somma di m tori sia omeomorfa alla somma di n tori ($m \neq n$), oppure che la somma di m spazi proiettivi sia omeomorfa alla somma di n spazi proiettivi ($m \neq n$)? Allo stesso modo, è possibile che la somma di n tori sia omeomorfa all somma di m spazi proiettivi ($m \neq n$)?
Per vedere che ciò non può succedere utilizziamo la formula di Eulero. Sia S una superficie compatta con triangolazione $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$

V = numero totale dei vertici di S

E = numero totale degli spigoli di S

F = numero totale dei triangoli

Definiamo il *numero o caratteristica di Eulero* come $\chi(S) = V - E + F$. Il numero di Eulero è indipendente dalla partizione della superficie, ovvero indipendente dalla triangolazione fatta; in altre parole $\chi(S)$ dipende solo da S a meno di omeomorfismi.

Per provare ciò, suddividiamo S in poligoni arbitrari che chiameremo n-goni, non necessariamente triangoli. Questi poligoni possono avere un nu-

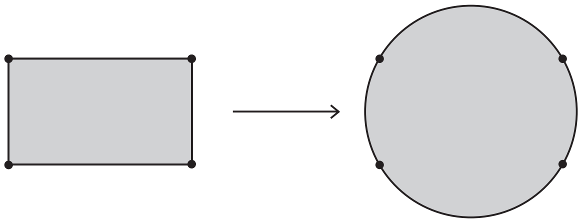

Figura 3.9: 4-gono

mero n qualsiasi di lati e n vertici ($n \geq 1$). Richiediamo solo che l'interno di ciascuna regione poligonale sia omeomorfo ad un disco aperto, e che ogni spigolo sia omeomorfo a un intervallo aperto reale e che il numero di vertici, spigoli e facce (regioni poligonali) sia in numero finito.

Il numero di Eulero $\chi(S) = V - E + F$ è invariante nei seguenti casi:

1. Se suddividiamo uno spigolo aggiungendo un nuovo vertice in un punto interno allo spigolo, o al contrario, se due spigoli si incontrano in un vertice, se uniamo i due spigoli eliminando un vertice verifichiamo che il numero di Eulero non cambia:
$$V - E + F = (V + 1) - (E + 1) + F.$$

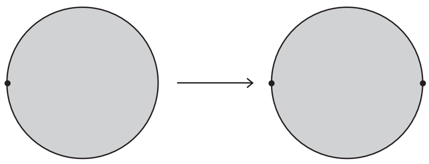

Figura 3.10: Caso 1

2. Se suddividiamo un n-gono ($n \geq 1$) unendo due dei due vertici in uno spigolo, o al contrario, unendo due regioni in una rimuovendo uno spigolo. Verifichiamo che il numero di Eulero non cambia:
$$V - E + F = V - (E + 1) + (F + 1).$$

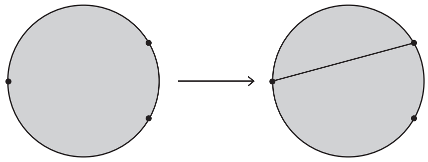

Figura 3.11: Caso 2

3. Se introduciamo un nuovo spigolo e un nuovo vertice all'interno della regione, o al contrario eliminando sia un vertice che uno spigolo. Verifichiamo ancora una volta che il numero di Eulero non cambia:

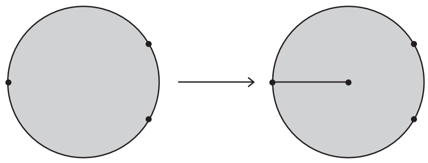

Figura 3.12: Caso 3

$$V - E + F = (V + 1) - (E + 1) + F.$$

L'invarianza della caratteristica di Eulero rispetto alla triangolazione scelta, si dimostra facendo vedere che si può passare da una qualsiasi triangolazione ad un altra tramite una sequenza finita di movimenti di tipo (1), (2) e (3) appena descritti.
La dimostrazione è particolarmente complicata e rimandiamo a [4] (pag. 32) per ulteriori chiarimenti.

