

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

## IL FENOMENO DI GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Annamaria Montanari

Presentata da:  
Jarir Salame Younis

Sessione Unica  
Anno Accademico 2015-2016



# Introduzione

L'argomento di questa tesi è il fenomeno di Gibbs, un fenomeno che riguarda dei particolari polinomi trigonometrici, i polinomi di Fourier: questi ultimi sono molto utilizzati per approssimare funzioni periodiche in quanto tra tutti i polinomi trigonometrici sono quelli che minimizzano l'errore in norma quadratica. Il fenomeno di Gibbs si può descrivere in questo modo: siano date una funzione  $f$  periodica che presenta punti di discontinuità di prima specie e la sua approssimazione tramite serie di Fourier; quando si tronca questa serie si avranno delle forti oscillazioni in prossimità dei punti di discontinuità della funzione. Aumentando il numero di componenti della serie troncata le oscillazioni si avvicinano sempre di più ai relativi punti di discontinuità ma il picco rimane lo stesso.

Nonostante questo fenomeno non porti il suo nome il primo a notare questo fenomeno fu Henry Wilbraham, matematico inglese, che pubblicò un articolo riguardante questo argomento nel 1848 ma i suoi risultati furono portati alla luce solo nel 1925 dal matematico scozzese Carslaw. Nel 1898 il fisico statunitense Albert A. Michelson inviò una lettera al fisico matematico Josia Willard Gibbs; Michelson aveva notato questo fenomeno grazie al suo analizzatore armonico, uno strumento capace di determinare le prime ottanta coordinate di Fourier di una funzione data graficamente. In seguito a questa lettera Gibbs decise di studiare il fenomeno e lo spiegò in una lettera a *Nature* nel 1899.

La tesi è stata divisa in tre capitoli. Il primo capitolo inizierà con la definizione di polinomio di Fourier e verranno riportate alcune proprietà di questi polinomi: in particolare si dimostrerà che i polinomi di Fourier minimizzano l'errore in norma quadratica. Successivamente verrà definita la sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione e verrà quindi studiata la convergenza puntuale delle serie di Fourier. Il capitolo si concluderà con un teorema che fornirà delle condizioni sufficienti affinché la serie di Fourier di una funzione periodica  $f$  converga puntualmente alla funzione  $f$ . Nel secondo capitolo ci occuperemo della trattazione matematica del fenomeno di Gibbs. Inizieremo con tre esempi di funzioni periodiche che presentano un punto di disconti-

nuità di prima specie: in particolare, grazie all'utilizzo di grafici creati con Matlab mostreremo graficamente il fenomeno di Gibbs. Seguirà un'analisi quantitativa dell'errore in prossimità del punto di salto della funzione onda quadra e infine il capitolo terminerà fornendo un risultato generale; si dimostrerà infatti che, se si utilizzano i polinomi di Fourier per approssimare una funzione periodica, si presenta il fenomeno di Gibbs ogni qual volta si è in prossimità di un punto di salto. Infine nel terzo capitolo si mostrerà un modo per correggere il fenomeno di Gibbs. Dopo aver definito le somme di Fejér si dimostrerà che utilizzando questi particolari polinomi trigonometrici non si presenta il fenomeno di Gibbs. Il capitolo si conclude mostrando, attraverso l'utilizzo di grafici ottenuti con Matlab, come utilizzando le somme di Fejér al posto dei polinomi di Fourier non siano più presenti forti oscillazioni in prossimità dei punti di discontinuità.

In fondo è presente un'appendice che contiene alcuni dei codici Matlab utilizzati per ottenere i grafici presenti nella tesi.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Serie di Fourier</b>	<b>7</b>
1.1 Definizione e proprietà delle serie di Fourier . . . . .	7
1.2 Convergenza delle serie di Fourier . . . . .	10
<b>2 Analisi del fenomeno di Gibbs</b>	<b>15</b>
2.1 Esempi . . . . .	15
2.1.1 Esempio 1: funzione onda quadra . . . . .	16
2.1.2 Esempio 2: funzione onda semitriangolare . . . . .	17
2.1.3 Esempio 3: funzione onda a dente di sega . . . . .	18
2.2 Analisi quantitativa della funzione onda quadra . . . . .	19
2.3 Risultato generale . . . . .	22
<b>3 Un modo per correggere il fenomeno di Gibbs</b>	<b>25</b>
3.1 Somme di Fejér . . . . .	25
3.2 Correzione del fenomeno tramite le somme di Fejér . . . . .	29
3.2.1 Esempio 1: funzione onda quadra . . . . .	31
3.2.2 Esempio 2: funzione onda semitriangolare . . . . .	32
3.2.3 Esempio 3: funzione onda a dente di sega . . . . .	33
<b>A Codici Matlab</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>



# Capitolo 1

## Serie di Fourier

### 1.1 Definizione e proprietà delle serie di Fourier

**Definizione 1.1.** Si dice **polinomio trigonometrico reale** ogni funzione  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che possa scriversi nella maniera seguente

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Diciamo che  $p$  ha grado  $n$  se  $a_n$  e  $b_n$  non sono entrambi nulli. Nel seguito indicheremo con  $T_n$  l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado  $\leq n$ .

**Teorema 1.1.1.**

Sia  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

un polinomio trigonometrico di grado  $\leq n$  allora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos(kt) dt \quad \forall k \geq 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin(kt) dt \quad \forall k \geq 1$$

**Definizione 1.2.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ . Si chiama **polinomio di Fourier di grado  $n$**  di  $f$  il seguente polinomio trigonometrico reale

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds \quad \forall k \geq 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds \quad \forall k \geq 1$$

I numeri reali  $a_k$  e  $b_k$  sono chiamati **coefficienti di Fourier di  $f$** .

Il seguente teorema mostra che tra tutti i polinomi trigonometrici quelli di Fourier sono quelli che minimizzano l'errore in norma quadratica. Per questo sono i più utilizzati per approssimare funzioni periodiche.

**Teorema 1.1.2.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ . Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $S_n(f)$  il polinomio di Fourier di grado  $n$  di  $f$ . Allora

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2} \leq \|p - f\|_{L^2} \quad \forall p \in T_n$$

*Dimostrazione.*  $T_n$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $2n + 1$

$\mathcal{B} = \{e_0, e_1, \dots, e_{2n}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}$  è una base di  $T_n$  rispetto al prodotto interno di  $L^2$

Allora  $S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k e_k$  dove  $\hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f e_k dt$

Inoltre se  $p \in T_n$  allora  $\exists c_0, c_1, \dots, c_{2n} \in \mathbb{R}$  tale che  $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k$ .

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=1}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \geq \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - 2 \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k e_k \right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 dt$$

□

Introduciamo ora i nuclei di Dirichlet. Essi ci consentiranno di ottenere importanti rappresentazioni integrali dei polinomi di Fourier.

