Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'ANGOLO E LA TRIGONOMETRIA: due percorsi di insegnamento e apprendimento

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
ROMINA VALENTINI

Anno Accademico 2015-2016

Gli sguardi smarriti dei ragazzi a scuola hanno bisogno di senso, di semplice senso della vita, e sono anche disposti ad ammettere che Dante glielo fornirebbe: ma se il cammino da fare è così lungo, e così faticoso, e così poco congeniale alle loro abilità, chi gli assicura che non moriranno per strada, senza mai arrivare alla meta, vittime di una presunzione che è nostra, non loro? Perché non dovrebbero cercarsi un sistema per trovare l'ossigeno prima e in modo a loro più congeniale?

Alessandro Baricco, I BARBARI. Saggio sulla mutazione.

Indice

Introduzione

In questa elaborato vengono riproposti due percorsi di insegnamento e apprendimento svolti all'interno della Scuola di Istruzione Superiore Alessandro Volta di Lodi nell'anno scolastico 2015-2016.
Nel primo è stato sviluppato il concetto di angolo, mentre nel secondo è stata affrontata la trigonometria.
I due percorsi pongono gli studenti al centro dell'attività didattica, riproducendo in parte il modello Flipped Mastery (Apprendimento Capovolto).
Le attività proposte, per sviluppare i due percorsi, possono essere così schematizzate:

- Lettura di articoli, come compito per casa, prima dell'inizio dell'attività;
- Presentazioni multimediali per introdurre gli argomenti;
- Attività di gruppo svolte sia in classe che in laboratorio;
- Schede di lavoro dove lo studente è portato ad esplorare, argomentare e congetturare;
- Osservazione e riorganizzazione dei risultati ottenuti;
- Valutazione del percorso e del lavoro prodotto dagli studenti.

Entrambi i percorsi sono stati sviluppati in classi parallele, le attività riguardanti l'angolo sono state proposte in una prima ITIS e in una prima professionale, mentre per lo sviluppo della trigonometria l'attività è stata

presentata in una terza ITIS meccanica del diurno e in una terza ITIS elettrotecnica del serale. Alla fine dell'unità sono stati raccolti i dati prodotti dalle due classi e sono stati confrontati i risultati ottenuti.
Entrambi i percorsi sono stati divisi in cinque sezioni differenti:

1 *Analisi del percorso*
Riflessioni sulle difficoltà di insegnamento e apprendimento dei concetti da trattare in classe con riferimenti ad articoli di didattica della matematica.

2 *Organizzazione dei contenuti*
Vincoli, metodologie utilizzate, obiettivi da sviluppare e progettazione dell'attività suddivisa per fasi.

3 *Sperimentazione in classe*
Analisi dell'attività svolte in classe in cui sono stati evidenziati sia i punti di forza che i punti di debolezza del percorso svolto.

4 *Valutazione*
Analisi delle prove di verifica, mostrando in particolare il percorso concettuale degli studenti e l'interpretazione dei risultati ottenuti.

5 *Conclusioni*
Considerazioni sul processo di insegnamento-apprendimento.

Nella sezione Allegati sono stati inseriti gli articoli forniti agli studenti, le presentazioni multimediali, le schede di lavoro proposte in classe, in laboratorio e i testi di verifica.

Capitolo 1

L'angolo

1.1 L'angolo e la storia - l'angolo e la didattica

1.1.1 Definizioni di angolo

Una delle prime definizioni di angolo giunte a noi dall'antichità è quella che dà Euclide nel I libro degli elementi.
Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrano tra loro e non giacciono su una linea retta...
Ai tempi di Euclide il termine angolo veniva considerato in modo più ampio di quanto non lo sia oggi, in quanto venivano inclusi tra gli angoli, anche quelli formati non solo da rette (Euclide studia gli angoli mistilinei). Venivano inoltre esclusi dalla descrizioni di angoli quelli che oggi chiamiamo angolo nullo, angolo piatto, angolo giro, dato che le linee che delimitano l'angolo non potevano stare sulla stessa direzione.
Quella di Euclide è il culmine di una successione di definizioni, ma l'idea di angolo si trova già testimoniata in vari autori precedenti (per esempio in Talete VII sec.).
Successivamente ad Euclide altri matematici greci proposero diverse definizioni.

Definisce l'angolo:

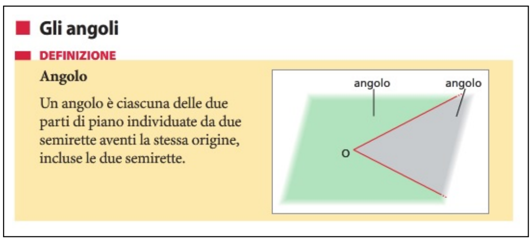
- Apollonio di Perga *Angolo è una contrazione di una superficie(...)in un solo punto sotto una linea spezzata(...)*
- Eudomo di Pergamo *Angolo rottura di una linea*
- Carpo di Antiochia *Angolo è la distanza delle linee(...)che lo compongono*
- Proclo *Angolo piano l'inclinazione di due linee che hanno un estremo in comune in un piano e che non giacciono in direzione l'una dell'altra*

1.1.2 Attuali definizioni di angolo

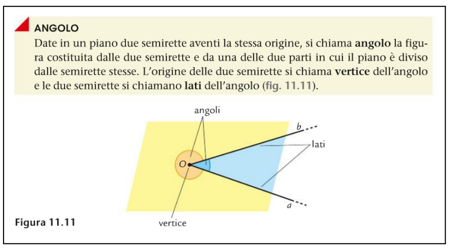
1. (Nel periodo tra XVIII e XIX Gran Bretagna si è sviluppato l'angolo inteso come rotazione) Siano date due semirette con l'origine in comune; si tenga fissa una delle due e si faccia ruotare l'altra, fino a sovrapporsi alla fissa; tale rotazione si chiama ANGOLO.

2. Angolo è la parte di piano comprese tra due semirette che hanno la stessa origine; l'origine comune delle due semirette è detta vertice dell'angolo, mentre le due semirette sono dette lati dell'angolo.
   Considerazioni sulla definizione:

   - le due semirette con origine in comune determinano due angoli distinti il che andrebbe specificato nella definizione;
   - va deciso se i lati fanno parte o no dell'angolo.



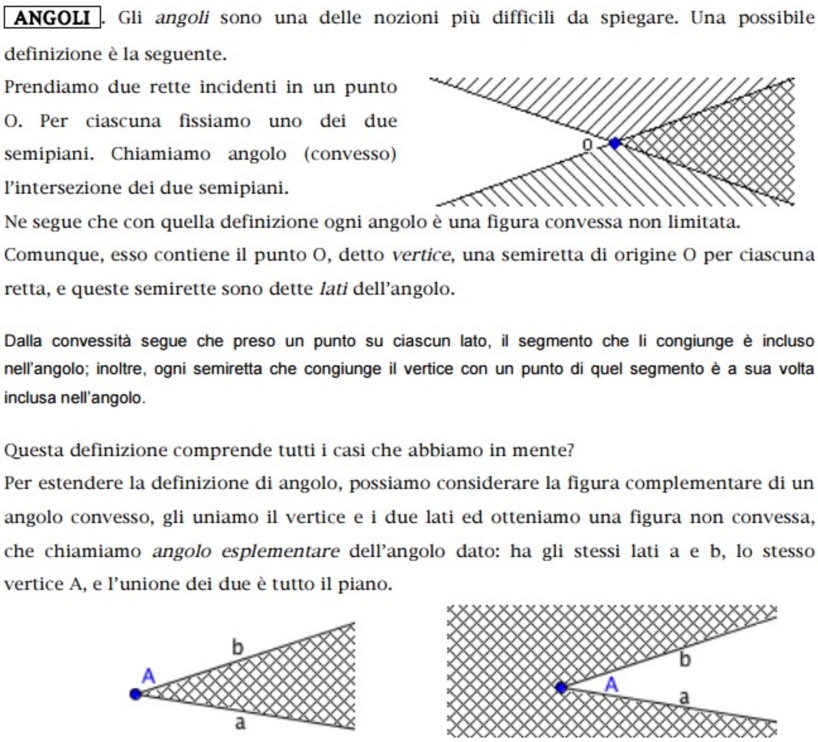
(a) Bergamini, Trifone, Barozzi. Zanichelli



(b) Sasso. Petrini

Figura 1.1: Definizioni di angolo libri scolastici

3. Angolo piano è l'intersezione (o l'unione) di due semipiani le cui origini sono incidenti; nel caso dell'intersezione, si ha un angolo convesso, nel caso dell'unione si ha un angolo concavo; l'angolo piatto si ha come intersezione nel caso in cui le due origini sono coincidenti; l'angolo giro si ha come unione; l'angolo nullo si ha come intersezione quando le due origini sono coincidenti e si considerano come semipiani quelli opposti


ANGOLI. Gli *angoli* sono una delle nozioni più difficili da spiegare. Una possibile definizione è la seguente.

Prendiamo due rette incidenti in un punto O. Per ciascuna fissiamo uno dei due semipiani. Chiamiamo angolo (convesso) l'intersezione dei due semipiani.

Ne segue che con quella definizione ogni angolo è una figura convessa non limitata.

Comunque, esso contiene il punto O, detto *vertice*, una semiretta di origine O per ciascuna retta, e queste semirette sono dette *lati* dell'angolo.

Dalla convessità segue che preso un punto su ciascun lato, il segmento che li congiunge è incluso nell'angolo; inoltre, ogni semiretta che congiunge il vertice con un punto di quel segmento è a sua volta inclusa nell'angolo.

Questa definizione comprende tutti i casi che abbiamo in mente?

Per estendere la definizione di angolo, possiamo considerare la figura complementare di un angolo convesso, gli uniamo il vertice e i due lati ed otteniamo una figura non convessa, che chiamiamo *angolo esplementare* dell'angolo dato: ha gli stessi lati a e b, lo stesso vertice A, e l'unione dei due è tutto il piano.

Figura 1.2: Definizione di angolo prof. Libero Verardi

In Figura 1.1 sono state riportano due definizioni di angolo riprese da due diversi libri scolastici in uso nelle scuole secondarie di secondo grado e nella Figura 1.2 la definizione di angolo del Professore Libero Verardi proposta nel corso di Elementi di Geometria da un punto di vista superiore dell'Università di Bologna Laurea Magistrale di Matematica.

L'idea di angolo è nettamente diversa nella varie impostazioni. Nell'opera di Euclide l'angolo è una non meglio chiarita inclinazione ‟reciproca", in quella

anglosassone una non meglio precisata "rotazione", Hilbert ne dà un'altra ancora *Sia α un qualsiasi piano e h ed k due qualsiasi semirette distinte di α aventi origine in uno stesso punto O, che appartengono a rette diverse. Chiamiamo angolo il sistema di queste due semirette h, k e lo indichiamo con $\angle(h, k)$, ovvero con $\angle(k, h)$ (...)* in cui sembra che si possa pensare che l'angolo sia formato dall'insieme dei punti delle due semirette.
Quale definizione dare agli studenti?

1.1.3 L'angolo e la didattica

L'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Duval sostiene come non ci sia noetica (acquisizione concettuale di un oggetto) senza semiotica (rappresentazione realizzata per mezzo di segni), mettendo così in evidenza l'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche.
La didattica della matematica, specialmente la geometria, deve necessariamente scontrasi con il famoso paradosso di Duval (1993): *(...) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile.*
Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali.
Fischbein afferma *Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (...)*

Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. (...) L'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti principali della didattica della matematica (nel campo della geometria) è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari.

In accordo con Fischbein sostengo l'importanza della strutturazione di attività che puntano a valorizzare e a mettere in evidenza per l'angolo varie rappresentazioni semiotiche in registri diversi, dando più di una definizione, in modo da creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti: concettuali e figurali, con l'obiettivo di ottenere una fusione in un oggetto mentale unitario.

1.2 Progettazione Attività

1.2.1 L'unità didattica: vincoli, metodologia, prerequisiti, obiettivi

Classe: L'attività didattica verrà proposta in due classi prime della scuola secondaria di secondo grado (ITIS e professionale).

La classe ITIS è composta da 24 alunni tutti maschi provenienti da diverse scuole medie. All'inizio dell'anno scolastico gli studenti erano 27, di cui 3 sono stati riorientati verso scuole professionali e altri 3 ragazzi stanno seguendo un percorso alternativo messo a disposizione della scuola. Il percorso permetterà loro di iscriversi direttamente alla seconda professionale senza avere debiti, se raggiungeranno gli obiettivi minimi del professionale. In questa classe c'è un studente R.P. con Disturbo Specifico di Apprendimento. Per questo studente il consiglio di classe ha redatto un PDP all'inizio dell'anno scolastico mentre, per l'alunno A.B., a causa di problemi di salute (BES), è stato predisposto un PDP a metà anno scolastico.

Dalle valutazioni riportate durante lo scrutinio di fine gennaio la classe risulta avere un profitto medio-basso. Gli studenti non si impegnano in maniera costante, sono poco partecipi alle lezioni e anche gli alunni più desiderosi di apprendere non raggiungono le valutazioni attese. In molti di loro manca la rielaborazione dei contenuti, l'impegno a casa e la volontà di voler apprendere nuove conoscenze.
La classe del professionale è composta da 24 alunni tutti maschi due dei quali, anche se regolarmente iscritti, non frequentano le lezioni. La classe presenta molte situazioni di criticità soprattutto dal punto di vista disciplinare. Sono poco rispettosi delle regole e mostrano scarso interessati verso le materie di studio. All'interno della classe ci sono 6 studenti certificati DSA e due studenti BES, uno dei due ragazzi BES ha smesso di frequentare la scuola.
Metodologia:

- Lezione frontale;
- Schede di lavoro;
- Discussioni di classe;
- Esercitazioni individuali;
- Esercitazioni di gruppo;
- Esercitazioni in laboratorio informatico.

Software utilizzati: Geogebra.
Prerequisiti: Il percorso didattico è stato impostato in modo da potersi inserire in armonia con il programma. Le prime lezioni non prevedono prerequisiti matematici e possono essere usate come primo approccio alla geometria.
Obiettivi disciplinari: acquisire il concetto di angolo, processi e strumenti per passare dalla congettura, all'argomentazione e alla dimostrazione.
Obbiettivi trasversali:

- Stimolare la curiosità e l'interesse degli studenti;
- Accrescere la capacità di osservazione, di astrazione e di generalizzazione;
- Stimolare la riflessione;

- Stimolare il confronto con opinioni diverse dalla propria;
- Accrescere l'attenzione ai termini usati nel linguaggio verbale;
- Accrescere il pensiero critico;
- Accrescere la capacità di comunicare.

1.2.2 Organizzazione dei contenuti

Nella tabella 1.1 sono state riportate le fasi dell'attività. Per ogni fase si sono definiti gli argomenti, le strategie e una possibile stima temporale.

Argomento	**Strategia**	**Tempi**
Fase1: La geometria nella realtà		1 ora
- Ricerca degli oggetti geometrici in classe	Lavoro di gruppo	
- Presentazione la geometria nella realtà	Presentazione	
Fase2: Geometria Euclidea-Geometrie non Euclidee	Lezione frontale	1 ora
Fase3: Geometria euclidea: prime definizioni	Esercitazione di gruppo	2 ore
Fase4: L'angolo		
- L'angolo nella realtà	Lavoro in gruppo	1 ora
- Prima attività: carta e penna	Esercitazione in classe	1 ora
- Seconda attività: l'angolo con Geogebra	Laboratorio	1 ora
- Terza attività: argomentare e congetturare	Laboratorio	1 ora
Fase5: Verificare		
Schede sviluppate Metodologia MERLO	Verifica in classe	1 ora
	Correzione verifica	1 ora

Tabella 1.1: Introduzione alla Geometria. L'angolo.

1.2.3 Fase 1: la geometria nella realtà

Per introdurre questo lavoro chiederò agli studenti di osservare la classe (la forma del banco, della lavagna, delle finestra,...) e di segnare nel proprio

quaderno tutti gli oggetti che hanno una qualche relazione con gli oggetti geometrici. Dopo 15/20 minuti gli studenti scriveranno alla lavagna le figure individuate in modo da condividere insieme le figure riconosciute.
Infine mostrerò alla classe una presentazione "La geometria nella realtà" (Allegato n.1) in cui gli studenti dovranno riconoscere figure geometriche da immagini prese dalla vita reale. La presentazione è stata fatta con "prezi" un'applicazione Web, che permette di realizzare presentazioni online usando tanti diversi template pronti all'uso. Essa si distingue da altre soluzioni simili, per la possibilità di creare presentazioni composte da un'unica pagina in cui i contenuti vanno "zoomati"e non sfogliati, come accade con le classiche slide. Ho scelto di usare questo programma perché permette di creare presentazioni molto efficaci e d'impatto in modo da attirare l'attenzione e di far incuriosire gli studenti.

1.2.4 Fase 2: geometria euclidea-geometria non euclidea

In un'ora farò vedere una presentazione (Allegato n.2) per introdurre lo studente allo studio della geometria. Questa presentazione ripercorre lo sviluppo della geometria da un punto di vista storico: dalla geometria Euclidea fino alla formulazione delle geometrie non Euclidee.

1.2.5 Fase 3: geometria euclidea: prime definizioni

Le pedine della geometra Euclidea: il punto, la retta e il piano

Non è così semplice definire il punto, la retta e il piano.
Che cos'è un punto?
Nell'immaginario collettivo un punto è il segno lasciato da un tocco della matita su un foglio di carta (come viene riportato anche nel nostro libro di testo), ma anche un oggetto che, pur grande, è lontanissimo ("La nave ha già lasciato il porto e dalla riva sembra un punto lontano"), una stella nel cielo notturno...

Si parla di punto anche nel ricamo (punto erba), nei giochi (primiera e settebello sono punti a scopa), in grammatica (punto e a capo), nelle assemblee (un punto all'ordine del giorno). Usiamo questa parola per indicare o un oggetto fisicamente di dimensioni trascurabili per il nostro occhio rispetto al contesto, oppure un qualcosa di unitario, con cui costruire una successione (un ricamo, un punteggio, una lista, ecc.).
Il punto di cui si parla in Geometria che cos'è?
Dice Euclide: *Punto è ciò che non ha parti.* Eppure, il segno di una matita sul foglio, visto al microscopio, appare come una nuvoletta di grafite. Noi auspichiamo come insegnanti che lo studente concepisca il punto matematico in modo concettuale, pensandolo come oggetto privo di dimensione, ma è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici.
Lo stesso tipo di discorso può essere fatto per la retta e per il piano. Sicuramente gli alunni in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali (come nel caso del punto, della retta e del piano) e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'"oggetto personale"e l'"oggetto istituzionale" [14].

Enti Primitivi-Assiomi-Enti definiti

Particolare attenzione dedicherò al punto, alla rette e al piano. Chiederò di darne diverse rappresentazioni soffermandomi sulla differenza tra la rappresentazione e l'aspetto concettuale.
Punti, rette e piani saranno poi gli oggetti con cui giocare con le regole dettate dagli assiomi. Euclide premette che per giocare si farà uso di attrezzi: la sua cassetta degli attrezzi, che egli chiama assiomi, è costituita dalle regole della logica diciamo aristotelica, accettate comunemente da tutti per dichiarare corretto un ragionamento.
Prima di iniziare l'attività sull'angolo analizzeremo alcuni postulati e defini-

remo alcuni concetti.

Postulati alla rinfusa

- postulati di appartenenza;
- l'ordinamento sulla retta.

Concetti definiti

- semirette;
- segmenti;
- poligonale;
- figure concave figure convesse;
- semipiano.

Per gli enti definiti farò costruire ad ogni ragazzo una tabella. Le righe conterranno i concetti, mentre le colonne la definizione e diverse rappresentazioni dell'oggetto considerato.
I disegni che ogni studente farà nel proprio quaderno usando carta e penna o Geogebra lo aiuteranno a definire l'oggetto geometrico studiato. Il disegno, come già sottolineato, poco corretto teoricamente, è didatticamente indispensabile per illustrare i concetti, per visualizzarli, per memorizzarli e per arrivare alla costruzione unitaria del concetto in questione.

1.2.6 Fase 4: L'angolo

L'angolo nella realtà

Gli angoli sono una delle nozioni più difficili da spiegare. Anche in questa fase cercherò di fare emergere tutti i contesti in cui lo studente ha sentito parlare di angolo: l'angolo nel calcio, l'angolo di cielo, l'ho messo in un angolo...

Prima attività: carta e penna

Prima di definire l'angolo chiederò ai ragazzi di svolgere in classe la prima attività. Di seguito riporto gli obiettivi che mi sono prefissata di raggiungere:

- portare gli studenti a vedere l'angolo come rotazione e quindi come porzione del piano;
- veicolare il concetto di misura dell'angolo come misura della rotazione di una lancetta sull'altra;
- osservare che le lancette di un orologio individuano sempre due angoli uno concavo e uno convesso.

Seconda Attività: l'angolo con Geogebra

In questa seconda attività chiederò di costruire e misurare un angolo utilizzando Geogebra. Questa attività farà emergere l'angolo come una figura illimitata (porzione di piano illimitata) e come intersezione di semipiani.

Terza Attività: argomentare e congetturate

In questa fase chiederò agli studenti, suddivisi in gruppi, di tracciare due rette con un punto in comune. Tramite lo strumento angolo chiederò di misurare gli angoli che si vengono a formare e di osservare cosa succede se muoviamo una delle due rette. Con questa attività vorrei che gli studenti arrivassero a congetturare che gli angoli opposti al vertice sono congruenti. Questo esercizio sarà di grande aiuto per capire la differenza tra verifica, congettura e dimostrazione.

