Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

TEORIA ED APPLICAZIONI DELLA MECCANICA DEI CONTINUI

Relatore:
Prof. Roberto Zucchini

Presentata da:
Stefano Sanchioni

Anno Accademico 2015/2016

Sommario. L'obiettivo di questo lavoro è quello di fornire una panoramica sulla meccanica dei mezzi continui, sia da un punto di vista teorico, sia illustrando alcune importanti applicazioni. Il primo passo consiste nel definire i due approcci con cui si possono studiare i mezzi in questione, ovvero la descrizione lagrangiana ed euleriana, per poi elencare tutte le proprietà relative alle grandezze per le quali si scrivono le equazioni di bilancio. Nei capitoli successivi, si entrerà nel dettaglio di alcune di queste (leggi di bilancio della massa, dell'impulso e del momento angolare) e si approfondirà il concetto di tensore di stress. L'ultima parte della tesi sarà dedicata a mostrare come tutto ciò può essere applicato ai mezzi continui elastici e ai fluidi viscosi, con un focus sul principio di Bernoulli.

Indice

Introduzione

Un mezzo continuo è un sistema che occupa una regione finita di spazio racchiusa da una o più superfici, costituito da una distribuzione uniforme di materia in tutto il suo volume tale da non lasciare spazi vuoti.
Per descrivere le proprietà di questi mezzi, che possono anche deformarsi nel loro moto, non è necessario fare riferimento alla struttura molecolare che li caratterizza.
Solidi, liquidi e gas che quindi vengono osservati ad una scala macroscopica, che hanno dimensioni molto maggiori del raggio atomico e che non sono rarefatti sono a tutti gli effetti trattabili come sistemi continui. Questo lavoro di tesi si pone come obiettivo di dare una illustrazione sintetica dell'argomento.
Secondo l'opinione di chi scrive, un buon corso di meccanica dei continui sarebbe un trait d'union ideale fra la meccanica classica e quantistica, permettendo allo studente di apprezzare le sfumature e le differenze fra le due teorie.
Ma cosa giustifica una tale convinzione? Niente può spiegarlo meglio di precisi esempi con cui quotidianamente ci dobbiamo confrontare. Possiamo considerare mezzi continui le placche tettoniche che, premendo l'una sull'altra, accumulano un'enorme pressione, culminante nell'evento sismico. Lo studio dei mezzi cosiddetti elastici, permette dunque di comprendere e limitare le conseguenze, spesso anche drammatiche, dei terremoti.
Ma possiamo dire di più: anche le masse atmosferiche, sotto le opportune condizioni, possono essere trattate come sistemi continui, ed in particolare rientrano nella categoria dei fluidi viscosi. Essi ubbidiscono ad una legge dinamica fondamentale espressa dalla celebre equazione di Navier-Stokes, che è il modello matematico principe per l'elaborazione di previsioni metereologiche.
Dunque, data l'importanza della meccanica dei mezzi continui, non deve stupire che vi abbiano dedicato le loro ricerche grandi fisici e matematici come Lagrange, Eulero, Stokes e Bernoulli.
Partendo dal definire i diversi approcci di indagine e le grandezze in gioco, questa tesi costruisce la teoria dalle fondamentali equazioni di bilancio di massa, impulso e momento angolare, fino ad approfondire temi quali il tensore di stress e la fisica dei mezzi elastici e dei fluidi viscosi, con cenni ad importanti applicazioni.

1 Punti materiali: descrizioni lagrangiane ed euleriane

Un mezzo continuo può essere pensato come una collezione (in generale estremamente grande) di punti materiali, entità che da un lato macroscopico sono piccole tanto da essere considerate puntiformi, microscopicamente invece sono a tutti gli effetti porzioni considerevoli di materia poichè contengono un numero molto elevato di molecole.
Per dimostrarlo supponiamo di poter suddividere il continuo in tante parti etichettate da un indice $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$
Scelto un istante arbitrario iniziale $t = 0$, assumiamo anche che ciascuna porzione occupa un volume $V_{0\alpha}$ tale che $V_{0(\alpha+1)}$ è contenuto in $V_{0\alpha}$:

$$V_{01} \supseteq V_{02} \supseteq V_{03} \supseteq \ldots \tag{1}$$

Individuato un punto materiale che a $t = 0$ si trova nella posizione $\mathbf{X}$, ipotizziamo che le suddette porzioni contengano tutte il punto materiale, cioè $\mathbf{X} \in V_{0\alpha}, \forall\alpha$. La relazione gerarchica (1) continua a valere anche tra le rispettive evoluzioni temporali delle porzioni a un tempo $t \neq 0$, quando ciascuna di esse occupa un volume $V_\alpha(t)$, nonostante il moto ed eventuali deformazioni del mezzo:

$$V_1(t) \supseteq V_2(t) \supseteq V_3(t) \supseteq \ldots \tag{2}$$

Tuttavia si può dire di più: se ad un generico t il punto materiale, che a $t = 0$ si trovava in $\mathbf{X}$, passa per $\mathbf{x}(\mathbf{X},\ t)$, esso sarà ancora all'interno delle porzioni che compongono il mezzo, cioè $\mathbf{x} \in V_\alpha(t)$ $\forall\alpha$.
Ma se tale numero di porzioni è arbitrariamente grande, in virtù delle (1), (2) si deve avere:

$$\lim_{\alpha\to\infty} V_{0\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} V_\alpha(t) = 0 \tag{3}$$

Poichè per definizione $\mathbf{x}$ è la posizione a $t \neq 0$ di un punto materiale che a $t = 0$ si trova in $\mathbf{X}$, si ha:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \tag{4}$$

$\mathbf{x}(\mathbf{X}$,t) gode della proprietà di essere invertibile, cioè esiste una funzione $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ tale che:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x} \tag{5}$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) = \mathbf{X} \tag{6}$$
$$\mathbf{X}(\mathbf{x},0) = \mathbf{x} \tag{7}$$

Definiamo ora $V(t)$ il volume occupato da tutti quei punti materiali che a $t = 0$ si trovano all'interno dello stesso volume V_0, e indichiamo con $A(t)$ la superficie su cui si trovano i punti che giacciono, a $t = 0$, su $A_0 = \partial V_0$ superficie di V_0. Sia poi $f = f(V,t)$ una grandezza intensiva quantificabile, misurabile e caratteristica di qualsiasi porzione di materia di volume V in ogni istante t. Qualora V collassasse in un punto $\mathbf{x}$, il valore di f sarebbe dato da:

$$f(\mathbf{x},t) = \lim_{V \to 0} f(V,t) \tag{8}$$

Grazie all'invertibilità della $\mathbf{x}$ sopra discussa, diventa possibile studiare il continuo adottando due approcci:

- Descrizione euleriana (o locale) di f: quello che interessa è il valore di f in un punto specifico $\mathbf{x}$ dello spazio in cui si trova un osservatore fisso:

$$f_E(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t) = \lim_{V \to 0} f(V,t) \tag{9}$$

- Descrizione lagrangiana (o materiale) di f: viene valutato istante per istante il valore di f per un punto materiale seguito nel suo moto che si trova in $\mathbf{X}$ quando $t = 0$:

$$f_L(\mathbf{X},t) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) \tag{10}$$

I due approcci sono intercambiabili in quanto uniti dalle relazioni:

$$f_L(\mathbf{X},t) = f_E(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t) \tag{11}$$

il valore di f per un punto materiale nella descrizione lagrangiana è uguale al valore di f, nella descrizione euleriana, che si ha nella posizione $\mathbf{x}$ per cui passa quel punto (che a $t = 0$ si trova in $\mathbf{X}$) all'istante t.

$$f_E(\mathbf{x},t) = f_L(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) \tag{12}$$

il valore di f in un punto $\mathbf{x}$ (descrizione euleriana) è uguale al valore di f per un punto materiale (descrizione lagrangiana) che passa in $\mathbf{x}$ a t (partendo da $\mathbf{X}$ a $t = 0$).

Quindi possiamo definire una derivata temporale di f:

- locale

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbf{x}} \tag{13}$$

- materiale

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \tag{14}$$

Si ha che:

$$\begin{aligned}
\frac{df(\mathbf{x},t)}{dt} &= \frac{df(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{dt}\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \\
&= \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{dt}\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\right]\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \\
&= \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{X},t)\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t)\right]\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \\
&= \frac{\partial f(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{x},t)
\end{aligned} \tag{15}$$

in quanto oltre alla dipendenza esplicita dal tempo abbiamo anche quella dovuta a $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$.

$$\mathbf{v}(\mathbf{X},t) = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{X},t)}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}} \tag{16}$$

è il campo di velocità del mezzo, e precisamente è la velocità che possiede al tempo t il punto materiale che a $t = 0$ è in $\mathbf{X}$.
Invece:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{X}}\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t)} \tag{17}$$

è la velocità del punto materiale che passa per $\mathbf{x}$ al tempo t.

2 L'equazione di bilancio nella fisica dei continui

Una proprietà f, quantificabile e misurabile, di un mezzo continuo gode delle seguenti proprietà:

- f è localizzabile: preso un qualunque volume V del continuo, sarà sempre definita la funzione $f = f(V)$ in tale volume.
- f è estensiva: dato un volume V del continuo unione di due volumi disgiunti V_1, V_2

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \\ V_1 \cap V_2 &= \oslash \end{aligned} \tag{18}$$

  si ha che

$$f(V) = f(V_1) + f(V_2) \tag{19}$$

  cioè il valore totale di f nel volume V è dato dalla somma dei valori che f assume in V_1 e V_2.

- E' definito un flusso $\Phi_f(A)$ di f: presa una qualunque superficie orientata A del mezzo, il flusso è la quantità di f che fluisce attraverso A nell'unità di tempo, dal lato negativo al lato positivo in base all'orientazione del versore normale alla superficie. Convenzionalmente, se la superficie è chiusa, si assume f fluire dall'interno verso l'esterno.
- Il flusso di f è estensivo: presa una qualunque superficie A unione di due superfici equiorientate e disgiunte A_1, A_2

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cup A_2 \\ A_1 \cap A_2 &= \oslash \end{aligned} \tag{20}$$

  si ha che il flusso totale attraverso A è la somma dei flussi attraverso le due superfici

$$\Phi_f(A) = \Phi_f(A_1) + \Phi_f(A_2) \tag{21}$$

- E' definito un rateo di produzione $\Pi_f(V)$ di f: preso un qualunque volume V del mezzo, il rateo di produzione è la quantità di f creata per unità di tempo all'interno di V.
- Il rateo di produzione di f è estensivo: se vale (18), la quantità di f prodotta in V è la somma della quantità di f prodotta in V_1 e V_2

$$\Pi_f(V) = \Pi_f(V_1) + \Pi_f(V_2) \tag{22}$$

- f ubbidisce alla seguente equazione di bilancio:

$$\frac{df(V)}{dt} = -\Phi_f(\partial V) + \Pi_f(V) \tag{23}$$

Preso cioè un qualsiasi volume V del mezzo, racchiuso da una superficie ∂V avente orientazione uscente, la variazione per unità di tempo di f in V è data dalla quantità di f che viene prodotta in V nell'unità di tempo, a cui va sottratta la quantità di f che esce dal volume nell'unità di tempo attraverso la superficie ∂V.
E' possibile definire una densità ρ_f di f, che indica la quantità di f contenuta in un volume infinitesimo del continuo

$$\rho_f(\mathbf{x}) = \lim_{vol(V)\to 0, \mathbf{x}\in V} \frac{f(V)}{vol(V)} \tag{24}$$

Questa grandezza permette di scrivere

$$f(V) = \int_V d^3x \rho_f \tag{25}$$

Dimostrazione della (25): si basa sostanzialmente sul fatto che la f è una proprietà estensiva del continuo. Si divide il volume V in un numero N molto grande di parti disgiunte piccole V_α, contenenti il punto $\mathbf{x}_\alpha$, ciascuna con una densità $\rho_f(\mathbf{x}_\alpha)$ di f. Per la proprietà di estensività, la $f(V)$ totale sarà data dalla somma di f contenuta nei singoli volumetti:

$$f(V) = \sum_{\alpha=1}^{N} f(V_\alpha) \simeq \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha \rho_f(\mathbf{x}_\alpha) \tag{26}$$

dove ci siamo serviti della (24). Se si divide V in un numero N tendente a infinito di parti, ciascuna di esse deve necessariamente possedere un volume infinitesimo. Ciò ci permette di passare dalla somma all'integrale, cioè di scrivere:

$$f(V) = \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha \rho_f(\mathbf{x}_\alpha) \simeq \int_V d^3x \rho f \tag{27}$$

Ma anche flusso e rateo di produzione sono proprietà estensive del mezzo, e nulla vieta quindi di definire le rispettive densità come:

$$\sigma_f(\mathbf{x}) = \lim_{area(A)\to 0, \mathbf{x}\in A} \frac{\Phi_f(A)}{area(A)} \tag{28}$$

$$\pi_f(\mathbf{x}) = \lim_{vol(V)\to 0, \mathbf{x}\in V} \frac{\Pi_f(V)}{vol(V)} \tag{29}$$

e di avere la seguente scrittura:

$$\Phi_f(A) = \int_A d^2x\sigma_f \tag{30}$$

$$\Pi_f(V) = \int_V d^3x\pi_f \tag{31}$$

Dimostrazione della (30): si divide la superficie A in un numero L molto grande di piccole superfici disgiunte A_α, contenenti il punto $\mathbf{x}_\alpha$ e tangenti ad A proprio in questi punti. Per la estensività del flusso si ha:

$$\Phi_f(A) = \sum_{\alpha=1}^{L} \Phi_f(A_\alpha) \simeq \sum_{\alpha=1}^{L} A_\alpha \sigma_f(\mathbf{x}_\alpha) \simeq \int_A d^2x\sigma_f \tag{32}$$

per considerazioni analoghe a quanto fatto nella dimostrazione della (25).

