

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**TASSELLAZIONE DI FAREY  
E FRAZIONI CONTINUE**

**Relatore:**  
Dott.ssa  
Alessia Cattabriga

**Presentata da:**  
Stefania Corneti

V Sessione  
Anno Accademico 2015/2016



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Modelli di piano iperbolico</b>	<b>5</b>
1.1 Il piano iperbolico e il disco di Poincaré . . . . .	5
1.2 Le isometrie del piano iperbolico . . . . .	6
1.3 Trasformazioni lineari fratte . . . . .	10
1.4 Geodetiche nel piano iperbolico . . . . .	14
1.5 Poligoni iperbolicici . . . . .	16
1.6 Tassellazioni . . . . .	19
<b>2 Tassellazione di Farey</b>	<b>23</b>
2.1 Il Farey circle packing . . . . .	23
2.2 La tassellazione di Farey . . . . .	25
2.3 Gli orocicli e il Farey circle packing . . . . .	30
<b>3 Le frazioni continue</b>	<b>33</b>
3.1 Frazioni continue di numeri razionali . . . . .	33
3.2 Frazioni continue infinite . . . . .	38
3.3 Le equazioni diofantine . . . . .	41
<b>Bibliografia</b>	<b>44</b>



# Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è studiare una particolare tassellazione del piano iperbolico denominata Tassellazione di Farey e approfondire la relazione di tale tassellazione con le frazioni continue. Conoscendo lo sviluppo in frazione continua di un numero reale  $x$  possiamo infatti trovare un percorso lungo i bordi della tassellazione che ci guidi verso tale numero e, viceversa, utilizzando la tassellazione si può trovare la frazione continua relativa a un dato numero reale. Approfondiremo anche il collegamento tra la Tassellazione di Farey e il Farey circle packing: quest'ultimo consiste in una famiglia di circonferenze euclidee che va a formare un *pattern* nel piano iperbolico. Studiamo la Tassellazione di Farey non solo per la sua bellezza matematica ma anche per il suo notevole fascino visivo che verrà illustrato nelle diverse figure contenute in questo scritto. Inoltre la tassellazione ci aiuta a comprendere meglio le proprietà di una geometria per noi meno intuitiva di quella euclidea.

Il Farey circle packing e la Tassellazione di Farey devono il loro nome al geologo John Farey (1766-1826), il quale osservò la seguente proprietà elementare senza dimostrarla: per un numero fissato  $N > 0$ , si considerino tutti i numeri razionali  $\frac{p}{q}$  con  $0 \leq p \leq q \leq N$  coprimi, e si elenchino questi numeri in ordine crescente

$$0 < \frac{1}{N} < \dots < \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} < \frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < \dots < \frac{N-1}{N} < 1.$$

Allora, per ogni coppia di frazioni consecutive  $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$  vale  $p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = 1$ , e per ogni terna di frazioni consecutive si ha  $\frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \oplus \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ , dove con  $\oplus$  intendiamo la somma di Farey così definita:  $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$ . La medesima proprietà era stata in realtà scoperta precedentemente da C. Haros, nel 1802. Tuttavia il nome di Farey rimase legato alle sequenze sopra descritte anche quando Augustin Cauchy, che era solo a conoscenza degli appunti di Farey [3], fornì una completa dimostrazione di queste due affermazioni nel 1816 [4]. Sicuramente Farey non aveva conoscenze in merito alla geometria iperbolica. La prima pubblicazione riguardo a ciò che qui chiamiamo Farey circle packing la dobbiamo a Lester R. Ford (1886-1967) [5]. Per tal mo-

tivo, le circonferenze del Farey circle packing sono anche spesso chiamate circonferenze di Ford.

Le frazioni continue, invece, si considerano tradizionalmente risalenti ad Euclide essendo strettamente legate al suo noto algoritmo di divisione. Tuttavia il formalismo algebrico che comportano non sembra fosse familiare ad Euclide ed ai suoi immediati successori. È a Eulero (1707-1783) che dobbiamo la prima sistematizzazione e formalizzazione organica delle frazioni continue. Prima di Eulero si registra l'utilizzo di tecniche concettualmente vicine alle frazioni continue per risolvere un'equazione diofantina lineare da parte del matematico indiano Aryabhata (476-550) e lo sviluppo in frazione continua di  $\sqrt{13}$  trovato da Bombelli nel 1572, seguito da Pietro Cataldi che trovò nel 1613 il modo di esprimere come frazione continua  $\sqrt{18}$ . Le applicazioni più recenti dello studio delle frazioni continue si trovano all'interno di algoritmi di calcolo per le approssimazioni di un numero reale e in relazione alla teoria del caos. Per una trattazione più dettagliata della storia delle frazioni continue si veda [6].

Il primo capitolo ha lo scopo di fornire gli strumenti necessari per comprendere al meglio il cuore della tesi. Infatti, definiremo lo spazio metrico in cui lavoreremo e studieremo le sue caratteristiche e gli oggetti che lo popolano. Ad esempio, vedremo qual è il tragitto più breve per andare da un punto all'altro nel piano iperbolico, studieremo le isometrie di quest'ultimo e daremo la definizione di poligono iperbolico. Nell'ultima sezione del primo capitolo richiameremo il concetto di tassellazione.

Il secondo capitolo e l'inizio del terzo rappresentano il cuore della tesi e di ciò che abbiamo anticipato nella parte iniziale dell'introduzione.

Infine, l'ultima sezione del terzo capitolo è dedicata ad un'applicazione dello studio della Tassellazione di Farey e delle frazioni continue alla risoluzione delle equazioni diofantine. Infatti, vedremo come è possibile risolvere facilmente queste equazioni grazie all'aiuto di questi strumenti geometrici e algebrici.

# Capitolo 1

## Modelli di piano iperbolico

Studieremo diverse proprietà del piano iperbolico in modo tale da avere alla fine del capitolo una buona dimestichezza con gli strumenti che definiscono e caratterizzano il piano iperbolico. Il testo di riferimento per questo capitolo e per il successivo è [1].

Prima di iniziare richiamiamo alcune notazioni e convenzioni. Usiamo la corrispondenza biunivoca tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$  con le seguenti notazioni:  $(x, y)$  indica un punto in  $\mathbb{R}^2$  e  $z = x + iy$  indica il corrispondente punto in  $\mathbb{C}$ . Dotiamo  $\mathbb{R}^2$  della norma euclidea definita come  $\|(x, y)\|_{\text{euc}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . In  $\mathbb{C}$  usiamo la metrica corrispondente con la notazione  $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

La parte reale  $\text{Re}(z)$  di un numero complesso  $z = x + iy$  è la coordinata  $x$ , mentre la parte immaginaria  $\text{Im}(z)$  di  $z$  è la coordinata  $y$ . Il coniugato di  $z = x + iy$  è definito come  $\bar{z} = x - iy$ , e si ha l'equivalenza  $|z|^2 = \bar{z}z$ . Inoltre, un numero complesso  $z$  si può esprimere nelle forme  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ , dette rispettivamente forma trigonometrica ed esponenziale, dove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e per  $x > 0$  si ha  $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ , mentre per  $x < 0$  si ha  $\theta = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$ .

Infine usiamo la notazione  $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  quando vogliamo evidenziare che stiamo utilizzando  $(x, y)$  come vettore applicato in  $(0,0)$ .

### 1.1 Il piano iperbolico e il disco di Poincaré

In questa sezione analizzeremo due modelli di piano iperbolico. Il primo è il **semipiano di Poincaré**, uno spazio metrico che consiste nel semipiano positivo delle ordinate

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) = y > 0\}$$

dotato di una metrica  $d_{\mathbb{H}^2}$  definita qui di seguito.

Per definire la metrica iperbolica si definisce prima la **norma iperbolica** di un vettore  $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  applicato nel punto  $z \in \mathbb{H}^2$ :

$$\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} \|\vec{v}\|_{\text{euc}}.$$

Si definisce la **lunghezza iperbolica** di una curva

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

come

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}^2} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt.$$

Infine la **distanza iperbolica** tra due punti  $P$  e  $Q$  si definisce come l'estremo inferiore delle lunghezze iperboliche di tutte le curve  $\gamma$  che vanno da  $P$  a  $Q$ , cioè

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = \inf\{\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2, \gamma(a) = P, \gamma(b) = Q\}.$$

Il secondo modello di piano iperbolico è lo spazio metrico  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  che dimostreremo essere isometrico a  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  nella Proposizione 1.3.4. Si tratta del disco aperto di raggio 1 centrato in 0 contenuto nel piano complesso  $\mathbb{C}$ :

$$\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Questo modello è chiamato **disco di Poincaré**.

La norma di un vettore  $\vec{v}$  applicato nel punto  $z \in \mathbb{B}^2$  è definita in tal modo:

$$\|\vec{v}\|_{\mathbb{B}^2} = \frac{2}{1 - |z|^2} \|\vec{v}\|_{\text{euc}}.$$

Di conseguenza la lunghezza di una curva  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , in  $\mathbb{B}^2$  è definita come  $\ell_{\mathbb{B}^2}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{B}^2} dt$ . Infine, dati due punti  $P, Q \in \mathbb{B}^2$ , si definisce la loro distanza in  $\mathbb{B}^2$   $d_{\mathbb{B}^2}(P, Q)$  come l'estremo inferiore delle lunghezze  $\ell_{\mathbb{B}^2}$  di tutte le curve  $\gamma$  che vanno da  $P$  a  $Q$ .

Prima di concludere questa sezione diamo la seguente definizione. Chiamiamo punti all'infinito di  $\mathbb{H}^2$  l'insieme dei punti  $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  che stanno sul "bordo" di  $\mathbb{H}^2$ . Esiste un'omeomorfismo che manda i punti di  $\partial\mathbb{H}^2$  nei punti della circonferenza unitaria  $\mathbb{S}^1$  che è esattamente il bordo del disco  $\mathbb{B}^2$ .

## 1.2 Le isometrie del piano iperbolico

In questa sezione descriveremo le diverse isometrie del piano iperbolico. Per prima cosa ricordiamo che cos'è un'isometria.



**Definizione 1.1.** Si definisce **isometria** una funzione  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  fra due spazi metrici tale che, per ogni coppia di punti  $x_1$  e  $x_2$  in  $X$ , vale l'uguaglianza:

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2))$$

Le **omotetie**, definite da funzioni della forma  $\phi(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ , con  $\lambda$  numero reale positivo, sono isometrie del piano iperbolico. Infatti, se si considera la curva  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  e la sua immagine  $\phi(\gamma) : t \mapsto (\lambda x(t), \lambda y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , si ha:

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\phi(\gamma)) = \int_a^b \frac{\sqrt{\lambda^2 x'(t)^2 + \lambda^2 y'(t)^2}}{\lambda y(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma).$$

Segue dalla definizione di metrica iperbolica che  $d_{\mathbb{H}^2}(\phi(P), \phi(Q)) = d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$  per ogni  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ . Questo prova che un'omotetia  $\phi$  è un'isometria di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$ .

È immediato vedere che le **traslazioni orizzontali**  $\phi(x, y) = (x + x_0, y)$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e la **riflessione**  $\phi(x, y) = (-x, y)$  rispetto all'asse delle  $y$  sono isometrie del piano iperbolico.

Un'isometria meno ovvia è l'**inversione standard** (o **inversione attraverso la circonferenza unitaria**)

$$\phi(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right),$$

illustrata nella Figura 1.1. Dimostriamolo.

Sia  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , una curva in  $\mathbb{H}^2$ , allora la sua immagine attraverso l'inversione standard  $\phi$  è  $\phi(\gamma) : t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , con

$$x_1(t) = \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \quad e \quad y_1(t) = \frac{y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Allora si ha:

$$x_1'(t) = \frac{(y(t)^2 - x(t)^2)x'(t) - 2x(t)y(t)y'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

e

$$y_1'(t) = \frac{(x(t)^2 - y(t)^2)y'(t) - 2x(t)y(t)x'(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}$$

da cui si ottiene

$$x_1'(t)^2 + y_1'(t)^2 = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{(x(t)^2 + y(t)^2)^2}.$$

Segue che

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\phi(\gamma)) = \int_a^b \frac{\sqrt{x_1'(t)^2 + y_1'(t)^2}}{y_1(t)} dt = \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma).$$

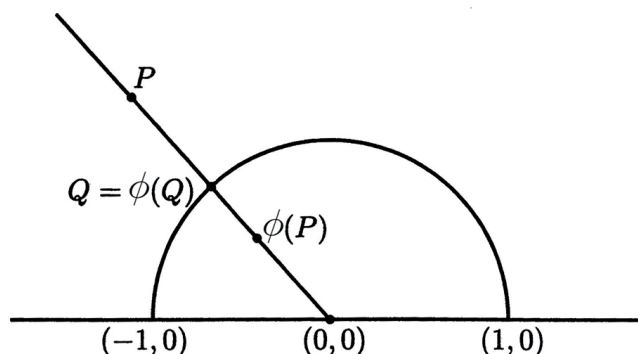


Figura 1.1: Inversione attraverso la circonferenza unitaria

Questo, come prima, dimostra che l'inversione standard è un'isometria del piano iperbolico.

Osserviamo che in coordinate complesse un'omotetia ha la forma  $z \mapsto \lambda z$ , con  $\lambda$  numero reale positivo, una traslazione orizzontale ha la forma  $z \mapsto z + x_0$ , con  $x_0 \in \mathbb{R}$ , e l'inversione standard ha la forma  $z \mapsto \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$ . Si possono ottenere altre isometrie componendo isometrie di questo tipo, vediamo qui di seguito un esempio. Generalizziamo l'inversione standard, ovvero al posto di considerare la circonferenza unitaria consideriamo una circonferenza  $C$  qualunque di raggio  $r$  e centrata nel punto  $z_0$  appartenente all'asse reale  $\mathbb{R}$ , e facciamo l'inversione rispetto a questa. Definiamo quindi l'**inversione** attraverso la circonferenza  $C$  come la trasformazione  $\phi$  data da

$$\phi(z) - z_0 = r^2 \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2}.$$

La trasformazione  $\phi$  manda  $z$  nel punto che giace sulla retta euclidea passante per  $z_0$  e  $z$ , e che si trova alla distanza euclidea  $r^2/d_{\text{euc}}(z, z_0)$  da  $z_0$ . L'inversione fissa ogni punto della circonferenza  $C$ , scambia l'interno con l'esterno di  $C$  e rovescia l'orientazione.