**Definizione 1.3.** Si chiama **nucleo di Dirichlet di grado  $n$** , con  $n \in \mathbb{N}$  il polinomio trigonometrico

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \quad t \in \mathbb{R}$$

$D_n$  è una funzione  $2\pi$ -periodica. Inoltre poichè

$$\int_0^{\pi} \cos(kt) dt = 0 \quad \forall k \geq 1$$

risulta

$$\int_0^{\pi} D_n(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Sull'intervallo  $]0, \pi[$  il nucleo  $D_n$  si può scrivere nel modo seguente:

$$\frac{\text{sen} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right)}{2 \text{sen} \left( \frac{t}{2} \right)} \quad \text{per } 0 < t < \pi$$

**Teorema 1.1.3.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ . Allora

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds$$

$\forall t \in \mathbb{R}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Inoltre se  $\lambda \in \mathbb{R}$  allora

$$S_n(f)(t) - \lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) D_n(s) ds$$

$\forall t \in \mathbb{R}$  e  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## 1.2 Convergenza delle serie di Fourier

**Definizione 1.4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1 ]-\pi, \pi[$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è **svilupicabile in serie di Fourier nel punto  $t$**  se la sua serie di Fourier converge nel punto  $t$  ed ha somma uguale a  $f(t)$ .

Pertanto la funzione  $f$  è svilupicabile in serie di Fourier se

1. la successione  $(S_n(f)(t))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = f(t)$

Ora, è importante osservare che modificando il comportamento della funzione  $f$  nei punti di un insieme di misura nulla (in particolare nel solo punto  $t$ ) i suoi coefficienti di Fourier, e quindi la successione dei polinomi  $S_n(f)$ , non cambiano. Può quindi accadere che si verifichi la condizione 1. ma non la 2.

Per questo motivo si preferisce studiare il problema della svilupicabilità in serie di Fourier ricercando prima le condizioni sufficienti per la convergenza di  $S_n(f)(t)$  ad un certo valore reale  $\lambda$  e che consentano di determinare l'eventuale valore di  $\lambda$ . A quel punto la funzione  $f$  sarà svilupicabile in  $t$  se  $\lambda = f(t)$ . Nel seguito riporteremo alcuni teoremi dai quali dedurremo dei criteri di convergenza per le serie di Fourier.

**Teorema 1.2.1** (Lemma di Riemann-Lebesgue).

Sia  $g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in L^1 ]a, b[$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Allora valgono i seguenti limiti:

- $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cos(Mt) dt = 0$
- $\lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin(Mt) dt = 0$

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo il primo limite; il secondo si dimostra in modo analogo. Utilizziamo il fatto che  $C_0^\infty ]a, b[$  è denso in  $L^1 ]a, b[$ . Perciò avremo che

$$\forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty ]a, b[ \text{ tale } \int_a^b |g(t) - \varphi(t)| dt < \epsilon$$

Allora avremo che

$$\left| \int_a^b g(t) \cos(Mt) dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (g(t) - \varphi(t)) \cos(Mt) dt \right| + \left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| &\leq \\ \int_a^b |g(t) - \varphi(t)| dt + \left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| &\leq \\ \epsilon + \left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| & \end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt = \left[ \varphi(t) \frac{\text{sen}(Mt)}{M} \right]_a^b + \int_a^b \varphi'(t) \frac{\text{sen}(Mt)}{M} dt$$

$\left[ \varphi(t) \frac{\text{sen}(Mt)}{M} \right]_a^b = 0$  perchè  $\varphi \in C_0^\infty ]a, b[$ . Perciò

$$\left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| \leq \frac{1}{|M|} \int_a^b |\varphi'(t)| dt \longrightarrow 0 \quad \text{per } |M| \longrightarrow +\infty$$

Da ciò segue la tesi. □

**Teorema 1.2.2** (Teorema di localizzazione di Riemann).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1 ]-\pi, \pi[$ ,  $t, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Allora sono equivalenti:

(i)  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \lambda$

(ii)  $\exists c > 0$  t.c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0$

*Dimostrazione.* Per il Teorema 1.1.3 abbiamo che

$$(i) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds = 0$$

Poniamo

$$g(s) = \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}. \quad g \in L^1 ]c, \pi[ \quad \forall c \in ]0, \pi[$$

Allora per il Lemma di Riemann – Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_c^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Perciò vale (i)} &\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{2\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds = 0 \\
&\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} ds = 0 \\
&\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \left( \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{2}{s} \right) \text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds + \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{2\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0
\end{aligned}$$

La funzione  $s \mapsto \left( \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{2}{s} \right)$  è continua e limitata su  $]0, c[$ .

Perciò, per il *Lemma di Riemann – Lebesgue*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \left( \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{s}{2}\right)} - \frac{2}{s} \right) \text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0$$

Allora avremo che

$$(i) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0$$

□

**Teorema 1.2.3** (Teorema di Dini).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se esiste finito

$$f^*(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2}$$

e se la funzione

$$s \mapsto \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \tag{1.1}$$

è sommabile su  $]0, c[$  per un opportuno  $c \in ]0, \pi[$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge nel punto  $t$  e la sua somma è  $f^*(t)$ .

*Dimostrazione.* Poichè la funzione (1.1) è sommabile per il *Lemma di Riemann – Lebesgue*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{\text{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds = 0$$

Quindi per il *Teorema di localizzazione di Riemann*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = f^*(t)$$

□

**Teorema 1.2.4** (Criterio di Hölder).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1 ]-\pi, \pi[$ ,  $t, \in \mathbb{R}$ .

Se  $\exists \alpha \in ]0, 1[$  ed  $\exists M, \delta > 0$  tale

$$|f(s) - f(u)| \leq M |s - u|^\alpha$$

$\forall s, u \in ]t - \delta, t[$  e  $\forall s, u \in ]t, t + \delta[$ , allora

(i)  $\exists f(t^+) = \lim_{s \rightarrow +0^+} f(t + s) \in \mathbb{R}$  ed  $\exists f(t^-) = \lim_{s \rightarrow +0^+} f(t - s) \in \mathbb{R}$

(ii)  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = f^*(t)$

*Dimostrazione.* Provare che  $\exists f(t^+) = \lim_{s \rightarrow +0^+} f(t + s) \in \mathbb{R}$  equivale a provare che

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 \text{ tale } |f(t + s) - f(t^+)| \leq \epsilon \quad \forall s \in ]0, \delta_\epsilon[$$

Per ipotesi sappiamo che  $\exists \alpha \in ]0, 1[$  ed  $\exists M, \delta > 0$  tale

$$|f(t + s) - f(t^+)| \leq M |s|^\alpha$$

$\forall s, u \in ]0, \delta[$ .

Fissiamo  $\epsilon > 0$ . Poniamo  $\delta_0 = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^\alpha$ ,  $\delta_\epsilon = \min\{\delta, \delta_0\}$ .

Allora

$$|f(t + s) - f(t^+)| \leq M \left| \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^\alpha \right| = \epsilon \quad \forall s \in ]0, \delta_\epsilon[$$

Siccome abbiamo preso un  $\epsilon > 0$  arbitrario abbiamo provato che

$\exists f(t^+) = \lim_{s \rightarrow +0^+} f(t + s)$ .

Analogamente si dimostra che  $\exists f(t^-) = \lim_{s \rightarrow +0^+} f(t - s)$

Ora mi basta provare che vale (1) e poi la tesi sarà provata per il *Teorema di Dini*.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(t + s) + f(t - s)}{2} - f^*(t) \right| \frac{1}{s} \leq \\ & \leq \left| \frac{f(t + s) - f(t^+) + f(t - s) - f(t^-)}{2} \right| \frac{1}{s} \leq \\ & \leq \frac{M}{s^{1-\alpha}} \quad \text{per } 0 < s < \delta \end{aligned}$$

La funzione

$$s \mapsto \frac{M}{s^{1-\alpha}}$$

è sommabile in  $]0, \delta[$  perchè  $\alpha > 0$ . Sia  $c = \min\{\pi, \delta\}$ . Allora la funzione è sommabile in  $]0, c[$  con  $c \in ]0, \pi[$ .

