

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

## IL PUNTO DI TORRICELLI-FERMAT

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
GIORGIO BOLONDI

Correlatore:  
Chiar.mo Prof.  
BRUNO D'AMORE

Presentata da:  
GIOVANNI BIGUCCI

Sessione I  
Anno Accademico 2009-2010

*...l'arbitrio della definizione è sottomesso  
a criteri razionali di cui il matematico deve tenere conto:  
la sua libertà, proprio come nella vita, implica responsabilità...*



# Introduzione

*”Qual è il punto che rende minima la distanza fra tre punti del piano?”*

Proposto da Fermat intorno alla metà del 1600, tale quesito interessò i più grandi matematici dell’epoca e, come ci racconta il Viviani, fu risolto per primo da Evangelista Torricelli in molti modi diversi.

Questo problema, noto come *problema di Torricelli-Fermat* rimase nell’ombra fino a quando J. Steiner (1796-1863) non lo riscoprì, dandone anche una generalizzazione ritenuta però di scarso interesse. Il giudizio sull’operato di Steiner è di R. Courant e H. Robbins che nel loro libro *”Che cos’è la matematica?”*[1] ne danno una generalizzazione molto più interessante, ponendo come oggetto della ricerca, non un punto, ma un tracciato che minimizza le distanze fra i punti del piano.

L’importanza del problema, posto in questi termini, risulta subito evidente, ma non dobbiamo dimenticarci di come tutto sia nato dalla semplice domanda a inizio pagina.

Allora, mi ripropongo, nella tesi, di riscoprire il problema di Torricelli-Fermat: analizzare le soluzioni storiche, cogliere la sua impronta nelle applicazioni a cui a dato vita e dimostrare con quali vantaggi possa essere inserito in un percorso didattico relativo alla scuola secondaria superiore.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Obiettivi della tesi</b>	<b>1</b>
<b>2 L'enunciato del problema di Torricelli-Fermat</b>	<b>3</b>
2.1 Il problema . . . . .	3
2.2 Soluzione . . . . .	3
2.3 Costruzione . . . . .	4
2.4 Notazione . . . . .	4
2.5 Esistenza di un minimo . . . . .	5
2.6 Due casi . . . . .	6
<b>3 Le soluzioni storiche</b>	<b>9</b>
3.1 La prima dimostrazione . . . . .	10
3.2 La seconda dimostrazione . . . . .	12
3.3 La soluzione del problema . . . . .	15
<b>4 Le applicazioni</b>	<b>17</b>
4.1 Il Teorema di Napoleone . . . . .	17
4.2 Il Teorema di Morley . . . . .	20
4.3 Il problema di Steiner . . . . .	23
<b>5 In classe</b>	<b>27</b>
5.1 Il ruolo della storia . . . . .	27
5.1.1 Esempio concreto: la dimostrazione migliore . . . . .	28

5.2	La formulazione in termini di quesito . . . . .	28
5.2.1	Un secondo esempio: dove costruire il campo da calcio?	29
5.3	Un approccio informatico: Cabri . . . . .	30
	<b>Conclusioni</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>

# Capitolo 1

## Obiettivi della tesi

Gli obiettivi della tesi riguardano ambiti diversi della matematica, ma molto legati tra loro, come vedremo.

Inizialmente, verrà presentata una semplice, ma formale enunciazione e risoluzione del problema di Torricelli-Fermat, per avere le idee più chiare possibili sull'argomento e per poterci lanciare ad un suo studio più approfondito sotto altri aspetti.

Nel terzo capitolo, si esaminerà il problema da un punto di vista **storico**, analizzando la prima soluzione di Evangelista Torricelli e le costruzioni geometriche annesse. L'attenta analisi verterà soprattutto sui procedimenti delle dimostrazioni prese in esame e sulla lunga gestazione della "risposta al quesito" che sembrava non soddisfare mai l'autore stesso, visto le innumerevoli e diverse riproposizioni.

Nel quarto capitolo, verranno proposte alcune applicazioni, a cui il problema ha dato vita, che ci serviranno a capire perchè, oggi, il punto di Torricelli-Fermat sia considerato a tutti gli effetti un punto notevole del triangolo. Verrà accennato, inoltre, a una sua generalizzazione che tuttora è oggetto di ricerca, poichè prevede numerosissime applicazioni concrete: *Il problema della rete di lunghezza minima* o di *Steiner*.

Dopo aver capito quanto sia stato importante per tutte le riflessioni a cui ha dato vita, prenderemo in esame il problema di Torricelli-Fermat anche in

un'**ottica didattica**. Più precisamente, si valuterà se e come è possibile proporre una sua versione all'interno del programma di geometria di una scuola secondaria, sottolineando i buoni risultati o le difficoltà che un insegnante potrebbe rilevare in classe. Non nascondo che mi concentrerò, soprattutto, sul ruolo della storia e della "formulazione in termini di quesito" del problema, per motivare questa audace proposta portando, nel mio piccolo, esempi concreti di lezioni in classe che, spero, avrò modo di sperimentare in futuro.

## Capitolo 2

# L'enunciato del problema di Torricelli-Fermat

### 2.1 Il problema

*Rendere minima la somma delle distanze da un punto ai vertici di un triangolo.*

### 2.2 Soluzione

Esiste un solo punto che realizza tale condizione di minimo e si chiama *punto di Torricelli-Fermat*.

Esso è l'unico punto  $F$  interno al triangolo  $ABC$  per il quale  $FA, FB, FC$  si incontrano formando angoli uguali, se tale punto esiste; altrimenti è il vertice del triangolo relativo all'angolo più grande.

Ci sono molti modi per dimostrare quanto appena detto, soprattutto in termini di geometria sintetica (ne è un esempio il metodo illustrato nel capitolo successivo, che è anche il più datato). Ho scelto una semplice dimostrazione contenuta in un articolo di P. G. Spain [2], autoconsistente e basata sul seguente lemma:

**Lemma 2.2.1.**

*Supponiamo che  $u, v, w$  siano versori del piano tali che*

$$u + v + w = 0$$

*Allora gli angoli compresi tra i vettori  $u, v, w$  sono tutti uguali (cioè misurano  $120^\circ$ ).*

*Dimostrazione.* I vettori  $u, v, w$  devono formare i lati di un triangolo equilatero. □

**2.3 Costruzione**

E' facile trovare il punto  $F$  tale che  $FA, FB, FC$  si incontrino formando angoli uguali, quando ce ne sia uno, ovvero quando tutti gli angoli del triangolo siano minori di  $120^\circ$ , attraverso la geometria elementare.