Chiaramente l'inversione rispetto a  $C$  è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$ : infatti è composizione delle seguenti isometrie

$$z \mapsto z - z_0, \quad z \mapsto \frac{z}{|z|^2}, \quad z \mapsto r^2 z, \quad z \mapsto z + z_0.$$

Inoltre è possibile dimostrare che tutte le isometrie del piano iperbolico sono composizione di inversioni rispetto a circonferenze centrate nell'asse delle  $x$ .

Torniamo invece al fatto che componendo traslazioni orizzontali, omotetie e inversioni standard si ottengono altre isometrie del piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  e dimostriamo il seguente teorema.

**Teorema 1.2.1.** *Le funzioni  $\phi(z) : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  della forma*

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1$$

o

$$\phi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1$$

sono isometrie del piano iperbolico  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$ .

*Dimostrazione.* Quando  $a \neq 0$ ,  $\phi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  è composizione di

$$z \mapsto az, \quad z \mapsto z + b, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}, \quad z \mapsto \frac{ad - bc}{a}z, \quad z \mapsto z + \frac{c}{a}.$$

In particolare, questa funzione è composizione di isometrie di  $\mathbb{H}^2$  e perciò è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$ .

Componendo ancora una volta con  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ , si ottiene  $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , allora anche una funzione di questa forma è un'isometria del piano iperbolico quando  $a \neq 0$ .

Quando  $a = 0$ , si ha che  $c \neq 0$ , e  $\phi(z) = \frac{b}{cz + d}$  è composizione di

$$z \mapsto \frac{cz + b + d}{cz + d},$$

che abbiamo appena dimostrato essere un'isometria, e di una traslazione orizzontale  $z \mapsto z - 1$ . Quindi la funzione  $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  anche quando  $a = 0$ .

Infine, componendo con  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  si dimostra che la funzione  $\phi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  anche quando  $a = 0$ .  $\square$

È possibile dimostrare anche il viceversa, ovvero che le isometrie di  $\mathbb{H}^2$  sono tutte le funzioni della forma appena descritta, si veda [1]. Quindi si ha come risultato che le isometrie di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  sono tutte e sole le funzioni della forma  $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  o  $\phi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$ .

Invece le isometrie di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  sono esattamente le funzioni della forma  $\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}$  oppure  $\phi(z) = \frac{\beta \bar{z} + \alpha}{\bar{\alpha} \bar{z} + \beta}$  con  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

Le isometrie di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  della forma  $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$  sono chiamate **trasformazioni lineari fratte** a coefficienti reali, formano un gruppo di isometrie di  $\mathbb{H}^2$  che viene solitamente indicato con  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , e conservano l'orientazione. Quelle della forma  $\phi(z) = \frac{c\bar{z} + d}{a\bar{z} + b}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad - bc = 1$  sono dette **trasformazioni antilineari fratte**, e rovesciano l'orientazione di  $\mathbb{H}^2$ .

### 1.3 Trasformazioni lineari fratte

Ora studiamo alcune proprietà delle trasformazioni lineari fratte che ci serviranno per dimostrare l'esistenza di un'isometria che manda il piano iperbolico nel disco di Poincaré. Avremo però bisogno di considerare trasformazioni lineari fratte con coefficienti complessi al posto di coefficienti reali, quindi dimostreremo queste proprietà a un livello più generale.

In questo contesto una trasformazione lineare fratta è una funzione  $\phi : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$ , non costante, della forma  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . In particolare,  $\phi$  è non costante esattamente quando  $ad - bc \neq 0$ , in tal caso dividendo tutti i coefficienti per uno dei due numeri complessi  $\pm\sqrt{ad - bc}$ , si può richiedere che  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  soddisfino la condizione  $ad - bc = 1$  lasciando invariata la funzione  $\phi$ .

La funzione  $\phi$  non è definita in  $z = -\frac{d}{c}$ , ma lo diventa estendendola alla **sfera di Riemann**  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ottenuta mediante la compattificazione di Alexandrov del piano complesso. Ovvero, se si considera in  $\mathbb{R}^3$  la sfera di centro l'origine e raggio 1, si può stabilire un omeomorfismo, tramite la proiezione stereografica, tra i punti della sfera e i punti del piano complesso esteso  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Allora una trasformazione lineare fratta  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad - bc = 1$  definisce un omeomorfismo  $\phi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  tale che  $\phi(-\frac{d}{c}) = \infty$  e  $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ .

**Definizione 1.2.** Diremo che  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $x_0 \in A$  se esiste una funzione lineare  $D_{x_0}f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = D_{x_0}f(h) + o(\|h\|) \quad \text{per } \|h\| \rightarrow 0.$$

**Proposizione 1.3.1.** Sia  $\phi$  la trasformazione lineare fratta definita da  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , allora il suo differenziale  $D_{z_0}\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z_0 \in \mathbb{C}$ , con  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$ , è tale che

$$D_{z_0}\phi(v) = \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}v.$$

*Dimostrazione.* Dato  $v \in \mathbb{C}$ , consideriamo il segmento  $\gamma : t \mapsto z(t) = z_0 + tv$ . Notiamo che  $z(0) = z_0$  e che  $z'(0) = v$ .

Si ha che

$$\begin{aligned} D_{z_0}\phi(v) &= \frac{d}{dt}\phi(z(t))_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \phi(z(h)) - \phi(z(0)) \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{az_0 + ahv + b}{cz_0 + chv + d} - \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ad - bc)v}{(cz_0 + chv + d)(cz_0 + d)} = \\ &= \frac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}v. \end{aligned}$$

□

Vediamo ora alcune particolari trasformazioni (anti)lineari fratte. Abbiamo già incontrato le **omotetie**

$$z \mapsto \lambda z = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}z + 0}{0z + \lambda^{-\frac{1}{2}}}$$

con  $\lambda$  numero reale positivo. Se ammettiamo anche coefficienti complessi possiamo considerare le **rotazioni**

$$z \mapsto e^{i\theta}z = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}z + 0}{0z + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

di un angolo  $\theta \in \mathbb{R}$  intorno all'origine, e le **traslazioni**

$$z \mapsto z + z_0 = \frac{z + z_0}{0z + 1}$$

di un numero complesso  $z_0 \in \mathbb{C}$ , e l'**inversione attraverso la circonferenza unitaria**

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{0\bar{z} + 1}{\bar{z} + 0}.$$

Si può dimostrare che ogni trasformazione lineare o antilineare fratta è composizione di omotetie, traslazioni, rotazioni e inversioni attraverso la circonferenza unitaria. La dimostrazione è uguale a quella che abbiamo visto per il Teorema 1.2.1, dove lo abbiamo provato per trasformazioni (anti)lineari fratte a coefficienti reali.

Un'altra fondamentale proprietà delle trasformazioni lineari (e antilineari) fratte è che mandano circonferenze in circonferenze. Per vedere ciò dobbiamo pensare alle rette come a circonferenze di raggio infinito centrate nel punto all'infinito. più precisamente, una circonferenza nella sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  corrisponde a una circonferenza euclidea in  $\mathbb{C}$  oppure all'unione di una retta  $\ell$  e del punto  $\infty$ .

**Proposizione 1.3.2.** *Una trasformazione lineare (o antilineare) fratta  $\phi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  manda una circonferenza di  $\hat{\mathbb{C}}$  in una circonferenza di  $\hat{\mathbb{C}}$ .*

*Dimostrazione.* Per quanto detto sopra  $\phi$  è composizione di omotetie, rotazioni, traslazioni e inversioni attraverso la circonferenza unitaria. Siccome le omotetie, le rotazioni e le traslazioni mandano chiaramente circonferenze in circonferenze, è sufficiente considerare il caso in cui  $\phi$  è un'inversione attraverso la circonferenza unitaria.

Per dimostrare che l'inversione manda circonferenze in circonferenze è conveniente utilizzare le coordinate polari. Allora consideriamo la circonferenza  $C$  di raggio  $r$  centrata in  $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ , che in coordinate polari ha equazione  $\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 - r^2 = 0$ .

L'inversione  $\phi$  manda il punto di coordinate polari  $(\rho, \theta)$  nel punto di coordinate  $(\frac{1}{\rho}, \theta)$ . Perciò l'immagine della circonferenza  $C$  attraverso  $\phi$  è la curva di equazione

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{2\rho_0}{\rho} \cos(\theta - \theta_0) + \rho_0^2 - r^2 = 0.$$

Se  $|\rho_0| \neq r$  o, equivalentemente, se la circonferenza  $C$  non passa per l'origine, l'equazione sopra dimostra che questa curva è la circonferenza di raggio  $\frac{r}{|\rho_0^2 - r^2|}$  centrata in  $\frac{z_0}{\rho_0^2 - r^2}$ .

Se  $|\rho_0| = r$ , si ha la curva di equazione  $\rho = \frac{1}{2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}$ , che rappresenta una retta.

Infine, consideriamo il caso in cui  $C$  è una retta, che in coordinate polari ha equazione  $\rho = \frac{1}{2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}$ . Allora l'immagine attraverso  $\phi$  di questa retta ha equazione  $\rho = 2\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$ , che è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine.  $\square$

Dimostriamo ora che il piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  è isotropo. Ricordiamo che uno spazio è isotropo se per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$ , e per ogni coppia di rette  $r$  e  $s$  passanti rispettivamente per  $P$  e  $Q$ , esiste una isometria dello spazio che manda  $P$  in  $Q$  e  $r$  in  $s$ . L'isotropia è l'assenza di punti e di direzioni preferenziali nello spazio, ovvero lo spazio ci appare lo stesso in ogni punto e in ogni possibile direzione.

**Teorema 1.3.3.** *Sia  $\vec{v}_1$  un vettore applicato in  $z_1 \in \mathbb{H}^2$ , e sia  $\vec{v}_2$  un vettore applicato in  $z_2 \in \mathbb{H}^2$  con  $\|\vec{v}_1\|_{\mathbb{H}^2} = \|\vec{v}_2\|_{\mathbb{H}^2}$ . Allora c'è un'isometria  $\phi$  di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  che manda  $z_1$  in  $z_2$  e il cui differenziale  $D_{z_1}\phi$  manda  $\vec{v}_1$  in  $\vec{v}_2$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\theta \in \mathbb{R}$  l'angolo tra  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  misurato nel consueto modo euclideo, ossia, dopo aver spostato il vettore  $\vec{v}_1$  nel punto  $z_2$  attraverso una traslazione euclidea di  $\mathbb{R}^2$ .

Esistono  $c, d \in \mathbb{R}$  tali che  $cz_1 + d = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ . Infatti, se  $z_1 = x_1 + iy_1$ , per trovare  $c$  e  $d$  è sufficiente risolvere il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} cx_1 + d = \cos \frac{\theta}{2} \\ cy_1 = \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Si ottiene  $c = \frac{1}{y_1} \sin \frac{\theta}{2}$  e  $d = \cos \frac{\theta}{2} - \frac{x_1}{y_1} \sin \frac{\theta}{2}$ . Ora si possono trovare infiniti  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $ad - bc = 1$ . Infatti, poiché  $c$  e  $d$  non possono essere contemporaneamente uguali a 0, questa è un'equazione lineare in due incognite che ha infinite soluzioni.

Scelti  $a, b, c, d$  in modo tale che soddisfino le condizioni appena elencate, prendiamo la trasformazione lineare fratta  $\phi_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . A causa di come abbiamo scelto  $a, b, c, d$ , la Proposizione 1.3.1 ci dice che  $D_{z_1}\phi_1$  è la moltiplicazione per il numero complesso  $e^{i\theta}$ , ossia è la rotazione di un angolo  $\theta$ .

Come conseguenza si ha che  $\vec{v}_3 = D_{z_1}\phi_1(\vec{v}_1)$  è parallelo a  $\vec{v}_2$  e punta nella stessa direzione.

Esiste un'isometria  $\phi_2$  di  $\mathbb{H}^2$  che manda  $z_3 = \phi_1(z_1)$  in  $z_2$ . Infatti, se poniamo  $z_3 = (x_3, y_3)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  allora l'omotetia di coefficiente  $\frac{y_2}{y_3}$  manda il punto  $z_3$  nel punto  $(\frac{x_3 y_2}{y_3}, y_2)$ , e la traslazione orizzontale  $\psi(x, y) = (x + x_2 - \frac{x_3 y_2}{y_3}, y)$  manda il punto  $(\frac{x_3 y_2}{y_3}, y_2)$  nel punto  $(x_2, y_2)$  che corrisponde a  $z_2$ . Allora si ha che  $\phi_2(x, y) = (\frac{y_2}{y_3}x + x_2 - \frac{x_3 y_2}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}y)$ , cioè è composizione di un'omotetia con una traslazione orizzontale. Si deduce che  $D_{z_3}\phi_2$  è un'omotetia. In particolare,  $D_{z_3}\phi_2$  manda ogni vettore in un vettore parallelo al primo.

Allora  $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$  manda  $z_1$  in  $z_2$ , e il suo differenziale  $D_{z_1}\phi = D_{z_3}\phi_2 \circ D_{z_1}\phi_1$  manda  $\vec{v}_1$  in un vettore  $\vec{v}'_2 = D_{z_1}\phi(\vec{v}_1) = D_{z_3}\phi_2(\vec{v}_3)$ , che è applicato in  $z_2$  e parallelo a  $\vec{v}_2$ .

Si ha  $\|\vec{v}'_2\|_{\mathbb{H}^2} = \|D_{z_1}\phi(\vec{v}_1)\|_{\mathbb{H}^2} = \|\vec{v}_1\|_{\mathbb{H}^2} = \|\vec{v}_2\|_{\mathbb{H}^2}$ .

In conclusione i vettori  $\vec{v}'_2$  e  $\vec{v}_2$  sono applicati nello stesso punto, hanno la stessa direzione, lo stesso verso e uguale norma iperbolica. Allora sono lo stesso vettore.

Abbiamo perciò trovato un'isometria  $\phi$  di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  tale che  $\phi(z_1) = z_2$  e  $D_{z_1}\phi(\vec{v}_1) = \vec{v}_2$ .  $\square$

Concludiamo la sezione dimostrando che i due modelli di piano iperbolico sono isometrici.