1.3 Sperimentazione in classe

Come illustrato nelle varie fasi dell'organizzazione dei contenuti, ho introdotto l'argomento con una presentazione in Prezi in cui c'erano figure geometriche in oggetti e immagini presi dalla vita reale attirando così l'attenzione e la partecipazione degli studenti. Anche nell'esposizione in cui si metteva in relazione la geometria euclidea con quelle non euclidee, nonostante una maggiore difficoltà concettuale, gli studenti hanno mostrato lo stesso interesse. Gli ho spiegato la differenza tra le diverse geometrie sottolineando le

caratteristiche dell'Euclidea rispetto alle altre accennando le diverse utilità che hanno nella vita reale. Con questo metodo ho attirato la loro attenzione e stimolato la loro curiosità al punto che ho riprogrammato la visione della presentazione per quando introdurrò il postulato delle parallele. In quella fase approfondiremo delle parti che abbiamo, in questo momento, trattato più velocemente. Capire come si sono sviluppati i concetti nel passato li ha motivati nello studio.
Dopo questa fase introduttiva, ho chiesto agli studenti di parlare di punto, di retta e di piano usando le conoscenze possedute. Abbiamo ragionato sulla differenza tra l'aspetto concettuale e le possibili rappresentazioni che avremmo potuto dare di tali oggetti e insieme abbiamo analizzati i contesti reali in cui usiamo tali oggetti.
La Figura 1.3 riporta la descrizione fornita dal libro di testo degli alunni di punto, retta e piano.

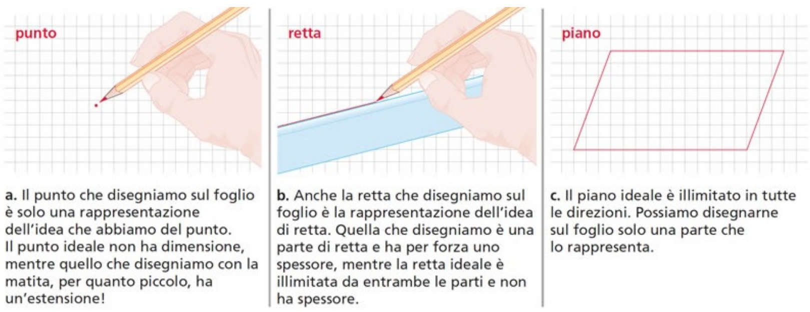
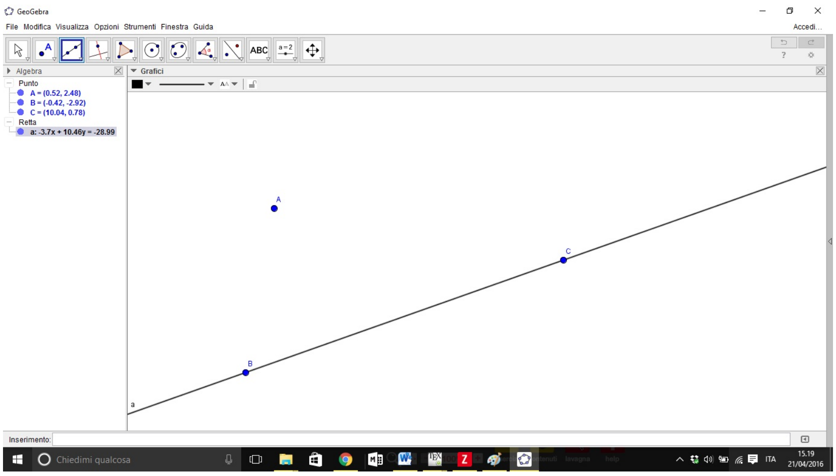


Figura 1.3: Bergamini, Trifone, Barozzi. Zanichelli

Dall'analisi di tutti gli aspetti siamo arrivati ad affermare che in geometria il punto, la retta e il piano sono enti astratti concepibili solo mentalmente perché nel mondo reale non esistono oggetti privi di dimensione (punto) o con un'unica dimensione (retta) o con due sole dimensioni (piano). Ho inoltre chiesto di rappresentare con Geogebra questi enti fondamentali.



Prima di iniziare le attività che ci hanno portato a definire l'angolo ho introdotto i primi assiomi e i concetti definiti. Di ogni concetto definito ho chiesto di darne più di una rappresentazione sia con carta e penna che con Geogebra.

1.3.1 Sperimentazione Prima Attività

Abbiamo svolta la prima attività in laboratorio, ma senza usare i computer. Gli obiettivi prefissati erano:

- portare gli studenti a vedere l'angolo come rotazione e quindi come porzione del piano;
- veicolare il concetto di misura dell'angolo come misura della rotazione di una lancetta sull'altra;
- osservare che le lancette di un orologio individuano sempre due angoli uno concavo e uno convesso.

La prima cosa che ho chiesto è stata di disegnare un orologio e di spostare le lancette delle ore e dei minuti, rappresentate con dei tappi di colore diverso, in modo da formare delle ore stabilite e di descrivere cosa osservavano Figura 1.4.

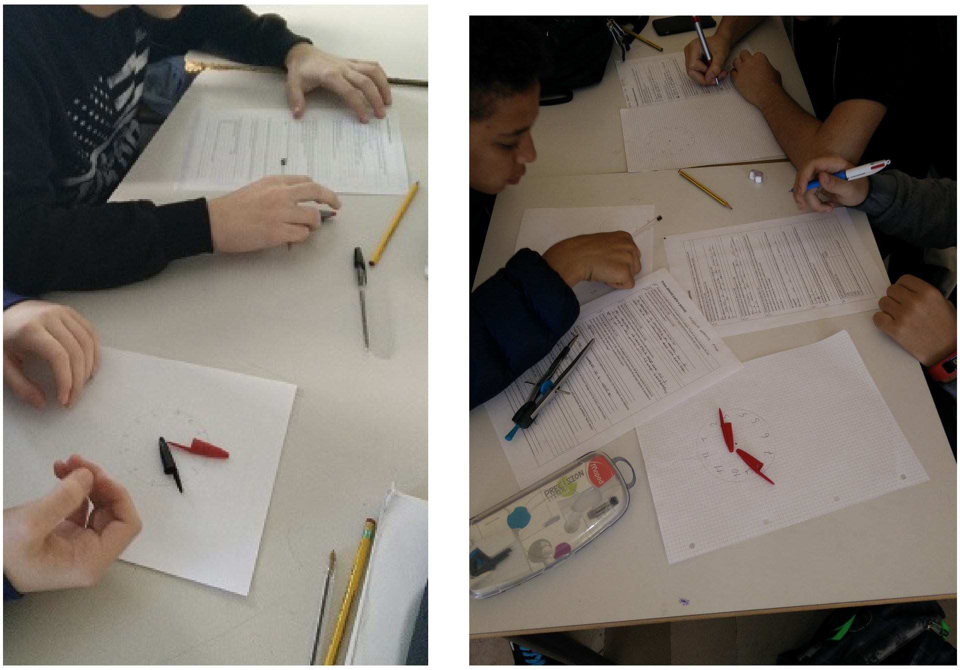
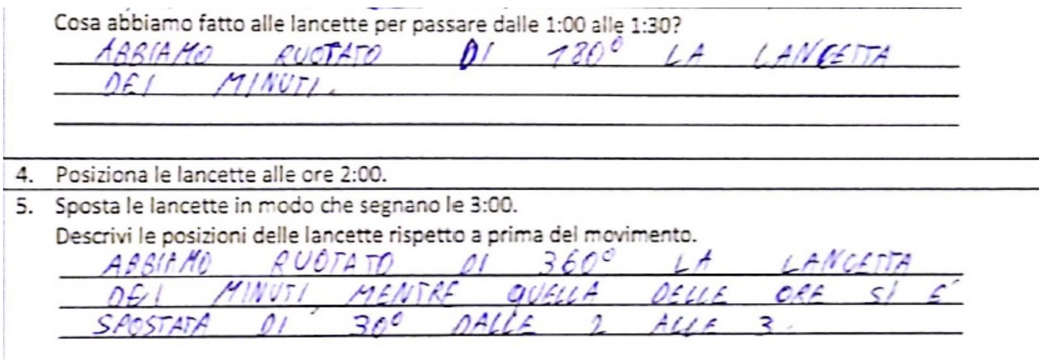


Figura 1.4: Prima Attivià

Le parole usate per descrivere l'azione sono state: SPOSTARE, MUOVERE e RUOTARE.
Lo studente A.C. ha scritto:



Cosa abbiamo fatto alle lancette per passare dalle 1:00 alle 1:30?

ABBIAMO RUOTATO DI 180° LA LANCETTA DEI MINUTI.

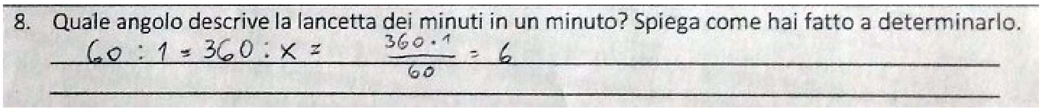
4. Posiziona le lancette alle ore 2:00.

5. Sposta le lancette in modo che segnano le 3:00.
Descrivi le posizioni delle lancette rispetto a prima del movimento.

ABBIAMO RUOTATO DI 360° LA LANCETTA DEI MINUTI, MENTRE QUELLA DELLE ORE SI E' SPOSTATA DI 30° DALLE 2 ALLE 3.

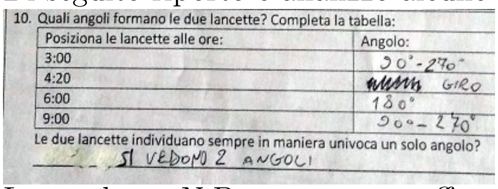
Dalle risposte scritte dagli studenti ho subito notato che quasi tutti gli alunni hanno il concetto di grado: *La lancetta ruota di 180°*, *La lancetta dei minuti si è spostata di 360°*.
Per cercare di veicolare il concetto di misura dell'angolo, come misura di

rotazione ho chiesto di provare a calcolare quale angolo descrive la lancetta dei minuti in un minuto. Molti hanno mostrato la proporzione riuscendo a dare una risposta corretta. Di seguito la risposta dello studente L.C.


8. Quale angolo descrive la lancetta dei minuti in un minuto? Spiega come hai fatto a determinarlo.

$60 : 1 = 360 : x = \frac{360 \cdot 1}{60} = 6$

Altri che avevano già determinato lo spostamento che compie la lancetta delle ore nel muoversi dalle ore 2 alle ore 3 (come lo studente A.C.) hanno determinato la soluzione dividendo 30 con il 5. Altri invece non hanno determinato i gradi della rotazione, ma hanno scritto che l'angolo che descrive la lancetta dei minuti è un angolo acuto perché minore di 90°.
Infine con le ultime domande ho cercato di veicolare il concetto di angolo come porzione di piano.
Ho chiesto di posizionare le lancette in determinate ore e ho chiesto di scrivere quanti e quali angoli vedevano. Non tutti hanno individuato i due angoli: un gruppo ne individua solo uno, alcuni vedono i due angoli solo su alcuni orari, altri non scrivono la grandezza in gradi, ma li identificano come acuto, ottuso, piatto e retto.
Di seguito riporto e analizzo alcune risposte date da alcuni studenti:

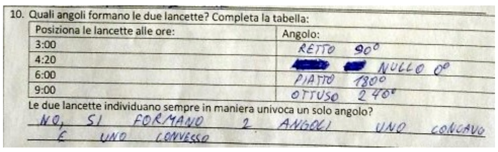

10. Quali angoli formano le due lancette? Completa la tabella:

Posiziona le lancette alle ore:	Angolo:
3:00	90°-270°
4:20	GIRO
6:00	180°
9:00	90°-270°

Le due lancette individuano sempre in maniera univoca un solo angolo?
SI VEDONO 2 ANGOLI

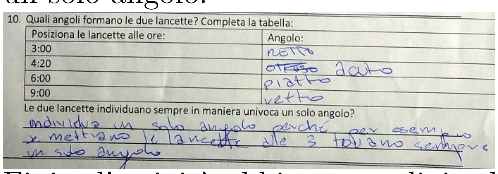
Lo studente A.P. afferma che *si vedono due angoli*, ma nelle ore 4:20 e 6:00 riconosce un solo angolo.

Lo studente N.B. nonostante afferma che *si vedono due angoli uno concavo e l'altro convesso* nelle tabella riporta un solo angolo.


10. Quali angoli formano le due lancette? Completa la tabella:

Posiziona le lancette alle ore:	Angolo:
3:00	RETTO 90°
4:20	NULLO 0°
6:00	PIATTO 180°
9:00	OTTUSO 240°

Le due lancette individuano sempre in maniera univoca un solo angolo?
NO, SI FORMANO 2 ANGOLI UNO CONCAVO E UNO CONVESSO


10. Quali angoli formano le due lancette? Completa la tabella:

Posiziona le lancette alle ore:	Angolo:
3:00	retto
4:20	~~ottuso~~ acuto
6:00	piatto
9:00	retto

Le due lancette individuano sempre in maniera univoca un solo angolo?
individua un solo angolo perché per esempio x mettiamo le lancette alle 3 troviamo sempre un solo angolo

Lo studente F.B. individua sempre solo un angolo, da come risponde sembra prediligere l'angolo convesso.
Finita l'attività abbiamo condiviso le risposte che gli studenti hanno scritto nei loro fogli. Insieme siamo riusciti a dare una definizione di angolo come

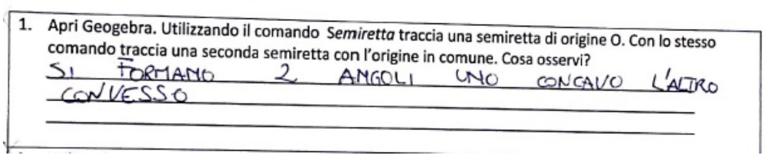
rotazione.
Siano date due lancette con l'origine in comune; si tenga fissa una delle due lancette e si faccia ruotare l'altra fino a sovrapporsi alla fissa tale rotazione si chiama ANGOLO. La rotazione coincide con la misura dell' AMPIEZZA.
Siamo poi passati ad analizzare la tabella in cui chiedevo di individuare gli angoli formati dalle lancette di diversi orologi. Dal confronto anche gli studenti che inizialmente avevano individuato un solo angolo sono riusciti a indicare anche l'altro angolo.

1.3.2 Sperimentazione Seconda Attività

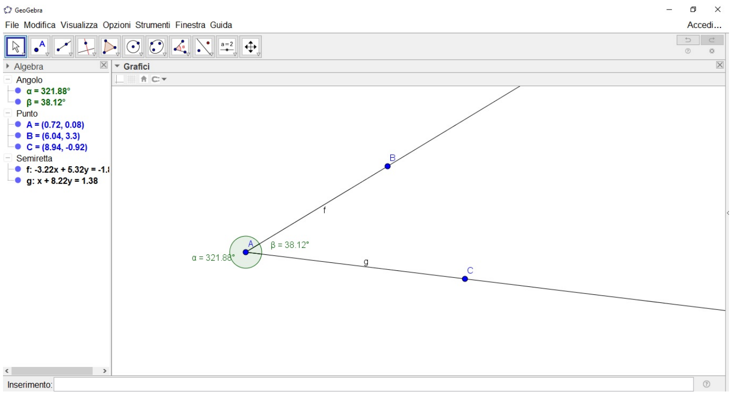
La seconda attività è stata svolta in laboratorio con Geogebra. Molti studenti già avevano lavorato con questo software alle medie. Prima di iniziare l'attività ho dedicato un'ora a spiegare l'interfaccia utente, la barra dei menu e la barra degli strumenti. In questa fase ho suddiviso i ragazzi in piccoli gruppi da tre per ogni computer e ho inserito in ogni gruppo un ragazzo che aveva già usato Geogebra. Ho scelto di fare gruppi eterogenei in modo che lo studente che aveva già usato Geogebra potesse spiegare agli altri come muoversi nell'ambiente. Nell'attività 2 chiedevo di eseguire diversi task:

1. Utilizza il comando semiretta traccia due semirette con l'origine in comune. Cosa osservi?

Con questo esercizio volevo far emergere che le lancette dell'orologio, osservate nell'attività 1, potevano essere viste come due semirette.
In questo primo compito tutti gli studenti scrivono di vedere due angoli.


1. Apri Geogebra. Utilizzando il comando *Semiretta* traccia una semiretta di origine O. Con lo stesso comando traccia una seconda semiretta con l'origine in comune. Cosa osservi?
SI FORMANO 2 ANGOLI UNO CONCAVO L'ALTRO CONVESSO

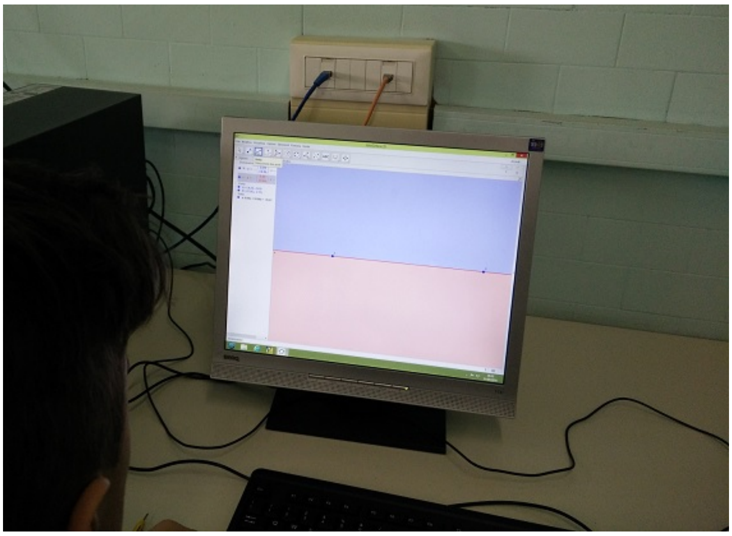
2. Utilizza il comando "Angolo"e misura gli angoli che vedi. Cosa osservi se sposto una delle due semirette? Se sommi i due angoli che misura ottieni?



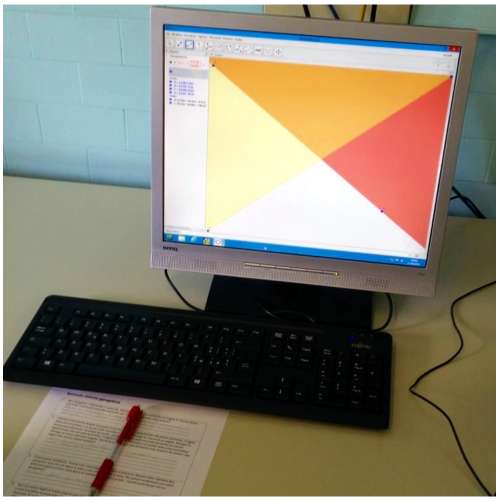
Alcuni hanno risposto in modo sintetico che la somma dei due angoli è 360°, altri invece hanno costruito una tabella in cui riportavano ogni volta che spostavano una semiretta le misure dei due angoli facendo notare che la somma non cambiava e rimaneva sempre 360°.

3.4.5. Le richieste 3, 4 e 5 avevano lo scopo di far costruire l'angolo come intersezione di semipiani.

Ho chiesto di costruire due semipiani e di colorarli con due colori differenti.



Richiedevo poi di tracciare un'altra retta che si intersecava con la precedente e di colorare con altri due colori i nuovi due semipiani. La domanda a cui dovevano rispondere gli studenti *Cosa si ottiene dall'intersezione dei due semipiani?*

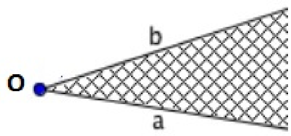


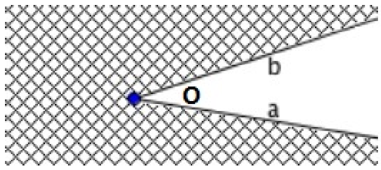
Le risposte degli studenti sono state:

- *Si formano 4 semipiani di colore diverso*;
- *I colori si sovrappongono e formano l'arancione*;
- *Si intersecano i semipiani e formano 4 semipiani*;
- *Il piano A rimane rosso, il piano B rimane giallo e il piano risultante dall'intersezione dai due piani si ottiene un terzo semipiano di nome C di colore arancione.*

Dalle risposte che gli studenti hanno dato ho notato che il concetto di semipiano non era chiaro. Infatti, invece di dire che l'intersezione di due semipiani genera un angolo, arrivano ad affermare che l'intersezione di due semipiani genera ancora un semipiano.
Per evitare che gli studenti creassero un modello errato del concetto di semipiano ho deciso di riprendere insieme la definizione di semipiano: *Data la retta di un piano, un semipiano è costituito dalla retta e da uno delle due regioni del piano in cui il piano è diviso dalla retta stessa.* Dopo aver analizzato la definizione abbiamo letto le risposte che gli studenti avevano dato alla domanda dell'attività. Ognuno ha spiegato il motivo per cui aveva dato quella risposta e ha cercato, con l'aiuto dei compagni, di correggere le parti sbagliate. Siamo così arrivati alla definizione di angolo come intersezione di semipiani.
Prendiamo due rette incidenti in un punto O. Per ciascuna fissiamo uno dei due semipiani. Chiamiamo angolo (convesso) l'intersezione dei due semipiani.

Abbiamo inoltre ragionato sul fatto l'angolo è una figura convessa non limitata. Esso contiene il punto O, detto vertice, una semiretta di origine O per ciascuna retta, e queste semirette sono dette lati dell'angolo.
Da questo punto abbiamo poi definito l'angolo concavo come il complementare di un angolo convesso unendogli il vertice e i due lati.
Da questa definizione tutti era d'accordo nell'affermare che l'unione dei due è tutto il piano come avevano già osservato dalla seconda domanda dell'attività.