Sia  $ABC$  un triangolo con ciascun angolo minore di  $120^\circ$ . Allora i luoghi dei punti interni  $R, S, T$  tali che rispettivamente  $\widehat{ARB}$ ,  $\widehat{BSC}$  e  $\widehat{CTA}$  siano uguali a  $120^\circ$  sono archi circolari che si intersecano nel punto  $F$  richiesto. La costruzione (si confronti la figura 3.7 e il relativo paragrafo del capitolo successivo) mostra come possa essercene solamente uno di tali punti:così abbiamo l'unicità del punto di Torricelli-Fermat. Inoltre è evidente che tale punto non può esistere in un triangolo che abbia uno degli angoli interni uguale o maggiore di  $120^\circ$ .

**2.4 Notazione**

Siano  $a, b, c$  i vettori posizione dei vertici del triangolo  $ABC$  situato nel piano  $x, y$ . Chiamiamo ogni punto del piano  $R(x, y)$  con il suo vettore posizione  $r$  e definiamo

$$S(r) := |r - a| + |r - b| + |r - c|$$

Il problema di Torricelli-Fermat si traduce, naturalmente, nel minimizzare la funzione  $S$ .

Scrivendo  $a = (a_x, a_y)$  otteniamo

$$|r - a| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}$$

e così

$$2|r - a| \frac{\partial}{\partial x} |r - a| = 2(x - a_x)$$

Allo stesso modo, abbiamo analoghe espressioni per  $|r - b|$ ,  $|r - c|$  e nelle derivate parziali rispetto a  $y$ .

Così le derivate parziali  $\frac{\partial S}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial y}$  esistono per  $r \neq a, b, c$  e la derivata direzionale

$$DS(r) \triangleq \left( \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y} \right) = \frac{r - a}{|r - a|} + \frac{r - b}{|r - b|} + \frac{r - c}{|r - c|} \quad (2.1)$$

## 2.5 Esistenza di un minimo

La funzione  $S$  è positiva e continua ovunque nel piano ed è differenziabile in ogni punto eccetto nei vertici. Poichè i valori di  $S$  dentro il triangolo sono minori di quelli fuori, e poichè il triangolo (considerando i lati e l'interno) è chiuso e limitato (e quindi compatto), ci deve essere almeno un punto nel triangolo chiuso che sia un minimo globale della funzione. Se  $R$  è un tale punto e non è un vertice, allora è un punto critico nel quale  $DS(r) = 0$ . Notiamo che in ogni punto dei lati del triangolo, esclusi i vertici, la derivata  $DS$  ha verso contrario rispetto al vertice opposto, quindi tali punti non possono essere di minimo per  $S$ .

Segue che ogni punto in cui  $S$  ha minimo deve essere o un punto interno del triangolo o un suo vertice.

Ora, abbiamo bisogno del risultato seguente.

**Proposizione 2.5.1.**

*Se  $S$  ha minimo in un in un punto che non sia un vertice del triangolo, allora questo punto è l'unico che forma con i vertici tre angoli uguali.*

*Dimostrazione.* Questo segue immediatamente dal lemma (2.2) e dal fatto che i tre termini nella parte destra di (2.1) sono versori.  $\square$

## 2.6 Due casi

Consideriamo separatamente i due casi: tutti gli angoli del triangolo sono minori di  $120^\circ$  e un angolo ha ampiezza uguale o superiore a  $120^\circ$ .

1. Supponiamo che tutti gli angoli del triangolo siano minori di  $120^\circ$ .

Allora per la costruzione di prima, c'è un unico punto  $F$  (interno al triangolo) tale che  $FA, FB, FC$  formino angoli di  $120^\circ$ .

Ora, per il *Teorema del Coseno* nel triangolo  $FAB$ ,

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |f - b|^2 + |f - a|^2 - 2|f - b||f - a| \cos(120^\circ) \\ &= |f - b|^2 + |f - a|^2 + |f - b||f - a| \\ &> (|f - b| + |f - a|/2)^2 \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} S(a) &= |b - a| + |c - a| \\ &> |f - b| + |f - a|/2 + |f - c| + |f - a|/2 \\ &= S(f) \end{aligned}$$

Allo stesso modo  $S(b) > S(f)$ ,  $S(c) > S(f)$ . Questo mostra che  $S$  non ha minimo in nessun vertice. Segue che  $S$  ha minimo in un qualche punto interno  $R$  e, per la proposizione 2.5,  $DS(r) = 0$ . Ma  $F$  è l'unico punto per il quale  $DS(r) = 0$ , quindi  $R = F$ .

2. Supponiamo che uno degli angoli relativi ai vertici sia maggiore o uguale a  $120^\circ$ .

Allora non ci può essere un punto  $R$  tale che  $RA, RB, RC$  formino angoli uguali fra di loro; così  $S$  non può avere minimo in un punto interno al triangolo, ma deve averlo in uno dei vertici. Poichè il lato più lungo del triangolo è quello opposto all'angolo più largo, notiamo che  $S$  ha il suo minimo globale nel vertice relativo all'angolo più largo.

Concludendo, abbiamo dimostrato quanto segue.

**Teorema 2.6.1.**

*Se tutti gli angoli del triangolo  $ABC$  sono minori di  $120^\circ$ , allora il punto di Torricelli-Fermat  $F$  è il punto tale che  $FA, FB, FC$  si incontrano formando angoli di  $120^\circ$ ; altrimenti è il vertice relativo all'angolo più grande.*



# Capitolo 3

## Le soluzioni storiche

Storicamente, il quesito fu proposto da Fermat a Torricelli e diede vita ad una intensa corrispondenza epistolare tra i due, anche se di fatto il problema raggiunse anche molti altri matematici dell'epoca, fra cui B. Cavalieri, R. Descartes e G. Roberval.