**Proposizione 1.3.4.** *La trasformazione lineare fratta  $\Phi(z) = \frac{-z+i}{z+i}$  induce un'isometria da  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $|\Phi(z)| = 1$  quando  $z \in \mathbb{R}$ , allora  $\Phi$  manda  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  nella circonferenza unitaria. Quindi  $\Phi$  manda il semipiano  $\mathbb{H}^2$  all'interno o all'esterno della circonferenza unitaria in  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Dal fatto che  $\Phi(i) = 0$  si conclude che  $\Phi(\mathbb{H}^2)$  è uguale all'interno di  $\mathbb{B}^2$ . Consideriamo il differenziale  $D_z\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  di  $\Phi$  in  $z \in \mathbb{R}^2$ . Applicando il Corollario 1.3.3 si ha:

$$\begin{aligned} \|D_z\Phi(v)\|_{\mathbb{B}^2} &= \frac{2}{1 - |\Phi(z)|^2} \|D_z\Phi(v)\|_{euc} \\ &= \frac{2}{1 - \left|\frac{-z+i}{z+i}\right|^2} \left| -\frac{2i}{(z+i)^2} v \right| \\ &= \frac{4}{|z+i|^2 - |-z+i|^2} |v| \\ &= \frac{4}{(z+i)(\bar{z}-i) - (-z+i)(-\bar{z}-i)} |v| \\ &= \frac{2}{i(\bar{z}-z)} |v| = \frac{1}{\text{Im}(z)} |v| = \|v\|_{\mathbb{H}^2} \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che  $\Phi$  manda curve  $\gamma \subset \mathbb{H}^2$  in curve  $\Phi(\gamma) \subset \mathbb{B}^2$  mantenendo costanti le lunghezze:  $\ell_{\mathbb{B}^2}(\Phi(\gamma)) = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$ .

Prendendo l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che vanno da  $P$  a  $Q$  segue che  $d_{\mathbb{B}^2}(\Phi(P), \Phi(Q)) = d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$ , per ogni  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ . In particolare,  $\Phi$  definisce un'isometria da  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ .  $\square$

## 1.4 Geodetiche nel piano iperbolico

Vogliamo studiare quali sono le curve che localmente descrivono la traiettoria più breve tra due punti nel piano iperbolico. Queste curve si chiamano geodetiche. Cominciamo con il dare una definizione più formale di geodetica e con l'analizzare un caso speciale.

**Definizione 1.3.** Una **geodetica** è una curva  $\gamma$  tale che per ogni  $P \in \gamma$  e per ogni  $Q \in \gamma$  sufficientemente vicino a  $P$ , la porzione di  $\gamma$  che va da  $P$  a  $Q$  è la curva più corta tra tutte quelle che vanno da  $P$  a  $Q$ .

**Lemma 1.4.1.** Se  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $P_1 = (x_0, y_1) \in \mathbb{H}^2$  sono sulla stessa retta verticale, allora il segmento  $[P_0, P_1]$  è la curva di lunghezza minore tra tutte le curve che vanno da  $P_0$  a  $P_1$ , e

$$d_{\mathbb{H}^2}(P_0, P_1) = \ell_{\mathbb{H}^2}([P_0, P_1]) = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|$$

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che  $y_0 \leq y_1$  senza perdere di generalità, e calcoliamo la lunghezza iperbolica del segmento  $[P_0, P_1]$  parametrizzato come segue

$$t \mapsto (x_0, t), \quad y_0 \leq t \leq y_1.$$

Si ha

$$\ell_{\mathbb{H}^2}([P_0, P_1]) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\sqrt{0^2 + 1^2}}{t} dt = \ln \frac{y_1}{y_0}.$$

Adesso consideriamo una qualsiasi curva  $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  che va da  $P_0$  a  $P_1$ . La sua lunghezza iperbolica è

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_a^b \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln \frac{y(b)}{y(a)} = \ln \frac{y_1}{y_0} = \ell_{\mathbb{H}^2}([P_0, P_1]). \end{aligned}$$

Per avere l'uguaglianza nella prima disuguaglianza la funzione  $x(t)$  deve essere costante; mentre l'uguaglianza nella seconda disuguaglianza si ha quando  $y(t)$  è crescente. Questo dimostra che se  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ell_{\mathbb{H}^2}([P_0, P_1])$  allora la curva  $\gamma$  è uguale al segmento.  $\square$



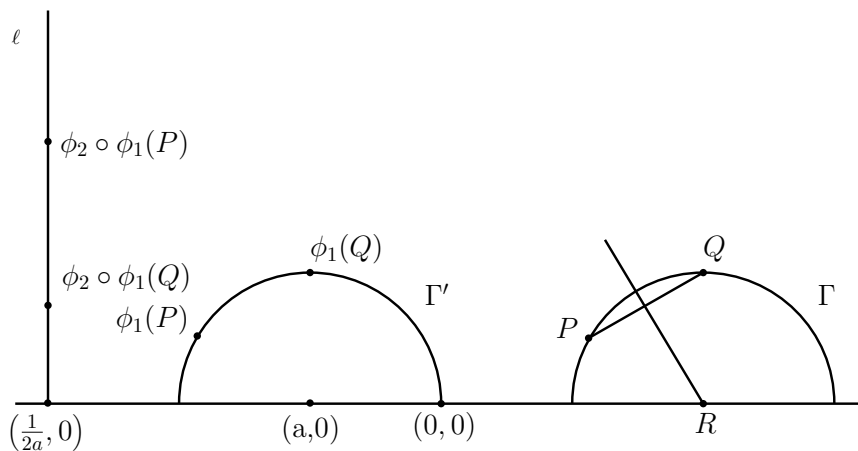


Figura 1.2: Gli archi di circonferenze centrate sull'asse delle  $x$  sono le traiettorie più brevi tra due punti nel piano iperbolico.

Per determinare tutte le geodetiche del piano il prossimo passo è andare a vedere cosa succede quando due punti non stanno sulla stessa retta verticale.

**Lemma 1.4.2.** *Siano  $P$  e  $Q$  due punti del piano iperbolico che non stanno sulla stessa retta verticale, allora esiste un'isometria  $\phi$  di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  tale che  $\phi(P)$  e  $\phi(Q)$  sono sulla stessa retta verticale. Inoltre, il segmento  $[\phi(P), \phi(Q)]$  è l'immagine tramite  $\phi$  dell'arco di circonferenza che va da  $P$  a  $Q$  e centrato nell'asse delle  $x$ .*

*Dimostrazione.* Siccome  $P$  e  $Q$  non stanno sulla stessa linea verticale, la retta perpendicolare al segmento  $[P, Q]$  e passante per il suo punto medio (punto medio calcolato nella metrica euclidea) interseca l'asse delle  $x$  in un punto che chiamiamo  $R$ . Dato che il punto  $R$  è equidistante da  $P$  e  $Q$  nella metrica euclidea, allora esiste una circonferenza  $\Gamma$  centrata in  $R$  e passante per  $P$  e  $Q$ . Inoltre  $\Gamma$  è l'unica circonferenza passante per  $P$  e  $Q$  centrata sull'asse delle  $x$  (si veda Figura 1.2).

La circonferenza  $\Gamma$  interseca l'asse delle  $x$  in due punti. Sia  $\phi_1$  la traslazione orizzontale che manda uno dei due punti in  $(0, 0)$ . Allora  $\Gamma' = \phi_1(\Gamma)$  è una circonferenza passante per l'origine e centrata in un punto  $(a, 0)$ . In particolare, l'equazione della circonferenza  $\Gamma'$  in coordinate polari è  $\rho = 2a \cos \theta$ . La sua immagine mediante l'inversione standard  $\phi_2$  è la curva di equazione  $\rho = \frac{1}{2a \cos \theta}$  in coordinate polari, ossia la retta verticale  $\ell$  che in coordinate cartesiane ha equazione  $x = \frac{1}{2a}$ .

Allora la composizione di  $\phi_2 \circ \phi_1$  manda la circonferenza  $\Gamma$  nella retta verticale  $\ell$ . In particolare, manda i punti  $P$  e  $Q$  in due punti che stanno su una retta verticale.  $\square$

Il Lemma 1.4.2 può essere esteso al caso in cui  $P$  e  $Q$  giacciono sulla stessa retta verticale  $\ell$  pensando a  $\ell$  come alla circonferenza di raggio infinito centrata nel punto all'infinito sull'asse delle  $x$ . Infatti, la retta verticale  $\ell$  di equazione  $x = a$  può essere vista come il limite per  $x$  che tende a  $+\infty$  o  $-\infty$  della circonferenza di raggio  $|x - a|$  centrata nel punto  $(x, 0)$ . Con questa convenzione, due punti qualsiasi  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  possono essere collegati da un arco di circonferenza centrata sull'asse delle  $x$ .

**Teorema 1.4.3.** *Tra tutte le curve che vanno da  $P$  a  $Q$  nel piano iperbolico, l'arco di circonferenza centrato sull'asse delle  $x$  (comprese le rette verticali) che collega i due punti è la curva che descrive la traiettoria più breve nella metrica iperbolica.*

*Dimostrazione.* Nel Lemma 1.4.1 abbiamo dimostrato il teorema nel caso in cui  $P$  e  $Q$  giacciono sulla stessa retta verticale.

Nel caso in cui, invece,  $P$  e  $Q$  non giacciono sulla medesima retta verticale, il Lemma 1.4.2 ci fornisce un'isometria  $\phi$  che manda  $P$  e  $Q$  in due punti  $P'$  e  $Q'$  che stanno sulla stessa retta verticale  $\ell$ . Dal Lemma 1.4.1 la curva più breve da  $P'$  a  $Q'$  è il segmento  $[P', Q']$ . Siccome le isometrie mandano geodetiche in geodetiche, la geodetica che va da  $P$  a  $Q$  è l'immagine del segmento  $[P', Q']$  attraverso l'isometria  $\phi^{-1}$ . Dal Lemma 1.4.2 abbiamo che l'immagine è l'arco di circonferenza che collega  $P$  e  $Q$  centrato sull'asse delle  $x$ .  $\square$

Le geodetiche di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  sono gli archi delle circonferenze euclidee ortogonali alla circonferenza unitaria  $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ , inclusi i diametri della circonferenza. Lo si dimostra andando a vedere in quali oggetti di  $\mathbb{B}^2$  vengono mandate le geodetiche di  $\mathbb{H}^2$  mediante  $\Phi(z) = \frac{-z+i}{z+i}$  (si veda Proposizione 1.3.4).

**Definizione 1.4.** Una **geodetica completa** è una geodetica che non può essere estesa a una geodetica più grande.

Le geodetiche complete del piano iperbolico sono le semicirconferenze aperte centrate sull'asse delle  $x$  e delimitate da due punti dell'asse delle  $x$  (incluse le semirette verticali che vanno da un punto sull'asse delle  $x$  all'infinito).

## 1.5 Poligoni iperbolici

In questa sezione vediamo la definizione di poligono iperbolico e calcoliamo l'area di un triangolo iperbolico.

**Definizione 1.5.** Un **poligono iperbolico**  $X$  è una regione di  $\mathbb{H}^2$  delimitata da un numero finito di geodetiche iperboliche  $E_1, E_2, \dots, E_n$  che si

incontrano solo negli estremi. Si richiede che  $X$  e  $E_i$  siano chiusi in  $\mathbb{H}^2$ , ovvero che  $X$  e  $E_i$  contengano tutti i punti di  $\mathbb{H}^2$  da loro delimitati. Le geodetiche  $E_i$  che delimitano  $X$  sono i **lati** del poligono, mentre i punti dove due lati si incontrano sono i **vertici**. Si richiede che in ogni vertice si incontrino solo due lati.

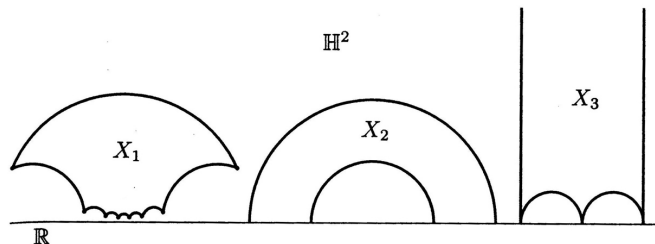


Figura 1.3: Esempi di poligoni iperbolici

La Figura 1.3 illustra alcuni esempi di poligoni iperbolici. Infatti,  $X_1$  è un ottagono iperbolico, con otto lati e otto vertici. Il poligono iperbolico  $X_2$  è un'infinita "striscia", con due lati e nessun vertice. Il quadrilatero iperbolico  $X_3$  è delimitato da quattro lati e non ha nessun vertice in  $\mathbb{H}^2$ ; è un quadrilatero ideale, infatti i vertici sono all'infinito di  $\mathbb{H}^2$ .

**Definizione 1.6.** Un **poligono ideale** del piano iperbolico è un poligono iperbolico i cui vertici appartengono a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Dimostriamo ora che la somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico è minore di  $\pi$ , proprietà che caratterizza la geometria iperbolica. Per farlo calcoliamo l'area di un triangolo iperbolico.

**Definizione 1.7.** Se  $D$  è una regione di  $\mathbb{H}^2$  definiamo la sua **area iperbolica** nel seguente modo

$$\text{Area}_{\text{ip}}(D) = \int_D \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Per calcolare l'area di un triangolo iperbolico in  $\mathbb{H}^2$  per prima cosa studiamo un caso particolare, ovvero calcoliamo l'area di un triangolo iperbolico (infinito)  $T_{\alpha,\beta}$  che ha come vertici  $\cos\beta + i\sin\beta$ ,  $\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)$  e  $\infty$ , dove  $\alpha$  e  $\beta \in [0, \pi]$  sono gli angoli ai primi due vertici. Quindi  $T_{\alpha,\beta}$  è il triangolo iperbolico delimitato dalla circonferenza euclidea di raggio 1 centrata nell'origine, a sinistra dalla retta  $x = \cos(\pi - \alpha)$  e a destra dalla retta  $x = \cos\beta$ , come illustrato nella Figura 1.4.