1.3.3 Sperimentazione Terza Attività

Questa attività che avevo programmato prima della valutazione è stata posticipata come prima attività nel modulo successivo. Ho ritenuto opportuno apportare questa modifica, rispetto alla programmazione iniziale, perché temevo che i concetti diventassero troppi e creassero confusione nello studente. Questa attività verrà svolta prima di introdurre i triangoli, i criteri di congruenza e la dimostrazione e mi servirà come esempio per spiegare la differenza tra la dimostrazione, l'argomentazione e la verifica.

1.4 Schede Merlo

Insieme alla mia tutor, Santina Fratti, che mi ha affiancato in questo anno di prova per l'immissione in ruolo, abbiamo predisposto questa attività di verifica. Santina Fratti fa parte di un gruppo di ricerca in didattica della matematica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino che sperimenta la metodologia MERLO(Meaning Equivalence Reusable Learning)

in ambito matematico [1].
La metodologia MERLO si ispira a due direttrici di orientamento:

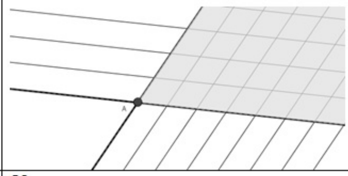
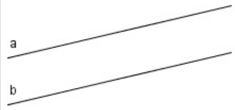
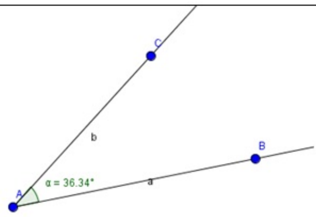
- il livello di apprendimento di un concetto è tanto maggiore quanto più chi apprende ha la possibilità di conoscere e fare esperienza delle diverse rappresentazioni semiotiche di tale concetto (Duval);
- l'apprendimento è una esperienza sociale (Vigotskij) influenzato dall'ambiente in cui si realizza.

La comunicazione intreccia queste due direttrici perciò la metodologia MERLO è uno strumento per sviluppare negli allievi la capacità argomentativa.
La metodologia MERLO prevede una raccolta di schede che richiedono allo studente di individuare oggetti matematici che condividono lo stesso significato e di argomentare le proprie scelte.
Ogni scheda è costituita, oltre che dal testo della consegna, da 5 componenti:

- Un Target Stantement (TS) che descrive una situazione concettuale
- Quattro item che, relativamente al TS, sono così classificati:
  - **Q1:** Condivide una equivalenza di significato ed ha una apparente somiglianza con il TS;
  - **Q2:** Condivide una equivalenza di significato ma non ha una apparente somiglianza con il TS;
  - **Q3:** Non condivide una equivalenza di significato ma ha una apparente somiglianza con il TS;
  - **Q4:** Non condivide una equivalenza di significato e non ha una apparente somiglianza con il TS;

  Intorno al TS si traccia un confine ideale, detto Boundary of Meaning che racchiude ai livelli diversi tutte le rappresentazioni equivalenti.

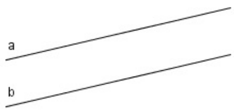
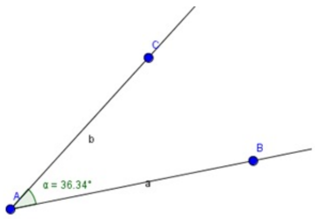
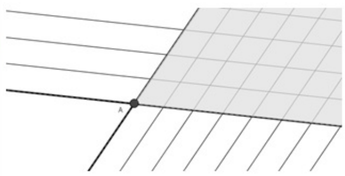
Ho preparato cinque schede per verificare l'apprendimento sull'angolo. Le schede sono state preparate usando la metodologia MERLO.
Di seguito riporto una scheda con evidenziati i diversi indicatori.

	TS	Q3
1. Segnare le affermazioni che hanno significato equivalente (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.		
Q2	Q2	Q4
Prendiamo due rette incidenti in un punto A. Per ciascuna fissiamo uno dei due semipiani. Chiamiamo angolo (convesso) l'intersezione dei due semipiani.		Il **calcio d'angolo**, è la **rimessa in gioco** effettuata dalla squadra che attacca, assegnata quando un giocatore o il portiere che difende, ha messo oltre la **linea di fondo** il pallone.

Le schede fornite agli studenti, come prova di verifica, sono state ripulite di tutti gli indicatori e sostituiti con delle lettere (A, B, C, D, E) in modo che non avessero nessun segno che potesse confonderli.

1.4.1 Riflessioni Scheda 1

SCHEDA N.1

	A	B
1. Segnare le affermazioni che hanno significato equivalente (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.		
C	D	E
Prendiamo due rette incidenti in un punto A. Per ciascuna fissiamo uno dei due semipiani. Chiamiamo angolo (convesso) l'intersezione dei due semipiani.	Il **calcio d'angolo**, è la **rimessa in gioco** effettuata dalla squadra che attacca, assegnata quando un giocatore o il portiere che difende, ha messo oltre la **linea di fondo** il pallone.	

In questa scheda molti studenti hanno individuato correttamente gli oggetti matematici che condividono lo stesso significato e alcuni sono riusciti

ad argomentare le proprie scelte utilizzando un linguaggio appropriato Figura 1.7 e Figura 1.6.
Altri, nonostante abbiano individuato correttamente gli oggetti matematici, hanno avuto grandi difficoltà nello spiegare in linguaggio naturale il motivo delle proprie scelte.
Uno studente invece ha dato una interpretazione della scheda completamente in funzione del gioco del calcio non individuando in nessun disegno concetti matematici Figura 1.5.

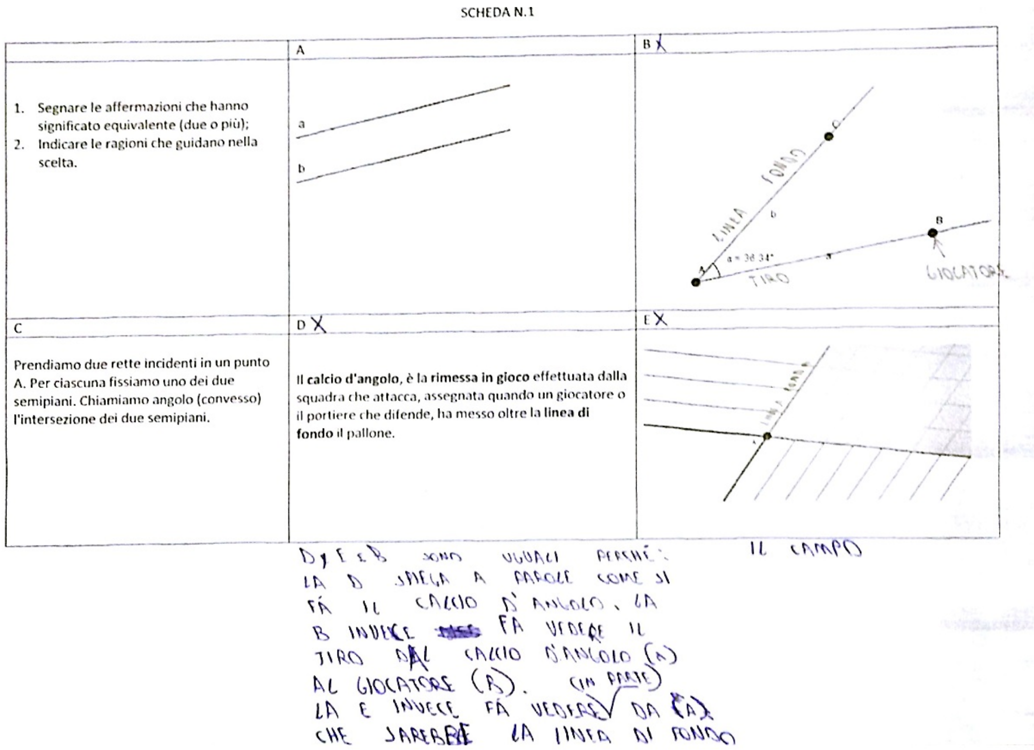


Figura 1.5: Spiegazione alunno D.V.

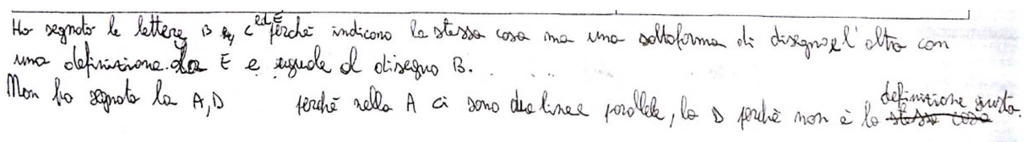


Figura 1.6: Spiegazione alunno F.A.

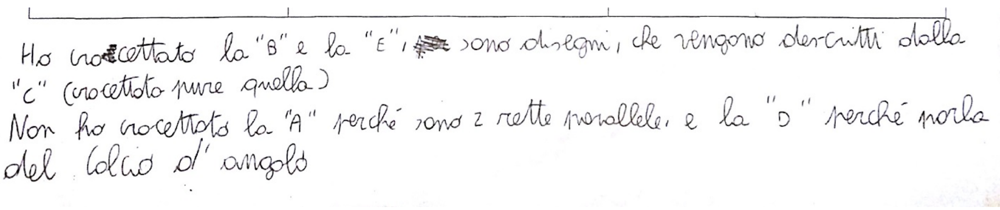
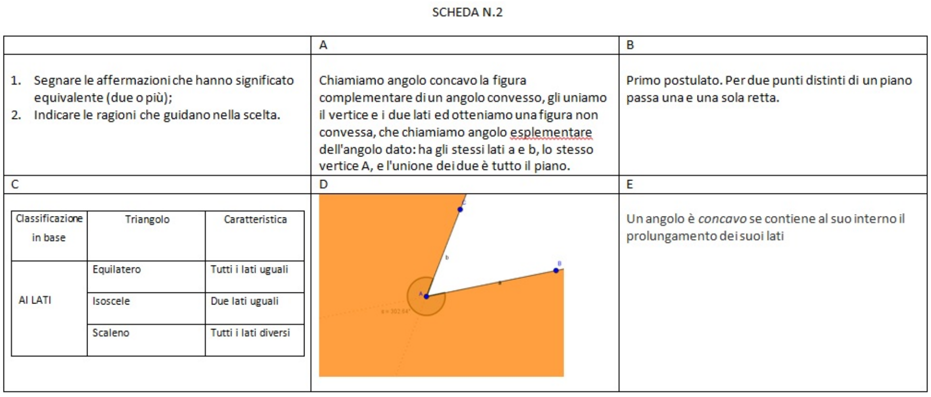

Ho crocettato la "B" e la "E", sono disegni, che vengono descritti dalla "C" (crocettato pure quella)
Non ho crocettato la "A" perché sono 2 rette parallele, e la "D" perché parla del calcio d'angolo

Figura 1.7: Spiegazione alunno J.N.

1.4.2 Riflessioni Scheda 2


SCHEDA N.2

	A	B
1. Segnare le affermazioni che hanno significato equivalente (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.	Chiamiamo angolo concavo la figura complementare di un angolo convesso, gli uniamo il vertice e i due lati ed otteniamo una figura non convessa, che chiamiamo angolo esplementare dell'angolo dato: ha gli stessi lati a e b, lo stesso vertice A, e l'unione dei due è tutto il piano.	Primo postulato. Per due punti distinti di un piano passa una e una sola retta.
C	D	E
Classificazione in base: AI LATI — Triangolo: Equilatero, Caratteristica: Tutti i lati uguali; Triangolo: Isoscele, Caratteristica: Due lati uguali; Triangolo: Scaleno, Caratteristica: Tutti i lati diversi		Un angolo è *concavo* se contiene al suo interno il prolungamento dei suoi lati

In questa scheda la maggioranza degli studenti individua gli oggetti matematici che indicano lo stesso significato Figura 1.8. Alcuni non crocettano il riquadro E Figura 1.9.
La definizione del riquadro E non è stata data volutamente in classe. L'intenzione della scheda era quella di verificare se gli studenti hanno appreso correttamente la definizione di angolo concavo e riescono a capire che il riquadro E rappresentava una altra definizione di angolo concavo.

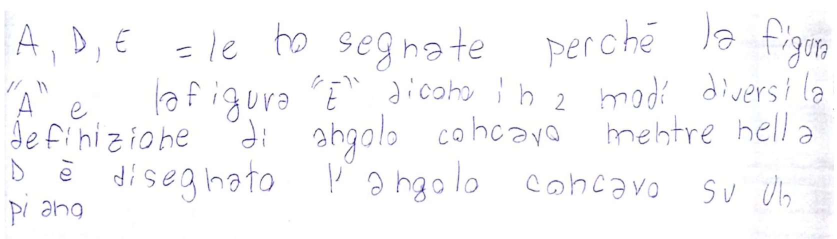

A, D, E = le ho segnate perché la figura "A" e la figura "E" dicono in 2 modi diversi la definizione di angolo concavo mentre nella D è disegnato l'angolo concavo su un piano

Figura 1.8: Spiegazione Alunno A.B.

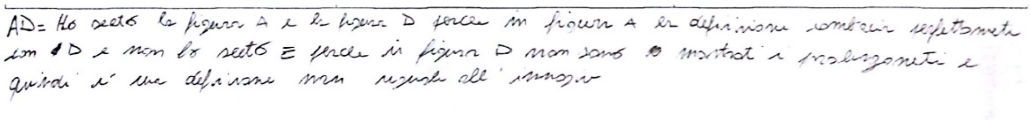

AD= Ho scelto la figura A e la figura D perche in figura A la definizione combacia perfettamente con D e non ho scelto E perche in figura D non sono mostrati i prolungamenti e quindi è una definizione non uguale all' immagine

Figura 1.9: Spiegazione Alunno R.P. studente DSA

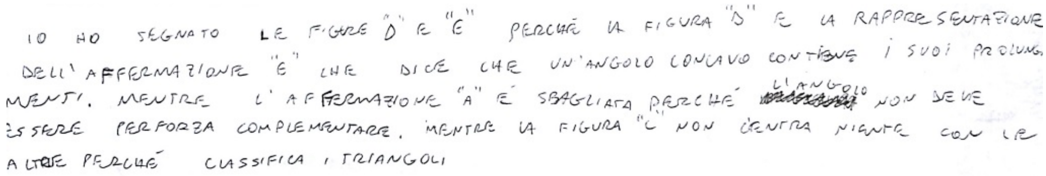
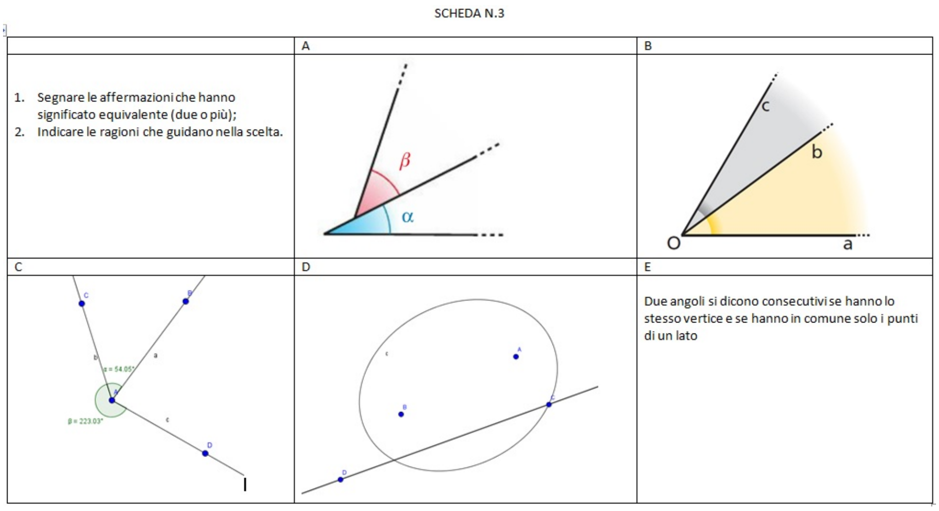

IO HO SEGNATO LE FIGURE "D" E "E" PERCHÉ LA FIGURA "D" È LA RAPPRESENTAZIONE DELL' AFFERMAZIONE "E" CHE DICE CHE UN'ANGOLO CONCAVO CONTIENE I SUOI PROLUNGAMENTI. MENTRE L' AFFERMAZIONE "A" È SBAGLIATA PERCHÉ L'ANGOLO NON DEVE ESSERE PERFORZA COMPLEMENTARE. MENTRE LA FIGURA "C" NON CENTRA NIENTE CON LE ALTRE PERCHÉ CLASSIFICA I TRIANGOLI

Figura 1.10: Spiegazione alunno V.B.

1.4.3 Riflessioni Scheda 3



Anche in questa scheda gli studenti non hanno trovato particolari difficoltà nell'individuare gli oggetti matematici con lo stesso significato. Nella prima ITIS nessuno crocetta la risposta D e solo uno studente segna la risposta A mettendo in evidenza di non aver capito che due angoli consecutivi devono avere il vertice in comune. Uno studente di prima professionale non ha ancora il concetto di angoli consecutivi e segna i riquadri D ed E come

equivalenti Figura 1.11.
Analizzando la scheda complessivamente nelle varie classi la difficoltà maggiore non è stata nell'individuare i concetti, ma nello spiegare in linguaggio naturale il motivo delle proprie scelte.

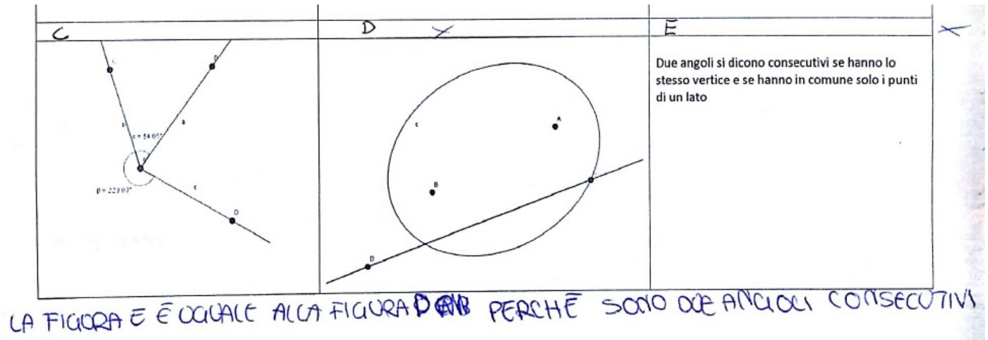


Figura 1.11: Spiegazione alunno D.D.

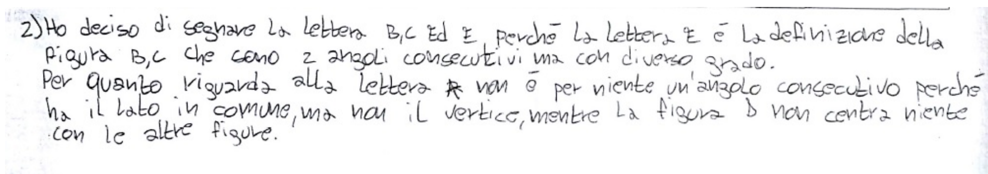


Figura 1.12: Spiegazione alunno 1I R.M.

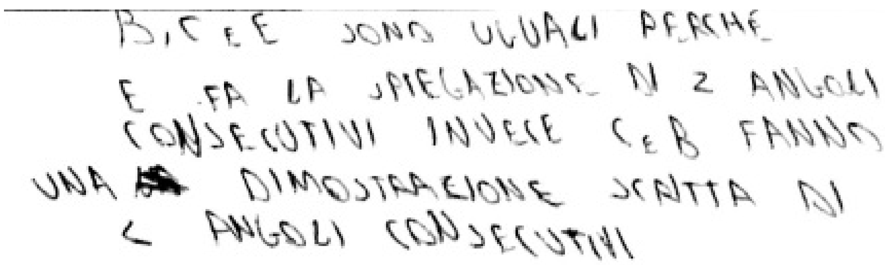
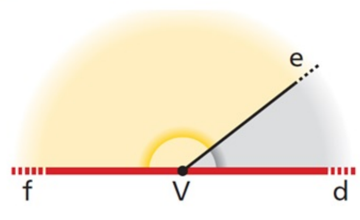


Figura 1.13: Spiegazione alunno E.D.

1.4.4 Riflessioni Scheda 4

SCHEDA N.4

	A	B
1. Segnare le affermazioni che hanno significato equivalente (due o più); 2. Indicare le ragioni che guidano nella scelta.	Un trapezio è un quadrilatero con due soli lati paralleli.	Due angoli si dicono adiacenti se sono consecutivi e se i lati non comuni appartengono alla stessa retta.
C	D	E
 		

La scheda 4 è quella che ha creato più difficoltà negli alunni. Questa scheda voleva verificare il concetto di angoli adiacenti. Il TS scelto è l'immagine di angolo adiacente riportata dal loro libro di testo (casella C), il Q4 è la definizione di trapezio e ho riportato tre Q2(Condivide una equivalenza di significato ma non ha una apparente somiglianza con il TS).
Alcuni non riconoscono in D e E degli angoli adiacenti. Altri studenti in questa scheda hanno segnato come caselle che esprimono lo stesso significato la A e la D riportando nella spiegazione di riconoscere nell'immagine dei trapezi Figura 1.15.
Uno studente segna A,D,E individuando come concetto comune i trapezi Figura 1.16.
Ritornando, all'analisi della scheda ho notato effettivamente che, nella figura D, se consideravo gli spazi neri potevo riconoscere dei trapezi, aspetto che in fase di progettazione non si era notato.

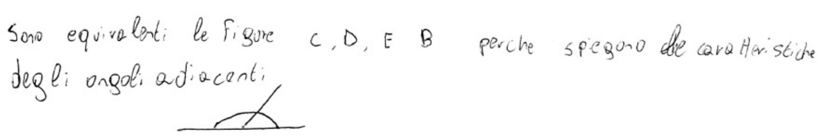

Sono equivalenti le figure C, D, E B perchè spiegano che caratteristiche degli angoli adiacenti

Figura 1.14: Spiegazione alunno M.C.