Quindi anche la funzione

$$s \mapsto \left| \frac{f(t+s) - f(t^+) + f(t-s) - f(t^-)}{2} \right| \frac{1}{s}$$

è sommabile in  $]0, c[$  con  $c \in ]0, \pi[$  □

Da tutti questi teoremi si deduce un risultato importante che ci da una condizione sufficiente per la convergenza delle serie di Fourier. Questo risultato è motivato dal fatto che le funzioni regolari a tratti sono lipschitziane e quindi soddisfano il criterio di Hölder.

**Teorema 1.2.5.**

*Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ - periodica,  $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ ,  $C^1$  a tratti in  $[-\pi, \pi]$ . Allora  $\forall t \in \mathbb{R}$  la serie di Fourier converge a  $f^*(t)$ .*

# Capitolo 2

## Analisi del fenomeno di Gibbs

In questo capitolo ci occuperemo di spiegare più in dettaglio il fenomeno di Gibbs. Inizieremo con tre esempi di funzioni che presentano discontinuità di prima specie. Di ogni funzione riportiamo il suo grafico e quello dei relativi polinomi di Fourier di grado 20, 50 e 200. Questi grafici sono stati ottenuti utilizzando il programma Matlab. Successivamente analizzeremo quantitativamente il fenomeno nel caso della funzione onda quadra e infine forniremo un risultato generale.

### 2.1 Esempi

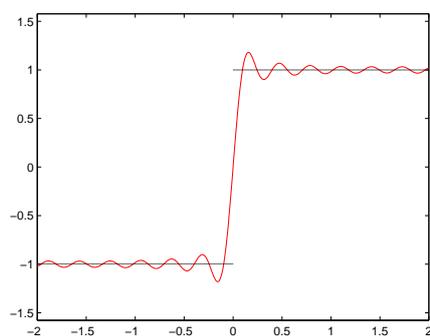
Come anticipato in questa sezione forniremo tre esempi grafici che ci permetteranno di comprendere graficamente il fenomeno di Gibbs. Le tre funzioni sono le seguenti: **onda quadra**, **onda a dente di sega** e **onda semitriangolare**. In particolare analizzando il grafico di quest'ultima si nota che le sovraoscillazioni sono presenti solo in prossimità dei punti di discontinuità di prima specie e non in prossimità dei punti di non derivabilità di una funzione.

### 2.1.1 Esempio 1: funzione onda quadra

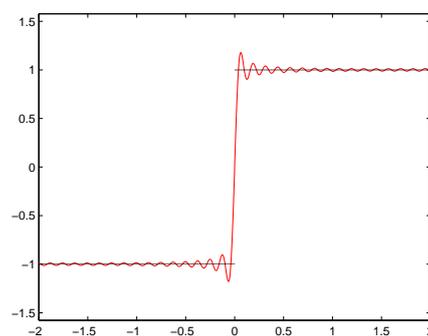
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in ]-\pi, 0] \\ 1 & t \in ]0, \pi] \end{cases}$$

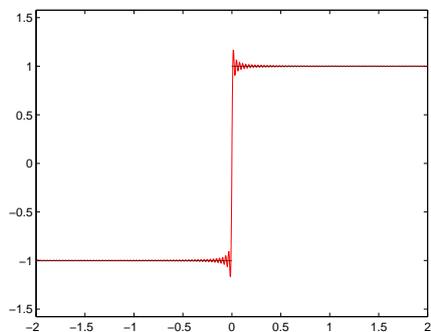
$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = 0$



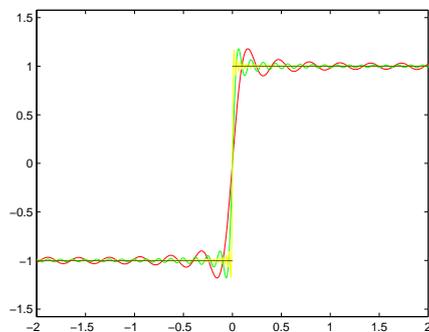
(a)  $f$ ,  $S_{20}(f)$



(b)  $f$ ,  $S_{50}(f)$



(c)  $f$ ,  $S_{200}(f)$



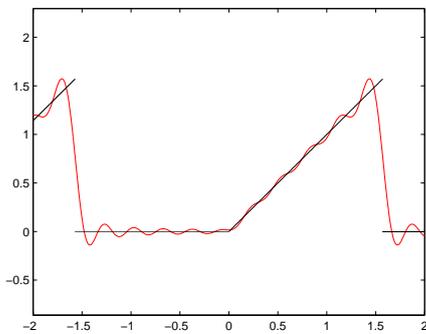
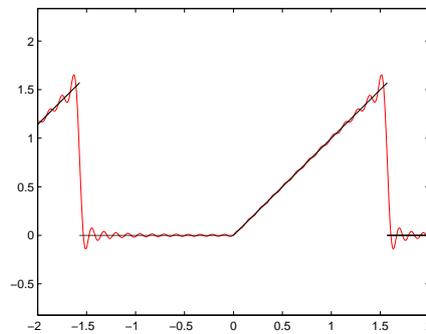
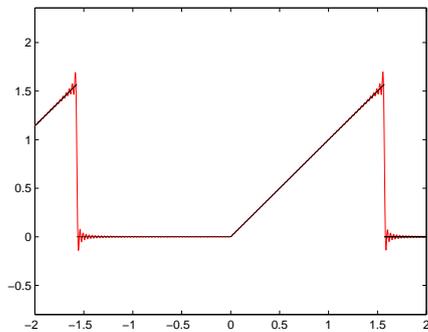
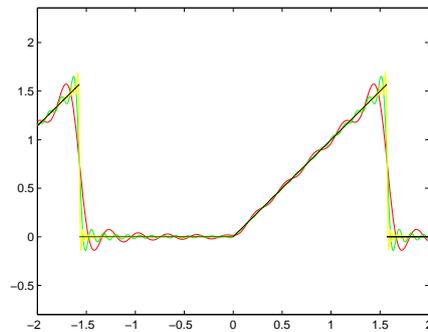
(d)  $f$ ,  $S_{20}(f)$ ,  $S_{50}(f)$ ,  $S_{200}(f)$

## 2.1.2 Esempio 2: funzione onda semitriangolare

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & t \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ 0 & t \in ]-\frac{\pi}{2}, 0] \\ t & t \in ]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = -\frac{\pi}{2}$  e nel punto  $t = \frac{\pi}{2}$

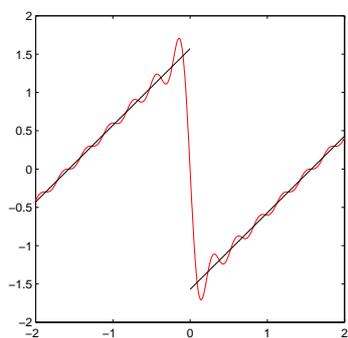
(e)  $f$ ,  $S_{20}(f)$ (f)  $f$ ,  $S_{50}(f)$ (g)  $f$ ,  $S_{200}(f)$ (h)  $f$ ,  $S_{20}(f)$ ,  $S_{50}(f)$ ,  $S_{200}(f)$