Applicando la definizione di area iperbolica si ha

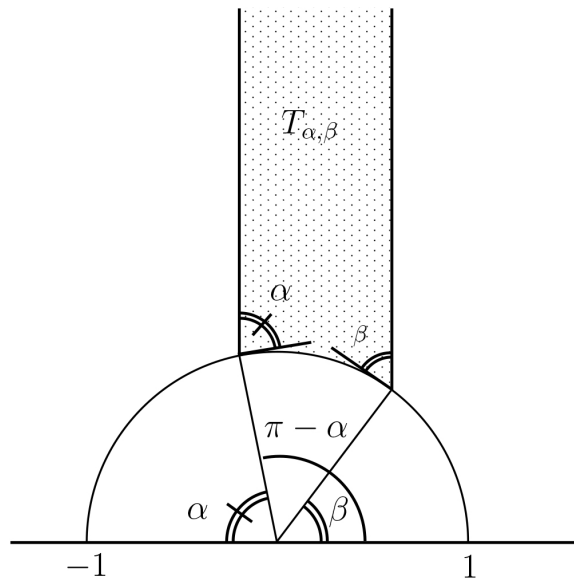


Figura 1.4: Triangolo iperbolico infinito

$$\begin{aligned}
 \text{Area}_{\text{ip}}(T) &= \int_T \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \\
 &= \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} \left[ -\frac{1}{y} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\
 &= \left[ -\arccos x \right]_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos \beta} = \pi - \alpha - \beta.
 \end{aligned}$$

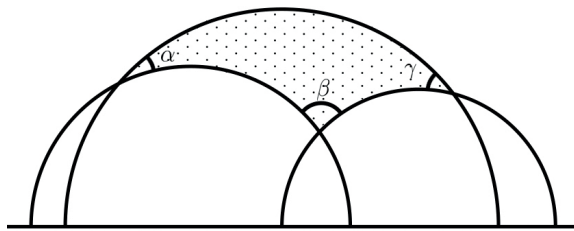


Figura 1.5: Un generico triangolo iperbolico

Ora consideriamo un generico triangolo iperbolico  $T$  con angoli ai vertici  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$  come rappresentato in Figura 1.5. Si può supporre che un lato del triangolo giaccia su una geodetica verticale come nella Figura 1.6, perché si può sempre mandare una geodetica in una geodetica verticale attraverso

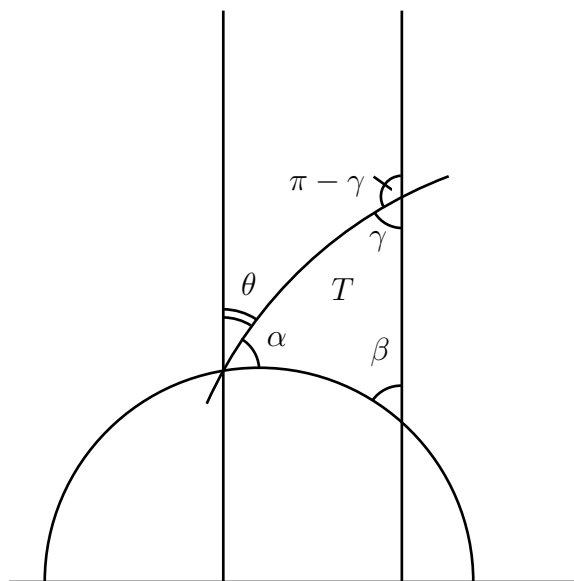


Figura 1.6: Triangolo iperbolico  $T$

un'isometria che manda il generico triangolo iperbolico in un triangolo congruente. Allora l'area di  $T$  si può scrivere come differenza tra il triangolo iperbolico infinito di angoli  $\theta + \alpha$  e  $\beta$  e il triangolo iperbolico infinito di angoli  $\theta$  e  $\pi - \gamma$  (si veda Figura 1.6). Allora

$$\begin{aligned} \text{Area}_{\text{ip}}(T) &= \text{Area}_{\text{ip}}(T_{\alpha+\theta, \beta}) - \text{Area}_{\text{ip}}(T_{\theta, \pi-\gamma}) = \\ &= \pi - \beta - \alpha - \theta - (\pi - \theta - \pi + \gamma) = \pi - \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

Dato che l'area è, per definizione, una quantità positiva, abbiamo dimostrato il seguente risultato.

**Teorema 1.5.1.** *La somma degli angoli interni di un triangolo iperbolico è minore di  $\pi$ .*

Inoltre nella geometria iperbolica non esistono triangoli simili che non siano congruenti. E dunque un triangolo iperbolico è individuato unicamente dai suoi angoli.

## 1.6 Tassellazioni

Diamo ora una definizione formale di tassellazione e di seguito enunciamo un importante teorema sulle tassellazioni che sarà indispensabile per parlare della Tassellazione di Farey nel prossimo capitolo.

Una **tassellazione** del piano iperbolico è una famiglia di tessere  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tali che

1. ogni tessera  $X_n$  è un poligono iperbolico;
2. a due a due  $X_m, X_n$  sono isometrici;
3. le tessere coprono l'intero piano iperbolico, cioè la loro unione è uguale allo spazio stesso;
4. l'intersezione di due tessere  $X_n$  e  $X_m$  o è vuota oppure è un vertice o un lato comune a  $X_n$  e  $X_m$ ;
5. per ogni punto  $P$  nel piano, esiste un  $\epsilon$  tale che il disco di raggio  $\epsilon$  centrata in  $P$  interseca solo un numero finito di tessere  $X_n$ .

Prima di enunciare il teorema diamo alcune premesse che servono per comprendere meglio le ipotesi del teorema.

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, e sia  $\bar{X}$  una partizione di  $X$ .

Useremo la seguente notazione: se  $P \in X$  è un suo punto, allora  $\bar{P} \in \bar{X}$  denota il corrispondente punto di  $\bar{X}$  cioè, ricordando che i punti di  $\bar{X}$  sono sottoinsiemi di  $X$ ,  $\bar{P} \subset X$  è l'elemento della partizione  $\bar{X}$  tale per cui  $P \in \bar{P}$ . Diremo inoltre che i punti di  $X$  contenuti in  $\bar{P}$  sono incollati insieme a formare un punto di  $\bar{X}$ .

Vediamo come la metrica su  $X$  possa indurre una metrica su  $\bar{X}$ . Enunciamo la costruzione in tutta generalità, ma ci interessa applicarla solo al caso in cui  $X$  è un poligono e la partizione  $\bar{X}$  corrisponde a una identificazione tra i lati di  $X$ .

Se  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$  sono due punti di  $\bar{X}$  corrispondenti rispettivamente a  $P$  e  $Q \in X$ , un **cammino discreto**  $w$  da  $\bar{P}$  a  $\bar{Q}$  è una sequenza finita  $P = P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, \dots, Q_{n-1}, P_n, Q_n = Q$  di punti di  $X$  tale che  $\bar{Q}_i = \bar{P}_{i+1}$  per ogni  $i < n$ . La **lunghezza di un cammino discreto**  $w$  è definita come

$$\ell_d(w) = \sum_{i=1}^n d(P_i, Q_i).$$

Dati due punti  $\bar{P}, \bar{Q} \in \bar{X}$  si può ora definire la distanza  $\bar{d}$  su  $\bar{X}$  nel modo seguente

$$\bar{d}(\bar{P}, \bar{Q}) = \inf\{\ell_d(w) \mid w \text{ è un cammino discreto da } \bar{P} \text{ a } \bar{Q}\}.$$

In realtà questa è in generale una semidistanza, cioè non è detto che soddisfi la proprietà  $\bar{d}(\bar{P}, \bar{Q}) = 0$  se e solo se  $\bar{P} = \bar{Q}$ . Nei casi che considereremo noi  $\bar{d}$  sarà sempre una distanza ben definita.

Quando  $\bar{d}_X$  è una distanza chiamiamo  $(\bar{X}, \bar{d}_X)$  spazio metrico quoziente rispetto alla partizione  $\bar{X}$ .

Veniamo al caso che ci interessa. Sia  $X$  un poligono iperbolico con lati  $E_1, E_2, \dots, E_{2p}$ . Raggruppiamo questi lati in coppie  $\{E_1, E_2\}, \{E_3, E_4\},$

...,  $\{E_{2p-1}, E_{2p}\}$ , e ad ogni coppia  $\{E_{2k-1}, E_{2k}\}$  assegniamo delle isometrie  $\phi_{2k-1} : E_{2k-1} \rightarrow E_{2k}$  e  $\phi_{2k} = \phi_{2k-1}^{-1} : E_{2k} \rightarrow E_{2k-1}$ . Chiaramente i lati  $E_{2k-1}$  e  $E_{2k}$  appartenenti alla stessa coppia devono avere la stessa lunghezza iperbolica, che potrebbe anche essere infinita.

In generale, l'isometria  $\phi_{2k-1}$  è univocamente determinata una volta che noi sappiamo come  $\phi_{2k-1}$  manda il lato orientato  $E_{2k-1}$  nel lato orientato  $E_{2k}$ . Per determinare questa informazione è sufficiente disegnare delle frecce sui lati come nella Figura 2.9, eccetto nel caso in cui il lato sia una geodetica completa.

Ora possiamo descrivere come incollare i lati del poligono  $X$  e ottenere una sua partizione. L'incollamento è definito come segue:

- se  $P$  è all'interno del poligono  $X$ , allora  $P$  non è incollato con nessun altro punto e  $\bar{P} = P$ ;
- se  $P$  è su un lato  $E_i$  e non è un vertice, allora  $\bar{P}$  consiste di due punti  $P \in E_i$  e  $\phi_i(P) \in E_{i\pm 1}$ ;
- se  $P$  è un vertice, allora  $\bar{P}$  consiste di  $P$  e di tutti i vertici di  $X$  della forma  $\phi_{i_k} \circ \phi_{i_{k-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_1}(P)$ , dove gli indici  $i_1, i_2, \dots, i_k$  sono tali che  $\phi_{i_{j-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_1}(P) \in E_{i_j}$  per ogni  $j$ .

Si può dimostrare che é possibile estendere ogni isometria  $\phi_i$  a un'isometria del piano iperbolico in modo che  $\phi_i(X)$  stia dal lato opposto di  $X$  rispetto a  $\phi_i(E_i)$ .

Sia  $\Gamma$  l'insieme di tutte le isometrie  $\phi$  di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  che possono essere scritte come composizione finita di isometrie del tipo descritto sopra:

$$\phi = \phi_{i_l} \circ \phi_{i_{l-1}} \circ \dots \circ \phi_{i_1}.$$

Per convenzione si include la funzione identità, che può essere vista come la composizione di 0 isometrie.

Ci si riferisce a  $\Gamma$  come al **gruppo di tassellazione** associato al poligono  $X$  e alle isometrie  $\phi_i : E_i \rightarrow E_{i\pm 1}$ .

Dotiamo  $X$  della metrica  $d_X$  dove  $d_X(P, Q)$  è l'estremo inferiore delle lunghezze iperboliche di tutte le curve che vanno da  $P$  a  $Q$  in  $X$ . Quando  $X$  è convesso, cioè quando per ogni  $P$  e  $Q \in X$  l'arco di geodetica che unisce i due punti è tutto contenuto in  $X$ , la metrica  $d_X$  coincide con la metrica iperbolica ristretta a  $X$ . Infine sia  $(\bar{X}, \bar{d}_X)$  lo spazio quoziente di  $(X, d_X)$ , dove  $\bar{X}$  è la partizione di  $X$  appena descritta e  $\bar{d}_X$  è la metrica associata a  $\bar{X}$  definita come sopra.

**Teorema 1.6.1** (Teorema di Tassellazione). *Sia  $X$  un poligono iperbolico e  $\phi_i : E_i \rightarrow E_{i\pm 1}$  siano i dati di incollamento definiti come sopra. Supponiamo anche che per ogni vertice  $P$  di  $X$ , la somma degli angoli a tutti i vertici di  $X$  che sono incollati a  $P$  sia  $\frac{2\pi}{n}$ , con  $n$  intero positivo. Infine, assumiamo che*

lo spazio quoziente  $(\bar{X}, \bar{d}_X)$  sia completo<sup>1</sup>. Allora, la famiglia dei poligoni  $\phi(X)$ , dove  $\phi$  varia su tutti gli elementi del gruppo di tassellazione  $\Gamma$ , forma una tassellazione del piano iperbolico.

---

<sup>1</sup>Per spazio metrico completo intendiamo uno spazio metrico  $(X, d)$  in cui ogni successione di Cauchy in  $X$  è convergente.



## Capitolo 2

# Tassellazione di Farey

### 2.1 Il Farey circle packing

In questo capitolo studieremo una particolare tassellazione del piano iperbolico. I tasselli saranno triangoli iperbolici ideali e noteremo come questi triangoli apparentemente diversi, ma nella metrica iperbolica congruenti, vadano a ricoprire il piano iperbolico formando figure molto interessanti ed anche esteticamente molto belle, soprattutto nel disco di Poincaré.

Come illustrato nelle Figure 2.1, 2.2 e 2.3, per ogni numero razionale  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  con  $p$  e  $q$  coprimi e  $q > 0$ , disegniamo nel piano  $\mathbb{R}^2$  la circonferenza  $C_{\frac{p}{q}}$  di diametro  $\frac{1}{q^2}$  tangente all'asse  $x$  nel punto  $(\frac{p}{q}, 0)$  e giacente sopra a questo asse.