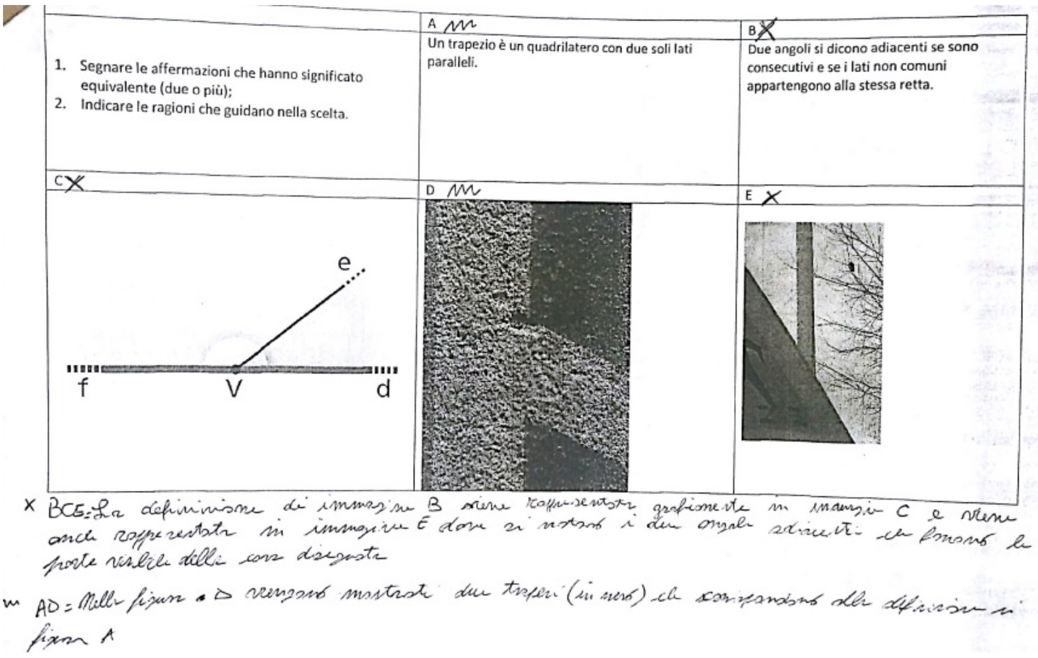


Figura 1.15: Spiegazione alunno M.F.

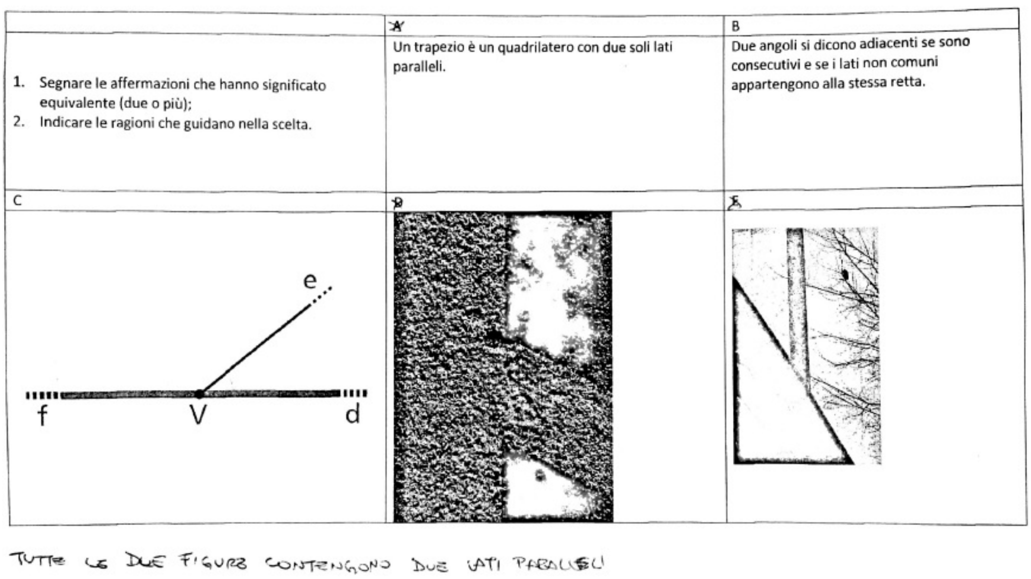
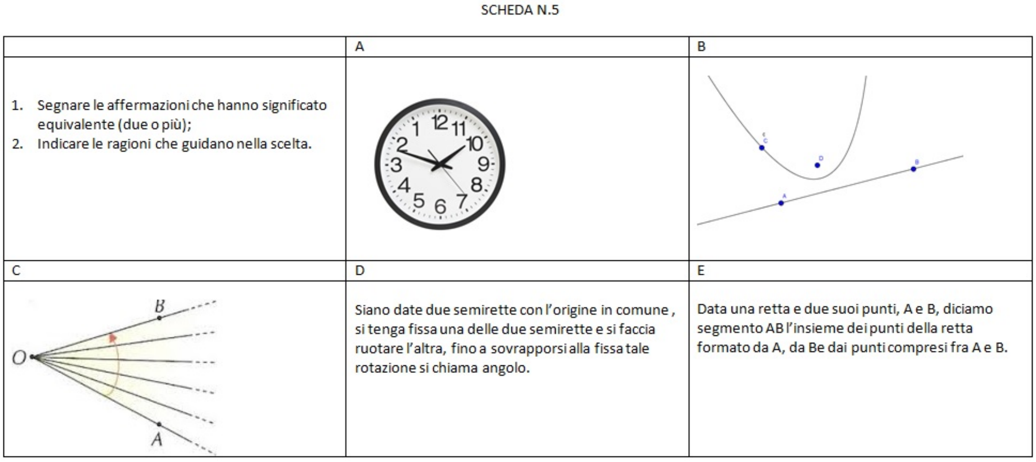


Figura 1.16: Spiegazione alunno R.M.

1.4.5 Riflessioni Scheda 5



Nell'ultima scheda gli oggetti matematici che condividono lo stesso significato sono stati selezionati dalla maggioranza degli studenti Figura 1.18, magari alcuni non hanno segnato il Q2 (L'orologio) Figura 1.17, ma il concetto di angolo visto come rotazione è stato acquisito. Due studenti dell'ITIS e uno del professionale vedono un collegamento nel Q4 (definizione di segmento) e nel Q3 (parabola e direttrice) Figura 1.19.

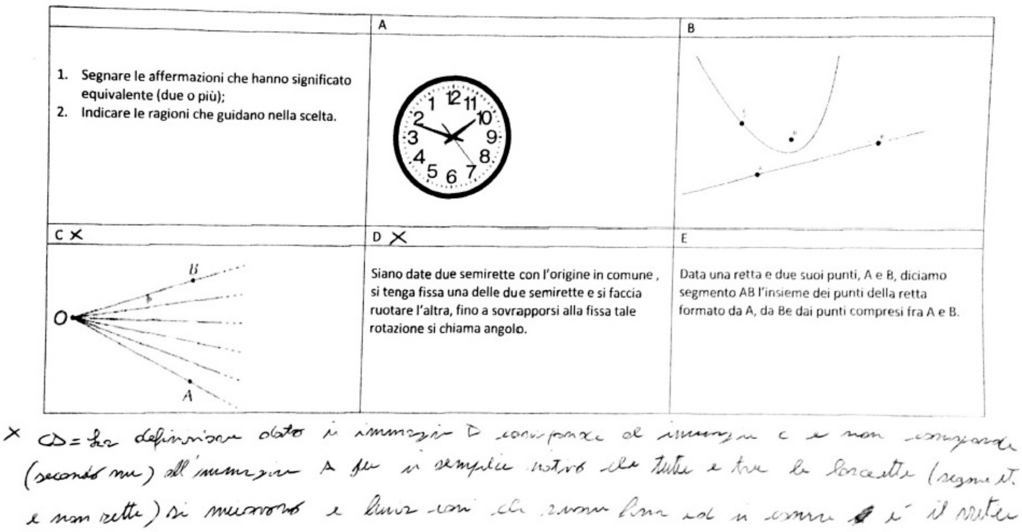
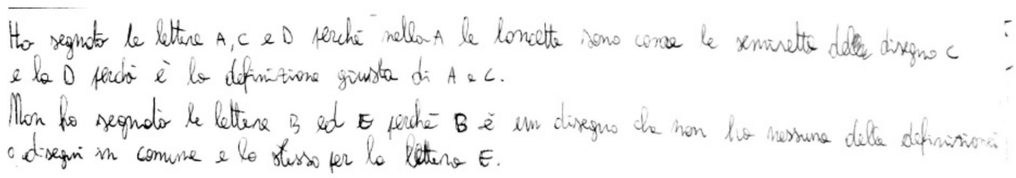


Figura 1.17: Spiegazione alunno 1I R.M.



Ho segnato le lettere A, C e D perchè nella A le lancette sono come le semirette del disegno C e la D perchè è la definizione giusta di A e C.
Non ho segnato le lettere B ed E perchè B è un disegno che non ha nessuna delle definizioni o disegni in comune e lo stesso per la lettera E.

Figura 1.18: Spiegazione Alunno R.P. studente DSA

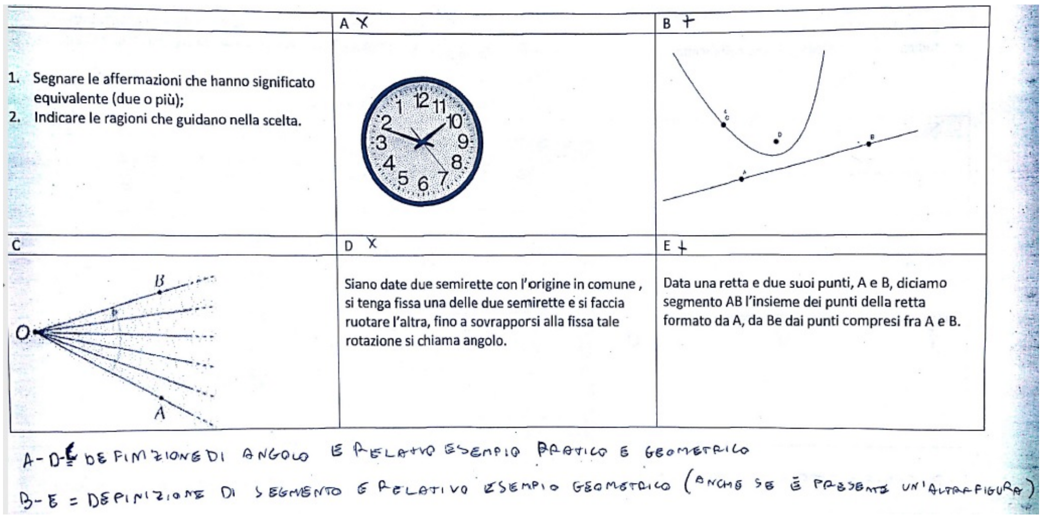


Figura 1.19: Spiegazione alunno U.E.

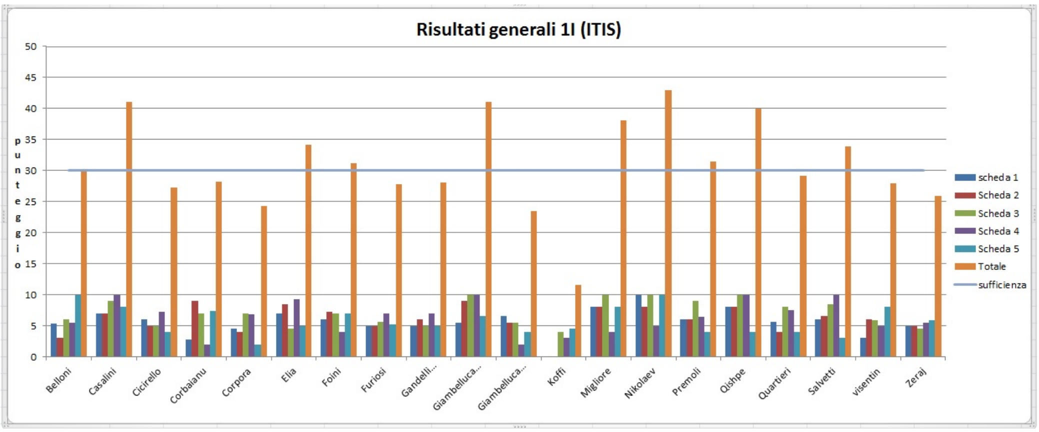
1.4.6 Valutazione

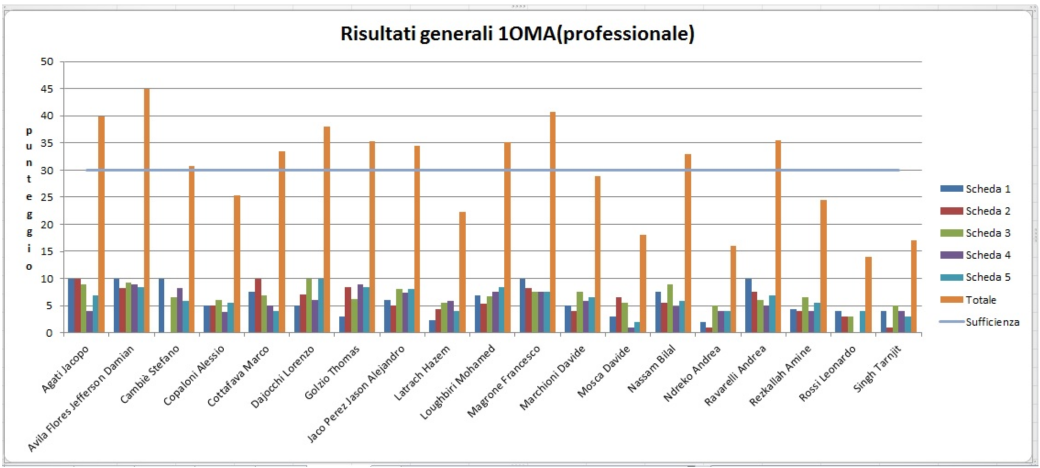
Per la valutazione si è seguito questo criterio:

- Ogni scheda valeva 10 punti:
  - 5 punti vengono attribuiti per ogni crocetta messa al posto giusto e per ogni riquadrato lasciato in bianco se non rappresentava il concetto matematico preso in esame;
  - 5 punti venivano attribuiti alla spiegazione che lo studente forniva a seconda delle scelte fatte;
- Il voto veniva calcolato attraverso una trasformazione lineare del punteggio da 0-50 in un voto da 0-10, la sufficienza è stata quindi assegna-

ta ogni volta che lo studente otteneva il 60% del punteggio totale (30 punti).

Ho riportato le valutazione di ogni studente di tutte e due le classi in un foglio di calcolo. Ho inoltro fatto dei grafici con il punteggio di ogni studente per ogni scheda e un grafico finale che riassumeva tutti i punteggi ottenuti da ogni studente. Analizzando i risultati posso affermare che, tolti alcuni casi, gli studenti hanno individuato quasi tutti gli oggetti matematici su ogni scheda, mentre hanno trovato molte difficoltà nel spiegare il motivo delle loro scelte. La parte che ha inciso notevolmente nell'attribuzione del voto sono stati i cinque punti attribuiti alla spiegazione delle scelte fatte. Molti studenti non hanno spiegato le risposte date, hanno solo scelto le caselle che rappresentavano per loro lo stesso concetto matematico, altri hanno spiegato solo le caselle crocettate e solo alcuni si sono attenuti alle richieste della consegna. In alcuni casi nella spiegazione lo studente non ha usato una terminologia specifica. Analizzando le risposte che hanno dato gli studenti si evidenziano le difficoltà a chiamare con il giusto termine gli oggetti: una definizione per lo studente V. è diventata una "dimostrazione", per U.E. un disegno di un concetto geometrico è un "esempio pratico"per M.Q. una definizione dell'angolo convesso è "una spiegazione in modo teorico".
Mi aspettavo questa difficoltà nelle classe del professionale, ma meno marcata nelle classi dell'ITIS.
I risultati ottenuti nelle due classi sono molto simili tra loro. Di seguito riporto i risultati.

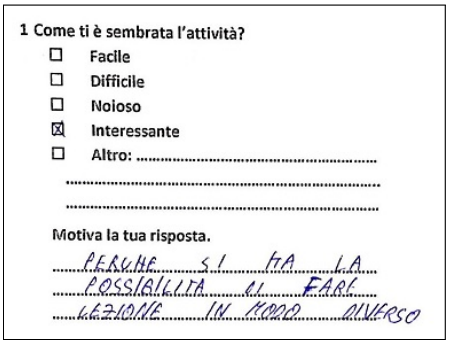




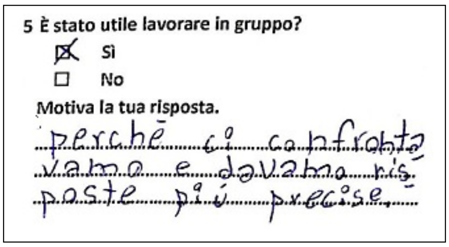
Per una eventuale proposta futura della stessa attività si dovranno sicuramente attivare ulteriori moduli in cui si presterà più attenzione alla terminologia, al passaggio da un registro semiotico all'altro e all'argomentazione. L'argomentazione è una competenza importante da sviluppare negli allievi. L'importanza dell'argomentazione come competenza centrale nella attività matematiche e, più in generale, come obiettivo importante della formazione intellettuale del cittadino è riconosciuta nelle recenti "Indicazioni nazionali"(MIUR 2010). In accordo con Morselli potremmo vedere l'argomentazione come una competenza trasversale, come una educazione alla cittadinanza e come un discorso che porta alla costruzione dei significati [9].

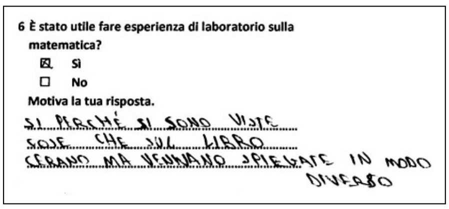
1.5 Conclusioni

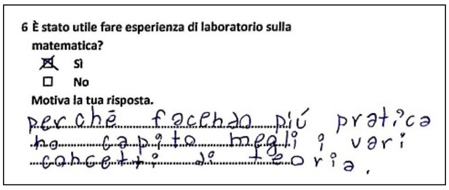
Le classi si sono dimostrate interessate e collaborative. La parte che ha appassionato gli alunni sono state le attività in laboratorio con Geogebra. La classe del professionale, in precedenza poco attenta e collaborativa, durante questa attività si è mostrata tranquilla e disposta a seguire e rispondere alle richieste proposte durante le varie fasi di lavoro.
Alla fine dell'attività si sono somministrati dei questionari per capire le opinioni degli alunni riguardo l'attività. Analizzando le risposte fornite dagli studenti, si può concludere che per gli alunni l'intero percorso è sembrato facile e interessante. La totalità degli alunni ha compreso il concetto chiave sviluppato.
Degne di note sono risultate alcune risposte date a domande aperte riguardanti l'attività, l'esperienza fatta in laboratorio e il lavoro di gruppo.
Di seguito se ne riportano alcune:


1 Come ti è sembrata l'attività?
☐ Facile
☐ Difficile
☐ Noioso
☒ Interessante
☐ Altro: ....

Motiva la tua risposta.
PERCHE SI HA LA POSSIBILITA DI FARE LEZIONE IN MODO DIVERSO


5 È stato utile lavorare in gruppo?
☒ Sì
☐ No
Motiva la tua risposta.
perchè ci confrontavamo e davamo risposte più precise.


6 È stato utile fare esperienza di laboratorio sulla matematica?
☒ Sì
☐ No
Motiva la tua risposta.
SI PERCHÉ SI SONO VISTE COSE CHE SUL LIBRO C'ERANO MA VENIVANO SPIEGATE IN MODO DIVERSO


6 È stato utile fare esperienza di laboratorio sulla matematica?
☒ Sì
☐ No
Motiva la tua risposta.
perchè facendo più pratica ho capito meglio i vari concetti di teoria.

Ritengo che questo metodo di procedere, in cui è lo studente a costruire le proprie conoscenze, sia utile a tutti gli alunni, specialmente per coloro che presentano disturbi specifici di apprendimento o bisogni educativi speciali. La metodologia MERLO, usata nei varia argomenti affrontati durante l'anno scolastico (anche come verifica formativa), a mio parere è un ottimo strumento per sviluppare negli allievi la capacità argomentativa e per monitorare l'apprendimento e la comprensione, attraverso continui accertamenti della capacità degli allievi di riconoscere rappresentazioni semiotiche differenti degli oggetti matematici.