Vincenzo Viviani (1622-1703), allievo di Torricelli, riscrisse le dimostrazioni raccolte nelle lettere del maestro in un'appendice del *De Maximis Et Minimis*, dato alla stampa nel 1659, da cui G. Loria ha attinto per scrivere la sezione geometrica delle *Opere di Evangelista Torricelli*[3] che raccolgono tutto il lavoro matematico, fisico e geometrico compiuto dal Torricelli stesso.

Tra le diverse dimostrazioni riscritte da Loria sul fatto che, in un triangolo non ottusangolo, il punto che minimizza le distanze fra i vertici è quello che forma con essi tre angoli uguali, ne riportiamo due tra le più significative con le relative immagini originali: la prima, in cui la dimostrazione delle due implicazioni viene data per assurdo, la seconda in cui abbiamo una dimostrazione geometrica, molto precisa, costruita per casi.

Al termine della appendice, l'autore indica anche un metodo grafico per trovare il punto cercato e tira le conclusioni sul problema proposto da Fermat.

### 3.1 La prima dimostrazione

#### Teorema 3.1.1.

Siano dati tre punti  $A, B, C$  e un quarto punto  $D$  tale che la somma dei tre segmenti  $DA, DB, DC$  sia la minima possibile, allora i tre angoli  $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$  sono uguali.

*Dimostrazione.*

Per assurdo, poniamo  $\widehat{ADB} \neq \widehat{BDC}$ .

Costruita l'ellisse di fuochi  $A$  e  $C$  passante per  $D$  e condotta la tangente a questa nel punto  $D$  (vedi figura 3.1), avremo che gli angoli  $\widehat{EDA}$  e  $\widehat{FDC}$  sono uguali.

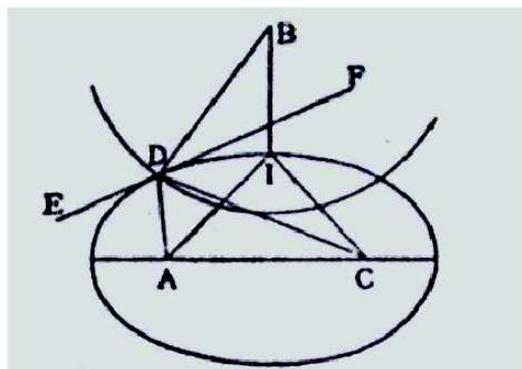


Figura 3.1: la prima dimostrazione

Così rimane che  $\widehat{BDE} \neq \widehat{BDF}$ .

Ora, tracciamo la circonferenza di centro  $B$  e raggio  $BD$  e consideriamo un qualsiasi punto  $I$  dell'arco di ellisse interno alla circonferenza.

Certamente  $IB < DB$  e  $DA + DC = IA + IC$ , quindi abbiamo trovato un punto  $I$  tale che la somma delle distanze tra questo punto e i tre vertici di partenza sia minore di quella in  $D$  contro l'ipotesi che in  $D$  sia minima.

□

**Teorema 3.1.2** (viceversa).

Siano dati tre punti  $A, B, C$ . Si trovi un punto  $D$  (quando sia possibile) tale che i tre angoli  $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$  siano uguali, allora la somma dei tre segmenti  $DA, DB, DC$  è la minima possibile.

*Dimostrazione.*

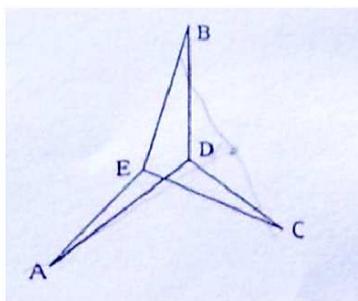


Figura 3.2: il viceversa

Per assurdo, esiste un punto  $E \neq D$  tale che  $EA + EB + EC < DA + DB + DC$ .

Allora, per il teorema precedente, avremmo che il quadrilatero  $EADB$  ha somma degli angoli interni maggiore di quattro retti (vedi figura 3.2), il che è un assurdo.

□

*Osservazione 1.* In maniera non proprio manifesta, i due teoremi prendono in considerazione tre punti che non formino un triangolo ottusangolo e che non appartengano alla stessa retta; l'unico indizio, non chiaro, di questa ipotesi taciuta lo abbiamo nell'enunciato del secondo teorema, dove fra parentesi si dice che il punto non esiste sempre.

L'autore stesso chiarirà il caso del triangolo ottusangolo quando tirerà le conclusioni al problema preso in esame.

*Osservazione 2.* Vengono dati per scontati alcuni risultati sulle coniche prese in esame: nel testo ci sono molte note che rimandano ad altre opere dell'autore nelle quali vengono dimostrati questi risultati.

## 3.2 La seconda dimostrazione

### Teorema 3.2.1.

*Siano dati tre punti  $A, B, C$  che non formino fra loro angoli nulli o maggiori di  $120^\circ$ . Si trovi un punto  $D$  tale che i tre angoli  $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$  siano uguali, allora la somma dei tre segmenti  $DA, DB, DC$  è la minima possibile.*

*Dimostrazione.*

Supponiamo che il punto che minimizza le distanze non sia  $D$ , ma sia  $E$ .

1.

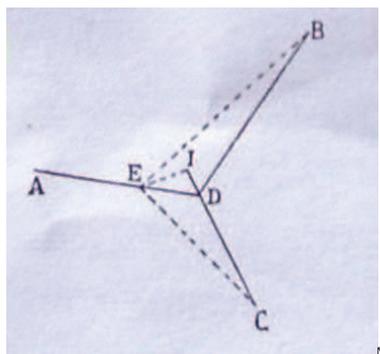


Figura 3.3: primo caso

Poniamo  $E$  come in figura 3.3 su uno degli stessi tre segmenti, nel nostro caso  $DA$ . Prolungando il segmento  $DC$  e tracciando la perpendicolare

a questo per  $E$  otteniamo un punto  $I$  tale che  $DI$  è uguale alla metà di  $DE$ , poichè l'angolo  $\widehat{EDI}$  è di  $60^\circ$ . Ora,  $EC$  è maggiore di  $IC$ , da cui  $EC$  è maggiore di  $DC$  più metà di  $DE$ . Allo stesso modo, si ricava che  $EB$  è maggiore di  $DB$  più metà di  $DE$ .

Quindi,  $E$  non può stare su un dei tre segmenti, poichè  $EA + EB + EC > DA + DB + DC$ .