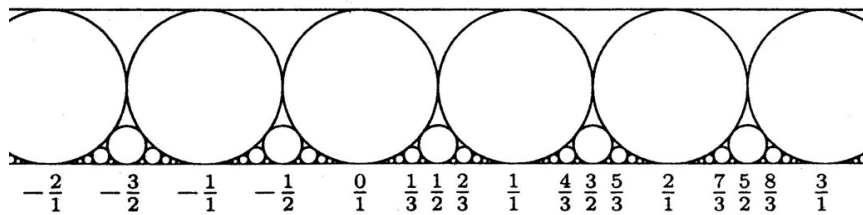


Figura 2.1: Il Farey circle packing

Si possono fare le seguenti osservazioni:

- le circonferenze  $C_{\frac{p}{q}}$  sono disgiunte;
- due circonferenze  $C_{\frac{p}{q}}$  e  $C_{\frac{p'}{q'}}$  sono tangenti esattamente quando:

$$pq' - p'q = \pm 1;$$

- tre circonferenze  $C_{\frac{p}{q}}$ ,  $C_{\frac{p'}{q'}}$  e  $C_{\frac{p''}{q''}}$  con  $\frac{p}{q} < \frac{p''}{q''} < \frac{p'}{q'}$  sono tangenti l'una con l'altra esattamente quando  $\frac{p''}{q''}$  è la somma di Farey  $\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'}$  di  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p'}{q'}$ , cioè quando:

$$\frac{p''}{q''} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$$

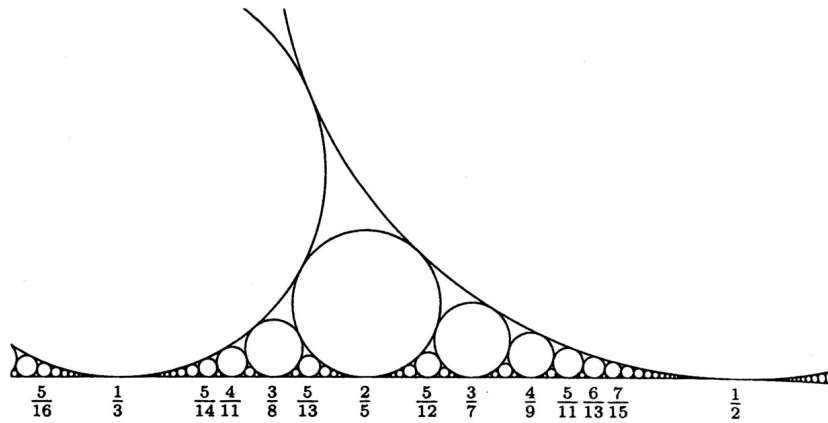


Figura 2.2: Un ingrandimento del Farey circle packing

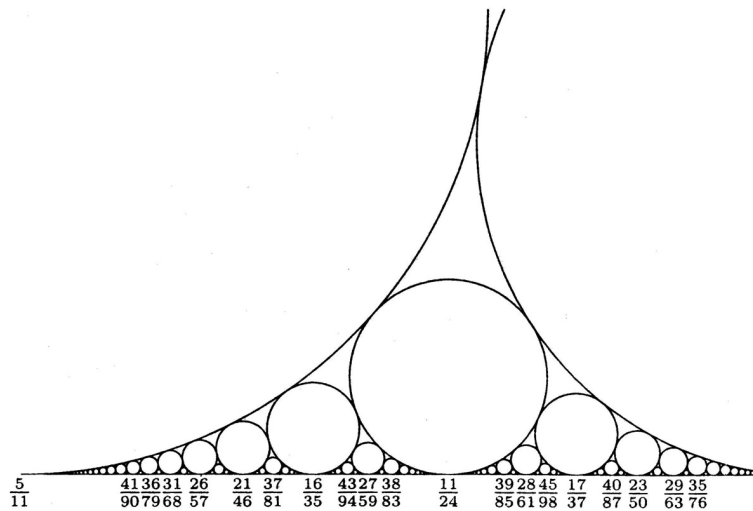


Figura 2.3: Un ulteriore ingrandimento del Farey circle packing

Le stesse proprietà si mantengono se si considera il punto all'infinito  $\infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$  come numero razionale e  $C_\infty$  come la retta di equazione  $y = 1$ , dove l'interno di  $C_\infty$  è definito come il semipiano  $\{(x, y) \mid y > 1\}$ .

L'insieme di queste circonferenze  $C_{\frac{p}{q}}$  viene chiamata **Farey circle packing**.

Si può mandare il Farey circle packing nel disco di Poincaré  $\mathbb{B}^2$  attraverso la trasformazione lineare fratta  $\Phi(z) = -\frac{z-i}{z+i}$  che, come visto nella Proposizione 1.3.4, manda il semipiano iperbolico nel disco  $\mathbb{B}^2$ . L'immagine di questa famiglia di circonferenze attraverso  $\Phi$  è illustrata nella Figura 2.4.

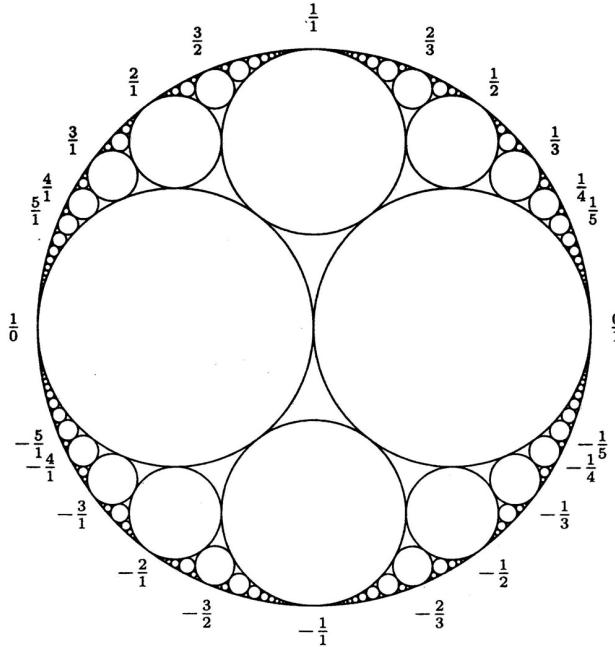


Figura 2.4: Il Farey circle packing nel disco di Poincaré  $\mathbb{B}^2$

## 2.2 La tassellazione di Farey

Ora procediamo a costruire una tassellazione del piano iperbolico. Immaginiamo di cancellare i cerchi  $C_{\frac{p}{q}}$  del Farey circle packing e, nel caso in cui  $C_{\frac{p}{q}}$  e  $C_{\frac{p'}{q'}}$  siano tangenti, di collegare i punti  $(\frac{p}{q}, 0)$  e  $(\frac{p'}{q'}, 0)$  con una semicirconferenza centrata sull'asse delle  $x$ . La collezione di geodetiche iperboliche che

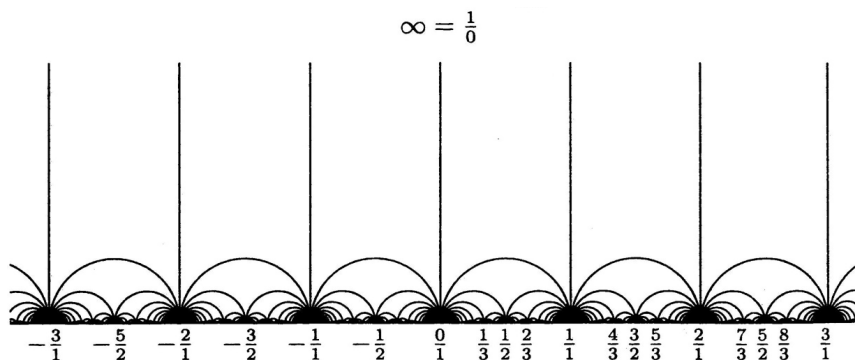


Figura 2.5: La tassellazione di Farey

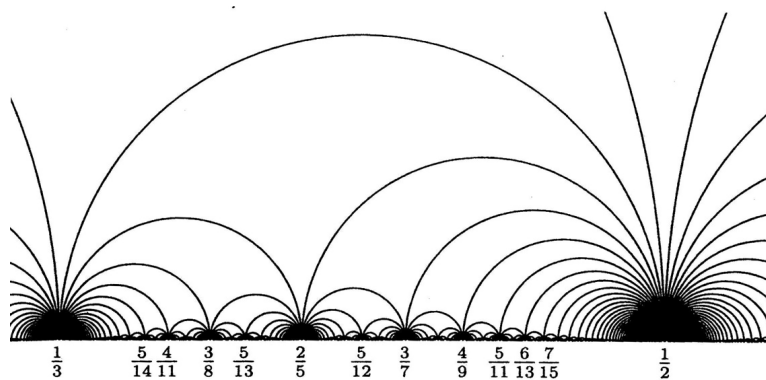


Figura 2.6: Un ingrandimento della tassellazione di Farey

si ottiene è chiamata **tassellazione di Farey**, ed è illustrata nella Figura 2.5.

Dimostriamo che la tassellazione di Farey è una tassellazione mostrando che questa famiglia di geodetiche corrisponde ai bordi della tassellazione qui di seguito descritta. Per far ciò creiamo le condizioni ideali per poter applicare il Teorema di Tassellazione 1.6.1. Prendiamo nel piano iperbolico il quadrato iperbolico  $X$  di vertici  $0, +1, -1$  e  $\infty \in \partial\mathbb{H}^2$ . I suoi lati sono le geodetiche complete  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$ , dove  $E_1$  va da  $-1$  a  $\infty$ ,  $E_2$  va da  $0$  a  $1$ ,  $E_3$  che va da  $1$  a  $\infty$  e  $E_4$  che va da  $0$  a  $-1$ , come disegnato nella Figura 2.9.

Incolliamo i lati opposti del quadrato  $X$  rispettando l'orientazione indicata nella figura.

Per incollare il lato  $E_1$  a  $E_2$  abbiamo bisogno di una isometria iperbolica che manda  $-1$  in  $0$  e  $\infty$  in  $1$ . Prendiamo la trasformazione lineare fratta  $\phi_1(z) = \frac{z+1}{z+2}$ . Invece per mandare  $E_3$  in  $E_4$  consideriamo l'isometria

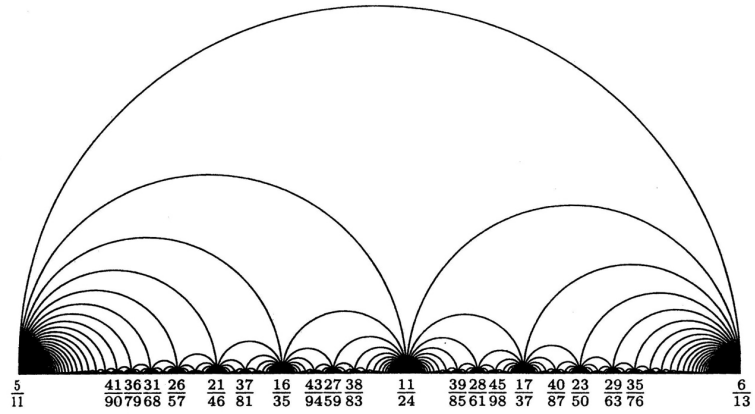


Figura 2.7: Un ulteriore ingradimento della tassellazione di Farey

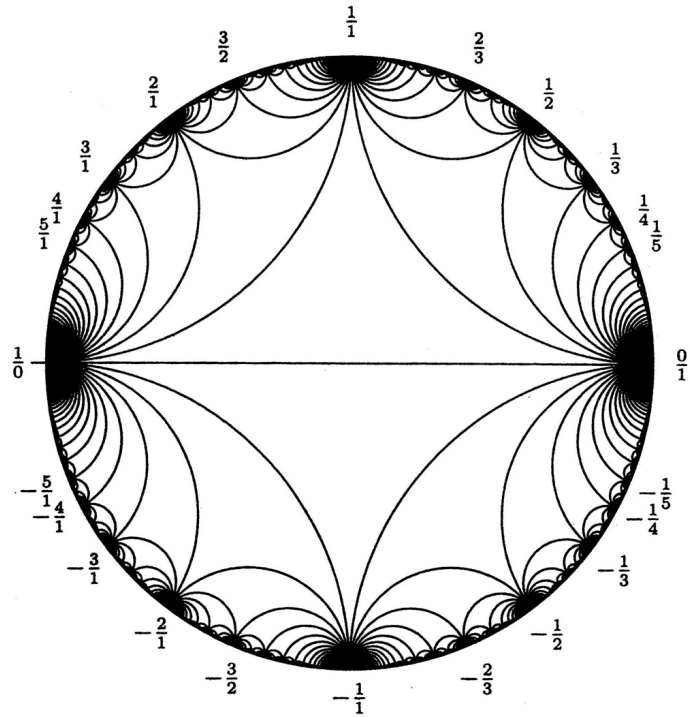


Figura 2.8: La tassellazione di Farey nel disco di Poincaré  $\mathbb{H}^2$

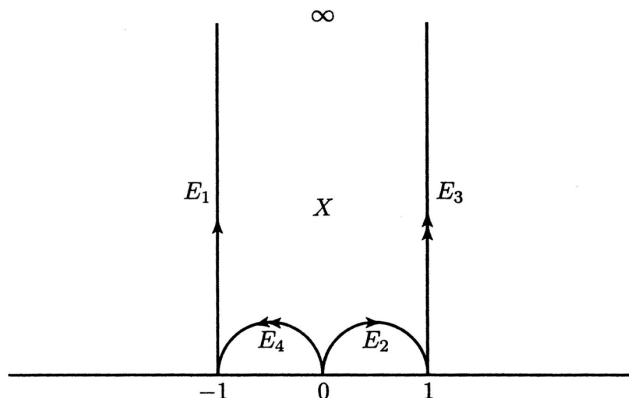


Figura 2.9: Il quadrato iperbolico  $X$

iperbolica  $\phi_3(z) = \frac{z-1}{-z+2}$ . Infine definiamo  $\phi_2 = \phi_1^{-1}$  e  $\phi_4 = \phi_3^{-1}$ .

Si può ora considerare il gruppo di tassellazione  $\Gamma$  associato al poligono  $X$  e generato dalle trasformazioni  $\phi_1$  e  $\phi_3$ . I poligoni  $\phi(X)$ , dove  $\phi$  varia su tutti gli elementi di  $\Gamma$ , formano una tassellazione di  $\mathbb{H}^2$  per il Teorema di Tassellazione 1.6.1.

Se si divide il quadrato  $X$  lungo la diagonale  $0\infty$  si ottengono due triangoli  $T^+$  e  $T^-$ , con  $T^+$  avente vertici  $0, +1$  e  $\infty$  e  $T^-$  avente vertici  $0, -1$  e  $\infty$ . Notiamo che la riflessione  $z \mapsto -\bar{z}$  rispetto alla retta  $0\infty$  scambia  $T^+$  e  $T^-$  e quindi possiamo dire che questi due triangoli sono isometrici.

Segue che la collezione di triangoli  $\phi(T^+)$  e  $\phi(T^-)$ , con  $\phi \in \Gamma$ , forma una tassellazione di  $\mathbb{H}^2$  di triangoli ideali. Denotiamo con  $\mathfrak{T}$  questa tassellazione. Noi vogliamo provare che questa tassellazione è esattamente la tassellazione di Farey, nel senso che i bordi sono esattamente le geodetiche iperboliche che vanno da  $\frac{p}{q}$  a  $\frac{p'}{q'}$  quando  $pq' - p'q = \pm 1$ . Per dimostrare questo è conveniente considerare il gruppo di isometrie  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } ab - cd = 1 \right\}$ . Siccome le funzioni  $\phi_1$  e  $\phi_3$  che generano  $\Gamma$  sono elementi di  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , possiamo concludere che  $\Gamma$  è contenuto in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

Dato un numero razionale  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , usiamo la convenzione che  $p$  e  $q$  siano coprimi e  $q > 0$ , con l'eccezione di  $\infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ . Diciamo, inoltre, che  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p'}{q'}$  formano una coppia di Farey se  $pq' - p'q = \pm 1$ .