Capitolo 2

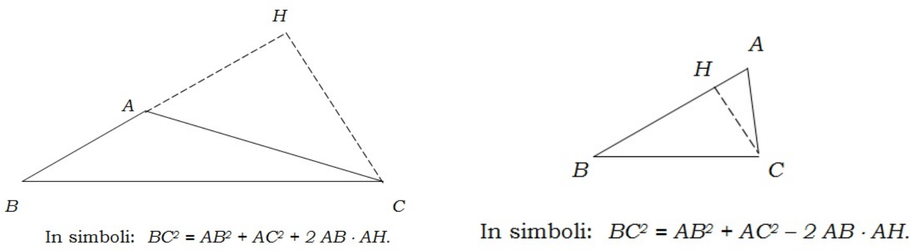
La Trigonometria

2.1 L'analisi del percorso

2.1.1 Percorso Storico

Considerata di secondo piano rispetto alle altre discipline matematiche, la trigonometria ha sempre avuto minori attenzioni storiche ed epistemologiche. Esistono innumerevoli storie della geometria, dell'algebra, dell'analisi ma non troppe della trigonometria.
Spesso la trigonometria è intesa, sia dagli studenti che dagli insegnanti, come la parte meno nobile della geometria.
La trigonometria, come ogni altra branca della matematica, non fu l'opera di un uomo o di una nazione. Teoremi concernerti i rapporti tra i lati di triangoli simili erano già noti, e usati, dagli antichi egiziani e babilonesi. Con i greci troviamo per la prima volta uno studio sistematico delle relazioni esistenti tra gli angoli (o archi) di un cerchio e le lunghezze delle corde che li sottendono. Nelle opere di Euclide non si fa uso della trigonometria nel senso ristretto al termine, ma vi sono teoremi equivalenti a leggi o a formule trigonometriche specifiche.
La proposizione 12 *Nei triangoli ottusangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo ottuso è maggiore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo*

ottuso per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo ottuso, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'esterno dalla perpendicolare all'angolo ottuso e la 13 *Nei triangoli acutangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo acuto è minore dei quadrati sui lati che comprendono l'angolo acuto per due volte il rettangolo compreso da uno solo dei lati intorno all'angolo acuto, quello su cui cade la perpendicolare, e dalla retta staccata all'interno dalla perpendicolare all'angolo acuto* del libro II degli *Elementi* equivalgono alle leggi dei coseni (teorema di Carnot) rispettivamente per l'angolo ottuso e l'angolo acuto, formulate in linguaggio geometrico piuttosto che trigonometrico Figura 2.1.

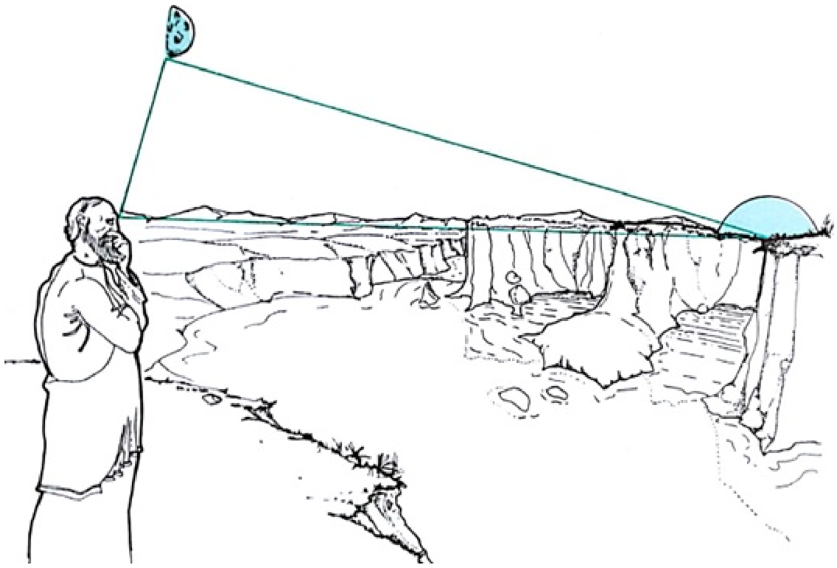


(e) Proposizione 12: Teorema dei coseni angoli ottusi.

(f) Proposizione 13: Teorema dei coseni angoli acuti.

Figura 2.1: Libro II Elementi di Euclide

In misura sempre più larga gli astronomi dell'Età alessandrina, soprattutto Eratostene di Cirene (276 a.C.-194 a.C.) e Aristarco di Samo (310-230 a.C.), trattano problemi che rilevano il bisogno di relazioni sempre più sistematiche tra angoli e corde. Aristarco, secondo Archimede e Plutarco, aveva proposto un sistema eliocentrico anticipando Copernico, ma tutto quello che è stato scritto fu perduto. Si possiede invece un trattato di Aristarco, forse composto precedentemente, *Sulla grandezza e sulla distanza del Sole e della Luna* basato sull'ipotesi di un sistema geocentrico. In quest'opera Aristarco osservò che *Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante*



In linguaggio trigonometrico moderno significherebbe che il rapporto tra la distanza della Luna e quella del Sole è sin3°. Aristarco era riuscito a calcolare questo rapporto in una relazione, era dunque riuscito a fissare le impressioni di bellezza e di ordine date dalle posizioni del Sole e della Luna. Erano gli inizi della scienza del cielo, l'astronomia, ed erano anche gli inizi di un ramo della matematica, la trigonometria.
Dal problema astronomico di Aristarco si è passati allo studio geometrico dei triangoli, alla considerazione del cerchio graduato che porta a sostituire l'arco all'angolo, alla fisica dei moti armonici,...(Allegato n.6). Questo può essere visto come un cammino che ha portato allo sviluppo della trigonometria.

2.1.2 Quadro di riferimento istituzionale

Nel documento "analitico "riguardo il percorso geometrico, nell'Area di istruzione generale del Settore Tecnologico, nella parte di Trigonometria, le linee guida del CIIM riportano le seguenti indicazioni:

1. Si consiglia di sottolineare la stretta connessione con la geometria euclidea piana, della quale la trigonometria rappresenta l'aspetto algoritmico.

2. Una efficace introduzione all'argomento può partire da situazioni e problemi reali; anche l'uso di elementi di storia (della matematica, dell'astronomia, della geodesia, della navigazione) darà valore e significato a concetti e formule.

3. Sarà opportuno fare largo uso di strumenti di calcolo automatico.

4. È da evitare il proliferare di formule, sottolineando, ogniqualvolta sia possibile, che le relazioni in trigonometria si possono ricondurre tutte a poche relazioni fondamentali che descrivono le relazioni geometriche tra gli enti.

5. È opportuno evitare problemi inutilmente laboriosi e limitare l'uso di parametri allo stretto necessario evitando sterili casistiche e formalismi.

Nella figura2.2 una proposta di percorso didattico per la trigonometria proposto dal CIIM:

Conoscenze	**Abilità**	**Competenze**	**Attività**
Trigonometria La misura in radianti di un angolo. Definire le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente e conoscere le loro relazioni fondamentali. Rappresentare graficamente le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente. Formule di addizione e sottrazione per seni e coseni. Formule di duplicazione e di bisezione. Risolvere le equazioni goniometriche elementari. Teoremi sulla risoluzione dei triangoli: teoremi sui triangoli rettangoli, teorema della corda, teorema dei seni, teorema del coseno. Applicazioni della trigonometria al calcolo delle componenti di un vettore nel piano. Relazione tra prodotto scalare di vettori e coseno dell'angolo da essi formato.	Rappresentare graficamente un angolo avente per ampiezza (in radianti) un numero reale qualsiasi (non solo multipli o sottomultipli di π). Stimare le funzioni goniometriche di un angolo dato in radianti, ad esempio sen(10), usando la circonferenza goniometrica oppure il grafico delle funzioni goniometriche (→ **Relazioni e funzioni**). Ricavare le formule di duplicazione e di bisezione da quelle di addizione. Applicare le relazioni e le formule studiate nei procedimenti risolutivi di equazioni goniometriche. Dimostrare i teoremi di trigonometria.	Misurare angoli in problemi anche di altre discipline e in vari ambiti del mondo reale. Applicare i teoremi di trigonometria nei problemi geometrici riguardanti la risoluzione di triangoli. Applicare i teoremi di trigonometria nelle situazioni problematiche riguardanti altre discipline, quali la Fisica o altre discipline studiate nei vari indirizzi del Settore Tecnologico, e vari ambiti del mondo reale. Applicare la trigonometria al calcolo con i vettori.	***Attività consigliate***: Attività di m@t.abel per il secondo biennio: - Angoli e triangoli: mondo reale e funzioni, nell'ambito *Geometria*. - Anche i proiettili hanno leggi, nell'ambito *Relazioni e funzioni*. Attività di *Matematica 2003*: - La trigonometria e il mondo reale, nell'ambito *Spazio e figure*. Attività di *Matematica 2004*: - Numeri complessi, vettori e trasformazioni geometriche del piano nell'ambito *Numeri e algoritmi*. Lezioni su Treccani Scuola a cura di Daniela Valenti http://www.treccani.it/scuola/lezioni/matematica/piano_editoriale.html : Circonferenza: Pi greco e i radianti Trigonometria: cominciamo con i triangoli rettangoli. Trigonometria: la circonferenza goniometrica. Trigonometria: E se il triangolo non è rettangolo? Trigonometria e luce: una lezione interdisciplinare. Corso di trigonometria di David Joyce http://www.clarku.edu/~djoyce/trig

Figura 2.2: Trigonometria – Istituti Tecnici, settore Tecnologico - Secondo Biennio - Proposta di un percorso didattico

2.1.3 Progettazione didattica

Tenendo in considerazione le linee guida del CIIM, lo sviluppo storico della trigonometria e facendo una analisi dei libri di testo, da quelli che abbiamo in adozione fino a quelli fuori produzione e di difficile reperimento, ho pensato di proporre gli argomenti con un un approccio "sperimentale"poco usuale, specialmente nei libri di testo attuali (Zanichelli, Ghisetti e Corvi editore, Petrini,...), dove sono i ragazzi tramite attività guidate, partendo da situazioni reali, ad arrivare a formulare e definire i concetti da trattare.
Ogni argomento affrontato avrà una prima fase in cui si chiede di leggere e analizzare problemi presi dalla vita reale, la cui soluzione è strettamente legata a concetti che lo studente ancora non conosce. L'obiettivo è quello di motivare e far nascere la voglia, la curiosità e l'intenzione di scoprire tutti quei concetti matematici che permettono di dare una soluzione ai problemi letti.
In effetti, come viene sottolineato in D'Amore, Fandiño Pinilla (2001), lo studente usa gran parte del proprio tempo, del proprio impegno, dei propri interessi, per costruire (o almeno apprendere) concetti matematici che gli appaiono estranei a qualsiasi riferimento alla vita reale. Quindi egli deve sapere, è giusto che sappia, se il suo impegno, il suo tempo, le sue energie hanno o avranno un riscontro nel suo futuro quotidiano, se gli porteranno un beneficio almeno a distanza di tempo.
Dopo questa fase seguirà una fase di esplorazione che nella maggior parte dei casi verrà svolta con delle attività da eseguire con Geogebra. In queste attività lo studente è chiamato a congetturare e argomentare tutto tramite delle schede di lavoro guidate che ogni alunno dovrà compilare riportando le proprie osservazioni e intuizioni (Allegato n.8).
Alla fase di esplorazione-sperimentazione seguirà la fase di sistemazione e di applicazione.
Nella fase di sistemazione, con l'aiuto dell'insegnante, i ragazzi si confronteranno e discuteranno fino alla definizione di un modello corretto dei concetti in studio, in modo da strutture in ordine logico le nuove nozioni con le altre

già acquisiti precedentemente, sia in matematica, che nelle altre discipline. Nella fase di applicazione si verificherà, per mezzo di opportuni richiami alla esperienza o di deduzioni, la solidità e la sicurezza delle nozioni acquisite. Si chiederà, inoltre, di risolvere esercizi e problemi in modo da verificare se il modello creato da ogni studente è effettivamente quello giusto.

2.2 Organizzazione dei contenuti

2.2.1 Vincoli, metodologia, prerequisiti, obiettivi

Classi

Le classi in cui viene presentata l'attività sono due classi terze, una del corso diurno (3MA Meccanica) e una del corso serale (3EA Elettrotecnica).

Nella classe 3MA del diurno sono presenti 20 alunni tutti maschi, due con certificazione D.S.A. La classe è eterogenea: a studenti interessati e con tanta voglia di provare e sperimentare si contrappongono ragazzi non motivati e poco interessati alle diverse proposte fatte dagli insegnanti.

La casse 3EA Serale sono 15 alunni, di cui 4 ragazze. La classe è anch'essa eterogenea, ma per ragioni completamente differenti dalla 3MA del diurno. Gli studenti sono molto interessati e motivati, ma provenendo da scuole differenti e da percorsi scolastici diversi, hanno conoscenze di base completamente difformi. Alcuni, nonostante siano iscritti in terza, hanno lacune su quasi tutto il programma degli anni precedenti. Inoltre, molti studenti sono spesso assenti e questo va ad incide negativamente sul profitto scolastico.

Metodologia:

- Lezione frontale;
- Schede di lavoro;
- Discussioni di classe;
- Esercitazioni individuali;
- Esercitazioni di gruppo;
- Esercitazioni in laboratorio informatico.

Software utilizzati: GeoGebra.
Prerequisiti Costituiscono prerequisiti per questa unità didattica gli argomenti dei programmi di algebra e di geometria del primo biennio(equazioni, sistemi, triangoli, circonferenza,...);
Concetti chiave L'UMI(Unione Matematica Italiana) Ente riconosciuto dal MIUR e accreditato per la formazione e aggiornamento del personale della scuola e il CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) commissione permanente della Unione Matematica Italiana (UMI) avente come fine quello di esaminare i problemi riguardanti l'insegnamento matematico in Italia hanno predisposto per il secondo biennio dei percorsi didattici di matematica coerenti con le indicazioni della riforma.
In accordo con quanto proposto dal CIIM ho proposto agli studenti delle attività che sviluppano i seguenti nuclei tematici:

1. Angoli e triangoli: mondo reale e funzioni, nell'ambito dei nuclei tematici della "Geometria".
2. La trigonometria in meccanica e in fisica, nell'ambito dei nuclei tematici "Relazioni e funzioni"(Allegato n.7).
3. La trigonometria e il mondo reale, nell'ambito dei nuclei tematici "Spazio e figure"(Allegato n.7).

In classe sono presenti due studenti con Disturbo Specifico di Apprendimento per cui è stato predisposto un PDP all'inizio dell'anno scolastico. Ritengo che le attività in laboratorio e il percorso storico sia un modo di procedere che aiuta tutti, specialmente studenti con disturbo specifico di apprendimento.
Obiettivi e competenze Dalle linee guida per il secondo biennio e quinto anno degli istituti tecnici lo studente alla fine del secondo biennio deve conoscere:

- Teoremi dei seni e del coseno;
- Formule di addizione e duplicazione degli archi.

Deve sviluppare le abilità:

- Applicare la trigonometria alla risoluzione di problemi riguardanti i triangoli;

- Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi a funzioni goniometriche.

Le competenze:

- Utilizzare i concetti e i modelli delle scienze sperimentali per investigare fenomeni sociali e naturali e per interpretare dati;
- Utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio, ricerca e approfondimento disciplinare;
- Correlare la conoscenza storica generale agli sviluppi delle scienze, delle tecnologie e delle tecniche negli specifici campi professionali di riferimento.

Obiettivi e abilità da sviluppare alla fine di tutto il percorso. In questa prima fase svilupperemo principalmente quelle che riguardano i triangoli rettangoli. Facendo riferimento a questi elementi si è progettato l'attività didattica e definito l'ambiente di apprendimento come riportato di seguito.

2.2.2 Organizzazione dei contenuti

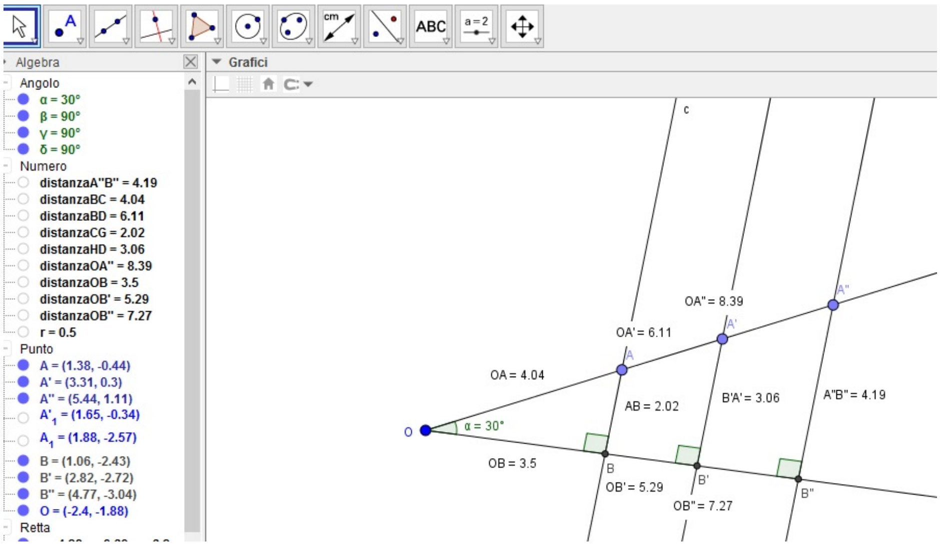
In molti libri scolastici la trigonometria viene introdotta dopo le funzioni goniometriche, le equazioni e le disequazioni goniometriche. In questa attività, ho invece preferito, seguendo lo sviluppo storico, partire direttamente dalla trigonometria, andando a ricercare relazioni tra lati ed angoli di triangoli rettangoli in situazioni problematiche reali (Problema di Aristarco di Samo, il problema della rifrazione, un problema di meccanica e uno di elettrotecnica ripreso dai loro libri di testo). L'obiettivo educativo comune di ogni insegnante è che gli allievi conoscano la matematica, la capiscano, l'apprezzino e siano capici di applicarla nella propria vita quotidiana e professionale. Ritengo che un approccio che parte da problemi reali li aiuti nella costruzione dei concetti, concetti che andranno ad essere applicati nelle materie di indirizzo (Allegato n.7).

La fase 2 inizia con una attività laboratoriale da svolgere con Geogebra. Agli studenti viene fornita una scheda di lavoro guidata (Allegato n.8) in cui si chiede di disegnare un angolo di 30° e di tracciare per alcuni punti presi a

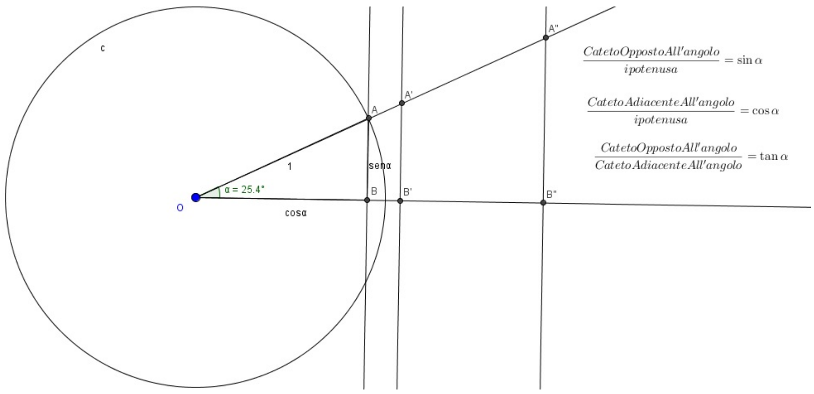
Argomento	**Strategia**	**Tempi**
Fase1: Introduzione alla Trigonometria - Che cos'è la trigonometria? - La trigonometria nella realtà	Lavoro di gruppo	2 ora
Fase2: Seno-coseno-tangenti(angoli acuti particolari) - Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 45° - Tavole Trigonometriche - Organizzazione dei contenuti	Laboratorio Lavoro a casa Lezione frontale	2 ore 1 ora 1 ora
Fase3: Risolvere triangoli rettangoli - Problemi reali, storici, disciplina	Esercitazione in classe	4 ore
Fase4: Verificare - Verifica formativa - Verifica sommativa	Esercitazione in classe Verifica in classe	1 ora 1 ora

Tabella 2.1: Triangoli rettangoli e funzioni trigonometriche

caso in una semiretta dell'angolo (ad esempio A, A', A") le perpendicolari alla semiretta opposta in modo da formare diversi triangoli rettangoli con gli stessi angoli. Il passo successivo è quello di andare a misure i cateti e le ipotenuse e di fare i rapporti tra di essi. Si dovrebbe osservare, compilando le varie tabelle fornite nella scheda di lavoro, che i rapporti rimangono costanti una volta fissato un angolo acuto, che questi rapporti non dipendono dal particolare triangolo rettangolo, piccolo o grande che sia e che sono invece legati solamente all'ampiezza dell'angolo.



Nell'ora dedicata alla riorganizzazione dei contenuti daremo il nome di **seno**, **coseno**, **tangente** ai numeri che indicano il valore di questi rapporti.



Per consolidare i concetti definiti chiedo, come compito per casa, di disegnare, utilizzando Geogebra, diversi triangoli rettangoli con angoli acuti differenti e di misurare ipotenusa e cateti in modo da determinare attraverso i rapporti dei lati il $\sin\alpha$, il $\cos\alpha$ e la $\tan\alpha$. I valori trovati devono essere riportati in una tabella nel quaderno e ognuno deve verificare se tali valori sono uguali ai numeri che la calcolatrice restituisce ogni volta che chiediamo di calcolare il seno, il coseno o la tangente dell'angolo in questione. Si verifica inoltre che, usando la funzione inverse della calcolatrice delle diverse funzioni trigonometriche, si ottiene l'angolo di partenza.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
15°			
40°			
70°			
...			

Tabella 2.2: Tavola delle funzioni trigonometriche

Si deve prestare particolare attenzione quando si usano i simboli $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$. Nel calcolo letterale un'espressione come $xy\alpha$ indica il prodotto tra x, y, α. Mentre l'espressione $\sin\alpha$ *non indica un prodotto*. Si tratta di una abbreviazione di "seno dell'angolo α"e ricorda in modo molto coinciso il procedimento necessario per calcolare il seno dell'angolo a partire dall'angolo stesso. Questa differenza deve essere chiarita in classe fin dall'inizio in modo da evitare misconcezioni.
Nella fase 3, di applicazione dei concetti, vine richiesto agli studenti di risolvere situazioni problematiche di vario genere. Analizzando i procedimenti risolutivi proposti si cerca di capire se gli studenti hanno creato immagini erronee del concetto in modo da poter intervenire direttamente.
La fase 4, è dedicata alla valutazione.
Valutazione intesa come:

- valutazione per dare un voto;
- valutazione per prendere decisioni circa il contenuto (trasposizione didattica) e circa la metodologia del lavoro in aula (ingegneria didattica);
- valutazione per prendere decisioni circa l'ambiente di classe;
- valutazione per comunicare agli allievi ciò che è importante.