Dimostrazione della (31): del tutto analoga a quella della (25), sostituendo f, ρ_f con Π_f, π_f rispettivamente.

Andando a sostituire la (25), (30), (31) nella (23) si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\rho_f = -\oint_{\partial V} d^2\sigma_f + \int_V d^3x\pi_f \tag{33}$$

Possiamo riscrivere il membro di sinistra come:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\rho_f = \int_V d^3x\Big[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho_f\mathbf{v})\Big] \tag{34}$$

che tiene conto del fatto che V è un volume materiale di un mezzo continuo che si può muovere con velocità $\mathbf{v}$, e che quindi dipende dal tempo. Se il mezzo non si muovesse ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) si avrebbe semplicemente:

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\rho_f = \int_V d^3x\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \tag{35}$$

Dimostrazione della (34): siamo interessati a

$$\frac{df(V)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V d^3x\rho_f \tag{36}$$

Il punto di partenza è la costruzione del rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
&\frac{f(V(t+\delta t), t+\delta t) - f(V(t), t)}{\delta t} \\
&= \frac{1}{\delta t}\Big[\int_{V(t+\delta t)} d^3x\rho_f(t+\delta t) - \int_{V(t)} d^3x\rho_f(t)\Big] \\
&= \frac{1}{\delta t}\Big[\int_{V(t+\delta t)} d^3x\Big[\rho_f(t) + \frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t}\delta t\Big] - \int_{V(t)} d^3x\rho_f(t)\Big] \\
&= \frac{1}{\delta t}\Big[\int_{V(t+\delta t)} d^3x\delta t\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \int_{V(t+\delta t)} d^3x\rho_f(t) - \int_{V(t)} d^3x\rho_f(t)\Big]
\end{aligned} \tag{37}$$

dove nella terza riga della catena è stato sostituito il primo integrando con il suo sviluppo di Taylor al prim'ordine. I due integrali finali restituiscono il valore della f nel volume infinitesimo $V(t+\delta t) - V(t)$, che possiamo considerare formato da tanti cilindretti di base $\delta\boldsymbol{A}$ e altezza $\delta\boldsymbol{h} = \mathbf{v}(t)\delta t$ e quindi di volume $\delta V = \delta\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{v}(t)\delta t$. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta t}\Big[\underbrace{\int_{V(t+\delta t)} d^3x\delta t\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} - \int_{V(t)} d^3x\delta t\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t}}_{O(\delta t^2)} + \int_{V(t)} d^3x\delta t\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \int_{V(t+\delta t)-V(t)} d^3x\rho_f(t)\Big] \\
&= \frac{1}{\delta t}\Big[\delta t\int_{V(t)} d^3x\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \oint_{\partial V(t)} d^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}(t)\delta t\rho_f(t) + O(\delta t^2)\Big] \\
&= \frac{1}{\delta t}\Big[\delta t\int_{V(t)} d^3x\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \delta t\int_{V(t)} d^3x\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_f\mathbf{v}(t)) + O(\delta t^2)\Big] \\
&= \int_{V(t)} d^3x\Big[\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_f\mathbf{v}(t)) + O(\delta t)\Big]
\end{aligned} \tag{38}$$

dove si è fatto uso del teorema della divergenza.
Mandando δt a zero si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
\frac{df(V(t), t)}{dt} &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\Big[\int_{V(t+\delta t)} d^3x\rho_f(t+\delta t) - \int_{V(t)} d^3x\rho_f(t)\Big] \\
&= \int_{V(t)} d^3x\Big[\frac{\partial\rho_f(t)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_f\mathbf{v}(t))\Big]
\end{aligned} \tag{39}$$

Attraverso l'argomento del tetraedro di Cauchy si può dimostrare che la densità di flusso σ_f è la proiezione di un vettore densità di corrente $\mathbf{J}_f$ lungo il versore $\mathbf{n}$, uscente e normale alla superficie ∂V

$$\sigma_f = \mathbf{J}_f\cdot\mathbf{n} \tag{40}$$

Le relazioni (34) e (40) permettono di riscrivere l'equazione di bilancio come:

$$\begin{aligned}
\int_V d^3x\Big[\frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_f\mathbf{v})\Big] &= -\oint_{\partial V} d^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{J}_f + \int_V d^3x\pi_f \\
&= -\int_V d^3x\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}_f + \int_V d^3x\pi_f
\end{aligned} \tag{41}$$

e portando tutto al primo membro

$$\int_V d^3x \Big[\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_f \mathbf{v} + \mathbf{J}_f) - \pi_f \Big] = 0 \tag{42}$$

L'integrale è sempre nullo indipendentemente dal volume di continuo, il quale è arbitrario; ciò sta a significare che la funzione integranda non può che essere nulla a sua volta.
Ecco quindi che si arriva ad una espressione differenziale dell'equazione di bilancio

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_f \mathbf{v} + \mathbf{J}_f) - \pi_f = 0 \tag{43}$$

3 Discontinuità nella fisica dei continui

Un continuo è caratterizzato da diverse proprietà (massa, carica, momento angolare, ...) descritte da campi scalari o vettoriali che denotiamo con Ψ.
Può succedere che ci siano delle porzioni del mezzo di spessore molto piccolo h dove tali grandezze variano in modo estremamente rapido, ad esempio laddove ci sono cambiamenti di composizione chimica.
Facendo tendere a zero lo spessore h, lo strato materiale si riduce ad una superficie, in prossimità della quale le varie Ψ presentano, da un punto di vista matematico, delle vere e proprie discontinuità a salti.
Per studiare il problema dobbiamo partire dall'ipotesi che, in presenza di tali discontinuità, tutte le equazioni viste fin'ora rimangono valide, ma in senso distribuzionale. Sia quindi V un volume (eventualmente in moto) del mezzo. Chiamiamo funzione caratteristica di V la funzione:

$$\chi_V(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in V \\ 0 & \mathbf{x} \notin V \end{cases} \tag{44}$$

che gode della seguente proprietà:

$$\int d^3x \chi_V \phi = \int_V d^3x \phi \tag{45}$$

dove ϕ è una qualsiasi funzione test regolare.
Allo stesso modo, per una superficie A che si muove, è possibile definire la sua funzione δ di Dirac come:

$$\delta_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} +\infty & \mathbf{x} \in A \\ 0 & \mathbf{x} \notin A \end{cases} \tag{46}$$

con la proprietà che:

$$\int d^3x \delta_A \phi = \int_A d^2x \phi \tag{47}$$

Se ∂V è la superficie di V che si muove con velocità $\mathbf{w}$ e con versore $\mathbf{n}$ normale diretto verso l'esterno, valgono le relazioni:

$$\boldsymbol{\nabla} \chi_V = -\mathbf{n} \delta_{\partial V} \tag{48}$$

$$\frac{\partial \chi_V}{\partial t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \delta_{\partial V} \tag{49}$$