**Lemma 2.2.1.** *Se  $\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  e se  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p'}{q'} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  formano una coppia di Farey allora anche  $\phi\left(\frac{p}{q}\right)$  e  $\phi\left(\frac{p'}{q'}\right)$  formano una coppia di Farey.*

*Dimostrazione.*

$$\phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\frac{ap}{q} + b}{\frac{cp}{q} + d} = \frac{\frac{ap+bq}{q}}{\frac{cp+dq}{q}} = \frac{ap+bq}{cp+dq}$$

$$\phi\left(\frac{p'}{q'}\right) = \frac{ap' + bq'}{cp' + dq'}$$

$$\begin{aligned} & (ap+bq)(cp'+dq') - (ap'+bq')(cp+dq) = \\ & = acpp' + adpq' + bcp'q + bdqq' - acpp' - adp'q - bcq'p - bdqq' = \\ & = (ad-bc)pq' - (ad-bc)p'q = \pm 1 \end{aligned}$$

□

Notiamo che le coppie  $0 \infty$ ,  $1 \infty$  e  $-1 \infty$  sono coppie di Farey. Dal Lemma 2.1.1 e dal fatto che  $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ , possiamo concludere che i vertici di ogni lato della tassellazione  $\mathfrak{T}$  formano una coppia di Farey.

Ora, viceversa, consideriamo una geodetica di  $\mathbb{H}^2$  i cui vertici sono una coppia di Farey.

**Lemma 2.2.2.** *Siano  $g_1$  e  $g_2$  due distinte geodetiche di  $\mathbb{H}^2$  i cui vertici formano una coppia di Farey. Allora  $g_1$  e  $g_2$  sono disgiunte.*

*Dimostrazione.* Indichiamo i vertici di  $g_1$  con  $\frac{p_1}{q_1}$  e  $\frac{p'_1}{q'_1}$  scegliendo l'etichettatura in modo che  $p_1q'_1 - p'_1q_1 = +1$ . La mappa  $\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  definita da  $\phi(z) = \frac{q_1z - p_1}{-q'_1z + p'_1}$  manda  $g_1$  nella geodetica con vertici  $0$  e  $\infty$ . Siano  $\frac{p_2}{q_2}$  e  $\frac{p'_2}{q'_2}$  i vertici di  $\phi(g_2)$ . Se  $g_1$  e  $g_2$  si incontrano, allora  $\phi(g_2)$  deve incontrare  $\phi(g_1)$ , e di conseguenza  $\frac{p_2}{q_2}$  e  $\frac{p'_2}{q'_2}$  devono avere segni opposti. Ciò è tuttavia incompatibile con il Lemma 2.1.1, il quale richiede che le geodetiche soddisfino la relazione di Farey  $p_2q'_2 - p'_2q_2 = \pm 1$ .

□

Il Lemma 2.2.2 mostra che una geodetica  $g$ , i cui vertici formano una coppia di Farey, deve essere un bordo della tassellazione  $\mathfrak{T}$ . Infatti le tessere della tassellazione  $\mathfrak{T}$  sono triangoli ideali, ed al loro interno non possono contenere nessuna geodetica completa. Perciò  $g$  deve incontrare un lato  $g'$  di  $\mathfrak{T}$ , e deve essere uguale a  $g'$  per il Lemma 2.2.2. Ciò mostra che i bordi della tassellazione  $\mathfrak{T}$  sono esattamente le geodetiche di  $\mathbb{H}^2$  i cui vertici formano una coppia di Farey. Come conseguenza la tassellazione di Farey coincide con la tassellazione  $\mathfrak{T}$ . In particolare questo prova che la tassellazione di Farey è una tassellazione.

## 2.3 Gli orocicli e il Farey circle packing

Nella sezione precedente abbiamo visto come a partire dal Farey circle packing si può costruire la tassellazione di Farey. Ora vediamo il contrario, cioè come attraverso della tassellazione possiamo ricoprire il piano iperbolico con le circonferenze del Farey circle packing.

Sia  $\xi \in \partial\mathbb{H}^2$ , un punto all'infinito del piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$ , allora un **orociclo** centrato in  $\xi$  è una curva  $H = C \setminus \{\xi\} \subset \mathbb{H}^2$  dove  $C$  è una circonferenza euclidea passante per  $\xi$  e tangente all'asse reale  $\mathbb{R}$ . In particolare, quando  $\xi = \infty$ , un orociclo è una retta orizzontale in  $\mathbb{H}^2$ . Chiaramente tutte le circonferenze del Farey circle packing sono orocicli.

Dalla Proposizione 1.3.2 sappiamo che la trasformazioni lineari e antilineari fratte mandano circonferenze in circonferenze, e quindi ogni isometria di  $\mathbb{H}^2$  manda orocicli in orocicli. Infatti un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  è una trasformazione (anti)lineare a coefficienti reali, perciò, oltre al fatto che l'orociclo viene mandato in una circonferenza, si ha che il punto all'infinito  $\xi \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  viene mandato in un punto  $\xi' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , e siccome un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  manda il piano iperbolico in sé stesso l'orociclo viene mandato in una circonferenza passante per  $\xi'$  e tangente alla retta reale.

Consideriamo gli orocicli  $C_\infty, C_{-1}, C_0, C_1$  centrati rispettivamente in  $\infty, -1, 0, 1$ , in modo tale da essere tangenti l'un l'altro come in Figura 2.10.

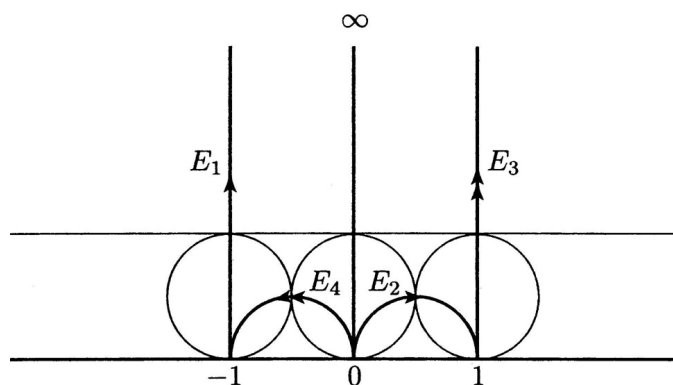


Figura 2.10: Il quadrato iperbolico  $X$  con gli orocicli centrati nei vertici

Osserviamo che le isometrie  $\phi_1$  e  $\phi_3$  della sezione precedente rispettano questo insieme di quattro orocicli, cioè quando  $\phi_i(\xi) = \xi'$ , con  $i \in \{1, 3\}$  e  $\xi, \xi' \in \{0, 1, -1, \infty\}$ , si ha  $\phi_i(C_\xi) = C_{\xi'}$ . più precisamente  $\phi_1(\infty) = 1$  e, siccome  $\phi_1$  manda orocicli in orocicli, porta  $C_\infty$  in un'orociclo centrato in 1 che passa per  $\phi_1(-2+i) = 1+i$ , cioè proprio l'orociclo  $C_1$ . Allo stesso modo  $\phi_3$  manda  $C_\infty$  in  $C_{-1}$ , infatti  $\phi_3(\infty) = -1$  e  $\phi_3(2+i) = -1+i$ . Inoltre



abbiamo che  $\phi_1(-1) = 0$ , quindi  $\phi_1$  manda  $C_{-1}$  in un orociclo centrato in 0 passante per  $\phi_1 \circ \phi_3(3+i) = i$  (siccome  $\phi_3(3+i) \in \phi_3(C_\infty) = C_{-1}$ ). Ossia  $\phi_3(C_{-1}) = C_0$ . Infine  $\phi_3$  manda l'orociclo  $C_1$  nell'orociclo  $C_0$ , infatti  $\phi_3(1) = 0$ , allora  $\phi_3$  manda  $C_1$  nell'orociclo centrato in 0 e passante per  $\phi_3 \circ \phi_1(-3+i) = i$ , siccome  $\phi_1(-3+i) \in \phi_1(C_\infty) = C_1$ .

Perció, come abbiamo tassellato il piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  con le tessere  $\phi(X)$ , con  $\phi \in \Gamma$  e  $X$  quadrato di vertici  $-1, 0, 1$  e  $\infty$ , allo stesso modo le immagini di questi quattro orocicli attraverso le trasformazioni  $\phi \in \Gamma$  formano una famiglia di orocicli tutti centrati nei punti  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Osservando le intersezioni dei quattro orocicli con  $X$ , si deduce che due orocicli si incontrano solo quando sono tangenti e questo succede esattamente quando i loro centri sono vertici della Tassellazione di Farey, ossia, quando i loro centri formano una coppia di Farey.

Per concludere che questa famiglia di orocicli è il Farey circle packing è sufficiente combinare il seguente lemma con il fatto che  $\Gamma$  è contenuto in  $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Lemma 2.3.1.** *Consideriamo l'orociclo  $C_\infty = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = 1\}$  centrato in  $\infty$ . Per ogni  $\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$  data da  $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  e ad  $-bc = 1$ , l'immagine  $\phi(C_\infty)$  è uguale a  $C_{\frac{a}{c}} - \{\frac{a}{c}\}$ , dove  $C_{\frac{a}{c}}$  è la circonferenza euclidea di diametro  $\frac{1}{c^2}$  tangente a  $\mathbb{R}$  in  $\frac{a}{c}$ .*

*Dimostrazione.* Siccome  $\phi$  manda orocicli in orocicli e poiché  $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$ , l'unica cosa che rimane da dimostrare è che il diametro euclideo della circonferenza  $C_{\frac{a}{c}}$  è  $\frac{1}{c^2}$ . Questo può essere facilmente verificato scrivendo  $\phi$  come composizione di una traslazione orizzontale, di una omotetia e di un'inversione.  $\square$



## Capitolo 3

# Le frazioni continue

In questo capitolo approfondiremo la relazione tra le frazioni continue e la tassellazione di Farey, e vedremo un'applicazione della tassellazione di Farey al fine di risolvere le equazioni diofantine. Il testo di riferimento per questo capitolo è [2].

### 3.1 Frazioni continue di numeri razionali

Una **frazione continua** è un'espressione della forma

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

con  $a_i \in \mathbb{N}$  e  $a_i > 0$  per ogni  $i \geq 1$ . Gli interi  $a_i$  sono detti **quozienti parziali**.

Poiché la scrittura della frazione continua è poco pratica possiamo usare la notazione più compatta  $x = [a_0; a_1; a_2; a_3; \dots]$ .

È evidente che se la frazione continua è finita, cioè ha un numero di quozienti parziali finito, si ha  $x \in \mathbb{Q}$ . Rimandiamo, invece, la discussione sulla convergenza di  $x$  nel caso in cui la frazione continua sia infinita alla prossima sezione.

È facile anche vedere che è possibile scrivere ogni numero razionale in forma di frazione continua finita:

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n].$$

Per trovare  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  infatti si può applicare l'algoritmo di Euclide: i quozienti parziali sono esattamente i quozienti dell'algoritmo euclideo.

Vediamolo in un esempio applicato al numero razionale  $\frac{3}{8}$ :

$$\begin{array}{r}
 p \qquad q \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 3 = 0 \cdot 8 + 3 \\
 8 = 2 \cdot 3 + 2 \\
 3 = 1 \cdot 2 + 1 \\
 2 = 2 \cdot 1 + 0
 \end{array}$$

I numeri 0, 2, 1, 2 corrispondono rispettivamente a  $a_0, a_1, a_2, a_3$  e quindi si ha

$$\frac{3}{8} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Ora costruiamo un diagramma formato da tre ventagli a forma di triangolo, dove il primo e il terzo ventaglio sono suddivisi in 2 triangoli più piccoli, come nella Figura 3.1. Notiamo che i ventagli sono stati suddivisi in un numero di parti pari a  $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2$ , nell'ordine da sinistra verso destra.

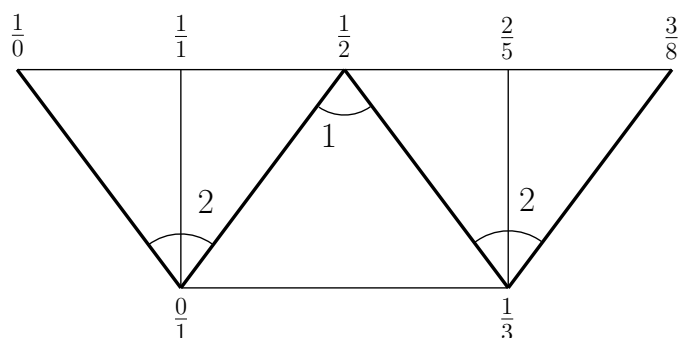


Figura 3.1: Il diagramma a ventagli costruito per il numero razionale  $\frac{3}{8}$

I vertici sono stati etichettati nel seguente modo: partendo dal lato più a sinistra etichettiamo il vertice superiore con  $\frac{1}{0}$  e quello inferiore con  $\frac{0}{1}$ , poi etichettiamo in successione, da sinistra verso destra, il terzo vertice di ogni triangolo con la somma di Farey delle frazioni agli altri due vertici.

Non è un caso che l'etichetta dell'ultimo vertice è proprio  $\frac{3}{8}$ .

Vediamo un altro esempio con il numero razionale  $\frac{67}{24}$ :

$$67 = 2 \cdot 24 + 19$$

$$24 = 1 \cdot 19 + 5$$

$$19 = 3 \cdot 5 + 4$$

$$5 = 1 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

e quindi la sua forma in frazione continua è

$$\frac{67}{24} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = [2; 1; 3; 1; 4].$$

Nel caso di un numero razionale maggiore di 1, per costruire il diagramma a ventagli è necessario sostituire l'etichetta  $\frac{0}{1}$  con l'intero  $\frac{a_0}{1}$ , che per  $\frac{67}{24}$  corrisponde a  $\frac{2}{1}$ . Procedendo con lo stesso metodo di prima si ottiene il diagramma illustrato nella Figura 3.2.