2.3 Sperimentazione in classe

La sperimentazione inizia con la fase 1 dove si richiede ai ragazzi di leggere, come compito per casa, un articolo ripreso dal testo di Emma Castelnuovo "Che cosa è la trigonometria?"(Allegato n.6).
L'articolo ripercorre i punti più importanti della nascita e dello sviluppo della trigonometria.
In classe abbiamo letto di nuovo l'articolo, soffermandoci sulle parti che li avevano più colpiti e che ritenevano più significative. Le parti evidenziate dagli alunni sono state: il motivo per cui si era iniziato a studiare le relazioni tra gli angoli e la scansione temporale degli avvenimenti. Tutti hanno riconosciuto la difficoltà nel contestualizzare dal punto di vista storico i concetti studiati nelle varie discipline, specialmente in matematica.
Per concretizzare il problema nel modo reale e far comprendere l'importanza di tali concetti abbiamo analizzato alcuni problemi reali che richiedevano l'uso della trigonometria per essere risolti. Inoltre, per esplicitare i collegamenti tra le diverse discipline, ho chiesto ai colleghi delle materie di indirizzo di scrivermi esercizi, che gli studenti avrebbero poi ritrovato nel loro percorso di studio, la cui risoluzione richiedeva l'uso delle funzioni trigonometriche (Allegato n.7).
La fase 2 è stata quella più stimolante per gli studenti. Cambiare modo di fare lezione li ha resi collaborativi e motivati nel cercare le informazioni che richiedeva la scheda di lavoro. Le operazioni che gli studenti devono eseguire sono programmate, inoltre si chiede di commentare le figure e di fare congetture partendo dall'osservazione dei risultati ottenuti. Leggendo le risposte degli studenti, si rileva che tutti sono riusciti ad osservare che i rapporti tra i cateti e le ipotenuse corrispondenti dei vari triangoli rimanevano uguali.

- Si vengono a formare tre triangoli rettangoli che possiamo chiamare t1,t2 e t3.
  a) Misura i segmenti AB, A'B' e A''B'' (rappresentano i cateti con l'angolo opposto a 30° c1,c2,c3)
  b) Misura i segmenti OA, OA',OA'' (rappresentano l'ipotenusa i1, i2, i3)
  c) Misura i segmenti OB, OB', OB'' (rappresentano i cateti con l'angolo adiacente a 30° C1,C2,C3)

  Riportali nella seguente tabella:

c1	c2	c3	i1	i2	i3	C1	C2	C3
AB	A'B'	A''B''	OA	OA'	OA''	OB	OB'	OB''
3,12	3,33	5,17	6,28	4,85	10,33	5,41	6,8	8,35

Calcola i seguenti quozienti:

$\frac{AB}{OA}$	0,5	$\frac{A'B'}{OA'}$	0,5	$\frac{A''B''}{OA''}$	0,5
$\frac{OB}{OA}$	0,86	$\frac{OB'}{OA'}$	0,86	$\frac{OB''}{OA''}$	0,86
$\frac{AB}{OB}$	0,57	$\frac{A'B'}{OB'}$	0,57	$\frac{A''B''}{OB''}$	0,57

Guardando i risultati ottenuti, cosa puoi congetturare? Hanno qualche fondamento teorico le tue considerazioni?

DATI I RISULTATI OTTENUTI, SI PUÒ AFFERMARE CHE I RAPPORTI TRA GLI STESSI LATI DEI VARI TRIANGOLI SONO UGUALI, QUINDI CHE HANNO ANGOLI CONGRUENTI

Ci sono studenti che riconoscono che i triangoli considerati sono simili, concetto studiato lo scorso anno, giustificando in questo modo il fatto che i rapporti rimangono costanti.

- Si vengono a formare tre triangoli rettangoli che possiamo chiamare t1,t2 e t3.
  a) Misura i segmenti AB, A'B' e A''B'' (rappresentano i cateti con l'angolo opposto a 30° c1,c2,c3)
  b) Misura i segmenti OA, OA',OA'' (rappresentano l'ipotenusa i1, i2, i3)
  c) Misura i segmenti OB, OB', OB'' (rappresentano i cateti con l'angolo adiacente a 30° C1,C2,C3)

  Riportali nella seguente tabella:

c1	c2	c3	i1	i2	i3	C1	C2	C3
AB	A'B'	A''B''	OA	OA'	OA''	OB	OB'	OB''
1,75	3,67	5,39	3,51	7,34	10,79	2,17	6,36	9,34

Calcola i seguenti quozienti:

$\frac{AB}{OA}$	0,50	$\frac{A'B'}{OA'}$	0,50	$\frac{A''B''}{OA''}$	0,50
$\frac{OB}{OA}$	0,86	$\frac{OB'}{OA'}$	0,87	$\frac{OB''}{OA''}$	0,87
$\frac{AB}{OB}$	0,58	$\frac{A'B'}{OB'}$	0,58	$\frac{A''B''}{OB''}$	0,58

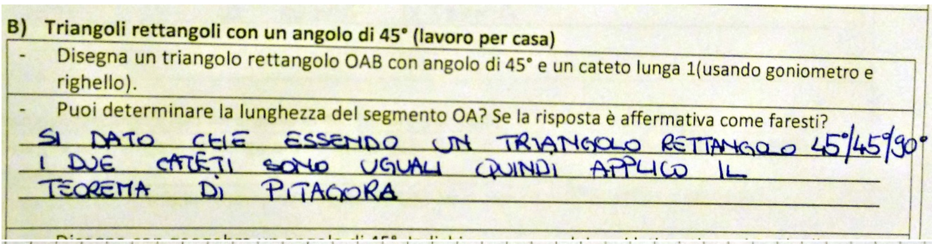
Guardando i risultati ottenuti, cosa puoi congetturare? Hanno qualche fondamento teorico le tue considerazioni?

NOTO CHE I 3 TRIANGOLI SONO SIMILI PERCHÉ IL RAPPORTO È UGUALE $\frac{AB}{OA} = 0,50$ $\frac{A'B'}{OA'}$ 0,50 $\frac{A''B''}{OA''}$ 0,50

In questa scheda di lavoro si chiede inoltre di risolvere il triangolo rettangolo, con le conoscenze possedute, conoscendo del triangolo:

- $\alpha = 30°$ (misura di una angolo acuto) e la misura dell'ipotenusa;
- $\alpha = 45°$ (misura di una angolo acuto) e la misura di un cateto.

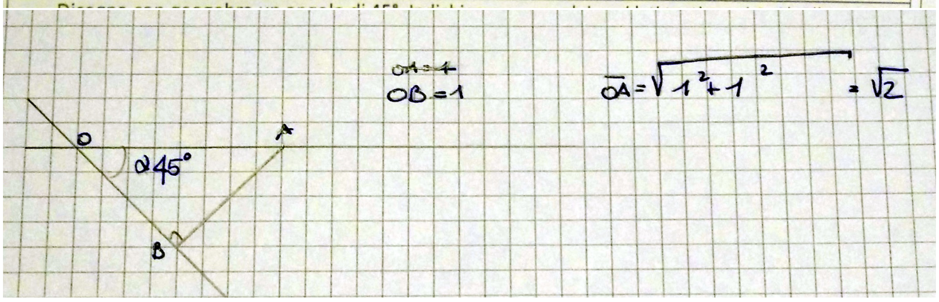
Solo alcuni studenti sono arrivati alla soluzione e solo nel secondo caso.



B) Triangoli rettangoli con un angolo di 45° (lavoro per casa)

- Disegna un triangolo rettangolo OAB con angolo di 45° e un cateto lunga 1(usando goniometro e righello).
- Puoi determinare la lunghezza del segmento OA? Se la risposta è affermativa come faresti?

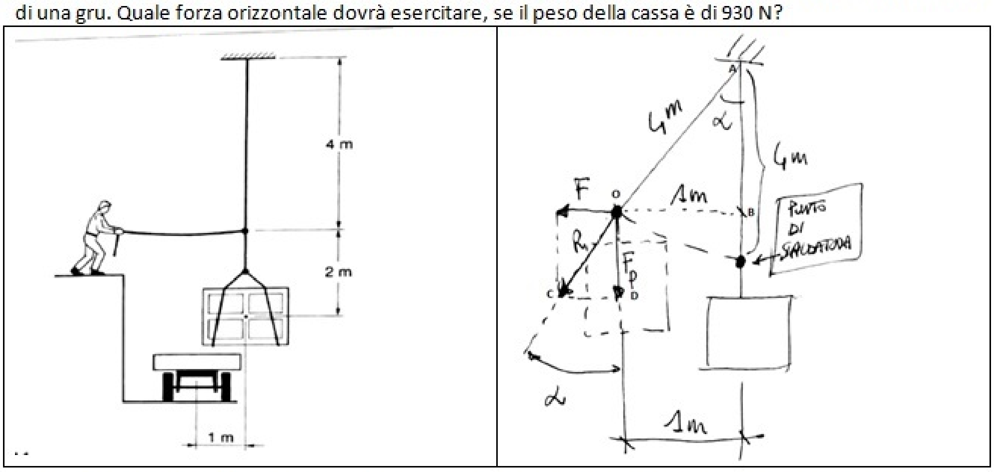
SI DATO CHE ESSENDO UN TRIANGOLO RETTANGOLO 45°/45°/90° I DUE CATETI SONO UGUALI QUINDI APPLICO IL TEOREMA DI PITAGORA



Successivamente gli studenti, come compito per casa, hanno costruito una tabella dove hanno calcolato attraverso il rapporto tra cateti e ipotenusa di triangoli il seno, il coseno e la tangente di diversi angoli assegnati, ad esempio 15°, 72°, ... hanno poi successivamente verificato che il numero trovato era esattamente quello che determinava la calcolatrice. Questa attività è stata molto importante poiché lo studente ha effettivamente dato un significato al numero che la calcolatrice restituisce "magicamente" quando calcola le funzioni trigonometriche. Dopo questa fase di sperimentazione e di verifica siamo passati all'applicazione. Si sono ripresi i problemi iniziali, dati per far comprendere in quanti ambiti possiamo applicare la trigonometria e li abbiamo risolti.

Problema 5

Un magazziniere deve posizionare esattamente sulla verticale di un carrello una cassa attaccata alla catena di una gru. Quale forza orizzontale dovrà esercitare, se il peso della cassa è di 930 N?



Schematizzando il problema come in figura si nota che si vengono a creare due triangoli simili OAB e OCD. Che relazione c'è tra la forza peso, la forza che richiede l'esercizio e l'angolo che si viene a formare tra la risultante e la forza peso?

Per consolidare gli apprendimenti ho proposto diversi problemi alla classe, dove ognuno, attraverso diverse tecniche, partecipava in maniera attiva nella risoluzione. Ritengo che attraverso la partecipazione sentita e consapevole dello studente esso possa arrivare alla formazione di un modello adeguato, *modello inteso come il complesso delle competenze precedenti, relativamente al concetto in gioco nella risoluzione del problema, competenze attraverso le quali il risolutore è in grado di costruire rappresentazioni grafiche adatte al processo di soluzione del problema* [4].

2.4 Valutazione

Durante l'incontro internazionale ICMI Studydel 1991 è stata definita la seguente definizione al termine "valutare":

- assessment deve essere usato per fare riferimento ai risultati dell'insegnamento, qualche cosa che riflette le performances degli studenti, presi individualmente o presi in gruppo;
- evalutacion deve essere usata come l'azione che, traendo spunto dalle informazioni su tali performances. Deve permettere di farsi dei giudizi

circa i programmi di studio, i curricoli e l'efficacia dell'azione degli insegnanti [10].

In accordo con quanto definito la fase di valutazione del mio percorso si è distinta in tre fasi:

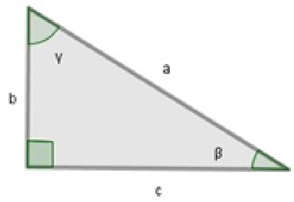
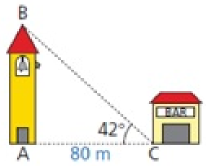
- la valutazione formativa in cui si è preso in esame la realizzazione di un allievo rispetto ai suoi obiettivi cognitivi, in modo da favorirla in base ai suoi risultati, conclusa con una valutazione diagnostica nella quale si sono identificate le difficoltà dell'allievo, sia per quanto concerne l'apprendimento, sia per le manchevolezze di comprensione;
- la valutazione sommativa in cui si è misurato le realizzazioni di ogni allievo in modo sistematico;
- la valutazione valutativa in cui si è stilato una valutazione ed un rapporto sull'attività svolta.

Per la valutazione sommativa si sono usate due verifiche diverse, avendo presentato l'attività in due periodi diversi, ho ritenuto necessario somministrare alla classe compiti differenti. Di seguito riporto l'analisi dei compiti nelle due diverse classi in cui è stata svolta l'attività.

3EA Serale

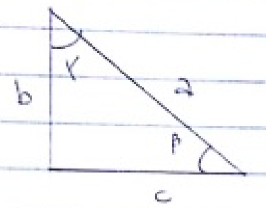
Nel compito (Allegato n.9) erano presenti esercizi di diversa difficoltà che cercavano di verificare competenze differenti. Il tempo di somministrazione della prova 120 minuti.

1. I primi due problemi avevano già la rappresentazione grafica che schematizzava il problema. Per risolverli bastava individuare la formula corretta da applicare, ricavata, dove necessario, come formula inversa. Nel primo problema si richiedeva anche di verificare i risultati usando il teorema di Pitagora e il teorema sugli angoli interni dei triangoli.

1. Di un triangolo rettangolo si conosce un cateto c=654,3 e l'ipotenusa a=931. Determina il valore dell'altro cateto e dei due angoli acuti utilizzando le regole della trigonometria (verifica i risultati ottenuti con il teorema di Pitagora e con il teorema della somma degli angoli interni).	
2. Calcola l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80 metri da esso si vede la sua cima secondo un angolo di 42°.	

Dall'analisi dei compiti in classe si evidenzia che un gruppo molto numeroso della classe ha svolto i problemi proposti correttamente. Nel primo problema, nonostante il procedimento risolutivo fosse corretto pochi hanno verificato i risultati come richiesto dal testo del problema, evidenziando una lettura superficiale del testo.

1



$c = 654,3$ $\quad b = ?$

$a = 931$ $\quad \beta = ?$

$\gamma = ?$

$\cos\beta = \dfrac{654,3}{931} \Rightarrow \cos\beta = 0,70 \Rightarrow \beta = 45,34° \simeq$

$\gamma = 90° - \beta \Rightarrow \gamma = 44,66° \simeq$

$b = \text{sen}\,\beta \cdot a \Rightarrow b = 662,21 \simeq$

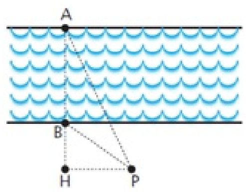
2. Il terzo e il quarto quesito nonostante avessero anch'essi un disegno che riassumeva il problema la risoluzione richiedeva l'applicazione di diverse regole in successione per arrivare al risultato del problema.

3.

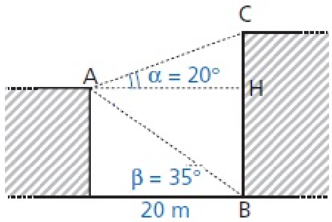
Un geometra deve misurare la larghezza di un canale. Dopo aver individuato un punto di riferimento A sulla sponda opposta alla sua, pianta due paletti: uno, sull'argine, nella posizione B e l'altro nella posizione H in modo che la retta ABH risulti perpendicolare alle sponde (figura a lato). Dalla posizione P, tale che $P\widehat{H}A = 90°$, misura gli angoli $H\widehat{P}B$, $H\widehat{P}A$ e la distanza PH:

$$H\widehat{P}B = 35°;\ H\widehat{P}A = 65°;\ PH = 20\ \text{m}.$$

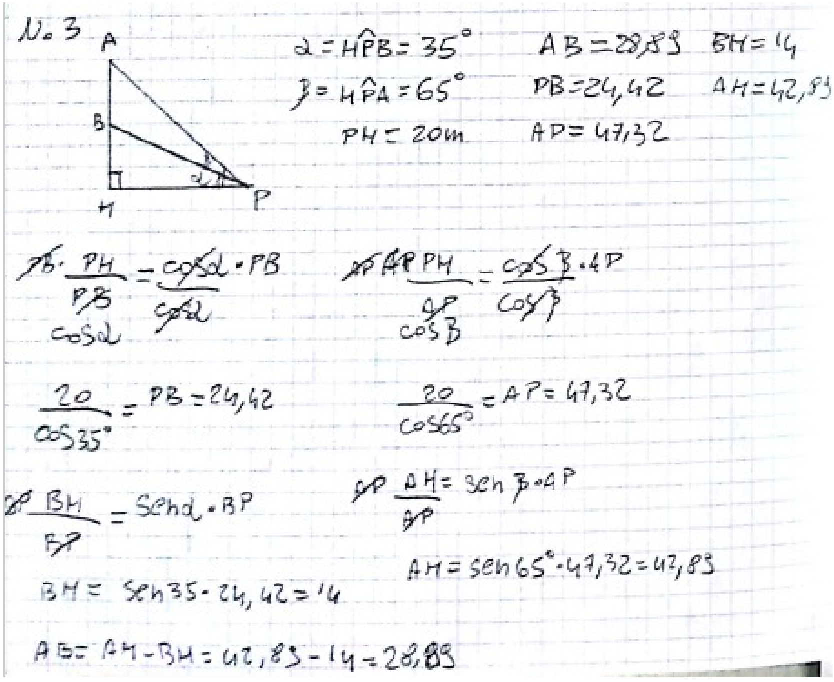
Qual è la larghezza AB del canale?



4. Due edifici sono posti uno di fronte all'altro come nella figura riportata sotto. Determina l'altezza dei due edifici?



Si riporta di seguito l'esercizio 3 svolto da uno studente che arriva da un percorso professionale. Lo studente all'inizio dell'attività non riusciva a ricavare le formule inverse. Correggendo il suo compito si è potuto costatare che ha compreso perfettamente come applicare il secondo principio di equivalenza e ha acquisito i concetti sviluppate in questo percorso.



L'esercizio 4 non è stato svolto correttamente da tutti gli studenti della classe. Di seguito si riportano alcuni errori.

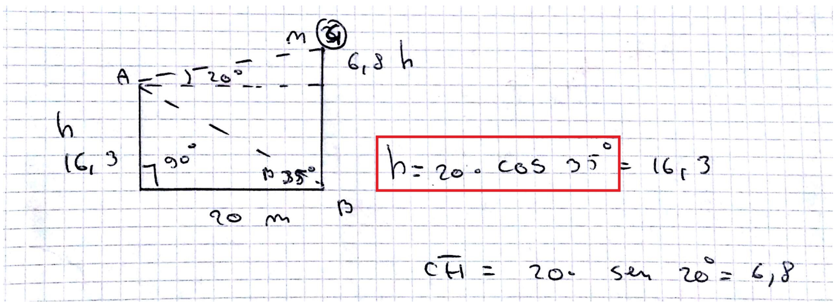


Figura 2.3: L.R. Considera 20 l'ipotenusa mentre 20 è un cateto

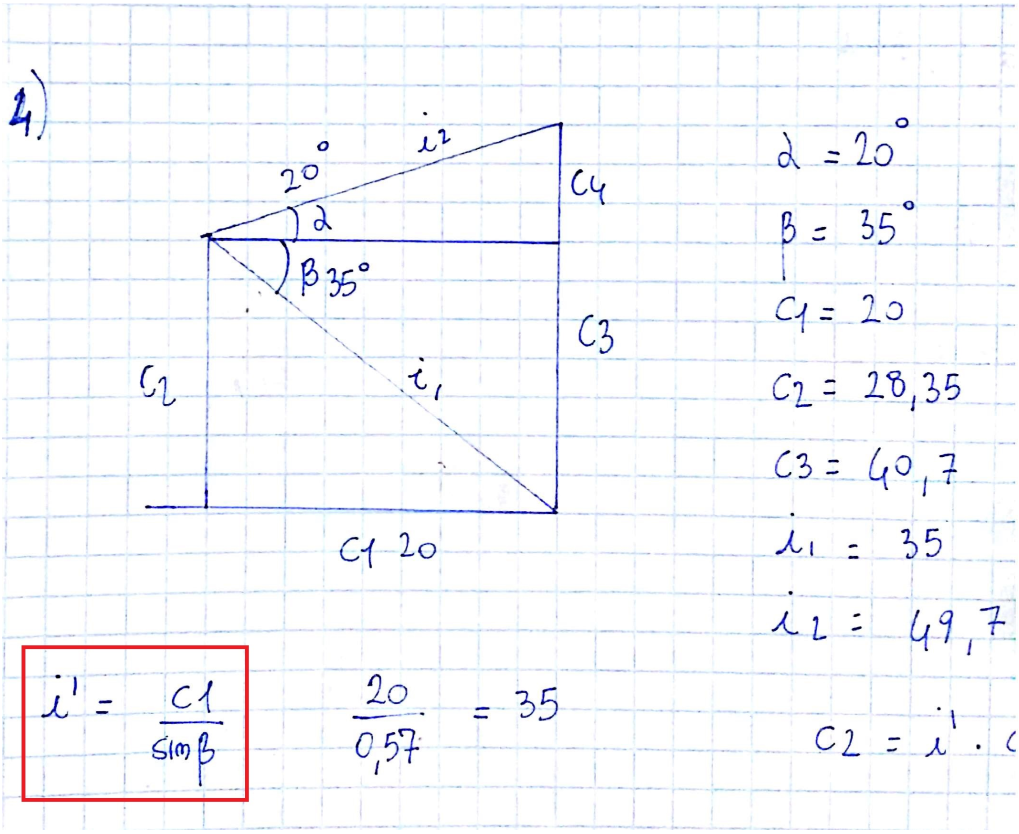
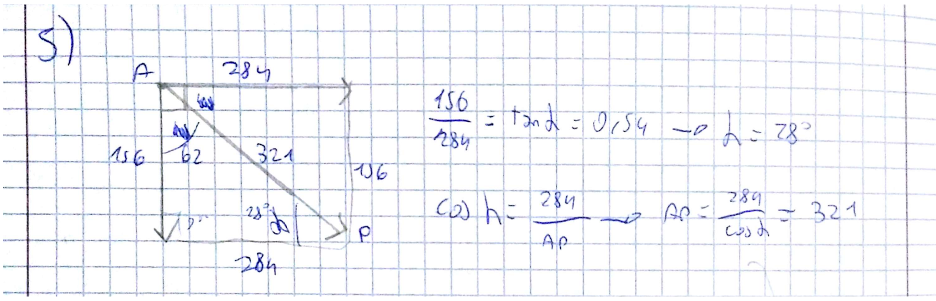


Figura 2.4: R.A. sbaglia la funzione trigonometrica nel calcolo dell'ipotenusa

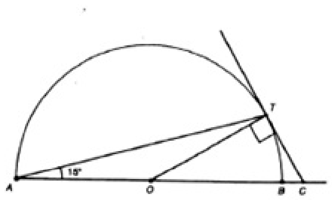
3. Il quinto esercizio chiedeva di rappresentare graficamente una forza risultante e di calcolarla. Per risolvere quindi il problema serviva necessariamente passare dal registro linguistico al registro grafico.