Dimostrazione della (48): ci serviamo delle proprietà (45) della funzione caratteristica χ_V e (47) della δ di Dirac. Presa una qualunque funzione test ϕ, integrando per parti si ha:

$$\begin{aligned}\int d^3x \boldsymbol{\nabla}\chi_V\phi &= -\int d^3x\chi_V\boldsymbol{\nabla}\phi = -\int_V d^3x\boldsymbol{\nabla}\phi \\ &= -\oint_{\partial V} d^2\mathbf{x}\phi = -\oint_{\partial V} d^2x\mathbf{n}\phi = -\int_V d^3x\mathbf{n}\delta_{\partial V}\phi\end{aligned} \tag{50}$$

da cui la (48)

Dimostrazione della (49): sia ϕ una funzione test indipendente dal tempo. Il volume infinitesimo $V(t+\delta t) - V(t)$ lo possiamo considerare formato da tanti cilindretti di base δA e altezza $\delta h = \mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\delta t$ e quindi di volume $\delta V = \delta A\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\delta t$. Per il teorema del trasporto e le proprietà (45), (47) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}&\int d^3x\frac{\partial\chi_V}{\partial t}\phi = \frac{d}{dt}\int d^3x\chi_V\phi = \frac{d}{dt}\int_{V(t)} d^3x\phi \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)} d^3x\phi - \int_{V(t)} d^3x\phi\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{V(t+\delta t)-V(t)} d^3x\phi\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\oint_{\partial V(t)} d^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}(t)\delta t\phi + O(\delta t^2)\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\delta t\oint_{\partial V(t)} d^2x\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\phi + O(\delta t^2)\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\delta t\int_{V(t)} d^3x\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\delta_{\partial V(t)}\phi + O(\delta t^2)\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\left[\int_{V(t)} d^3x\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\delta_{\partial V(t)}\phi + O(\delta t)\right] \\ &= \int_{V(t)} d^3x\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(t)\delta_{\partial V(t)}\phi\end{aligned} \tag{51}$$

da cui, confrontando il primo e l'ultimo integrale, si ricava la (49)

Ora, consideriamo una superficie A con normale $\mathbf{n}$ e velocità $\mathbf{w}$, che separa due regioni V_+, V_- tali che:

$$-\partial V_+ = \partial V_- = A \tag{52}$$

$$-\mathbf{n}_+ = +\mathbf{n}_- = \mathbf{n} \tag{53}$$

$$\mathbf{w}_+ = \mathbf{w}_- = \mathbf{w} \tag{54}$$

Se Ψ è quindi un campo che descrive una proprietà del mezzo, regolare ovunque ma non lungo A dove presenta una discontinuità, esso può essere scritto nel seguente modo:

$$\Psi = \Psi_+ \chi_{V_+} + \Psi_- \chi_{V_-} \tag{55}$$

che tiene conto del fatto che Ψ è definita in entrambi i volumi ed è estensiva. Ad esempio, se misurassimo il valore di Ψ in un punto di V_+, per la definizione della funzione caratteristica (44), si avrebbe $\chi_{V_+} = 1$ e $\chi_{V_-} = 0$, cioè semplicemente $\Psi = \Psi_+$.
Dalle equazioni (48), (49), (52) – (54) si ricavano altre interessanti informazioni sulle Ψ, come la sua variazione spaziale:

$$\boldsymbol{\nabla}\Psi = (\boldsymbol{\nabla}\Psi)_{vol} + (\boldsymbol{\nabla}\Psi)_{surf}\delta_A \tag{56}$$

dove:

$$(\boldsymbol{\nabla}\Psi)_{vol} = \boldsymbol{\nabla}\Psi_+ \chi_{V_+} + \boldsymbol{\nabla}\Psi_- \chi_{V_-} \tag{57}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\Psi)_{surf} = \mathbf{n}(\Psi_+ - \Psi_-) \tag{58}$$

e quella temporale:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{vol} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{surf}\delta_A \tag{59}$$

dove:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{vol} = \left(\frac{\partial \Psi_+}{\partial t}\right)\chi_{V_+} + \left(\frac{\partial \Psi_-}{\partial t}\right)\chi_{V_-} \tag{60}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_{surf} = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}(\Psi_+ - \Psi_-) \tag{61}$$

La quantità $\Psi_+ - \Psi_-$ incontrata nelle (58) e (61), rappresenta la discontinuità di Ψ attraverso A e per consuetudine la si denota come:

$$[\![\Psi]\!] = \Psi_+ - \Psi_- \tag{62}$$

Come esposto nelle sezioni precedenti, per Ψ sono definite una densità ρ_Ψ, una densità di corrente $\mathbf{J}_\Psi$ e una densità di rateo di produzione π_Ψ.
Per le grandezze in questione possiamo fare le seguenti assunzioni:

- Se Ψ è regolare ovunque eccetto per discontinuità di salto attraverso una superficie A, anche ρ_Ψ e $\mathbf{J}_\Psi$ lo sono.

- π_Ψ è scomponibile in un termine di volume e in un termine di superficie:

$$\pi_\Psi = \pi_{\Psi vol} + \pi_{\Psi surf}\delta_A \tag{63}$$

  con $\pi_{\Psi vol}$ regolare eccezion fatta su A, e $\pi_{\Psi surf}$ regolare e definita su A.

Tutto ciò ha importanti ripercussioni sull'equazione di bilancio di Ψ. In virtù delle due assunzioni, passiamo dalla (43) a:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left(\frac{\partial \rho_\Psi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_\Psi \mathbf{v} + \mathbf{J}_\Psi)\right)_{vol} - \pi_{\Psi vol}}_{equazione\ ordinaria\ su\ V\setminus A} \\ &+ \underbrace{(-\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}[\![\rho_\Psi]\!] + \mathbf{n}\cdot[\![\rho_\Psi\mathbf{v} + \mathbf{J}_\Psi]\!] - \pi_{\Psi surf})\delta_A}_{condizione\ sulla\ giunzione\ A} = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

Si evince quindi che se Ψ presenta discontinuità di salto lungo una superficie, queste comportano una correzione persino all'equazione di bilancio.
In modo più compatto si può anche scrivere:

$$-\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}[\![\rho_\Psi]\!] + \mathbf{n}\cdot[\![\rho_\Psi\mathbf{v}]\!] = \mathbf{n}\cdot[\![\rho_\Psi(\mathbf{v}-\mathbf{w})]\!] \tag{65}$$