### 2.1.3 Esempio 3: funzione onda a dente di sega

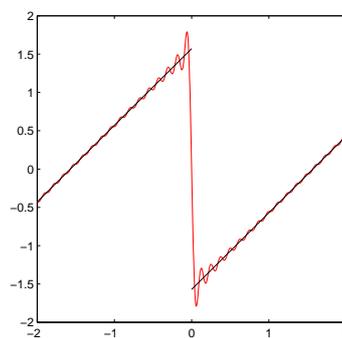
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & t \in ]-\pi, 0] \\ t - \frac{\pi}{2} & t \in ]0, \pi] \end{cases}$$

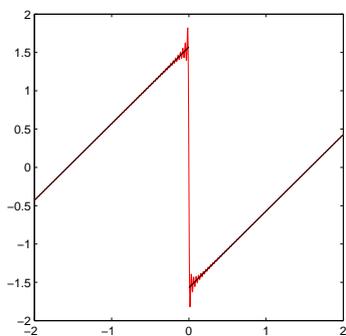
$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = 0$



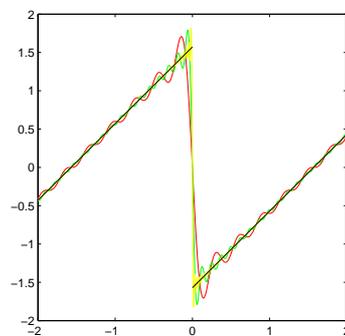
(i)  $f$ ,  $S_{20}(f)$



(j)  $f$ ,  $S_{50}(f)$



(k)  $f$ ,  $S_{200}(f)$



(l)  $f$ ,  $S_{20}(f)$ ,  $S_{50}(f)$ ,  $S_{200}(f)$

## 2.2 Analisi quantitativa della funzione onda quadra

Dopo aver visto sperimentalmente il fenomeno di Gibbs dai grafici ottenuti tramite implementazione matlab ora ci occuperemo dell'analisi quantitativa del fenomeno nel caso particolare della funzione onda quadra dell'Esempio 1.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in ]-\pi, 0] \\ 1 & t \in ]0, \pi] \end{cases}$$

Per prima cosa troviamo i coefficienti di Fourier di  $f$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -1 dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = -1 + 1 = 0$$

Per  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\cos(kt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\text{sen}(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\text{sen}(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\text{sen}(kt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(kt) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{\cos(-k\pi)}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{2 - 2\cos(k\pi)}{k\pi} = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere il polinomio di Fourier di  $f$  nel seguente modo:

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} \text{sen}((2k+1)t)$$

Derivando si ottiene

$$S'_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n \frac{4}{\pi} \cos((2k+1)t)$$

Utilizzando le formule di Prostaferesi otteniamo la seguente identità:

$$\operatorname{sen}(t) \cos((2k+1)t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}((2k+2)t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2kt)$$

Perciò

$$\begin{aligned} S'_n(f)(t) \operatorname{sen}(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)t) \operatorname{sen}(t) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}((2k+2)t) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \operatorname{sen}(2kt) = \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(2(n+1)t) \end{aligned}$$

Quindi avremo che

$$S'_n(f)(t) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sen}(2(n+1)t)}{\pi \operatorname{sen}(t)} & \text{per } t \neq 0 \\ \frac{4(n+1)}{\pi} & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

Nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  la funzione  $S'_n(f)$  si annulla nei punti  $t_j = \frac{j\pi}{2(n+1)}$   $j = 1, \dots, n+1$  e ha un andamento come la figura riportata sotto.

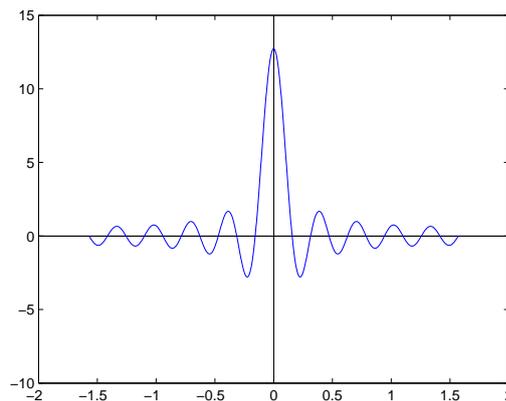


Figura 2.1:  $S'_9(f)$

In particolare oscilla come in figura e le oscillazioni sono smorzate dal fattore  $\frac{1}{\text{sen}(t)}$  che è decrescente in  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Studiando il segno di  $S'_n(f)$  vediamo che la funzione  $S_n(f)$  ha in  $t_j$  un massimo relativo se  $j$  è dispari e un minimo relativo se  $j$  è pari. Inoltre  $t_1 = \frac{\pi}{2(n+1)}$  è anche l'unico punto di massimo assoluto. Ora, dato che  $S_n(f)(t) = \int_0^t S'_n(f)(s) ds$  dal grafico di  $S'_n(f)$  si intuisce che la successione delle aree comprese tra due zeri consecutivi della funzione  $S'_n(f)$  decresce in valore assoluto; perciò decresce anche la successione dei massimi di  $S_n(f)$ . In termini più precisi, sfruttando il fatto che  $\frac{1}{\text{sen}(t)}$  è positivo e strettamente decrescente tra  $0$  e  $\frac{\pi}{2}$  e che  $\text{sen}(2(n+1)t)$  ha segno costante tra  $t_j$  e  $t_{j+1} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$  si trova:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} S'_n(f)(s) ds \right| &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} |S'_n(f)(s)| ds > \\ &> \frac{2}{\pi \text{sen}(t_{j+1})} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\text{sen}(2(n+1)s)| ds = \\ &= \frac{2}{\pi \text{sen}(t_{j+1})} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} |\text{sen}(2(n+1)s)| ds > \\ &> \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} |S'_n(f)(s)| ds = \left| \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} S'_n(f)(s) ds \right| \end{aligned}$$

e quindi

$$S_n(f)(t_{2j+1}) = S_n(f)(t_{2j-1}) - \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j}} |S'_n(f)(s)| ds + \int_{t_{2j}}^{t_{2j+1}} |S'_n(f)(s)| ds > S_n(f)(t_{2j-1})$$

Ora mostriamo che la successione  $\left( S_n(f) \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  dei massimi assoluti ha limite. Se poniamo  $y_k = \frac{k\pi}{n+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$  e  $\xi_k = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  avremo che  $\frac{y_{k+1} - y_k}{\xi_k} = \frac{2}{2k+1}$  e quindi

$$S_n(f) \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \text{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\text{sen}(\xi_k)}{\xi_k} (y_{k+1} - y_k)$$

Questa formula si può interpretare nel seguente modo: i punti  $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$  formano una partizione dell'intervallo  $[0, \pi]$ .  $\xi_k$  è il punto medio dell'intervallo  $[y_k, y_{k+1}] \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$  e  $\frac{\text{sen}(\xi_k)}{\xi_k} (y_{k+1} - y_k)$  può essere visto come il prodotto del valore della funzione  $\frac{\text{sen}(t)}{t}$  calcolata in  $\xi_k$  per la lunghezza dell'intervallo  $[y_k, y_{k+1}]$ . In altri termini la formula scritta sopra esprime

$S_n(f) \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right)$  come una somma integrale (di Cauchy) della funzione  $\frac{\text{sen}(t)}{t}$  relativa all'intervallo  $[0, \pi]$ . Inoltre la norma della partizione  $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$  vale  $\frac{\pi}{n+1}$  e tende a 0 al tendere di  $n$  all'infinito. Perciò dalla definizione stessa di integrale deduciamo che

$$S_n(f) \left( \frac{\pi}{2(n+1)} \right) \longrightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \quad \text{per } n \longrightarrow +\infty$$

A questo punto poniamo  $G = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(t)}{t} dt \simeq 1.178980\dots$  Analogamente si dimostra che la successione dei minimi assoluti tende a  $-G$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Abbiamo quindi provato che il salto della funzione  $f$ , nel punto  $t = 0$ , che era pari a 2 viene enfatizzato di quasi il 18%. La costante  $G$  viene chiamata **Costante di Wilbraham-Gibbs**.