5. Ad un punto materiale vengono applicate contemporaneamente due forze perpendicolari F1=156N e F2=284N. Qual è la direzione della risultante R rispetto ad F1(regola del parallelogramma)? Rappresenta qui a fianco un disegno che schematizza il problema.	

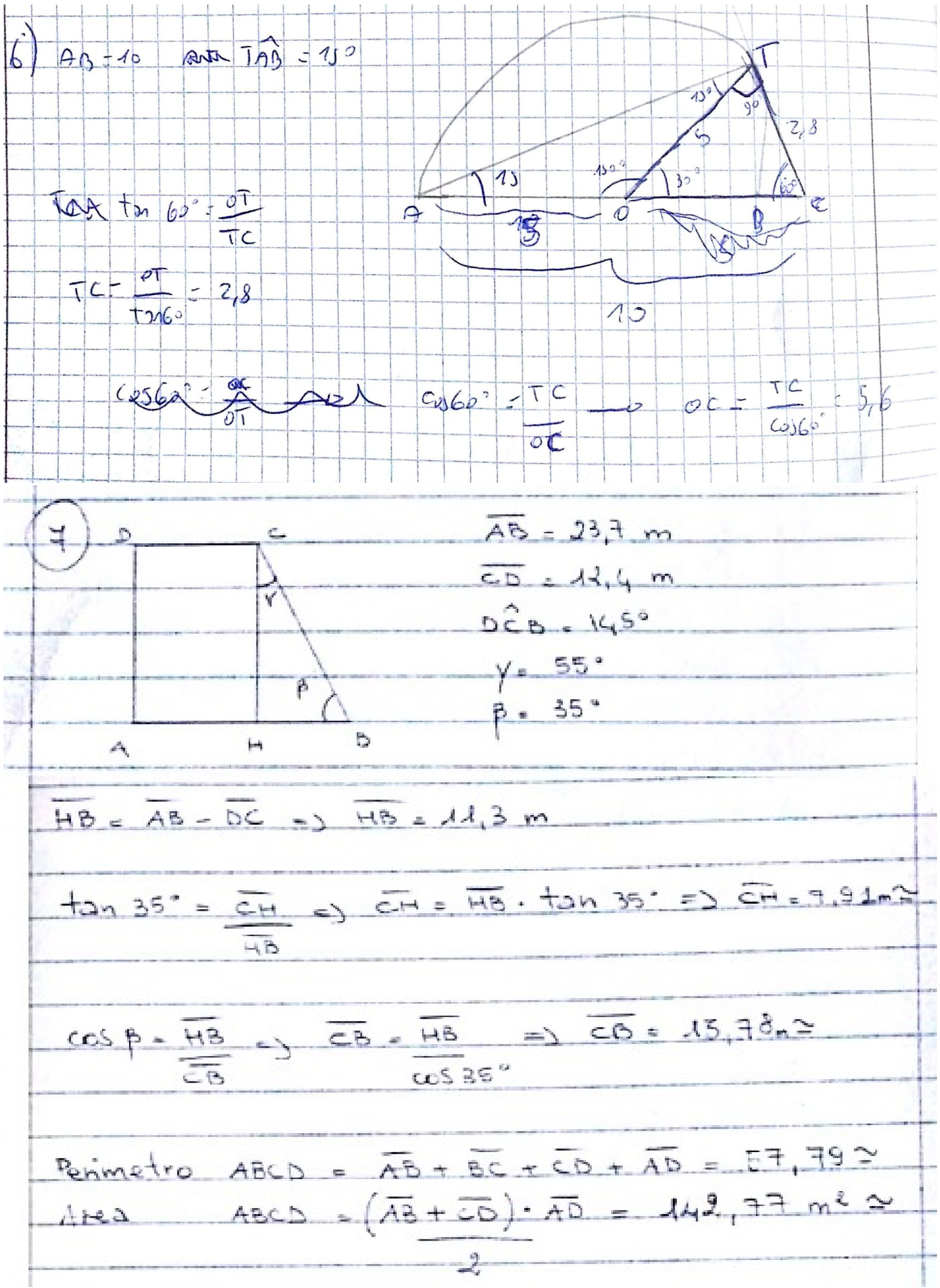
Molti studenti hanno deciso di non svolgere questo esercizio. Ritengo che passare dal testo del problema alla rappresentazione grafica abbia creato molte difficoltà. Soltanto quattro studenti risolvono l'esercizio.



4. Gli ultimi due esercizi richiedevano, oltre ai concetti definiti durante questa attività, conoscenze apprese negli anni precedenti per poter essere risolti

6. In una semicirconferenza di diametro AB=10 m è data una cora AT tale che $T\hat{A}B = 15°$. Condurre la tangente in T; questa interseca il prolungamento di AB in C. Calcola il perimetro del triangolo OTC. *(Ricorda che essendo una circonferenza di centro O i lati AO e OT del triangolo AOT sono congruenti AO=OT quindi il triangolo OAT è isoscele, questo mi permette di determinare l'angolo $A\hat{O}T$...)*	
7. Le basi di un trapezio rettangolo sono lunghe rispettivamente 23,7 e 12,4 m. L'angolo che forma la base minore con il lato obliquo misura 145°. Calcola l'area e il perimetro.*(Traccia le altezze del trapezio, questo mi permette di vedere il trapezio come somma di un quadrato e un triangolo rettangolo...)*	

Queste due esercizi con un punteggio leggermente superiore agli altri permettevano di arrivare ad un voto ottimo dal 9 al 10. Alcuni studenti hanno scritto la soluzione corretta.



3MA diurno

Nel compito del diurno (Allegato n.10), come in quello del serale, erano presenti esercizi di diversa difficoltà che cercavano di verificare competenze differenti. Il tempo di somministrazione della prova è stata di un'ora rispetto alle due ore assegnate alla terza serale. Le difficoltà riscontrate sono molto simili a quelle già analizzate per gli studenti del serale è per questo che non analizzo tutto il compito, ma riporto solo alcuni errori fatti dagli studenti:

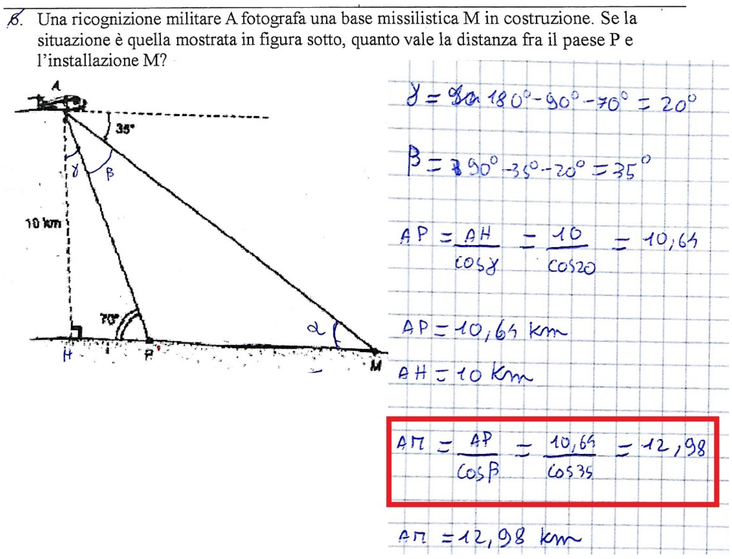


Figura 2.5: T.F. considera il triangolo APM rettangolo

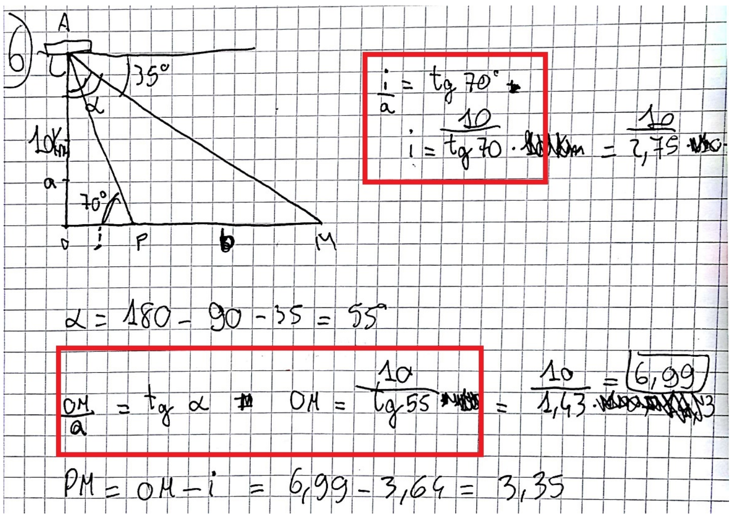


Figura 2.6: O.A. sbaglia nell'impostare la formula per il calcolo della tg70° e nel calcolo delle formule inverse

2.4.1 Confronto dei risultati

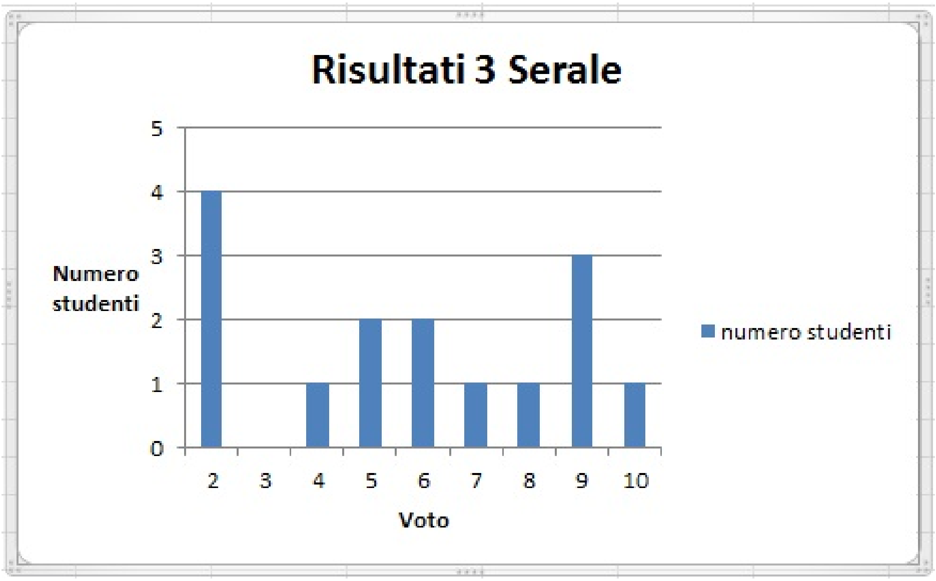
Dall'analisi dei compiti in classe le difficoltà principalmente evidenziate dagli alunni, in entrambe le classi, sono state:

- la comprensione del testo;
- la rappresentazione grafica del problema;
- la scelta della formula corretta per arrivare al risultato.

3EA Serale Analizzando le verifiche si evidenziano principalmente due situazioni completamente contrapposte:

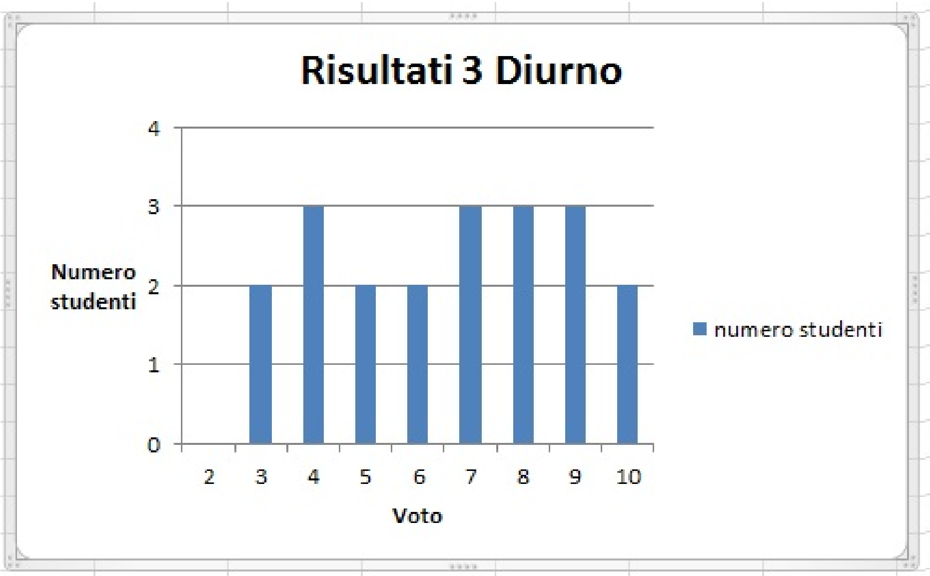
- compito consegnato in bianco - *concetto non appreso*;
- compito svolto in tutte le sue parti - *concetto appreso*.

Questo può anche essere osservato anche dal grafico che riporta i risultati dei ragazzi del serale:



Più del 50% ha ottenuto una valutazione oltre la sufficienza, il 26% ha conseguito valutazioni ottime, due ragazzi che venivano da un percorso professionale con grandissime carenze di base sono riusciti a prendere la sufficienza. Un alunno straniero con difficoltà nella comprensione del testo ha

ottenuto una valutazione discreta.
Questi risultati positivi si contrappongono a numerose insufficienze, molti studenti hanno riportato una valutazione gravemente insufficiente. Per alcune di queste insufficienze si possono ipotizzare delle motivazioni. Nel corso serale i ragazzi spesso si assentano, hanno una frequenza irregolare dovuta principalmente a problemi di lavoro o impegni famigliari. Le assenze (molti sono venuti direttamente al compito senza essere presenti a lezione), le carenze di base dovute ad un percorso spesso frastagliato con numerosi cambi di scuole e di insegnanti, percorsi professionali che non li preparano per poter affrontare una terza ITIS sono le possibili cause degli insuccessi registrati.
3MA Diurno
Dall'analisi dei compiti in classe del diurno si ottiene una situazione analoga a quella del serale:



Il 65% ha riportato una valutazione sufficiente, come già osservato nella classe del serale, ci sono stati ragazzi che hanno svolto tutto il compito in ogni sua parte.
In questa classe sono presenti due studenti con certificazione DSA: T.F. ha ottenuto una valutazione sufficiente e G.L. ha ottenuto un punteggio ottimo.
Anche in questa classe ci sono state valutazioni insufficienti. I possibili motivi

non sono gli stessi individuati per la classe del serale. Qui non sono le assenze a incidere nel profitto, ritengo che la principale causa sia la motivazione verso lo studio della matematica, la scarsa fiducia nelle proprie capacità e spesso il disinteresse verso l'indirizzo scolastico scelto. Purtroppo senza motivazione e interesse l'apprendimento del concetto "in gioco"non può essere profondo.

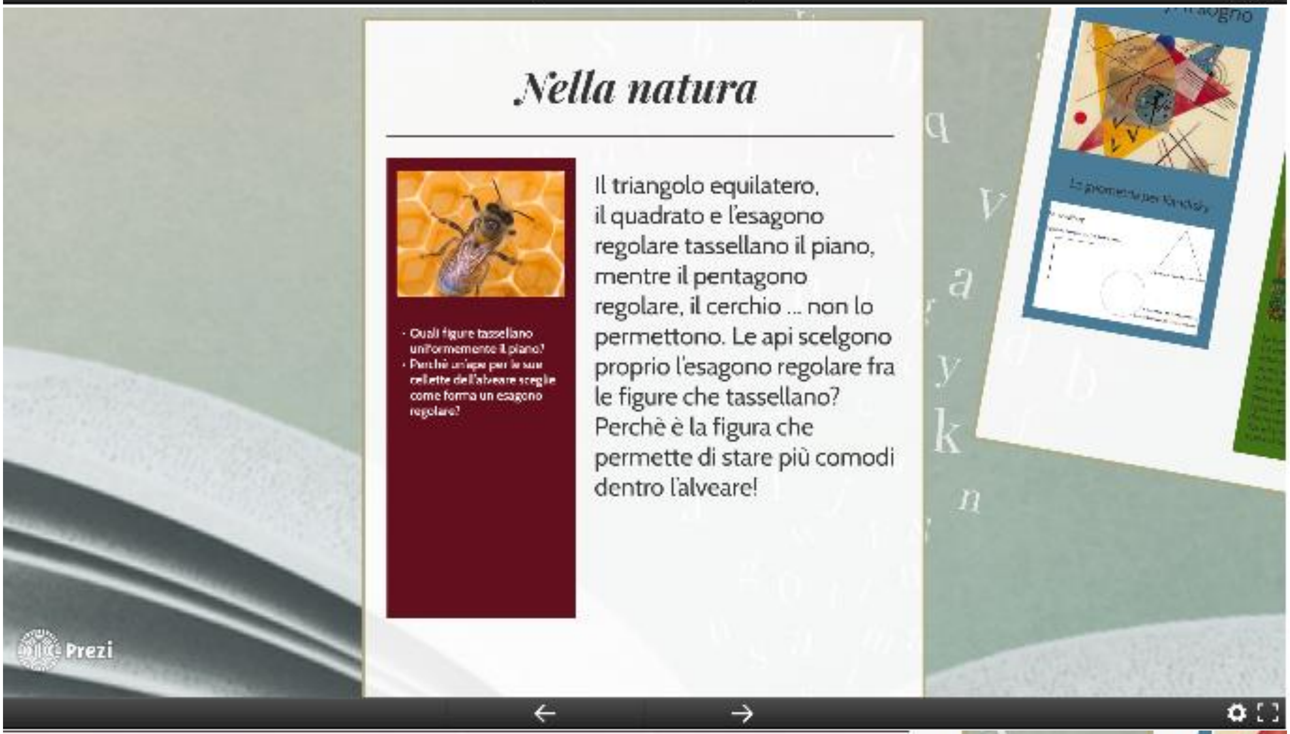
2.5 Conclusioni

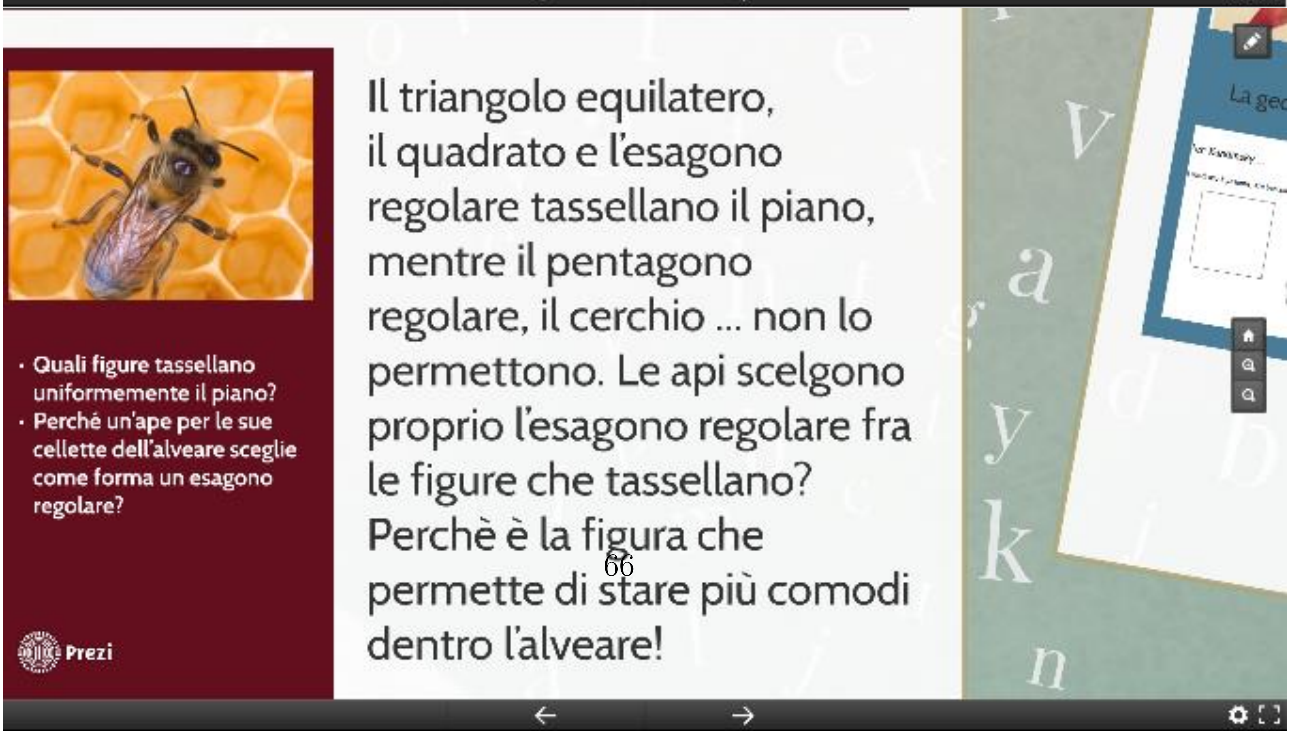
Facendo una valutazione generale sull'attività, analizzando i risultati ottenuti dagli studenti e le risposte date sul gradimento dell'attività svolta, ritengo che il percorso messo in atto sia stato apprezzato dalla maggioranza della classe. Inoltre, dai risultati riportati dagli studenti certificati DSA e dagli studenti che presentavano all'inizio del percorso molte difficoltà, ritengo che l'attività sia stato particolarmente inclusiva.
Sicuramente nello sviluppo dei successivi argomenti si dovranno mettere in atto ancora ‶tecniche attive″, ossia delle attività procedurali che coinvolgono attivamente lo studente nel processo di apprendimento, facendo particolare attenzione a quegli studenti che solitamente mostrano così poco interesse verso la matematica.
La motivazione è sicuramente il punto su cui si dovrà lavorare maggiormente, insieme al consiglio di classe e con l'aiuto dei genitori. La collaborazione tra la scuola e la famiglia costituisce uno dei punti cardine della vita scolastica. Solo se si instaura un dialogo, delle linee comuni di azione, è possibile stabile un percorso educativo efficace per i nostri studenti. Questo assume una rilevanza ancora più forte con gli alunni che richiedono un'attenzione educativa specifica o che esprimono difficoltà di apprendimento e di comportamento.
Per i percorsi serali, invece, ritengo sia necessario predisporre dei percorsi in learning. Questo potrebbe aiutare tutti quegli studenti impossibilitati a frequentare in presenza la lezione, potranno seguire il corso multimediale a distanza, tramite il Web.