4 Conservazione della massa

Una proprietà localizzabile ed estensiva di un continuo è sicuramente la massa m, la quale, restando invariata nel tempo, ubbidisce alla legge di conservazione:

$$\frac{dm(V)}{dt} = 0 \tag{66}$$

Confrontandola con la (23), la (66) è di fatto un'equazione di bilancio con flusso e rateo di produzione di m nulli:

$$\Phi_m(\partial V) = 0 \tag{67}$$

$$\Pi_m(V) = 0 \tag{68}$$

Ma possiamo dire di più: per la massa sono definite densità ρ_m, densità di corrente $\mathbf{J}_m$ e densità di rateo di produzione π_m. Ricordando le (28), (29), (40) e dal valore nullo delle (67), (68) si deve chiaramente avere:

$$\mathbf{J}_m = 0 \tag{69}$$

$$\pi_m = 0 \tag{70}$$

con conseguente espressione locale della legge di bilancio:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}) = 0 \tag{71}$$

Se A è una superficie di discontinuità, con normale $\mathbf{n}$ e velocità $\mathbf{w}$, la condizione di giunzione per la massa, per le (69), (70) si riduce a:

$$\mathbf{n} \cdot [\![\rho_m(\mathbf{v} - \mathbf{w})]\!] = 0 \qquad su\, A \tag{72}$$

Data una qualsiasi proprietà f del continuo, tramite la densità di massa possiamo definire la sua densità specifica $\tilde{\rho}_f$ come:

$$\tilde{\rho}_f = \frac{\rho_f}{\rho_m} \tag{73}$$

che rappresenta la quantità di f per unità di massa.
In totale analogia, si ha anche una densità specifica di rateo di produzione $\tilde{\pi}_f$:

$$\tilde{\pi}_f = \frac{\pi_f}{\rho_m} \tag{74}$$

Si può scrivere:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_f \mathbf{v}) = \frac{\partial (\rho_m \tilde{\rho}_f)}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \tilde{\rho}_f \mathbf{v}) \\
&= \tilde{\rho}_f \underbrace{\Big[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}) \Big]}_{=0} + \rho_m \Big[\frac{\partial \tilde{\rho}_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} (\tilde{\rho}_f) \Big] \\
&= \rho_m \Big[\frac{\partial \tilde{\rho}_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \tilde{\rho}_f \Big] = \rho_m \frac{d \tilde{\rho}_f}{df}
\end{aligned}
\tag{75}
$$

che va sostituita nell'equazione di bilancio di f:

$$
\rho_m \frac{d \tilde{\rho}_f}{dt} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_f - \rho_m \tilde{\pi}_f = 0 \tag{76}
$$

Queste proprietà specifiche non possono ovviamente essere trascurate in presenza di una superficie di discontinuità, per la quale la condizione della giunzione è:

$$
\mathbf{n} \cdot [\![\rho_m \tilde{\rho}_f (\mathbf{v} - \mathbf{w}) + \mathbf{J}_f]\!] - (\rho_m \tilde{\pi}_f)_{surf} = 0 \tag{77}
$$

5 Bilancio del momento e prima legge della dinamica

Il momento $\mathbf{P}$ è una proprietà localizzabile ed estensiva di ogni mezzo continuo. La sua variazione nel tempo è definita dalla prima legge della dinamica:

$$\frac{d\mathbf{P}(V)}{dt} = \mathbf{F}_V \tag{78}$$

da cui si evince che tale variazione temporale eguaglia la forza totale $\mathbf{F}(V)$ agente sul mezzo occupante un certo volume V.
Ma esistono due tipi di forze, entrambi localizzabili ed estensive: le forze $\mathbf{F}_{surf}(\partial V)$ che agiscono sulla superficie ∂V dal lato positivo a quello negativo, e le forze di volume $\mathbf{F}_{vol}(V)$.
Ha dunque senso concepire la risultante delle forze applicate come somma di questi due contributi:

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_{surf}(\partial V) + \mathbf{F}_{vol}(V) \tag{79}$$

che combinata alla (78) porta a:

$$\frac{d\mathbf{P}(V)}{dt} = \mathbf{F}_{surf}(\partial V) + \mathbf{F}_{vol}(V) \tag{80}$$

Come per la massa, confrontando quest'ultima equazione con la (23), si vede come la (80) abbia la forma di una legge di bilancio dove:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{P}}(\partial V) = -\mathbf{F}_{surf}(\partial V) \tag{81}$$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{P}}(V) = \mathbf{F}_{vol}(V) \tag{82}$$

cioè il flusso di $\mathbf{P}$ eguaglia l'opposto delle forze superficiali agenti sulla frontiera ∂V di V, e il rateo di produzione di $\mathbf{P}$ può essere visto come il totale delle forze di volume.
Anche per il momento $\mathbf{P}$ ha senso definire una densità $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}}$, una densità di rateo di produzione $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{P}}$ (che sono due grandezze vettoriali) e una densità di corrente $\mathbf{J}_{\mathbf{P}}$ (la quale invece è un tensore).
Ma vediamo nel dettaglio come emergono una per una.
Consideriamo dapprima una regione materiale di volume ΔV, con massa $\Delta m = \Delta V \rho_m$ e momento $\Delta\mathbf{P} = \Delta m\mathbf{v} = \Delta V\rho_m\mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è il campo di velocità del continuo. Possiamo così definire la densità di momento $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}}$ basandoci sulla (24):

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{P}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta V} = \rho_m\mathbf{v} \tag{83}$$

La natura estensiva delle forze di volume, mostra che c'è un vettore densità di forza $\boldsymbol{f}$ che permette di scrivere la forza agente su ΔV come:

$$\Delta \mathbf{F}_{vol} = \Delta V \boldsymbol{f} \tag{84}$$

e quindi:

$$\mathbf{F}_{vol}(V) = \int_V d^3x \boldsymbol{f} = \mathbf{\Pi_P}(V) = \int_V d^3x \boldsymbol{\pi}_\mathbf{P} \tag{85}$$

da cui si capisce come la densità di rateo di produzione del momento $\boldsymbol{\pi}_\mathbf{P}$ eguagli tale densità di forza:

$$\boldsymbol{\pi}_\mathbf{P} = \boldsymbol{f} \tag{86}$$

Ora, presa una superficie materiale di area $\Delta \boldsymbol{A}$, attraverso l'argomento del tetraedro di Cauchy, si può dimostrare l'esistenza di un tensore $\boldsymbol{t}$ chiamato tensore di stress, che rappresenta la densità di forza superficiale.
Così, la forza che agisce sulla superficie orientata è $\Delta \mathbf{F}_{surf} = \Delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t}$; integrando e ricordando le (30), (40) e (81) ricaviamo:

$$\mathbf{F}_{surf}(A) = \int_A d^2\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{t} = -\mathbf{\Phi_P}(A) = -\int_A d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{J_P} \tag{87}$$

da cui:

$$\mathbf{J_P} = -\boldsymbol{t} \tag{88}$$

Abbiamo così tutti gli ingredienti per arrivare ad una formulazione alternativa sia per la legge di bilancio locale del momento $\mathbf{P}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\mathbf{P}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \boldsymbol{\rho}_\mathbf{P} + \mathbf{J_P}) - \boldsymbol{\pi}_\mathbf{P} = \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v} - \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{f} = \mathbf{0} \tag{89}$$

sia per la condizione di giunzione in presenza di una superficie di discontinuità A con normale $\hat{n}$ e velocità $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{n} \cdot [\![\rho_m(\mathbf{v} - \mathbf{w})(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \boldsymbol{t}]\!] - \boldsymbol{f}_{surf} = \mathbf{0} \tag{90}$$