Proposizione 3.2.2. *Siano S_1 e S_2 superfici compatte. La caratteristica di Eulero di S_1, S_2 e della loro somma connessa sono collegate da questa relazione:*

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Dimostrazione. Supponiamo che S_1 e S_2 siano superfici triangolate. Per fare la loro somma connessa, bisogna rimuovere da ognuna un triangolo e poi identificare gli spigoli e i vertici dei bordi del triangolo rimosso. Quindi

abbiamo:
$\chi(S_1\sharp S_2) = (V_{S_1} - E_{S_1} + F_{S_1}) + (V_{S_2} - E_{S_2} + F_{S_2}) - (3 - 3 + 2)$
ove 3 è il numero di spigoli e vertici che sono stati rimossi e 2 è il numero di facce triangolari rimosse; allora svolgendo i calcoli:
$\chi(S_1\sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$ □

Il numero di Eulero della sfera e del toro è 2 e 0 (vedi capitolo 1), mentre quello del piano proiettivo è 1. A partire dal teorema precedente, e conoscendo i valori del numero di Eulero della sfera, del toro e del piano proiettivo, riusciamo a ricavare il numero di Eulero per tutte le superfici compatte e quindi ottenere la dimostrazione della seconda parte del Teorema 3.2.1

Proposizione 3.2.3. *Vale la seguente tabella:*

SUPERFICI	*NUMERO DI EULERO*
somma connessa di n tori	*2-2n*
somma connessa di n piani proiettivi	*2-n*

Dimostrazione.
Sia $T_1\sharp T_2\sharp\ldots\sharp T_n$ la somma di n tori. Utilizzando la proposizione precedente calcoliamone la caratteristica di Eulero:

$$\chi(T_1\sharp T_2\sharp\ldots\sharp T_n) = \chi(T_1) + \chi(T_2) + \ldots + \chi(T_n) - 2(n-1).$$

Siccome $\chi(T_i) = 0$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, allora la somma di n tori avrà caratteristica di Eulero

$$-2(n-1) = 2 - 2n.$$

Sia $\mathbb{RP}^2\sharp\mathbb{RP}^2\sharp\ldots\sharp\mathbb{RP}^2$ la somma di n spazi proiettivi. Utilizzando la proposizione precedente calcoliamone la caratteristica di Eulero:

$$\chi(\mathbb{RP}^2\sharp\mathbb{RP}^2\sharp\ldots\sharp\mathbb{RP}^2) = \chi(\mathbb{RP}^2) + \chi(\mathbb{RP}^2) + \ldots + \chi(\mathbb{RP}^2) - 2(n-1).$$

Siccome $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, allora la somma di n spazi proiettivi sarà uguale a

$$n - 2(n-1) = 2 - n.$$

$\square$

Osservazione 1. Il numero di Eulero di una superficie orientabile è sempre pari, mentre per una superficie non orientabile può essere sia pari che dispari.

Teorema 3.2.4. *Siano S_1 e S_2 superfici compatte, S_1 e S_2 sono omeomorfe se e solo hanno stesso numero di Eulero e sono entrambe orientabili o non orientabili.*

Questo teorema ci porta a dire che la somma di m tori non è omeomorfa alla somma di n tori e che la somma di m spazi proiettivi non è omeomorfa alla somma di n spazi proiettivi. Allo stesso modo ci dice che la sfera non è omeomorfa nè alla somma di tori nè alla somma di spazi proiettivi. Questo perchè tutte queste superfici hanno numero di Eulero differente.

Definizione 3.8.

$$\underbrace{T\sharp T\sharp\ldots\sharp T}_{m} \quad (per\, m \geq 0)$$

è chiamata la *superficie standard non orientabile di genere m.*
mentre

$$\underbrace{RP^2\sharp RP^2\sharp\ldots\sharp RP^2}_{n} \quad (per\, n \geq 1)$$

è chiamata la *superficie standard non orientabile di genere n.*
La sfera S^2 è di *genere 0.*

Esiste una formula che mette in relazione il genere g con il numero di Eulero χ di una superficie compatta, ricavabile immediatamente dalla tabella della Proposizione 3.2.3.