2.

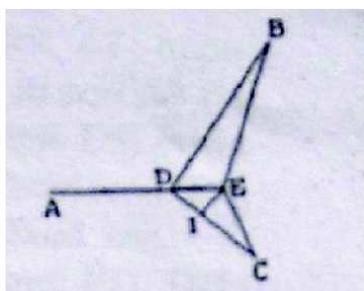


Figura 3.4: secondo caso

Poniamo  $E$  sul prolungamento di uno dei tre segmenti come in figura 3.4, nel nostro caso, su quello di  $DA$ . Tracciata da  $E$  la perpendicolare a  $DC$ , otteniamo  $I$  tale che  $DI$  è la metà di  $DE$ . Ora, poichè  $CE > CI$  abbiamo che  $CE$  più metà di  $DE$  è maggiore di  $DC$ . Allo stesso modo, si ricava che  $BE$  più metà di  $DE$  è maggiore di  $DB$ .

Quindi,  $E$  non può stare sul prolungamento di uno dei tre segmenti, poichè  $EA + EB + EC > DA + DB + DC$ .

3.

$A, B, C$  formino un triangolo equilatero e sia  $D$  tale che i tre angoli  $\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}$  siano uguali. Sia  $E$  un punto qualsiasi del piano.

Disegniamo l'ellisse di fuochi  $B$  e  $C$  e passante per  $E$  (vedi figura 3.5), troviamo un punto  $I$  che starà su  $DA$  o sul suo prolungamento. In

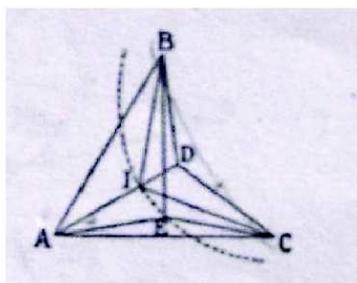


Figura 3.5: terzo caso

entrambi i casi avremo che  $BI + IC = BE + EC$ , mentre  $AI < EA$ ,  
cioè  $EA + EB + EC > IA + IB + IC$  e di conseguenza  $EA + EB + EC >$   
 $DA + DB + DC$  poichè  $I$  rientra in uno dei due casi precedenti.

4.

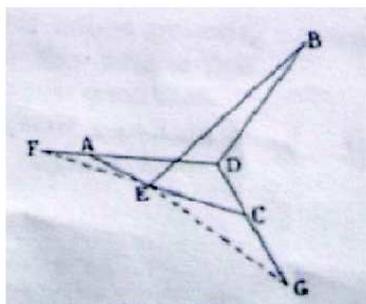


Figura 3.6: quarto caso

Veniamo ora al caso più generale: siano  $A, B, C$  tre punti con le ipotesi  
del teorema e sia  $D$  il punto che forma tre angoli uguali con i vertici.  
Sia  $E$  un punto qualsiasi del piano che non appartenga a  $DA, DB, DC$   
o ai loro prolungamenti (casi già esclusi in precedenza).

Troviamo i punti  $F$  e  $G$  rispettivamente sui prolungamenti di  $DA$  e  
 $DC$  tali che  $DF$  e  $DG$  siano uguali a  $DB$  (che supponiamo essere  
il più lungo dei tre come in figura 3.6). Ora, dal fatto che  $EAF +$

$ECCG + EB > EF + EG + EB$  e  $EF + EG + EB > DF + DG + DB$   
 poichè  $F, G, B$  formano un triangolo equilatero, otteniamo che  $EAF +$   
 $ECCG + EB > DF + DG + DB$ . Essendo  $AF$  e  $CG$  in comune ad  
 entrambi, concludiamo che  $E$  non può essere il punto cercato perchè  
 $EA + EB + EC > DA + DB + DC$ .

□

*Osservazione 3.* La seconda dimostrazione è molto più precisa ed esaustiva della prima, anche se l'idea di fondo rimane la stessa, ovvero sfruttare le proprietà dell'ellisse per dimostrare che il punto richiesto dal problema non può essere diverso da quello che forma con i vertici tre angoli uguali.

### 3.3 La soluzione del problema

#### Un metodo grafico per trovare il punto

Siano Dati tre punti  $A, B, C$  che non formino un triangolo ottusangolo.

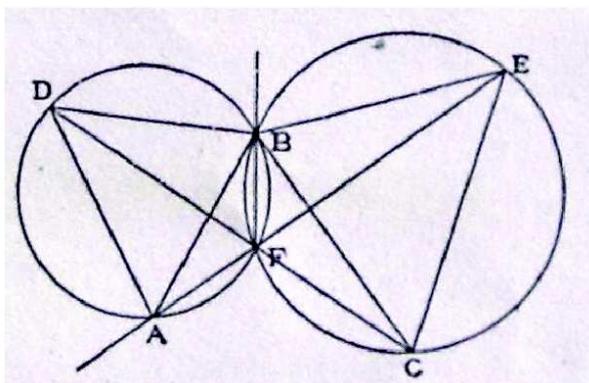


Figura 3.7: metodo grafico

Costruiamo sui lati  $AB$  e  $BC$  due triangoli equilateri (figura 3.7) e le circonferenze che li circoscrivono, esse si incontreranno in  $B$  e in un altro punto che chiamiamo  $F$ . Allora,  $AF, BF, CF$  formano fra loro tre angoli

uguali.

Infatti, il quadrilatero  $ADBF$ , essendo inscritto in una circonferenza, ha somma di angoli opposti uguale a due retti, ma  $\widehat{ADB}$  è di  $60^\circ$ , quindi  $\widehat{AFB}$  è di  $120^\circ$ . Allo stesso modo  $\widehat{BFC}$  è di  $120^\circ$  e di conseguenza anche  $\widehat{AFC}$ .

Così abbiamo determinato il punto  $F$  tale che  $FA + FB + FC$  sia la minima possibile tra i punti  $A, B, C$ .

### Determinatio problematis

”Sebbene questo Problema sia stato proposto dall’autore come universale, risulta tuttavia determinato. Infatti se, dati tre punti, li congiungiamo con linee rette e facciamo in modo che nessun angolo contenga  $120^\circ$ , il problema sarà risolvibile.