Le (89) e (90) possono però essere scritte ancora in altro modo con l'introduzione della densità di momento specifica $\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathbf{P}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\rho}}_\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{\rho}_\mathbf{P}}{\rho_m} = \frac{\rho_m \mathbf{v}}{\rho_m} = \mathbf{v} \tag{91}$$

e della densità di forza specifica $\tilde{\boldsymbol{f}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \frac{\boldsymbol{f}}{\rho_m} \tag{92}$$

Ricordando la (75), abbiamo una nuova equazione di bilancio:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{t} - \rho_m \tilde{\boldsymbol{f}} = \mathbf{0} \tag{93}$$

e una nuova condizione di giunzione:

$$\mathbf{n} \cdot [\![\rho_m (\mathbf{v} - \mathbf{w})(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \boldsymbol{t}]\!] - (\rho_m \tilde{\boldsymbol{f}})_{surf} = 0 \tag{94}$$

6 Bilancio del momento angolare

Un'altra proprietà estensiva e localizzabile caratteristica di un mezzo continuo è il momento angolare $\mathbf{L}$.
La prima legge della dinamica afferma che la variazione temporale di $\mathbf{L}$ eguaglia il momento torcente $\mathbf{N}_V$ delle forze applicate a V:

$$\frac{d\mathbf{L}(V)}{dt} = \mathbf{N}_V \tag{95}$$

Abbiamo detto che esistono forze superficiali e di volume, le cui rispettive risultanti sono $\mathbf{F}_{surf}$ e $\mathbf{F}_{vol}$. Tale suddivisione si estende anche al momento torcente, che può essere quindi scritto come:

$$\mathbf{N}_V = \mathbf{N}_{surf}(\partial V) + \mathbf{N}_{vol}(V) \tag{96}$$

con $\mathbf{N}_{surf}(\partial V)$ e $\mathbf{N}_{vol}(V)$ localizzabili ed estensive in quanto lo sono $\mathbf{F}_{surf}$ e $\mathbf{F}_{vol}$. La (96) ci porta a riscrivere la (95):

$$\frac{d\mathbf{L}(V)}{dt} = \mathbf{N}_{surf}(\partial V) + \mathbf{N}_{vol}(V) \tag{97}$$

in modo da renderla confrontabile con un'equazione di bilancio in cui:

$$\mathbf{\Phi}_{\mathbf{L}}(\partial V) = -\mathbf{N}_{surf}(\partial V) \tag{98}$$

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{L}}(V) = \mathbf{N}_{vol}(V) \tag{99}$$

Alla luce di ciò sono definite due grandezze vettoriali (densità di momento angolare $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{L}}$ e densità di rateo di produzione di momento angolare $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}}$) e una tensoriale (densità di corrente di momento angolare $\mathbf{J}_{\mathbf{L}}$) di cui esplicitiamo ora una per una la forma.
Consideriamo un volume materiale ΔV di massa $\Delta m = \Delta V \rho_m$ e con momento angolare $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \Delta m\mathbf{v} = \Delta V\mathbf{x} \times \rho_m\mathbf{v}$.
La densità di momento angolare è definita allora come:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{L}} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta V} = \mathbf{x} \times \rho_m\mathbf{v} \tag{100}$$

Ora, sia $\Delta\mathbf{F}_{vol} = \Delta V\boldsymbol{f}$ la forza di volume che agisce su ΔV con momento torcente di volume $\Delta\mathbf{N}_{vol} = \mathbf{x} \times \Delta\mathbf{F}_{vol} = \mathbf{x} \times \Delta V\boldsymbol{f}$. Ne segue che:

$$\mathbf{N}_{vol}(V) = \int_V \mathbf{x} \times d^3x\boldsymbol{f} = \mathbf{\Pi}_{\mathbf{L}}(V) = \int_V d^3x\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}} \tag{101}$$

cioè:

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{f} \tag{102}$$

Prendiamo poi una superficie materiale di area $\Delta\boldsymbol{A}$ su cui agisce una forza $\Delta\mathbf{F}_{surf} = \Delta\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{t}$ con momento torcente di superficie $\Delta\mathbf{N}_{surf} = \mathbf{x} \times \Delta\mathbf{F}_{surf} = \mathbf{x} \times (\Delta\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{t})$. Ne segue che:

$$\mathbf{N}_{surf}(A) = \int_A \mathbf{x} \times (d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) = -\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{L}}(A) = \int_A d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}_{\mathbf{L}} \tag{103}$$

cioè:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{L}} = -\mathbf{t}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{104}$$

in quanto:

$$\mathbf{x} \times (d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) = -(d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) \times \mathbf{x} = -(d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{t})\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -d^2\mathbf{x}(\mathbf{t}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \tag{105}$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ rappresenta il simbolo di Levi Civita.
Abbiamo così tutti gli elementi per scrivere l'equazione di bilancio in forma locale:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{L}}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{L}} + \mathbf{J}_{\mathbf{L}}) - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{L}} \\ &= \frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v}) - \mathbf{t}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{x} \times \boldsymbol{f} \\ &= \mathbf{t} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \tag{106}$$

Dimostrazione della (106): semplifichiamo uno alla volta i termini del blocco centrale della (106).