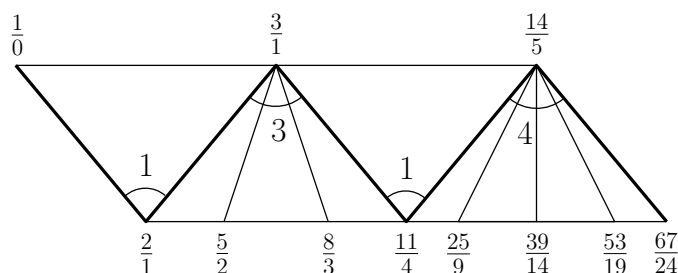


Figura 3.2: Il diagramma a ventagli del numero razionale  $\frac{67}{24}$

Consideriamo ora la successione di frazioni che si ottiene troncando progressivamente una frazione continua  $x = [a_0; a_1; a_2; a_3; \dots]$ , cioè prendiamo la successione di numeri razionali calcolati prendendo le frazioni continue aventi come quozienti parziali i primi  $i$  quozienti parziali di  $x$ :  $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ ,  $\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1]$ ,  $\frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1; a_2]$ ,  $\frac{p_3}{q_3} = [a_0; a_1; a_2; a_3]$ , eccetera. Queste frazioni sono dette **convergenti** di  $x$ . In questo caso i convergenti sono  $2$ ,  $3$ ,  $\frac{11}{4}$ ,  $\frac{14}{5}$  e  $\frac{67}{24}$ . Dimostremo che i convergenti sono i numeri razionali ai vertici del cammino a zigzag da  $\frac{1}{0}$  a  $x$ .

Dagli esempi precedenti e dalla Figura 3.3 si nota che ogni frazione  $\frac{p_i}{q_i}$ , che si trova in un vertice del cammino a zigzag della frazione continua  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$ , si può colcolare in funzione dei due precedenti vertici con la formula

$$\frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}.$$

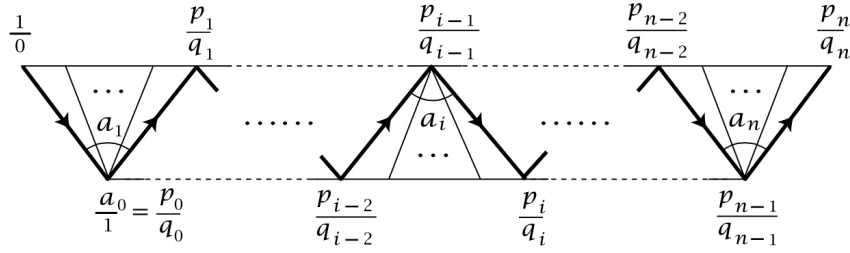


Figura 3.3: Diagramma a ventagli di un generico numero razionale

Questo perché per ottenere  $\frac{p_i}{q_i}$  si somma (usando la somma di Farey)  $a_i$  volte  $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$  al convergente precedente  $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$ .

Vediamo ora come si può ricostruire il cammino a zigzag di un diagramma a ventagli nel piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  attraverso la tassellazione di Farey. Nella Figura 3.4 viene illustrato l'esempio del numero razionale  $\frac{3}{8}$ . I quattro lati dei ventagli che compongono il cammino a zigzag corrispondono a quattro bordi della tassellazione di Farey giacenti sopra al numero  $\frac{3}{8}$ . Inoltre i cinque triangoli in cui è suddivisa la striscia di ventagli vengono deformati in cinque triangoli ideali della tassellazione.

In generale, infatti, il percorso a zigzag associato a una frazione continua  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$  lo possiamo vedere nel piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  come il cammino di una pallina che rimbalza seguendo i bordi della tassellazione fino a fermarsi in  $\frac{p}{q}$ . Comincia scendendo lungo la linea verticale da  $\frac{1}{0}$  a  $\frac{a_0}{1}$ , poi svolta a sinistra lasciandosi alle spalle  $a_1$  triangoli, poi a destra passando  $a_2$  triangoli, poi a sinistra passando  $a_3$  triangoli, e così via alternando sinistra e destra fino a raggiungere il vertice finale  $\frac{p}{q}$ . Ricordiamo dal capitolo precedente che i vertici  $\frac{p}{q}$ ,  $\frac{p'}{q'}$ ,  $\frac{p''}{q''}$  di un tassello di Farey sono legati dalla relazione  $\frac{p''}{q''} = \frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'}$ , dove  $\frac{p''}{q''}$  è il vertice nel mezzo, che sta tra  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p'}{q'}$ . E infatti abbiamo usato esattamente quella formula per etichettare i vertici del cammino a zigzag della frazione continua.

Enunciamo quindi un teorema che descrive la relazione tra le frazioni continue e la tassellazione di Farey.

**Teorema 3.1.1.** *I convergenti di una frazione continua  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$  sono i vertici del cammino a zigzag lungo i bordi della tassellazione di Farey che comincia dal vertice  $\frac{1}{0}$  e finisce nel vertice  $\frac{p}{q}$ , e si muove nel piano iperbolico nel seguente modo: inizia con il lato che va da  $\frac{1}{0}$  a  $\frac{a_0}{1}$ , poi svolta a sinistra passando un ventaglio di  $a_1$  triangoli ideali, poi a destra passando un ventaglio di  $a_2$  triangoli, di nuovo a sinistra passando  $a_3$  triangoli, e così via alternando sinistra e destra fino ad arrivare a  $\frac{p}{q}$ .*

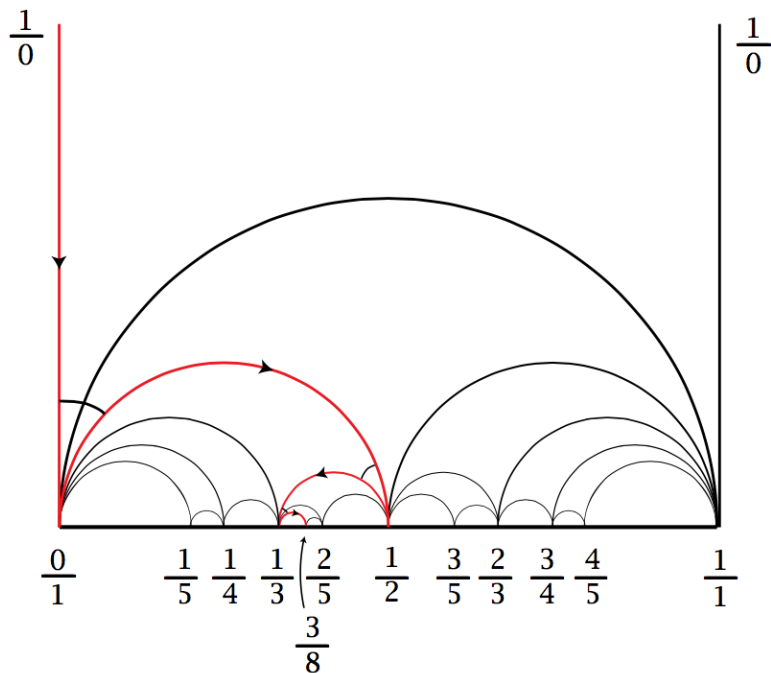


Figura 3.4: Il cammino lungo le geodetiche della tassellazione di Farey attraverso i convergenti per arrivare a  $3/8$

*Dimostrazione.* La frazione continua  $\frac{p}{q} = [a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$  determina una striscia di triangoli illustrata nella Figura 3.3.

Dimostriamo che la frazione  $\frac{p_n}{q_n}$  sul vertice finale è uguale a  $\frac{p}{q}$ . Sostituendo  $n$  con  $i$  l'affermazione rimane valida per ogni frazione continua  $[a_0; a_1; a_2; \dots; a_i]$ , cioè i vertici  $\frac{p_i}{q_i}$  lungo la striscia sono i convergenti di  $\frac{p}{q}$ , e questo è ciò che enuncia il teorema.

Per dimostrare che  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$  useremo le matrici  $2 \times 2$  a coefficienti interi. Consideriamo il prodotto

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Moltiplichiamo le matrici da sinistra verso destra. Notiamo che le colonne della prima matrice corrispondono ai due vertici  $\frac{1}{0}$  e  $\frac{a_0}{1}$  del primo lato della striscia di triangoli. Quando moltiplichiamo questa matrice con la successiva otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_0 a_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix}.$$

Le due colonne della matrice risultante sono i vertici del secondo lato del cammino a zigzag. In generale quando moltiplichiamo la matrice corrispondente

a un lato del cammino di vertici  $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$  e  $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$  con la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix}$  si ottiene la matrice corrispondente al lato successivo:

$$\begin{pmatrix} p_{i-2} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} + a_1 p_{i-1} \\ q_{i-1} & q_{i-2} + a_1 q_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{pmatrix}.$$

Alla fine, dopo che tutte le matrici sono state moltiplicate, otteniamo la matrice  $P$  corrispondente all'ultimo lato del cammino, di vertici  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  e  $\frac{p_n}{q_n}$ . In particolare la seconda colonna di  $P$  è  $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ , e rimane da dimostrare che è uguale a  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

Per calcolare il valore della frazione continua  $[a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$  si iniziano a fare i conti partendo da destra e procedendo verso sinistra, cioè partiamo svolgendo  $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$ , e procediamo dal basso verso l'alto e da destra verso sinistra. Definiamo con  $\frac{r_i}{s_i}$  il valore della frazione continua  $[0; a_i; a_{i+1}; \dots; a_n]$ , allora si ha come punto di partenza  $\frac{r_n}{s_n} = \frac{1}{a_n}$  e in generale

$$\frac{r_i}{s_i} = \frac{1}{a_i + \frac{r_{i+1}}{s_{i+1}}} = \frac{s_{i+1}}{a_i s_{i+1} + r_{i+1}}.$$

Infine

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{s_1} = \frac{a_0 s_1 + r_1}{s_1}.$$

In termini di matrici si ha

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{i+1} \\ r_{i+1} + a_i s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ s_i \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a_0 s_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Questo significa che quando calcoliamo  $P$  moltiplicando le matrici da destra verso sinistra la seconda colonna ha la seguente evoluzione:  $\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} r_{n-1} \\ s_{n-1} \end{pmatrix}$ , ...  $\begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$  e infine  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ .

Abbiamo già dimostrato che la seconda colonna di  $P$  è  $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ , allora si può concludere che  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ .  $\square$

## 3.2 Frazioni continue infinite

Abbiamo visto che tutti i numeri razionali possono essere rappresentati sotto forma di frazione continua finita  $[a_0; a_1; a_2; \dots; a_n]$ . Osserviamo ora che i numeri irrazionali, invece, possono essere rappresentati da una frazione continua infinita  $[a_0; a_1; a_2; a_3; \dots]$ .



Studiamo l'esempio  $x = [1; 1; 1; 1; 1; \dots]$ . In forma estesa

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Nella Figura 3.5 è rappresentato il corrispondente diagramma a ventagli, anch'esso infinito.

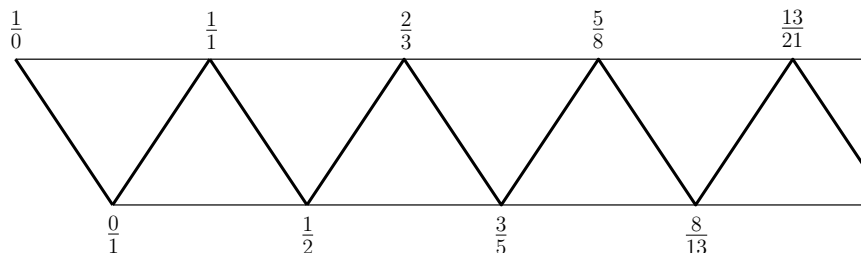


Figura 3.5: Il diagramma a ventagli infinito associato a  $[1; 1; 1; 1; \dots]$

I convergenti di questa frazione continua sono  $\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}$ , e così via. Notiamo che queste frazioni sono i rapporti tra due numeri consecutivi della successione di Fibonacci  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ , dove ogni numero è la somma dei due precedenti.

Se proviamo a percorrere il corrispondente cammino a zigzag nella tassellazione di Farey ci accorgiamo che esso consiste in una sequenza infinita di semicirconferenze, i cui vertici a sinistra formano una successione crescente di numeri che si avvicinano a un determinato valore  $x \in \mathbb{R}$ . Sappiamo che  $x$  è finito poiché sicuramente è più piccolo dei vertici a destra delle semicirconferenze, ovvero dei convergenti  $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$ , eccetera. Allo stesso modo i vertici destri delle semicirconferenze formano una successione decrescente di numeri razionali che converge a un valore  $y \in \mathbb{R}$  maggiore di ogni vertice sinistro  $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ , e così via. Sicuramente si ha  $x \leq y$ , dimostriamo che  $x = y$  procedendo per assurdo. Ipotizziamo che  $x \neq y$ , allora la successione infinita di semicirconferenze converge alla semicirconferenza di vertici  $x$  e  $y$ . Sopra a questa semicirconferenza ci sono un numero infinito di semicirconferenze, e quindi un numero infinito di triangoli della tassellazione di Farey. Siccome tra due numeri reali c'è sempre un numero razionale, allora tra  $x$  e  $y$  c'è un numero razionale  $\frac{p}{q}$  e, per quanto appena detto, sopra a questo numero razionale c'è un numero infinito di triangoli ideali. Ma noi sappiamo che sopra un numero razionale c'è solo un numero finito di triangoli ideali, quelli i cui vertici corrispondono ai suoi convergenti, che sono in numero finito. Questa contraddizione dimostra che  $x$  è uguale a  $y$ , allora la successione di convergenti della frazione continua infinita  $[1; 1; 1; 1; \dots]$  converge a un unico numero reale  $x$ . Questo risultato vale per una qualsiasi frazione continua infinita, quindi possiamo enunciare la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.1.** *I convergenti  $[a_0; a_1; \dots; a_i]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , di ogni frazione continua infinita  $[a_0; a_1; a_2; a_2; \dots]$  convergono a un unico limite.*

Il limite è per definizione il valore della frazione continua infinita.

Per calcolare il valore della frazione continua infinita  $x = [1; 1; 1; 1; \dots]$  possiamo usare un semplice trucco. Prendiamo il reciproco di  $x$ :

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1 + x$$

Allora per trovare  $x$  basta risolvere l'equazione  $\frac{1}{x} = 1 + x$  da cui si ottiene  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Siccome sappiamo che  $x$  è positivo si ha  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . Questo numero prende il nome di **numero aureo**.