Ma, quando un qualunque angolo sarà non minore di  $120^\circ$ , il punto  $F$  della figura precedente non potrà essere trovato; infatti gli angoli interni di due triangoli sarebbe maggiore di quattro retti (vedi osservazione). In questo caso, tuttavia, il punto dell’angolo maggiore soddisfa il quesito.”

*Osservazione 4.* Non è chiara la motivazione per cui il punto  $F$  non può essere trovato nel triangolo ottusangolo; si può interpretare che l’autore si aspetti che il punto che forma tre angoli uguali con i vertici cada all’interno del triangolo, il che è impossibile. Infatti, se (nella figura precedente)  $B$  fosse maggiore di  $120^\circ$  avremmo che la somma degli angoli dei triangoli  $\widehat{AFB}$  e  $\widehat{BFC}$  sarebbe superiore a quattro retti.

# Capitolo 4

## Le applicazioni

In questo capitolo verranno presentati due teoremi, di facile dimostrazione trigonometrica (più adatta ad una scuola secondaria), profondamente legati al punto di Torricelli-Fermat.

Ci aiuteranno a capire perchè, oggi, sia considerato un punto notevole del triangolo, il primo scoperto nella storia moderna.

Successivamente, verrà esposto il *problema di Steiner*, diretto discendente del problema di Torricelli-Fermat, oggetto di ricerca in molte discipline, descrivendo la sua importanza in alcune applicazioni concrete e cercando di capire perchè sia di così difficile risoluzione.

### 4.1 Il Teorema di Napoleone

**Teorema 4.1.1** (Napoleone).

*Se sui lati di un triangolo qualunque si costruiscono tre triangoli equilateri esterni a quello dato e si congiungono i loro centri, si ottiene un triangolo equilatero.*

*Dimostrazione.*

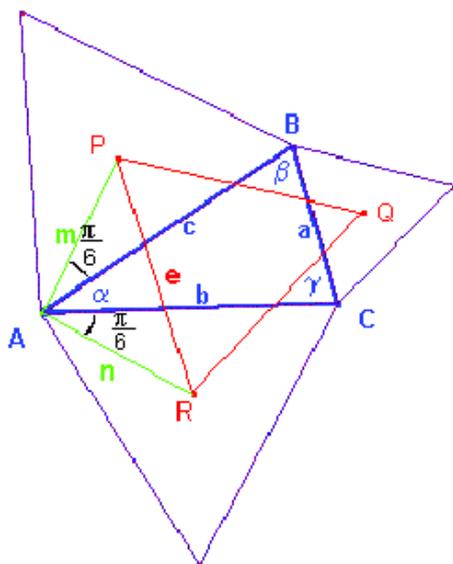


Figura 4.1: Teorema di Napoleone

Facendo riferimento alla figura 4.1, notiamo innanzitutto che  $m$  è due terzi dell'altezza del triangolo equilatero di lato  $c$  e  $n$  è due terzi dell'altezza del triangolo equilatero di lato  $b$ , così:

$$m = \frac{2}{3}c \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$n = \frac{2}{3}b \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

Applicando il Teorema del Coseno al triangolo  $APR$  si ha:

$$e^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$e^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{3} - 2\frac{bc}{3}\left(\cos\alpha \cos\frac{\pi}{3} - \sin\alpha \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$e^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3}bc \sin \alpha$$

Sempre per il Teorema del Coseno , nel triangolo  $ABC$  si ha:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ bc \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

Sostituendo questo risultato nella precedente espressione e ricordando che  $bc \sin \alpha$  è il doppio dell'area  $S$  del triangolo  $ABC$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} 3e^2 &= b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \sqrt{3}2S \\ 3e^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S \\ e^2 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{3}S \end{aligned}$$

In definitiva, dato il triangolo  $ABC$ , il lato  $PR$  è costante, quindi  $PR = PQ = QR$ , cioè il triangolo  $PQR$  è equilatero.

□

*Osservazione 5.* Il teorema, attribuito a Napoleone, deriva direttamente dalle proprietà del punto di Torricelli-Fermat. Infatti, osservando la figura 4.2, notiamo come i lati del triangolo di Napoleone siano perpendicolari ai segmenti originati dal punto di Torricelli-Fermat (perchè assi radicali delle circonferenze di cui gli estremi del lato sono centri).

In questo modo, il triangolo di Napoleone viene suddiviso in tre quadrilateri, ciascuno con due angoli retti e uno di  $120^\circ$ ; così il triangolo ha tre angoli che misurano  $60^\circ$ .

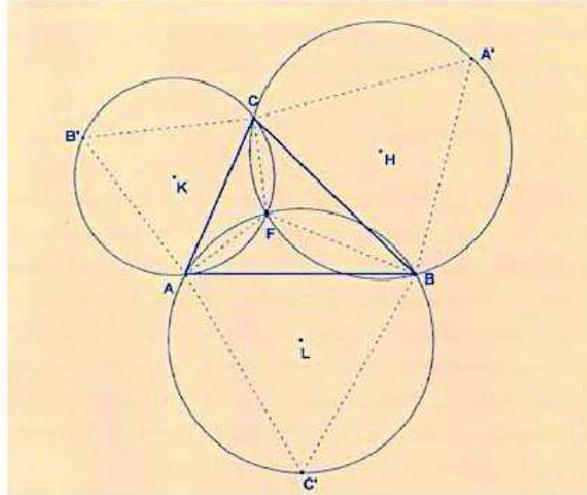


Figura 4.2: osserazione al Teorema di Naoleone

## 4.2 Il Teorema di Morley

**Teorema 4.2.1** (Morley).

*In un triangolo si trisechino gli angoli interni. I tre punti di intersezione delle trisecanti adiacenti formano un triangolo equilatero.*