- $\frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v})}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}}_{=0} \times \rho_m \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} = \mathbf{x} \times \frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t}$
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v})) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}(\mathbf{v} \times \mathbf{x})) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon})$
  $= -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v})\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} - \rho_m \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v}) \times \mathbf{x} - \rho_m \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v})$
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{t}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{t})\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} + (\mathbf{t}^t \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{t}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{t}^t \cdot \mathbf{1}) \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{t}) - \mathbf{t} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}$

Allora:
$\frac{\partial(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{x} \times \rho_m \mathbf{v}) + \mathbf{t}\mathbf{x} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{x} \times \boldsymbol{f} = \mathbf{x} \times \underbrace{\left[\frac{\partial(\rho_m \mathbf{v})}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{t}) - \mathbf{f}\right]}_{=0} - \mathbf{t} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon}$

Il termine tra parentesi si annulla perchè corrisponde alla (89), cioè all'equazione di bilancio del momento $\mathbf{P}$.
Quindi si arriva a:
$\mathbf{x} \times \mathbf{0} - \mathbf{t} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{t} \cdot \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$

Dall'equazione di bilancio si può quindi vedere come il tensore di stress abbia una restrizione in più da rispettare, quella di essere simmetrico:

$$\mathbf{t}^t = \mathbf{t} \tag{107}$$

7 Generalità sul tensore di stress

In questa sezione vogliamo approfondire il ruolo, tutt'altro che marginale, del tensore di stress $\mathbf{t}$ nella meccanica dei continui.
Il punto di partenza è la scelta di un elemento di superficie materiale orientata $\Delta\boldsymbol{A} = \Delta A\mathbf{n}$ su cui agiscono forze date da:

$$\Delta\mathbf{F}_{surf} = \Delta A\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \tag{108}$$

Tali forze sono la risultante di due contributi, uno normale alla superficie e uno tangenziale. La prima è definita come:

$$\Delta\mathbf{F}^{\perp}_{surf} = \Delta\mathbf{F}_{surf} \cdot \mathbf{n} = \Delta A\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \tag{109}$$

che permette di scrivere la forza normale per unità di area come:

$$\mathbf{t}^{\perp}_{\mathbf{n}} = \frac{\Delta\mathbf{F}^{\perp}_{surf}}{\Delta A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \tag{110}$$

$\mathbf{t}^{\perp}_{\mathbf{n}}$ è chiamato tensione se è positivo, compressione se negativo.
La componente tangenziale si può quindi esprimere come la differenza fra la forza superficiale totale e la sua componente normale:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F}^{\|}_{surf} &= \Delta\mathbf{F}_{surf} - \Delta\mathbf{F}_{surf} \cdot \mathbf{nn} = \Delta A\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} - \Delta A\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{nn} \\ &= \Delta A\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \Delta\mathbf{F}_{surf} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn})\end{aligned} \tag{111}$$

Così:

$$\mathbf{t}^{\|}_{\mathbf{n}} = \frac{\Delta\mathbf{F}^{\|}_{surf}}{\Delta A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) \tag{112}$$

è la forza tangenziale per unità di area o stress di taglio lungo $\mathbf{n}$.

Il tensore di stress $\mathbf{t}$ può essere costruito tramite tre campi vettoriali $\mathbf{e}_i$ e tre campi scalari t_i tali che:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{113}$$

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{3} t_{(i)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i \tag{114}$$

Tale decomposizione nella terna ortogonale $\mathbf{e}_i$ varia punto per punto nello spazio, e infatti anche il tensore di stress ha questa proprietà. Recuperando le relazioni (110) e (112) emerge che:

$$t^{\perp}_{\mathbf{e}_i} = t_{(i)} \tag{115}$$

$$t^{\parallel}_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{0} \tag{116}$$

Lo stress di taglio si annulla lungo gli assi principali di $\mathbf{t}$, definiti proprio dagli $\mathbf{e}_i$.
Tutte queste grandezze giocano un importante ruolo nella fisica dei fluidi; giusto per citare un esempio, la pressione idrostatica è definita come la media dello stress normale lungo gli assi principali:

$$\varpi = -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} t_{(i)} = -\frac{1}{3} tr\mathbf{t} \tag{117}$$

8 Elasticità lineare

Per descrivere la deformazione di un corpo solido possiamo servirci del cosiddetto campo di dislocamento euleriano.
Consideriamo un solido deformato su cui si trova un punto materiale che all'istante di tempo iniziale $t = 0$ si trova in $\mathbf{x}$. Assumendo che l'oggetto ritorni poi nella sua configurazione non deformata, tale punto si troverà al tempo t in $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$.
Chiamiamo allora deviazione del punto materiale la quantità:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{118}$$

la cui derivata temporale fornisce il campo di velocità del mezzo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \tag{119}$$

che per piccole deviazioni $\mathbf{u}$ (cioè se $\left|\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\right| \ll 1$) si riduce alla seguente approssimazione lineare di dislocamento:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \tag{120}$$

Per considerazioni analoghe, l'accelerazione del solido è data da:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \tag{121}$$

Dalle (120), (121) si ricava l'equazione dinamica fondamentale dei solidi elastici lineari:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{t} - \rho_m \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \tag{122}$$

9 Mezzi elastici isotropi e lineari

Per avere stress di deformazione i punti materiali che compongono un solido devono avere dislocamento $\mathbf{u} \neq 0$ l'uno diverso dall'altro, vale a dire con $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \neq 0$.
Così, il tensore di stress al prim'ordine per i solidi elastici è dato dalla legge di Hooke:

$$\mathbf{t} = \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \tag{123}$$

dove $\mathbf{C}$ è una quadriade costante.
Questo è solo il più semplice dei modelli che è possibile fare per $\mathbf{t}$, valido quando si ha a che fare con una deformazione piccola ma non trascurabile, che ci permette di non tener conto di tutti quei termini aggiuntivi che spiegano il comportamento del corpo quando è estremamente deformato o, addirittura, subisce una rottura.
Qualora il mezzo sia anche isotropo, abbiamo ulteriori restrizioni su $\mathbf{t}$, espresso ora dalla legge di Hooke per mezzi elastici isotropi e lineari:

$$\mathbf{t} = \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}\mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^t) \tag{124}$$

dove λ, μ sono termini costanti detti coefficienti di Lamè che godono delle seguenti proprietà:

$$\lambda + 2\mu > 0 \tag{125}$$

$$\lambda < 0 \tag{126}$$

$$\mu > 0 \tag{127}$$

Quest'ultimo tipo di mezzi continui ubbidisce alla seguente equazione fondamentale della dinamica:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} - (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} - \rho_m \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \tag{128}$$

ottenuta sostituendo la (124) nella (122).
Supponiamo ora che non ci siano campi esterni applicati così da avere $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0}$. Da un teorema generale del calcolo vettoriale, questo fatto porta a concepire $\mathbf{u}$ come somma di una parte longitudinale irrotazionale $\mathbf{u}_l$ e di una parte trasversale solenoidale $\mathbf{u}_t$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t \tag{129}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}_l = 0 \tag{130}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_t = 0 \tag{131}$$

Conseguentemente anche la (128) si riduce a due equazioni:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_l = \mathbf{0} \tag{132}$$

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t = \mathbf{0} \tag{133}$$

Dimostrazione delle (132), (133) : Sostituendo la (129) nella (128), otteniamo:

$$\mathbf{0} = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_l - (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_l = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t - (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_t \tag{134}$$