### 2.3 Risultato generale

Ora, dopo aver analizzato il caso della funzione onda quadra, esporremo alcuni risultati grazie ai quali si otterrà un risultato generale. Per prima cosa definiamo una variante dell'onda quadra appena studiata.

$$q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & 2n-1 \leq t < 2n \\ 1 & 2n \leq t < 2n+1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

#### Teorema 2.3.1.

Sia  $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita qui sopra e sia  $S_n(q)$  il polinomio di Fourier ad esso associato. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\max_t S_n(q)(t)) = \frac{1}{2}(1+G)$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\max_t S_n(q)(t) - \min_t S_n(q)(t)) = G$$

#### Teorema 2.3.2.

Sia  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni continue in  $[a, b]$  che in tale intervallo converge uniformemente ad una funzione  $g$  (che quindi risulta continua). Sia  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione  $\subset [a, b]$  che tende a  $c$ . Allora la successione  $(g_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(c_n) = g(c)$$

**Teorema 2.3.3.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2L$ -periodica, con  $L > 0$ , una funzione  $C^1$  a tratti in  $[-L, L]$ . Allora  $S_n(f)$  converge ad  $f$  uniformemente in ogni intervallo  $[\alpha, \beta]$  in cui  $f$  è continua.

**Teorema 2.3.4.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2L$ -periodica, con  $L > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  una funzione  $C^1$  a tratti in  $[t_0 - L, t_0 + L]$  che presenta nel punto  $t = t_0$  una discontinuità di prima specie con salto pari a  $\Delta(t_0)$  definito da  $\Delta(t_0) := f(t_0^+) - f(t_0^-)$ . Allora posto  $t_n = \frac{L}{2n}$  vale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t_0 \pm t_n) = f^*(t_0) \pm \frac{\Delta(t_0)}{2}G \quad (2.1)$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f)(t_0 + t_n) - S_n(f)(t_0 - t_n)) = \Delta(t_0)G \quad (2.2)$$

*Dimostrazione.* Ridefinendo eventualmente il valore di  $f(t_0)$  non è limitativo supporre  $f(t_0) = f^*(t_0)$ .

Poniamo  $\tilde{q}(t) := q\left(\frac{t-t_0}{L}\pi\right)$ . Osserviamo che  $\tilde{q}$  è una funzione onda quadra con periodicità  $2L$  e discontinuità nel punto  $t = t_0$ .

Definiamo  $\varphi(t) = f(t) - f^*(t_0) - \frac{\Delta(t_0)}{2}\tilde{q}(t)$ . Osserviamo che  $\varphi$  è regolare a tratti,  $2L$ -periodica e continua in  $t_0$ , infatti:

$$\varphi(t_0) = f(t_0) - f^*(t_0) - \frac{\Delta(t_0)}{2}\tilde{q}(t_0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{2f(t) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{2} - \frac{\Delta(t_0)}{2}\tilde{q}(t) = \frac{\Delta(t_0)}{2} - \frac{\Delta(t_0)}{2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{2f(t) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{2} - \frac{\Delta(t_0)}{2}\tilde{q}(t) = -\frac{\Delta(t_0)}{2} - \frac{\Delta(t_0)}{2}(-1) = 0$$

Fissato un intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  che non contiene altre discontinuità di  $f$  (oltre a  $t_0$ ) ne risulta che  $\varphi$  è continua in  $I$ . Così per il Teorema 2.3.3 si ha che  $S_n(\varphi)$  converge a  $\varphi$  uniformemente in  $I$ .

Sia quindi  $t_n = \frac{L}{2n}$ . Siccome vale l'uguaglianza  $S_n(\tilde{q})(t_0 \pm t_n) = S_n(q)\left(\frac{\pm t_n}{L}\pi\right)$  è lecito scrivere

$$S_n(f)(t_0 \pm t_n) = S_n(\varphi)(t_0 \pm t_n) + f^*(t_0) + \frac{\Delta(t_0)}{2}S_n(q)\left(\frac{\pm t_n}{L}\pi\right)$$

Perciò per il Teorema 2.3.1, Teorema 2.3.2 e per il fatto che  $t_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  risulta che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t_0 \pm t_n) = \varphi(t_0) + f^*(t_0) \pm \frac{\Delta(t_0)}{2}G$$

Abbiamo così provato la (2.1). Da questa segue la (2.2), infatti:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(f)(t_0 + t_n) - S_n(f)(t_0 - t_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( f^*(t_0) + \frac{\Delta(t_0)}{2}G - f^*(t_0) + \frac{\Delta(t_0)}{2}G \right) = \\ & \quad = \Delta(t_0)G \end{aligned}$$

□

# Capitolo 3

## Un modo per correggere il fenomeno di Gibbs

In questo capitolo introdurremo un'altra tipologia di polinomi trigonometrici, le somme di Fejér, e un nuovo tipo di convergenza, quella di Cesaro. Successivamente mostreremo come eliminare il fenomeno di Gibbs utilizzando le serie di Fejér al posto di quelle di Fourier per le funzioni che presentano discontinuità di prima specie. Concluderemo mostrando graficamente cosa accade in prossimità dei punti di salto quando consideriamo le somme di Fejér al posto dei polinomi di Fourier: verranno considerate le stesse funzioni prese negli esempi del capitolo 2.

### 3.1 Somme di Fejér

**Definizione 3.1.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica. Ad essa possiamo associare la successione  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definita da

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è detta successione delle **medie di Cesaro**.

**Teorema 3.1.1** (Teorema di Cesaro).

*Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica e sia  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione delle medie di Cesaro ad essa associata.*

*Allora avremo che*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l$$

Supponiamo ora di avere una serie numerica  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  e consideriamo le somme parziali  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . La **media di Cesaro**  $n$ -esima della serie è la media aritmetica delle prime  $n+1$  somme parziali

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il *Teorema di Cesaro* se la serie converge e vale  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = l$  allora anche la successione delle medie di Cesaro converge e vale  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = l$ . Non è vero il viceversa: per mostrarlo basta considerare la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$ . Sappiamo che questa serie non converge ma se consideriamo la successione delle medie di Cesaro questa converge a  $\frac{1}{2}$ . Si può definire allora una nozione più debole di convergenza.

**Definizione 3.2.** Sia  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$  una serie numerica e  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione delle medie di Cesaro relativa alla serie. Allora diremo che la serie **converge secondo Cesaro** se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = l \in \mathbb{R}$$

Il valore  $l$  di questo limite si dice **somma secondo Cesaro**.

**Definizione 3.3.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1 ]-\pi, \pi[$ . Sia  $S_k(f)$  il polinomio di Fourier di grado  $k$  di  $f$ . Le medie aritmetiche

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$$

si dicono **somme di Fejér associate a  $f$** .

Ora definiremo i Nuclei di Fejér i quali ci permetteranno di ottenere una rappresentazione integrale delle somme di Fejér.