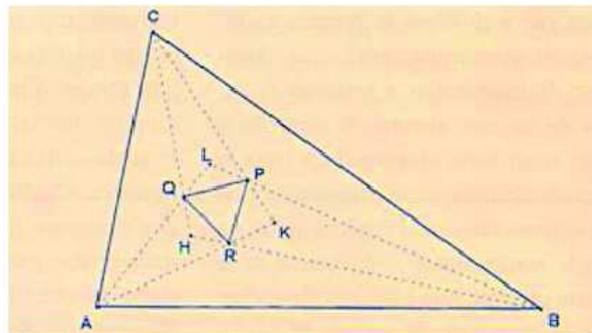


Figura 4.3: Teorema di Morley

*Dimostrazione.*

Poniamo

$$\widehat{BAC} = 3\alpha \quad \widehat{ABC} = 3\beta \quad \widehat{ACB} = 3\gamma$$

che implica immediatamente  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ . Sia inoltre  $r$  il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ . Applicando il *teorema dei seni* a questo triangolo si ha

$$AB = 2r \sin(3\gamma) \quad BC = 2r \sin(3\alpha) \quad AC = 2r \sin(3\beta)$$

Applicando, invece, il teorema al triangolo  $BCP$  si ricava

$$\frac{BP}{\sin(\gamma)} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{2r \sin(3\alpha)}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

Poichè  $\sin(3\alpha) = 4 \sin(\alpha) \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ + \alpha)$  (si ricava da semplici passaggi goniometrici), quindi

$$BP = \frac{2r \sin(3\alpha) \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \alpha)} = 8r \sin(\alpha) \sin(\gamma) \sin(60^\circ + \alpha)$$

e analogamente

$$BR = 8r \sin(\gamma) \sin(\alpha) \sin(60^\circ + \gamma)$$

Possiamo, ora, applicare il *teorema di Carnot* al triangolo  $BPR$ , ottenendo

$$\begin{aligned} PR^2 &= BP^2 + BR^2 - 2 \cdot BP \cdot BR \cdot \cos(\beta) \\ &= 64r^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\gamma) [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - \\ &\quad - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \gamma) \cos(\beta)] \end{aligned}$$

L'espressione fra le parentesi quadrate risulta complicata, ma se notiamo che la somma degli angoli coinvolti  $(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta = 180^\circ$ , possiamo facilmente trovare un triangolo con tali angoli. Sia  $A_0B_0C_0$  un triangolo con quegli'angoli e tale da avere il raggio della circonferenza circoscritta uguale a  $r$ .

Il *teorema dei seni* ci dà

$$A_0B_0 = 2r \sin(60^\circ + \gamma) \quad B_0C_0 = 2r \sin(60^\circ + \alpha) \quad A_0C_0 = 2r \sin(\beta)$$

mentre dal *teorema di Carnot* abbiamo

$$(A_0C_0)^2 = (A_0B_0)^2 + (B_0C_0)^2 - 2 \cdot (A_0B_0) \cdot (B_0C_0) \cdot \cos(\beta)$$

e mettendo insieme le due e dividendo per  $4r^2$  otteniamo

$$\sin^2(\beta) = \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \gamma) \cos(\beta)$$

che permette di scrivere  $PR^2$  come

$$PR^2 = 64r^2 \sin^2(\alpha) \sin^2(\gamma) \sin^2(\beta)$$

e quindi

$$PR = 8r \sin(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma)$$

L'espressione a cui siamo giunti è indipendente dallo scambio degli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; quindi per  $PQ$  e  $QR$  otteniamo la stessa espressione. In definitiva  $PR = PQ = QR$ .

□

*Osservazione 6.* Si può osservare in figura che il triangolo  $PQR$  e il triangolo  $HKL$  hanno lo stesso punto di Torricelli-Fermat. Questo fatto è risultato rilevante per il teorema di Morley, perchè in particolare l'angolo giro nel punto di Torricelli-Fermat è diviso in sei spicchi da  $60^\circ$  dalle congiungenti con i vertici del poligono  $PLQHRK$ .

*Osservazione 7.* Si tratta di due teoremi che presentano, in qualche senso, una forma di aspirazione alla regolarità da parte dei triangoli. Si eseguono alcuni

semplici passaggi a partire da un triangolo qualsiasi e rimangono sempre definiti due triangoli equilateri. E questi due triangoli equilateri hanno un profondo legame con il punto di Torricelli-Fermat che può benissimo essere considerato un punto notevole alla pari dei più famosi ortocentro, incentro, baricentro e circocentro, poichè partecipa ed è protagonista di molte proprietà intrinseche di un triangolo come quelle presentate.

## 4.3 Il problema di Steiner

### L'enunciato e la sua importanza

*Dati  $n$  punti, trovare la rete minima che li colleghi (ovvero, un sistema connesso di segmenti, di minima lunghezza totale, tale che ogni coppia di punti sia collegata).*

L'importanza, soprattutto pratica del problema, risulta chiara se si pensa che i punti possono essere città da collegare con una rete stradale, abbonati di una società telefonica o ancora se si tratta di un circuito elettronico o della progettazione di una rete di tubature: nella realizzazione di reti minime vi sono interessi di ogni tipo, sia tecnici, sia economici, sia di funzionamento.

### La difficile risoluzione

Z. A. Melzak elaborò un algoritmo per trovare la rete di lunghezza minima in un finito numero di passaggi; però, prende in esame un grandissimo numero di possibilità e la sua complessità computazionale è molto elevata. La questione è che, al crescere del numero  $n$  di punti ( $n$  si può assumere come la misura della dimensione del problema) il problema risulta intrattabile. Infatti, i tempi di risoluzione crescono esponenzialmente con  $n$ : è, cioè, un *problema NP* (non deterministico in un tempo polinomiale).

In questa generalizzazione, i punti di Torricelli-Fermat si chiamano *punti di Steiner* ed è stato dimostrato che sono un numero minore o uguale a  $n - 2$ .

**Esempio:  $n=4$** 

Un'idea della difficoltà può sorgere dall'esame del caso  $n = 4$ .

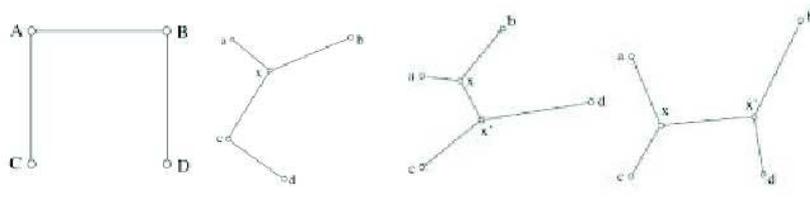


Figura 4.4: esempi di tracciati minimi

L'aspetto della soluzione dipende dalla disposizione dei punti. Infatti, il numero dei punti di Steiner (nelle figure  $x$  e  $x'$ ) sono al più due e abbiamo le seguenti possibilità:

1. Nessun punto di Steiner, caso degenere.

Uno è il punto di Torricelli-Fermat rispetto agli altri tre. Congiungendo questo punto con gli altri si ottiene la rete minima.