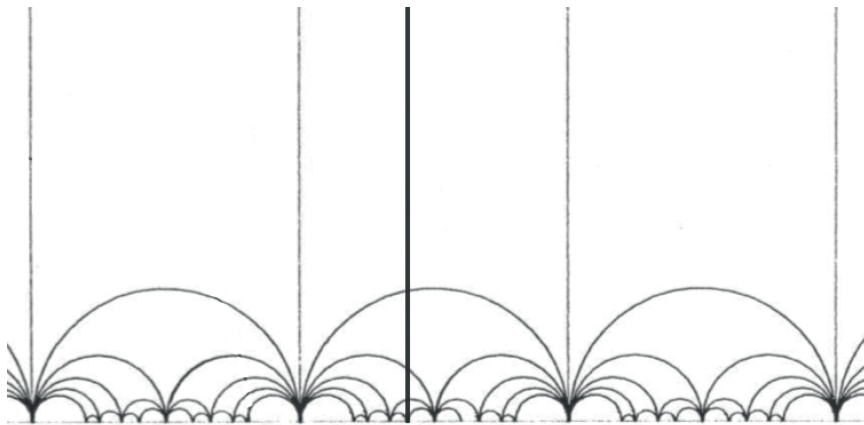


Figura 3.6: La geodetica verticale che va da  $\infty$  a un punto sull'asse  $x$  intersecando i triangoli della tassellazione

**Proposizione 3.2.2.** *Si può esprimere ogni numero irrazionale  $x$  con una frazione continua infinita, e questa frazione continua è unica.*

*Dimostrazione.* Consideriamo nella tassellazione di Farey la geodetica verticale che va dal punto all'infinito  $\infty$  al numero irrazionale  $x$ , come nella Figura 3.6. Se ci muoviamo lungo la geodetica andando verso  $x$  attraversiamo una successione di triangoli; entriamo dentro ad ogni triangolo attraverso il suo lato superiore e usciamo da uno dei due lati inferiori. Uscendo da un triangolo entriamo subito in un altro percorrendo una successione infinita di triangoli e di lati. Dalla proposizione precedente sappiamo che i vertici dei lati convergono da destra e da sinistra a  $x$ , allo stesso modo anche i lati convergono a  $x$ . Perciò i triangoli in successione formano una singola striscia infinita che consiste in una successione infinita di ventagli i cui perni stanno

alternativamente in un lato o nell'altro della striscia. Il cammino a zig zag lungo la striscia corrisponde a una frazione continua per  $x$ .

Per quanto riguarda l'unicità abbiamo visto che una frazione continua infinita associata a  $x$  corrisponde a un cammino a zigzag nella striscia infinita di triangoli che giacciono sopra a  $x$ . Questo insieme di triangoli è unico, allora la striscia è unica, e c'è solo un cammino in questa striscia che parte da  $\frac{1}{0}$  e svolta alternativamente a sinistra e a destra cominciando con una svolta a sinistra fino a converge all' $\infty$  in  $x$ . La svolta iniziale deve essere a sinistra perché i primi due convergenti sono  $a_0$  e  $a_0 + \frac{1}{a_1}$ , con  $a_0 + \frac{1}{a_1} > a_0$  poiché si ha  $a_1 > 0$ .  $\square$

### 3.3 Le equazioni diofantine

In questa sezione vediamo come l'algoritmo di Euclide, le frazioni continue e la tassellazione di Farey possono essere usati per calcolare tutte le soluzioni intere di un'equazione lineare della forma  $ax + by = n$ , dove  $a$ ,  $b$  e  $n$  sono numeri interi dati e  $x$ ,  $y$  sono le incognite. Questa equazione prende il nome di **equazione diofantina (o diofantea) lineare**.

Possiamo assumere che  $a$  e  $b$  siano entrambi diversi da 0, altrimenti la risoluzione dell'equazione sarebbe banale. Riscriviamo l'equazione nella forma  $ax - by = n$ , dove  $a$  e  $b$  sono entrambi positivi, cambiando il segno di  $x$  e  $y$  se necessario.

Se  $a$  e  $b$  hanno come massimo comune divisore  $d > 1$ , allora  $d$  divide  $ax - by$ , poiché  $d$  divide sia  $a$  che  $b$ . Quindi se l'equazione ammette soluzioni  $d$  deve dividere anche  $n$ . Possiamo, perciò, dividere per  $d$  entrambi i membri dell'equazione, così da ottenere una nuova equazione che ammette le stesse soluzioni di quella di partenza, ma tale che i nuovi coefficienti  $a$  e  $b$  non hanno divisori in comune. Da adesso in poi possiamo assumere che  $a$  e  $b$  siano coprimi.

Vediamo ora una proposizione che ci aiuta a trovare tutte le soluzioni di un'equazione diofantea.

**Proposizione 3.3.1.** *Siano  $a$  e  $b$  due interi positivi coprimi. Se una soluzione particolare di  $ax - by = n$  è  $(c, d)$ , allora una soluzione generale è  $(x, y) = (c + kb, d + ka)$ , con  $k$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(x, y)$  una qualsiasi altra soluzione e consideriamo la differenza  $(x_0, y_0) = (x - c, y - d)$ , questa soddisfa l'equazione  $ax_0 - by_0 = 0$ , in particolare  $ax_0 = by_0$ . Siccome  $a$  e  $b$  non hanno divisori in comune l'equazione  $ax_0 = by_0$  implica che  $y_0$  deve essere multiplo di  $a$  e  $x_0$  multiplo di  $b$ , e deve essere lo stesso multiplo, cosicché l'equazione diventa:  $a(kb) = b(ka)$ . Perciò abbiamo  $(x_0, y_0) = (kb, ka)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Allora ogni soluzione di  $ax - by = n$  ha la forma  $(x, y) = (c + x_0, d + y_0) = (c + kb, d + ka)$ .  $\square$

Allora basta trovare una soluzione particolare per avere tutte le soluzioni di  $ax - by = n$ . E per trovare una soluzione particolare è sufficiente risolvere il caso  $n=1$ , infatti se abbiamo una soluzione di  $ax - by = 1$  possiamo moltiplicare  $x$  e  $y$  per  $n$  per avere una soluzione di  $ax - by = n$ .

Per piccoli valori di  $a$  e  $b$  possiamo trovare una soluzione andando per tentativi, cercando i più piccoli multipli di  $a$  e  $b$  che differiscono di 1. Per esempio nell'equazione  $2x - 5y = 1$  i più piccoli multipli di 2 e 5 che differiscono di 1 sono  $2 \cdot 3$  e  $5 \cdot 1$ , allora una soluzione di  $2x - 5y = 1$  è  $(3, 1)$ . Di conseguenza una soluzione particolare di  $2x - 5y = 7$  è  $(x, y) = (21, 7)$  e, per la proposizione precedente, una soluzione generale è  $(x, y) = (21 + 5k, 7 + 2k)$ . La più piccola soluzione positiva è  $(6, 1)$  ottenuta sostituendo  $k$  con  $-3$ . Quindi un'altra forma della soluzione generale è  $(6 + 5k, 1 + 2k)$ .

Quando  $a$  e  $b$  sono coprimi esiste sempre almeno una soluzione di  $ax - by = 1$ , un modo per trovarne una è cercare un bordo della tassellazione di Farey che ha uno dei due vertici uguale a  $\frac{a}{b}$ . Questo può essere fatto usando l'algoritmo di Euclide per calcolare la striscia di triangoli che va da  $\frac{1}{0}$  a  $\frac{a}{b}$ . Come esempio risolviamo  $67x - 24y = 1$ , di cui abbiamo già calcolato la striscia di triangoli nelle sezioni precedenti. Il vertice che precede  $\frac{67}{24}$  nel cammino a zigzag è  $\frac{14}{5}$ . Si ha  $67 \cdot 5 - 24 \cdot 14 = -1$  allora una soluzione è  $(x, y) = (-5, -14)$  e la soluzione generica è  $(x, y) = (-5 + 24k, -14 + 67k)$ . Potremmo anche considerare il bordo che va da  $\frac{53}{19}$  a  $\frac{67}{24}$ ; si ha che  $67 \cdot 19 - 24 \cdot 53 = 1$ , perciò un'altra formulazione della soluzione generale è  $(19 + 24k, 53 + 67k)$ .

Da un punto di vista geometrico, trovare le soluzioni intere di  $ax + by = n$  equivale a trovare i punti sulla retta  $ax + by = n$  nel piano  $xy$  aventi entrambe le coordinate intere. I punti del piano aventi entrambe le coordinate intere formano una griglia chiamata **lattice intero**. Perciò desideriamo trovare quali punti del lattice intero giacciono sulla retta  $ax + by = n$ .

L'equazione  $ax + by = n$  quando  $n$  non è un multiplo del massimo comune divisore di  $a$  e  $b$  non ha soluzioni intere. Un esempio è l'equazione  $2x + 2y = 1$ . In questo caso la retta  $ax + by = n$  non passa attraverso i punti del lattice intero, come illustrato nella Figura 3.7, dove è rappresentata la retta  $2x + 2y = 1$  immersa nella griglia. In caso contrario, quando esiste una soluzione intera ce ne sono infinite, e corrispondono ai punti del lattice intero giacenti a intervalli equivalenti sulla retta  $ax + by = n$ ; si veda la Figura 3.8 dove è illustrato l'esempio già visto dell'equazione  $2x - 2y = 7$ .

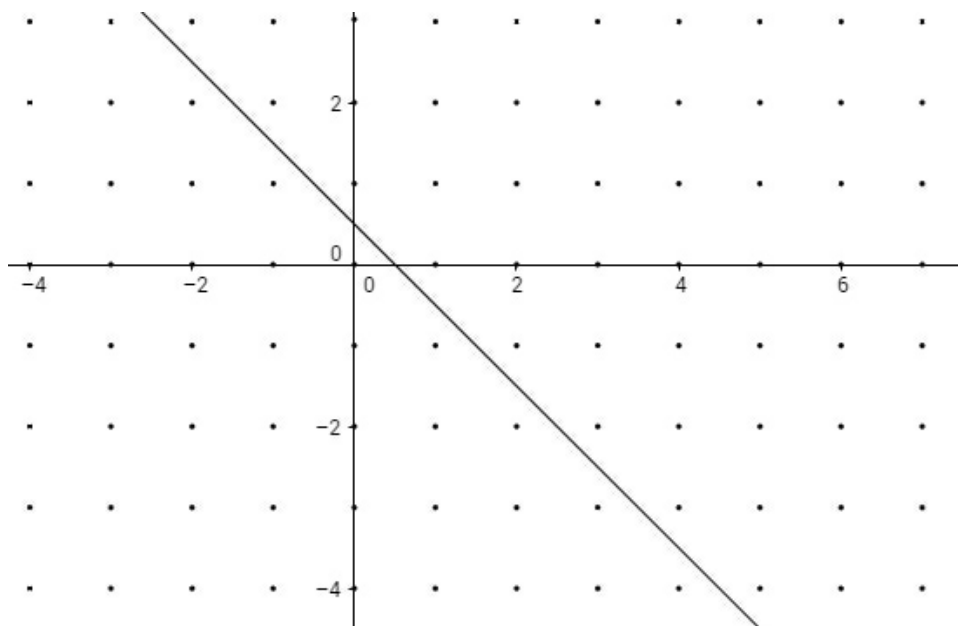


Figura 3.7: La retta  $2x+2y=1$  nel lattice intero

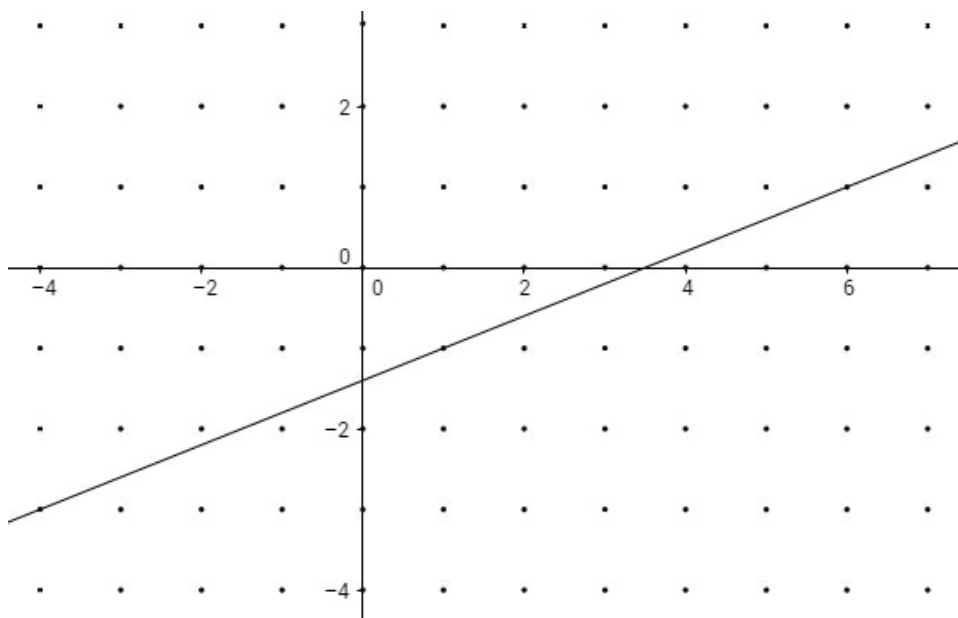


Figura 3.8: La retta  $2x-5y=7$  nel lattice intero

# Bibliografia

- [1] Francis Bonahon, *Low-Dimensional Geometry-From Euclidean Surface to Hyperbolic Knots*, American Mathematical Society, 2009.
- [2] Allen Hatcher, *Topology of Numbers*,  
<https://www.math.cornell.edu/hatcher/TN/TNpage.html>
- [3] John Farey, *On a curious property of vulgar fractions*, Philosophical Magazine 47 (1816), 385-386.
- [4] Godfrey H. Hardy, Edward M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Quinta edizione, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [5] Lester R. Ford, *Fractions*, American Mathematical Monthly 45 (1938), 586-601.
- [6] Giorgio T. Bagni, *Frazioni continue discendenti e ascendenti*, Bollettino dei Docenti di Matematica 30 (1995), 85-90, disponibile su <http://www.syllogismos.it/history/Frazioni.pdf>.