**Definizione 3.4.** Sia  $n \in \mathbb{N}$ . La funzione  $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  te

$$F_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n \operatorname{sen}(\frac{t}{2})} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}((k + \frac{1}{2})t) & \text{se } t \neq 2m\pi \\ \frac{n}{2\pi} & \text{se } t = 2m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

si dice  **$n$ -esimo nucleo di Fejér**. Inoltre, se  $t \in ]-\pi, \pi[$  allora

$$F_n(t) = \frac{(\operatorname{sen}(\frac{nt}{2}))^2}{n (\operatorname{sen}(\frac{t}{2}))^2}$$

Valgono le seguenti proprietà del nucleo di Fejér.

1. Il nucleo di Fejér è una funzione pari
2. Il nucleo di Fejér è una funzione non negativa
3.  $\int_0^\pi F_n(t) dt = \pi$
4.  $\forall \delta \in ]0, \pi[ F_n(t)$  tende a zero uniformemente a zero per  $\delta \leq |t| \leq \pi$

In particolare ci interessano le proprietà 2 e 4, che non sono soddisfatte dal nucleo di Dirichlet. Queste proprietà caratterizzano infatti il diverso comportamento delle somme di Fejér e dei polinomi di Fourier.

**Teorema 3.1.2.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ . Siano  $\sigma_n(f)$  le somme di Cesaro di  $f$  nel punto  $t \in ]-\pi, \pi[$ . Allora

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

**Teorema 3.1.3** (Teorema di Fejér).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(]-\pi, \pi[)$ . Sia  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione delle somme di Fejér di  $f$ . Sia poi  $t \in \mathbb{R}$   $t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \exists f^*(t)$ . Allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t) = f^*(t)$$

Inoltre se  $f$  è continua in  $[-\pi, \pi]$  allora la successione  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  in  $[-\pi, \pi]$

*Dimostrazione.* Iniziamo provando la convergenza puntuale.

Sia  $t \in \mathbb{R}$   $t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \exists f^*(t)$ . Per la proprietà 3 abbiamo che

$$\sigma_n(f)(t) - f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds$$

Considero quindi la funzione

$$g_t(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)$$

Avremo che  $\lim_{s \rightarrow 0^+} g_t(s) = 0$ , cioè

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_{\epsilon, t} > 0 \text{ t.c. } |g_t(s)| < \epsilon \quad \forall s \in ]0, \delta_{\epsilon, t}[ \quad (3.1)$$

Sfruttando il fatto che il nucleo di Fejér è positivo abbiamo che

$$|\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| \leq \int_0^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds =$$

$$= \int_0^{\delta_{\epsilon,t}} |g_t(s)| F_n(s) ds + \int_{\delta_{\epsilon,t}}^{\pi} |g_t(s)| F_n(s) ds$$

Per comodità poniamo

$$I_1 = \int_0^{\delta_{\epsilon,t}} |g_t(s)| F_n(s) ds$$

e

$$I_2 = \int_{\delta_{\epsilon,t}}^{\pi} |g_t(s)| F_n(s) ds$$

Allora per (3.1) vale

$$I_1 \leq \epsilon \int_0^{\pi} \frac{F_n(s)}{\pi} ds = \epsilon \quad (3.2)$$

mentre per quanto riguarda  $I_2$  invece sappiamo che

$$\begin{aligned} F_n(s) &= \frac{(\text{sen}(\frac{ns}{2}))^2}{n(\text{sen}(\frac{s}{2}))^2} \leq \frac{1}{n(\text{sen}(\frac{s}{2}))^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{n(\text{sen}(\frac{\delta_{\epsilon,t}}{2}))^2} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Perciò

$$I_2 \leq \frac{1}{n(\text{sen}(\frac{\delta_{\epsilon,t}}{2}))^2} \int_{\delta_{\epsilon,t}}^{\pi} |g_t(s)| ds \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (3.3)$$

Da (3.2) e (3.3) si deduce la convergenza puntuale.

Proviamo ora la convergenza uniforme. Supponiamo  $f$  continua in  $[-\pi, \pi]$ . Per il *teorema di Heine – Cantor* avremo che  $f$  è uniformemente continua nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ , cioè

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_{\epsilon} > 0 \quad \text{tc} \quad |f(s) - f(u)| < \epsilon \quad \forall s, u \in [-\pi, \pi] \quad \text{tc} \quad |s - u| < \delta_{\epsilon}$$

Quindi, fissato  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$  si ha

$$\exists \delta_{1\epsilon} > 0 \quad \text{tc} \quad |f(t+s) - f(t)| < \epsilon \quad \forall s \in [-\pi, \pi] \quad \text{tc} \quad |s| < \delta_{1\epsilon}$$

e

$$\exists \delta_{2\epsilon} > 0 \quad \text{tc} \quad |f(t-s) - f(t)| < \epsilon \quad \forall s \in [-\pi, \pi] \quad \text{tc} \quad |s| < \delta_{2\epsilon}$$

Inoltre dato che  $f$  è continua vale

$$f(t^+) = f(t^-) = f(t^*) = f(t)$$

Poniamo quindi  $\delta_\epsilon = \min \{\delta_{1\epsilon}, \delta_{2\epsilon}\}$ . Allora avremo che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f(t) \right| &= \left| \frac{f(t+s) - f(t)}{2} + \frac{f(t-s) - f(t)}{2} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{f(t+s) - f(t)}{2} \right| + \left| \frac{f(t-s) - f(t)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

A questo punto la dimostrazione è analoga a quella della convergenza puntuale con la differenza che stavolta  $\delta_\epsilon$ , a differenza del  $\delta_{\epsilon,t}$  utilizzato nella prima parte, dipende solo da  $\epsilon$  e non anche da  $t$ ; questo determinerà la convergenza uniforme come conclusione invece che darci solo quella puntuale.  $\square$

## 3.2 Correzione del fenomeno tramite le somme di Fejér

Ora mostreremo come è possibile eliminare il fenomeno di Gibbs utilizzando le somme di Fejér al posto dei polinomi di Fourier.

### Teorema 3.2.1.

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1([-\pi, \pi])$ . Supponiamo che  $\exists m, M \in \mathbb{R}$  tale che  $m \leq f(t) \leq M$  per quasi ogni  $t \in [-\pi, \pi]$ . Allora

$$m \leq \sigma_n(f)(t) \leq M \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

*Dimostrazione.*

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

Poichè  $m \leq f(t) \leq M$  per quasi ogni  $t \in [-\pi, \pi]$  avremo che

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2m}{2} F_n(s) ds \leq \sigma_n(f)(t) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2M}{2} F_n(s) ds$$

Quindi per la proprietà 3 del nucleo di Fejér si ottiene che

$$m \leq \sigma_n(f)(t) \leq M \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

$\square$

Questo ci permette di dimostrare che utilizzando le somme di Fejér non si verifica il fenomeno di Gibbs.