2. Nessun punto di Steiner, caso normale.

La rete minima è la spezzata aperta che unisce i quattro punti (primo disegno in figura).

3. Un punto di Steiner.

Il punto di Steiner è connesso con tre punti, mentre il quarto è direttamente connesso con uno degli altri tre (secondo disegno in figura).

#### 4. Due punti di Steiner.

Ogni punto di Steiner è connesso con due punti e con l'altro punto di Steiner (terzo e quarto disegno in figura).



# Capitolo 5

## In classe

La riscoperta del Problema di Torricelli-Fermat e un suo studio approfondito mi hanno suggerito che potrebbe avere tutte le qualità per poter essere inserito nel programma di geometria di una scuola media superiore.

Infatti, in termini di geometria sintetica, è facile trovare una soluzione compatibile con le conoscenze degli studenti; inoltre, è possibile sfruttare diversi aspetti del problema per proporre attività nuove e per stimolare la curiosità, l'attenzione e la capacità di ragionare.

Analizzeremo alcuni di questi aspetti, dando anche semplici esempi concreti di attività.

### 5.1 Il ruolo della storia

L'utilità della storia della matematica per la didattica, ormai è stata riconosciuta da tutti.

Nel caso del problema di Torricelli-Fermat, abbiamo una evoluzione della risoluzione e numerose dimostrazioni storiche che possono essere molto utili, se presentate agli studenti nella maniera adeguata.

Infatti, si potrebbero analizzare in classe il materiale storico, cercando errori o mancanze dell'autore, con l'obiettivo di elaborare, singolarmente, una soluzione personale.

Il lavoro, passo a passo con Torricelli, può stimolare la voglia di mettersi in gioco e la capacità di utilizzare gli strumenti geometrici un pò più intuitivamente rispetto al contesto teorico in cui sono sempre inseriti.

In più, il notare come un grande matematico abbia faticato e sbagliato nel suo lavoro, potrebbe demistificare alcune costruzioni mentali che minano alla base l'insegnamento della matematica e che possono essere ben riassunte nelle frasi: "la matematica non è per tutti" e "se non la capisci subito è meglio che lasci perdere".

### 5.1.1 Esempio concreto: la dimostrazione migliore

Dopo una breve parentesi introduttiva in cui si uniformano le conoscenze di base per affrontare l'argomento, si enuncia il problema di Torricelli-Fermat e si suddivide la classe in gruppetti, ad ognuno dei quali viene data una dimostrazione di Torricelli diversa (ce ne sono almeno cinque!) del fatto che il punto che minimizza le distanze in un triangolo è quello che forma tre angoli uguali con i vertici.

Ogni gruppo dovrà presentare la propria dimostrazione, sistemata a piacere, con l'obiettivo di convincere gli altri che è la migliore; un gruppo dirà che la loro dimostrazione è più breve, un'altro che è più facile, un altro ancora che è più completa e così via... Naturalmente, in questa fase, tutti i ragazzi potranno intervenire per chiedere chiarimenti agli interessati o all'insegnante.

Alla fine, si eleggerà la migliore, facendo passare il messaggio che, comunque, non c'è solo una dimostrazione giusta, ma ci sono più idee che possono essere sfruttate nella maniera giusta.

## 5.2 La formulazione in termini di quesito

L'insegnamento della geometria nella scuola secondaria superiore tende a privilegiare gli aspetti teorici rispetto a quelli di "scoperta guidata" o di "problem solving"; agli studenti viene chiesto distudiare (a memoria) defi-

nizioni e teoremi, poi vengono proposti loro esercizi strettamente collegati con la teoria che non favoriscono un lavoro personale di elaborazione degli strumenti acquisiti.

La formulazione in termini di quesito del problema di Torricelli-Fermat e di tanti altri argomenti, permette di strutturare attività con una impostazione più pragmatica, che coinvolga di più gli studenti sul piano dell'intuizione e della scelta di strategie risolutive più efficaci.

Tale impostazione favorirà sicuramente un clima di maggiore attenzione e contribuirà a sviluppare la "fantasia matematica" dello studente, andando ad abbattere la erronea credenza che la matematica non lasci spazio alla libertà del singolo, ma sia un insieme di labirinti, ognuno con un'unica via corretta.

### 5.2.1 Un secondo esempio: dove costruire il campo da calcio?

In una classe si propone il quesito: "Consideriamo Coriano, Ospedaletto e Mulazzano (o altri tre paesi a scelta!), dove dobbiamo costruire il campo da calcio per fare in modo che sia il più vicino possibile ai ragazzi di tutti e tre i paesi?"

Inizialmente gli studenti, muniti di cartine, devono rispondere singolarmente su un foglio, cercando di motivare la risposta; poi, si confrontano a piccoli gruppi, calcolando anche sulla cartina chi ha posizionato il campo nel posto migliore.

Quando tutti i gruppi avranno una loro risposta definitiva, si può chiedere ai ragazzi che tipo di angoli deve formare il campo con i tre paesi, arrivando alla soluzione dopo aver escluso (come nella prima dimostrazione del capitolo 3) tutti gli altri casi trovando un punto con distanze minori. Infine si espone agli studenti una dimostrazione completa di quanto si è intuito e si risolve insieme il caso in cui uno degli angoli del triangolo sia maggiore o uguale a  $120^\circ$ .

Molto spesso gli studenti si chiedono a cosa serve la matematica; ritengo

che partire da una domanda concreta come questa possa essere la risposta più convincente!

### 5.3 Un approccio informatico: Cabri

Uno strumento utile nello studio del problema di Torricelli-Fermat in classe, può essere Cabri.

Infatti, l'ausilio del software Cabri per la "verifica dinamica" della soluzione può rendere la didattica più efficace e stimolare gli studenti ad aprirsi nei confronti di metodi non proprio canonici per fare geometria.

In particolare, possiamo utilizzare Cabri per verificare la posizione del punto di Torricelli-Fermat e per confrontarlo con gli altri punti notevoli del triangolo.