Poichè $\mathbf{u}_l$ è irrotazionale, deve esistere un campo scalare Ψ tale che:

$$\mathbf{u}_l = \boldsymbol{\nabla}\Psi \tag{135}$$

Infatti:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}_l = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\Psi) = 0 \tag{136}$$

Così:

$$\begin{aligned} \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_l + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_l &= \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\nabla}\Psi + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Psi) \\ &= \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\nabla}\Psi + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\nabla}\Psi = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\nabla}\Psi = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_l \end{aligned} \tag{137}$$

Essendo poi $\mathbf{u}_t$ solenoidale (cioè a divergenza nulla), abbiamo che:

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_t = \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}_t) = \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t \tag{138}$$

Sostituendo nella (134) si ottiene:

$$\mathbf{0} = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_l = \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - \mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u}_t \tag{139}$$

Nei solidi, ρ_m è approssimativamente costante sia nello spazio sia nel tempo. Questo fatto rende le (132), (133) confrontabili con un'equazione di d'Alembert della forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \phi = 0 \tag{140}$$

la quale descrive la propagazione di onde alla velocità c. Quindi essendo due le equazioni, abbiamo due tipi di onde: longitudinali e trasversali, che viaggiano a una velocità rispettivamente pari a:

$$c_l = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{141}$$

$$c_t = \left(\frac{\mu}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{142}$$

10 Fluidi viscosi lineari

Fra i mezzi isotropi troviamo i fluidi, il cui tensore di stress è generato dal moto relativo delle masse di fluido stesso. E' richiesto che il mezzo viscoso si muova con una velocità non nulla $\mathbf{v}$ con $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ per poter scrivere:

$$\mathbf{t} = -\varpi_0 \mathbf{1} + \lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v})^t) \tag{143}$$

Se il fluido è in quiete ($\mathbf{v} = 0$), la (143) si riduce a:

$$\mathbf{t} = -\varpi_0 \mathbf{1} \tag{144}$$

cioè il tensore di stress eguaglia l'opposto del campo di pressione per ($\mathbf{v} = 0$).
I fluidi viscosi lineari che ubbidiscono alla (143) sono detti fluidi di Navier-Stokes.
λ e μ sono due coefficienti scalari chiamati rispettivamente funzioni di viscosità di carico e funzione di viscosità di taglio. Essi dipendono dalla densità di massa ρ_m (come anche ϖ_0) e da considerazioni termodinamiche si può dimostrare che:

$$\mu \geq 0 \tag{145}$$

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \tag{146}$$

e se nella (146) vale l'uguaglianza il fluido è detto Newtoniano.
Le due equazioni fondamentali della dinamica per un fluido di Navier-Stokes sono:

- equazione di conservazione della massa:

$$\frac{d\rho_m}{dt} - \rho_m \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{147}$$

- equazione di Navier-Stokes

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\nabla} \varpi_0 - \boldsymbol{\nabla}(\lambda \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\mu(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{v})^t)\right] - \rho_m \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \tag{148}$$

La seconda è usata come modello di base per le previsioni metereologiche. In quest'ottica, il termine $\tilde{\mathbf{f}}$ è particolarmente importante, in quanto contiene il contributo non solo della forza di gravità, ma soprattutto di quella di Coriolis, responsabile della formazione dei cicloni.

11 Applicazione: il teorema di Bernoulli

Consideriamo un fluido non viscoso soggetto alla sola forza di gravità. Allora:

$$\mathbf{t} = -\varpi \mathbf{1} \tag{149}$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = -\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{150}$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale. L'equazione di bilancio del momento è:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{t} - \rho_m \tilde{\mathbf{f}} = \rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \boldsymbol{\nabla}\varpi + \rho_m \boldsymbol{\nabla}\phi = 0 \tag{151}$$

La (151) implica che:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \phi + \frac{\varpi}{\rho_m}\Big) = \frac{1}{\rho_m}\Big(\frac{\partial \varpi}{\partial t} + \varpi \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\Big) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{152}$$

Dimostrazione della (152):

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}\cdot\Big[\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\rho_m}\boldsymbol{\nabla}\varpi + \boldsymbol{\nabla}\phi\Big] \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{\varpi}{\rho_m}\Big) + \frac{\varpi}{\rho_m^2}\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho_m + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \phi + \frac{\varpi}{\rho_m}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\varpi}{\rho_m}\Big) - \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\varpi}{\rho_m^2}\underbrace{\Big[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_m \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\Big]}_{=0\, per\, la\, (71)} \\ &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \phi + \frac{\varpi}{\rho_m}\Big) - \frac{1}{\rho_m}\Big(\frac{\partial \varpi}{\partial t} + \varpi \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}\Big) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \tag{153}$$

Supponiamo che il fluido sia statico, cioè che:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0 \tag{154}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{155}$$

Ipotizziamo anche che sia incomprimibile:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{156}$$

Dimostrazione della (156): Consideriamo una porzione di fluido di volume $V(t)$. La condizione di incompressibilità comporta che tale volume rimanga costante nel tempo, cioè che:

$$\frac{d}{dt} vol(V(t)) = 0 \tag{157}$$

Ora,

$$0 = \frac{d}{dt} vol(V(t)) = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} d^3x 1 = \int_{V(t)} d^3x \Big[\frac{\partial 1}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v}1)\Big] = \int_{V(t)} d^3x \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \quad (158)$$

Da cui la (156).

Dalla (152), otteniamo così l'espressione analitica di quello che è noto come teorema di Bernoulli:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \phi + \frac{\varpi}{\rho_m}\Big) = 0 \quad (159)$$

Riferimenti bibliografici

[1] Spencer, Anthony James Merrill (2004), *Continuum mechanics*, Dover Publications, New York.

[2] Godunov, Sergej Konstantinovic & Romenskii, Evgenii I. (2003), *Elements of continuum mechanics and conservation laws*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.

[3] Belleni Morante, Aldo & Canarutto, Daniel (2008), *Elementi di meccanica dei continui*, Carocci, Roma.

[4] Colombo, Luciano & Giordano, Stefano (2007), *Introduzione alla teoria della elasticità: meccanica dei solidi continui in regime lineare elastico*, Springer, Milano.

[5] Landau, Lev Davidovič & Lifšic, Evgenij Michajlovič (2013), *Meccanica dei fluidi*, Editori Riuniti University Press, Roma.

[6] Landau, Lev Davidovič & Lifšic, Evgenij Michajlovič (1979), *Teoria dell'elasticità*, Editori Riuniti, Roma.

[7] Banfi, Carlo (1990), *Introduzione alla meccanica dei continui*, CEDAM, Padova.

[8] Gonzalez, Oscar & Stuart, Andrew M. (2008), *A first course in continuum machanics*, Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Reddy, Junuthula Narasimha (2013), *An introduction to continuum machanics*, Cambridge University Press, Cambridge.