**Teorema 3.2.2.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2L$ -periodica, con  $L > 0$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  una funzione  $C^1$  a tratti in  $[t_0 - L, t_0 + L]$  che presenta nel punto  $t = t_0$  una discontinuità di prima specie con salto pari a  $\Delta(t_0)$  definito da  $\Delta(t_0) := f(t_0^+) - f(t_0^-)$ . Sia  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione tale che  $t_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$  e  $t_n \rightarrow t_0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) \leq |\Delta(t_0)|$$

*Dimostrazione.* Supponiamo  $\Delta(t_0) > 0$ . Il caso  $\Delta(t_0) < 0$  si dimostra in modo analogo utilizzando  $-f$  al posto di  $f$ . Ridefinendo eventualmente il valore di  $f(t_0)$ , non è limitativo supporre, come faremo, che  $f$  sia continua a destra di  $t_0$ , cioè  $f(t_0) = f(t_0^+)$ . Poniamo  $\tilde{q}(t) := q\left(\frac{t-t_0}{L}\right)$  dove  $q$  è l'onda quadra con periodicità pari a 2. Definiamo inoltre una funzione  $\varphi$  nel modo seguente:

$$\varphi(t) := f(t) - \Delta(t_0)\tilde{q}(t)$$

Si noti intanto che  $\varphi$  è una funzione regolare a tratti in  $[t_0 - L, t_0 + L]$ ,  $2L$ -periodica e continua in  $t = t_0$ . Infatti dato che  $\tilde{q}(t_0^+) = \tilde{q}(t_0) = 1$ , mentre  $\tilde{q}(t_0^-) = 0$  avremo che

$$\varphi(t_0^+) = f(t_0) - \Delta(t_0) = f(t_0^-) = \varphi(t_0^-) = \varphi(t_0)$$

Sia  $l > 0$  tale che l'intervallo  $[t_0 - l, t_0 + l]$  non contenga altre discontinuità (oltre a  $t_0$ ) di  $f$  e tale che  $\varphi$  risulti continua in  $[t_0 - l, t_0 + l]$ . Allora per il Teorema 2.3.3 avremo che

$$S_n(\varphi) \rightarrow \varphi \quad \text{uniformemente in } [t_0 - l, t_0 + l]$$

Per il teorema precedente avremo che

$$0 \leq q(t) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sigma_n(q)(t) \leq 1$$

Perciò

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\varphi)(t_n) + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{t_n - t_0}{L}\right) \leq \varphi(t_0) + \Delta(t_0)$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\varphi)(t_n) + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q)\left(\frac{t_n - t_0}{L}\right) \geq \varphi(t_0)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f)(t_n) \leq \Delta(t_0)$$

□

Abbiamo quindi provato che è possibile correggere il fenomeno di Gibbs utilizzando le somme di Fejér al posto dei polinomi di Fourier.

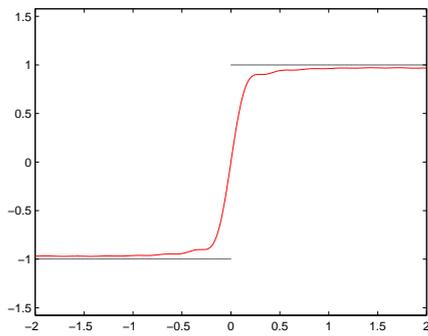
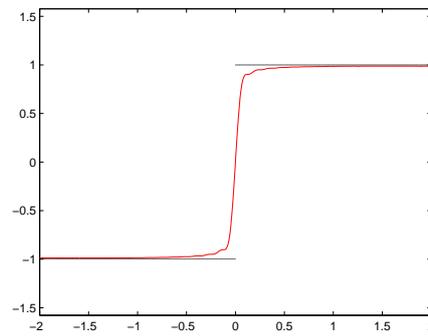
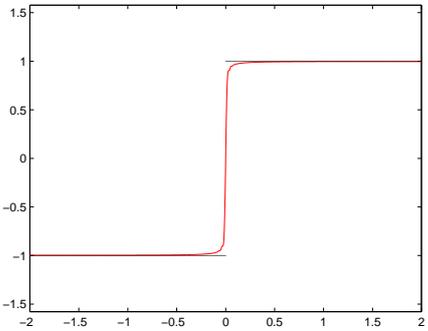
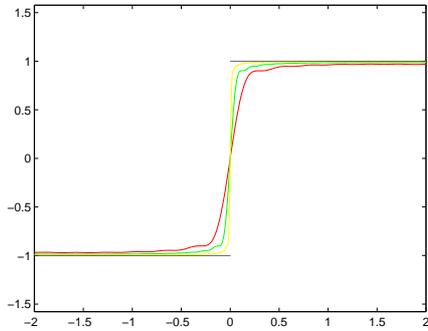
Ora concluderemo mostrando graficamente il comportamento di alcune somme di Fejér delle funzioni viste nel capitolo 2.

## 3.2.1 Esempio 1: funzione onda quadra

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} -1 & t \in ]-\pi, 0] \\ 1 & t \in ]0, \pi] \end{cases}$$

$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = 0$

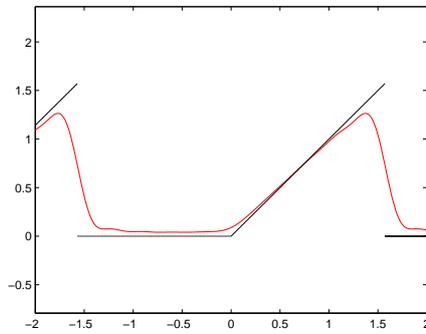
(a)  $f$ ,  $\sigma_{20}(f)$ (b)  $f$ ,  $\sigma_{50}(f)$ (c)  $f$ ,  $\sigma_{200}(f)$ (d)  $f$ ,  $\sigma_{20}(f)$ ,  $\sigma_{50}(f)$ ,  $\sigma_{200}(f)$

### 3.2.2 Esempio 2: funzione onda semitriangolare

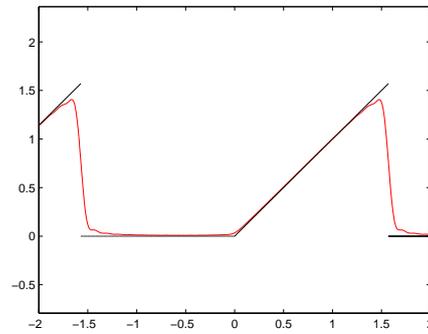
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & t \in ]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ 0 & t \in ]-\frac{\pi}{2}, 0] \\ t & t \in ]0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

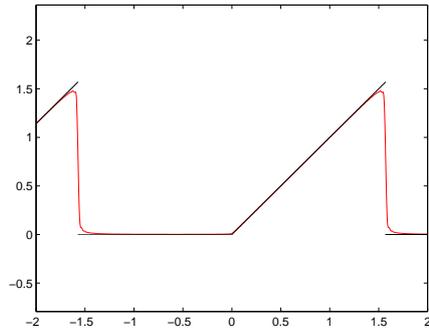
$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = -\frac{\pi}{2}$  e nel punto  $t = \frac{\pi}{2}$