Di seguito è riportata una simulazione in Cabri della risoluzione del problema (figura 5.1) e la costruzione geometrica che porta ad individuare il punto di minimo cercato  $S$  (figura 5.2).

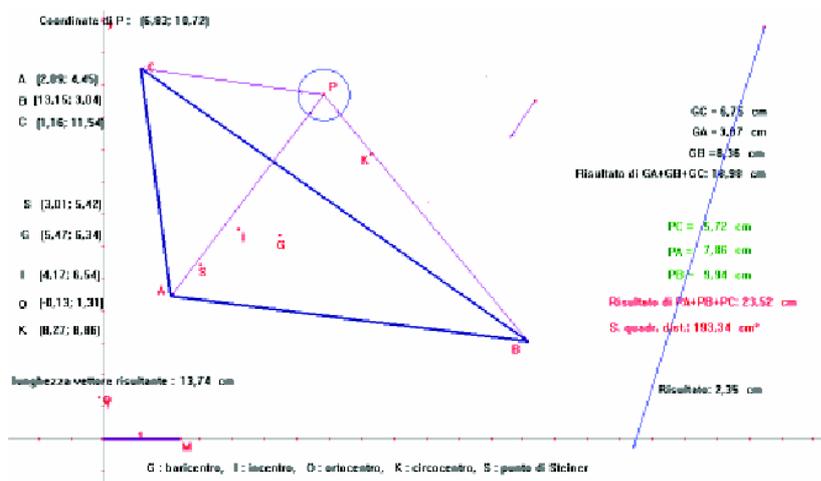


Figura 5.1: costruzione dinamica con Cabri

Si osserva subito che il punto di Torricelli-Fermat (in generale) non coincide con nessun altro punto notevole, in particolare col baricentro, come si

potrebbe supporre istintivamente. Infatti, il baricentro minimizza la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo.

La dinamicità di Cabri permette di spostare il punto  $P$  fino a farlo coincidere con  $S$  e controllare che sia veramente il punto che minimizza la somma delle distanze dai vertici.

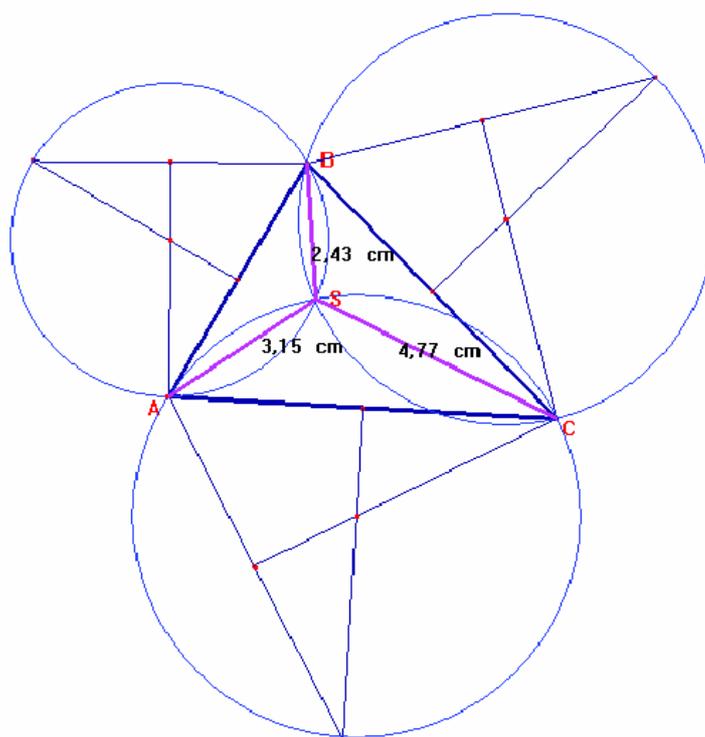


Figura 5.2: come trovare il punto di Torricelli-Fermat

Proprio come suggeriva Torricelli, la figura 5.2 mostra che il punto di minimo si trova come intersezione di almeno due circonferenze con centro nei punti centrali dei triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo di partenza.

Così, Cabri risulta utile, oltre che per convincere gli studenti di alcuni risultati importanti, anche perchè l'insegnamento della geometria non può

ignorare l'immediatezza della percezione visiva, difficilmente valorizzata in classe, nella costruzione delle conoscenze degli studenti.

# Conclusioni

La scoperta del punto di Torricelli-Fermat ha aperto un nuovo capitolo del grande libro della matematica.

Dal quesito proposto da Fermat a Torricelli, che oggi può sembrare banale mentre nel 1600 ha impegnato i più grandi matematici dell'epoca, sono nate numerose riflessioni che sono ancora oggetto di ricerca come il problema di Steiner.

Tutto nasce dal ruolo intrinseco che il punto notevole ricopre in un triangolo, con le proprietà che ne conseguono e di cui abbiamo cercato di dare un assaggio nella tesi.

Il suo fascino non può rimanere nell'ombra, ma deve essere valorizzato e utilizzato in ambito didattico. Gli aspetti da sfruttare maggiormente sono: l'esperienza storica e l'evoluzione del pensiero che hanno portato alla sua scoperta, le innumerevoli applicazioni di cui è protagonista e la sua natura di punto di minimo che permette una grande libertà nella ricerca di una strada sempre più "comoda" per rappresentarlo. In classe è importante trovare quesiti, simili al problema di Torricelli-Fermat, che permettano agli studenti di ragionare e di vedere la geometria anche nei suoi aspetti più concreti e intuitivi con l'ausilio di strategie didattiche e strumenti sempre nuovi.



# Bibliografia

- [1] R. Courant, H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, seconda edizione riveduta da Ian Stewart, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [2] P. G. Spain, The Fermat Point of a Triangle, *Mathematics Magazine*, **vol.62** (1996), n.2, 131-133
- [3] G. Loria, *Geometria*, Opere di Evangelista Torricelli, vol. I, parte II, Stabilimento tipo-litografico G. Montanari, Faenza, 1919



# Ringraziamenti

I ringraziamenti più sinceri sono quelli che rivolgerò personalmente alle persone che mi stanno accanto da una vita e, in particolare, in questi tre anni intensi che sono stati molto importanti per la mia crescita e che forse comprenderò pienamente solo fra qualche anno...:)

**GRAZIE!!!**