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-\chi), & \text{per } \textit{superfici orientabili} \\ 2-\chi, & \text{per } \textit{superfici non orientabili} \end{cases}$$

Bibliografia

[1] C. Kosniowski, Introduzione alla topologia algebrica, Zanichelli, 1988

[2] D.S. Richeson, Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology, Princeton University Press, 2008

[3] D.S. Richeson and Christopher Francese, The Flaw in Euler's Proof of His Polyhedral Formula, American Mathematical Monthly, 144:286-296, 2007

[4] E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri, 1968

[5] E. Sernesi, Geometria 2, Bollati Boringhieri, 1994

[6] http://it.wikipedia.org/wiki/Portale:Matematica

[7] http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/index.htm

[8] W.S. Massey, Algebraic topology: an introduction, Springer-Verlag New York Heidelberg, 1967

Ringraziamenti

In primo luogo, vorrei ringraziare la professoressa Rita Fioresi che mi ha dato la possibilità di effettuare questo elaborato e mi ha seguito con molta scrupolosità durante la redazione del lavoro di tesi.
Ringrazio i miei genitori, senza il loro aiuto non avrei mai raggiunto questa meta. Sono davvero grata per tutto il sostegno economico, ma più di ogni altra cosa per quell'aiuto tacito o esplicito che è venuto dal loro cuore; per tutte le volte che mi sono stati vicini e mi hanno incoraggiata vedendomi preoccupata o in difficoltà; e soprattutto per avermi incoraggiato nella scelta universitaria, senza mia mamma quel clik di iscrizione alla facoltà di matematica non so se lo avrei mai fatto.
Vorrei ringraziare le mie due cuginette, Emma e Chiara, per la disponibilità el'affetto che hanno sempre avuto nei miei confronti.
Non posso non ringraziare tutti gli amici conosciuti in facoltà, ho trovato persone splendide, capaci di farmi ridere, sognare, arrabbiare e piangere. Fra questi ringrazio in particolar modo Marta, Roberta, Michela; non so veremente cosa dirvi se non super grazie, come poter dimenticare gli esami preparati, gli scontri perchè una sosteneva una cosa e l'altra una totalmente opposta, il sostegno e le risate. Siete state meravigliose compagne di studi, ma anche grandi amiche.
Ringrazio le mie coinquiline Anna e Giulia di Piazza Aldorovandi, con cui ho intrapreso questa vita universitaria e che mi hanno regalato belle serate ricche di chiacchierate e momenti spensierati, e soprattutto hanno partecipato e mi hanno sopportato nelle mie pazzie. Tre anni passati insieme dal collegio alla

casa, siete state la mia piccola famiglia bolognese. Tre caratteri diversissimi, o meglio io diversa da loro :), che però pian pianino stanno trovando un loro equilibrio. In particola ringraziamo l'Annina, per sopportarmi ogni giono, e anche perchè (anche se non ci crede) è stata una amica davvero speciale.
E ora... ringrazio tutti gli miei amici di Pesaro, ognuno a suo modo ha contribuito a rendere speciale il mio percorso universitario. Fra questi un grazie di cuore va a Giulia e Giulia; due amiche uniche, chi meglio di loro mi conosce, chi meglio di loro mi ha visto crescere e maturare!!! Grazie per aver fatto parte della mia vita e per esserci sempre state. (W le VaGiulie)
Volevo ringraziere la mia cara amica malattia, che mi segue ormai da due anni. Grazie per avermi fatto vedere che cosa signifa veramente vivere, grazie per avermi aperto al dolore, non vedendolo solo come cosa negativa, ma come fonte di gioia. Grazie per aver stravolto la mia vita migliorandola, e avermi fatto vedere veramente le cose belle della vita. E proprio grazie a te che sono arrivata fino quì, mettendoci tutta la forza, la passione; certamente mi hai stravolto la vita, ma mi hai dato la forza per arrivare fino a quì.
Ultimo ma non per importanza . . . colui al quale dedico questa tesi, Lorenzo. Grazie. Non so che parole usare. . . , grazie per l' amore che mi dai ogni giorno, perchè mi fai sentire speciale, grazie perchè mi sopporti, perchè mi ami, perchè ti prendi cura di me. Grazie per essere entrato nella mia vita, stravolgendola, migliorandola, abbellendola sempre di più. Grazie per avermi aiutato a scrivere questa tesi, per le immagini, la traduzione, senza di te questa tesi non sarebbe stata tale. . . . :)