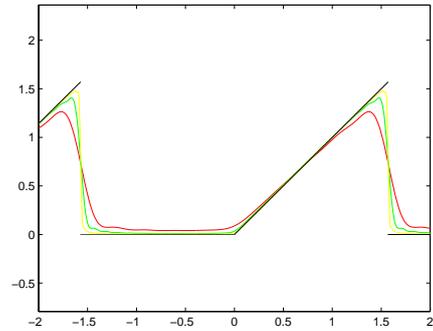
(e)  $f$ ,  $\sigma_{20}(f)$



(f)  $f$ ,  $\sigma_{50}(f)$



(g)  $f$ ,  $\sigma_{200}(f)$



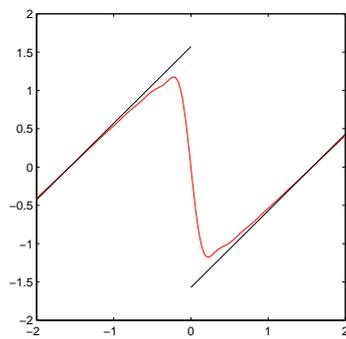
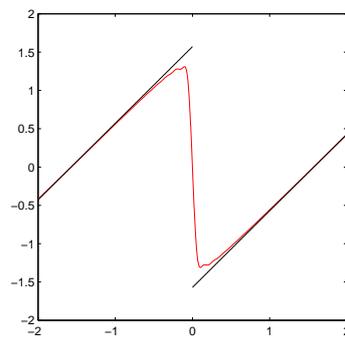
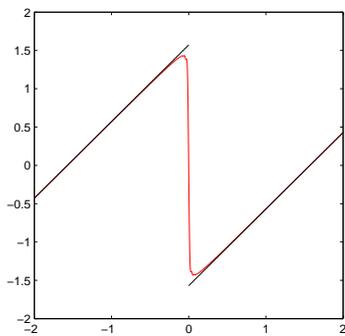
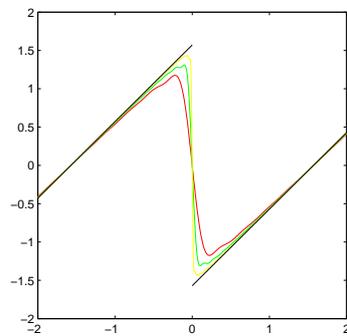
(h)  $f$ ,  $\sigma_{20}(f)$ ,  $\sigma_{50}(f)$ ,  $\sigma_{200}(f)$

## 3.2.3 Esempio 3: funzione onda a dente di sega

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$   $2\pi$ -periodica

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{\pi}{2} & t \in ]-\pi, 0] \\ t - \frac{\pi}{2} & t \in ]0, \pi] \end{cases}$$

$f$  ha una discontinuità di prima specie nel punto  $t = 0$

(i)  $f, \sigma_{20}(f)$ (j)  $f, \sigma_{50}(f)$ (k)  $f, \sigma_{200}(f)$ (l)  $f, \sigma_{20}(f), \sigma_{50}(f), \sigma_{200}(f)$



# Appendice A

## Codici Matlab

Tutti i grafici presenti in questa tesi sono stati creati utilizzando il programma Matlab. Qui sotto verranno riportati i codici di alcuni programmi utilizzati per creare questi grafici.

Costruisce  $S_{20}(f)$  nell'esempio 1

```
function y=polinomi_fourier_1_20(t)
    y=0;
    for k=1:1:20
        fun1=@(t)-cos(k.*t);
        fun2=@(t)cos(k.*t);
        fun3=@(t)-sin(k.*t);
        fun4=@(t)sin(k.*t);
        int1=integral(fun1,-pi,0);
        int2=integral(fun2,0,pi);
        int3=integral(fun3,-pi,0);
        int4=integral(fun4,0,pi);
        a=1./pi.*int1+1./pi.*int2;
        b=1./pi.*int3+1./pi.*int4;
        y=y+a.*cos(k.*t)+b.*sin(k.*t);
    end
end
```

Disegna  $f$ ,  $S_{20}(f)$ ,  $S_{50}(f)$ ,  $S_{200}(f)$  nell'esempio 1

```
function disegna_1
    x=linspace(-2,2,1000);
    y1=polinomi_fourier_1_20(x);
    y2=polinomi_fourier_1_50(x);
    y3=polinomi_fourier_1_200(x);
    plot(x,y1,'r-');
    hold on;
    plot(x,y2,'g-');
    hold on;
    plot(x,y3,'y-');
    hold on;
    x=linspace(-2,0,500);
    plot (x,-1,'k-')
    hold on
    x=linspace(0,2,500);
    plot (x,1,'k-')
    axis equal;
end
```

Costruisce  $\sigma_{20}(f)$  nell'esempio 1

```
function s=somma_fejer_1_20(t)
    y=0;
    s=0;
    for k=1:1:20
        fun1=@(t)-cos(k.*t);
        fun2=@(t)cos(k.*t);
        fun3=@(t)-sin(k.*t);
        fun4=@(t)sin(k.*t);
        int1=integral(fun1,-pi,0);
        int2=integral(fun2,0,pi);
        int3=integral(fun3,-pi,0);
        int4=integral(fun4,0,pi);
        a=1./pi.*int1+1./pi.*int2;
        b=1./pi.*int3+1./pi.*int4;
        y=y+a.*cos(k.*t)+b.*sin(k.*t);
        s=s+y;
    end
    s=s./21;
```

---

end

Disegna  $f$ ,  $\sigma_{20}(f)$ ,  $\sigma_{50}(f)$ ,  $\sigma_{200}(f)$  nell'esempio 1

```
function disegna_fe_1
    x=linspace(-2,2,1000);
    y1=somma_fejer_1_20(x);
    y2=somma_fejer_1_50(x);
    y3=somma_fejer_1_200(x);
    plot(x,y1,'r-');
    hold on;
    plot(x,y2,'g-');
    hold on;
    plot(x,y3,'y-');
    hold on;
    x=linspace(-2,0,500);
    plot (x,-1,'k-')
    hold on
    x=linspace(0,2,500);
    plot (x,1,'k-')
    axis equal;
end
```

Disegna Figura 2.1

```
function disegna_derivata_S_9
    x=linspace(-pi./2,pi./2,1000);
    y=2.*sin(2.*10.*x)./(pi.*sin(x));
    x1=linspace(-2,2,5000);
    y1=linspace(-10,15,5000);
    plot(x1,0,'k');
    hold on;
    plot(0,y1,'k');
    hold on;
    plot(x,y,'-');
    axis([-2 2 -10 15]);
end
```



# Bibliografia

- [1] Guidi, Chiara *Il fenomeno di Gibbs*  
[http://amslaurea.unibo.it/5668/1/guidi\\_chiara\\_tesi.pdf](http://amslaurea.unibo.it/5668/1/guidi_chiara_tesi.pdf)
- [2] Lanconelli, Ermanno *Lezioni di analisi matematica 2 (seconda parte)*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
- [3] Jerri, A. Abdul, *The Gibbs Phenomenon in Fourier Analysis, Splines and Wavelet Approximations*, Springer Science+Business Media, US 1998
- [4] Hewitt, Edwin e Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier Analysis*, archive for History of Exact Sciences, Vol.21, Springer-Verlag, 1979, pp 147-153
- [5] Masina, Enrico *Serie di Fourier-Lecture Notes*,  
[file:///C:/Users/salvatore/Downloads/Note\\_sulla\\_Serie\\_di\\_Fourier\\_Corso\\_di\\_Fis.pdf](file:///C:/Users/salvatore/Downloads/Note_sulla_Serie_di_Fourier_Corso_di_Fis.pdf)
- [6] Scarabotti, Fabio *Equazioni alle derivate parziali, Teoria elementare e applicazioni* Società editrice ESCULAPIO, Bologna, 2010
- [7] Pozzi, Gianni A. *Cenni sulle serie di Fourier*  
<http://www-dimat.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007



# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la professoressa Montanari per essere stata sempre molto gentile e disponibile.

Vorrei ringraziare Marta che mi è stata sempre vicina e tutti i miei amici che hanno creduto in me.

Infine un ringraziamento speciale va ai miei genitori, che mi hanno sempre sostenuto e mi hanno dato la forza di andare avanti in tutti i momenti difficili aiutandomi a raggiungere questo traguardo.

Un sincero grazie a tutti.