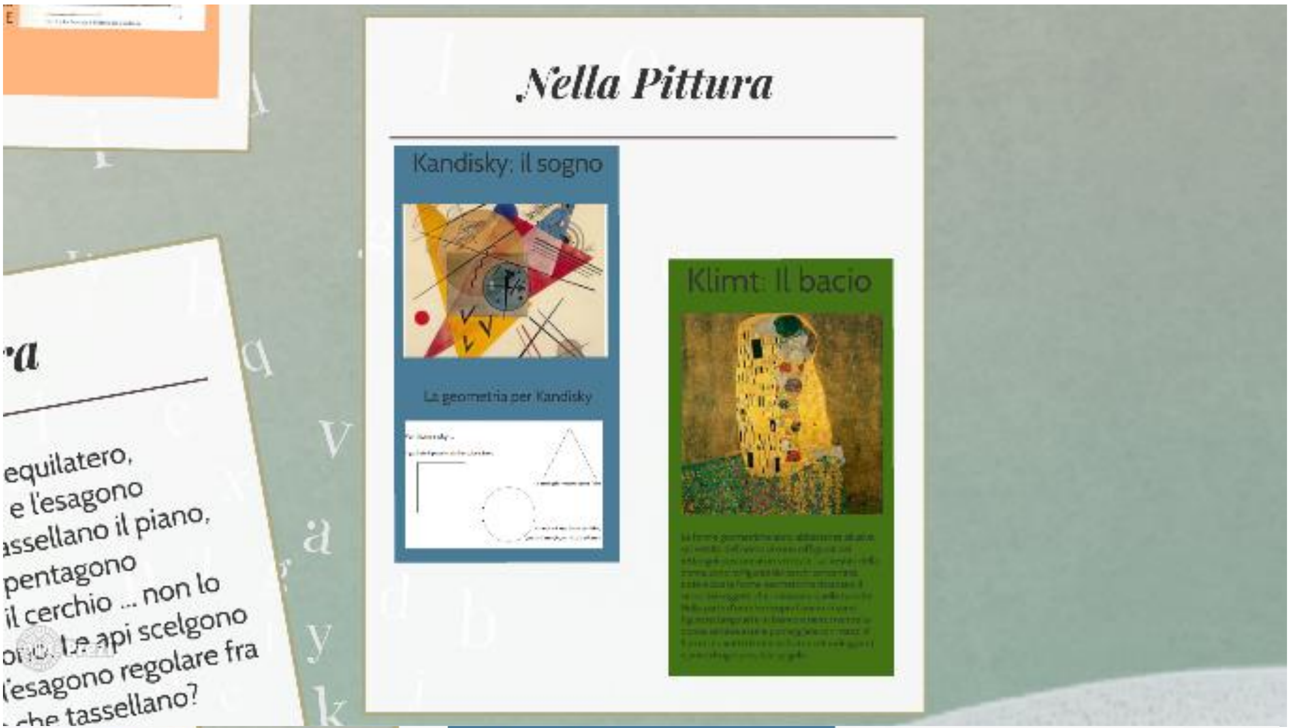
Appendice A

Allegato n.1:Presentazione la Geometria nella realtà

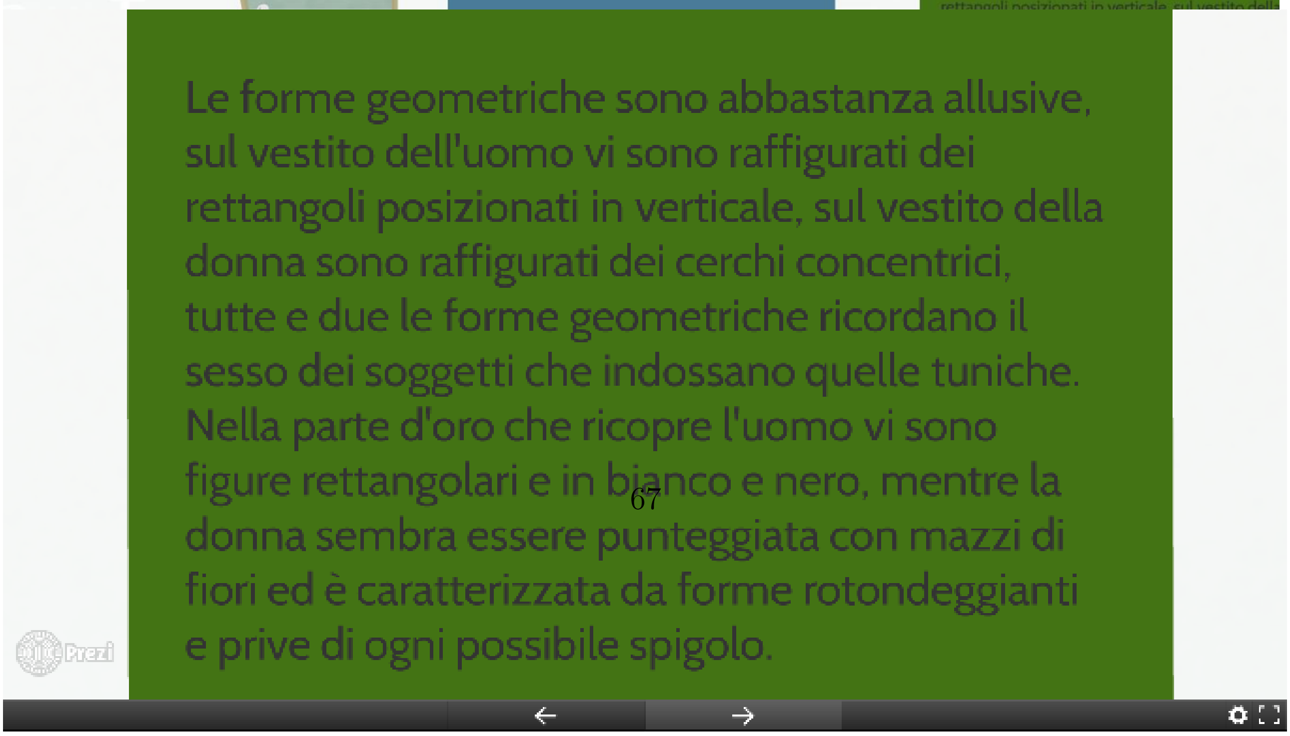

La geometria nella realtà
Prezi


Nella natura
• Quali figure tassellano uniformemente il piano?
• Perchè un'ape per le sue cellette dell'alveare sceglie come forma un esagono regolare?
Il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare tassellano il piano, mentre il pentagono regolare, il cerchio ... non lo permettono. Le api scelgono proprio l'esagono regolare fra le figure che tassellano? Perchè è la figura che permette di stare più comodi dentro l'alveare!
Prezi


• Quali figure tassellano uniformemente il piano?
• Perchè un'ape per le sue cellette dell'alveare sceglie come forma un esagono regolare?
Il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare tassellano il piano, mentre il pentagono regolare, il cerchio ... non lo permettono. Le api scelgono proprio l'esagono regolare fra le figure che tassellano? Perchè è la figura che permette di stare più comodi dentro l'alveare!
Prezi


Nella Pittura
Kandisky: il sogno
La geometria per Kandisky
Klimt: Il bacio
equilatero,
e l'esagono
assellano il piano,
pentagono
il cerchio ... non lo
Le api scelgono
l'esagono regolare fra
che tassellano?


Kandisky: il sogno
La geometria per Kandisky
Per Kandinsky ...
Il quadrato è pesante, sta ben saldo a terra
il triangolo trascina verso l'alto
il cerchio è una forma perfetta, gonfia di energia, un piccolo universo
Klimt: Il bacio
Le forme geometriche sono abbastanza allusive, sul vestito dell'uomo vi sono raffigurati dei


Le forme geometriche sono abbastanza allusive, sul vestito dell'uomo vi sono raffigurati dei rettangoli posizionati in verticale, sul vestito della donna sono raffigurati dei cerchi concentrici, tutte e due le forme geometriche ricordano il sesso dei soggetti che indossano quelle tuniche. Nella parte d'oro che ricopre l'uomo vi sono figure rettangolari e in bianco e nero, mentre la donna sembra essere punteggiata con mazzi di fiori ed è caratterizzata da forme rotondeggianti e prive di ogni possibile spigolo.


Nell'architettura
San Miniato (Firenze)
Scopriremo poi, con l'aiuto delle misure, che le modanature, le lesene ed i vari elementi decorativi non sono posizionati a caso o per un semplice gusto estetico, ma rispecchiano una geometria rigorosa e complessa dalla quale scaturisce, come nella natura, la bellezza, l'ordine e l'armonia. Così ad una griglia di quadrati che costituisce la base del progetto della facciata, si sovrappongono figure sacre più complesse, come il triangolo rettangolo pitagorico che ha i cateti di tre e quattro moduli e l'ipotenusa di cinque. Sublime rettangolo questo, e misterioso, che per l'antichità rappresentò l'essenza trinitaria di Dio: come scrisse Plutarco, la potenza del Padre (il Tre), unita alla potenza della Madre o dello Spirito (il quattro), vi genera la potenza del Figlio (il cinque). Altri elementi della facciata formano quel rettangolo, di cui abbiamo detto, costruito mediante la proiezione della diagonale del quadrato della base, altri determinano un rettangolo d'oro. E questo divino rettangolo aureo scandisce i cinque portali della facciata, sia quelli aperti che quelli chiusi, così come all'interno l'arco trionfale della navata.
Prezi


San Miniato (Firenze)
Scopriremo poi, con l'aiuto delle misure, che le modanature, le lesene ed i vari elementi decorativi non sono posizionati a caso o per un semplice gusto estetico, ma rispecchiano una geometria rigorosa e complessa dalla quale scaturisce, come nella natura, la bellezza, l'ordine e l'armonia. Così ad una griglia di quadrati che costituisce la base del progetto della facciata, si sovrappongono figure sacre più complesse, come il triangolo rettangolo pitagorico che ha i cateti di tre e quattro moduli e l'ipotenusa di cinque. Sublime rettangolo questo, e misterioso, che per l'antichità rappresentò l'essenza trinitaria di Dio: come scrisse Plutarco, la potenza del Padre (il Tre), unita alla potenza della Madre o dello Spirito (il quattro), vi genera la potenza del Figlio (il cinque). Altri elementi della facciata formano quel rettangolo, di cui abbiamo detto, costruito mediante la proiezione della diagonale del quadrato della base, altri determinano un rettangolo d'oro. E questo divino rettangolo aureo scandisce i cinque portali della facciata, sia quelli aperti che quelli chiusi, così come all'interno l'arco trionfale della navata.
Prezi


Nella musica
Cosa vuol dire che una canzone è orecchiabile?
Ce lo spiega la geometria.
È questo il senso della ricerca che Dmitri Tymoczko della Princeton University di New Jersey (Usa) ha portato a termine: illustrare il funzionamento dell'armonia e della melodia facendo ricorso a immagini tridimensionali.
Nelle sue "geometrie musicali", Tymoczko rappresenta con un punto i singoli accordi contenuti in una composizione, mentre la distanza tra gli uni e gli altri indica la differenza percepita dall'orecchio umano tra i suoni: minore distanza significa quindi una transizione più gradevole tra accordi consecutivi. Per descrivere l'armonia, però, la geometria piana non basta. Ogni nota che compone un accordo necessita infatti di una dimensione, così che per descrivere un accordo composto da tre note, Tymoczko ha dovuto fare ricorso alle figure tridimensionali, come per il Preludio per piano in mi minore di Chopin.
Prezi


...alcune immagini
STOP
Prezi


La geometria nella realtà
Romina Valentini
Prezi

Appendice B

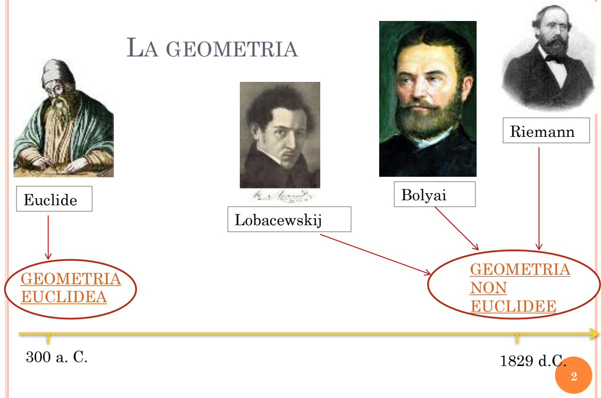
Allegato n.2:Presentazione Geometria Euclidea e Geometria non-Euclidea

GEOMETRIA EUCLIDEA
GEOMETRIA NON EUCLIDEA

Romina Valentini

1

LA GEOMETRIA



2

GEOMETRIA EUCLIDEA

- Euclide scrive nel 300 a.C. gli *Elementi*
- Gli *Elementi* sono suddivisi in 13 libri o capitoli
  - 1-6 geometria piana Euclidea
  - 7-9 teoria dei numeri
  - 10 gli incommensurabili
  - 11-13 geometria dello spazio
- Il primo libro inizia bruscamente con un elenco di 23 definizioni
  - «il punto è ciò che non ha parti»
  - «una linea è una lunghezza senza larghezza»
  - …
- Dopo le definizioni Euclide elenca 5 postulati e 5 nozioni comuni

3

NOZIONI COMUNI

1. Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
2. Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interi sono uguali.
3. Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali.
4. Cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra
5. L'intero è maggiore della parte

4

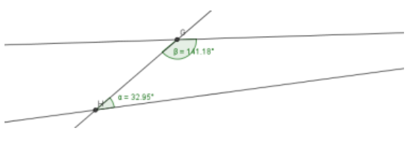
POSTULATI

I postulati sono che:

1. si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi un punto qualsiasi
2. si possa prolungare indefinitamente una linea retta
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi
4. tutti gli angoli retti sono uguali
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti

5

IL 5° POSTULATO



6

Il 5° postulato – La proposizione 29

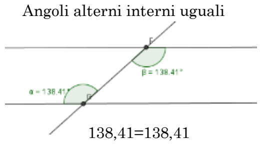
- Euclide cerca di non usare il quinto postulato, prova a ricavarlo usando gl'altri quatto ma non ci riesce.
- Usa il 5 postulato nel libro I soltanto per dimostrare la proposizione 29

Una retta che cade su rette parallele forma gli angoli alterni uguali tra loro; l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti

7

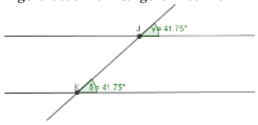
La proposizione 29

Angoli alterni interni uguali



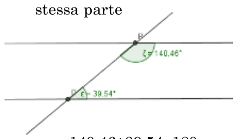
138,41=138,41

Angolo esterno = angolo interno



41,75=41,75

Angoli interni dalla stessa parte

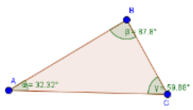


140,46+39,54=180

8

Geometria euclidea

- Nella geometria euclidea si dimostra che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°



32,32+87,8+59,88=180

9

Geometria Euclidea - Saccheri

- Tanti matematici dopo Euclide cercano di dimostrare il 5° postulato ma falliscono
- Uno dei più famosi fu Girolamo Saccheri (1667-1733)
- Saccheri pubblica «*Euclide liberato da ogni macchia*» in cui si sforzava con un procedimento molto elaborato di dimostrate il postulato delle parallele
- Egli aveva inconsapevolmente costruito una geometria non Euclidea perfettamente coerente, ma era così convinto che l'unica geometria Euclidea fosse l'unica valida da consentire che questo suo proconcetto interferisse nella logica dei suoi ragionamenti

10

Geometria Non Euclidea

- La negazione di questo postulato ha portato, nel XIX secolo allo sviluppo delle geometrie non euclidee
- Lobacewskji viene considerato il «**copernico della geometria**» ossia colui che rivoluzionò questo campo della matematica
- Lobacewskji mostra come la geometria euclidea non fosse quella scienza depositaria di verità assoluta come si era pensato fino a quel momento

11

Geometria di Lobacewskji

- Nel 1829 Lobacewskji pubblica «*Sui principi della geometria*»
- Con l'articolo del 1829 egli era il primo matematico a fare il passo rivoluzionario consistente nel pubblicare una nuova geometria

GEOMETRIA NON EUCLIDEA IPERBOLICA

- **Per un punto C che giace al di fuori di una retta AB si può tracciare nello stesso piano più di una retta che non incontri la retta AB**

12

Bolyai

- L'amico ungherese di Gauss Farkas Bolyai aveva dedicato gran parte della sua vita nel tentativo di dimostrare il postulato delle parallele
- Quando Farkas seppe che anche il figlio Janos Bolyai si era immerso nello studio del problema delle parallele scrisse al figlio dicendo: «*Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito e della felicità*»
- Il figlio continuò nei suoi tentativi fino a che nel 1829 giunse alla medesima conclusione di Lobacewskji

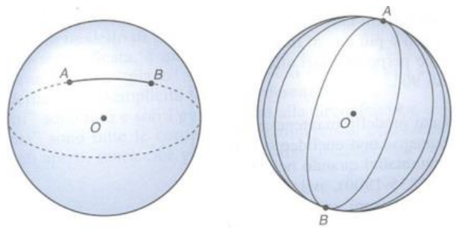
13

Geometria di Riemann

- La geometria non-euclidea per molto tempo continuò a rappresentare un aspetto marginale della matematica fin a che non venne incorporata come una sua parte integrante attraverso le concezioni generali di Riemann (1826-1866)
- Geometria di Riemann: *per un punto di un piano non passa alcuna retta parallela ad una retta data del piano stesso*
- Un possibile modello:
  - Piano ⟶ Superficie sferica
  - Retta ⟶ Cerchio massimo della sfera stessa

14

Riemman

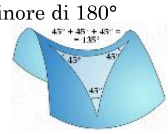


15

Geometria non-euclidea

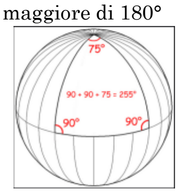
Lobacewskji-Bolyai

- Esistono infinite rette parallele passanti per un punto e parallele ad una retta data
- La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°



Riemann

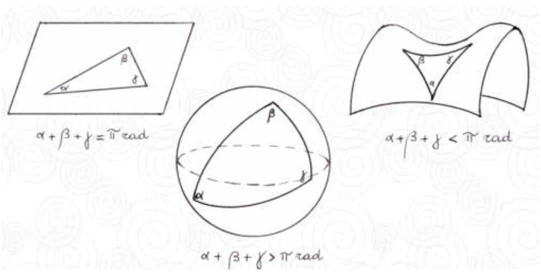
- Non esistono rette parallele
- La somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°



16

Geometria euclidea-geometria non euclidea

La somma degli angoli interni di un triangolo é maggiore, uguale o minore di radianti, a seconda che sia disegnata su di una superficie a curvatura positiva, nulla o negativa!



17

Bibiografia

- Boyer, *Storia della matematica,* Mondadori editore Milano

18

Appendice C

Allegato n.3: Scheda di lavoro n.1

Prima attività (carta e penna)

1. Disegna su una pagina bianca del quaderno un orologio. Prendi un tappo di penna blu per rappresentare le ore e una penna rossa per rappresentare la lancetta dei minuti.
2. Posiziona le lancette alle ore 1:00.
3. Sposta le lancette in modo che segnano le 1:30.
   Si sono spostate entrambi le lancette?
   ____
   Cosa abbiamo fatto alle lancette per passare dalle 1:00 alle 1:30?
   ____
   ____
   ____
4. Posiziona le lancette alle ore 2:00.
5. Sposta le lancette in modo che segnano le 3:00.
   Descrivi le posizioni delle lancette rispetto a prima del movimento.
   ____
   ____
   ____
6. Posiziona le lancette alle 3:20
7. Formate gruppi da due (tu insieme al tuo compagno di banco) uno del gruppo sposta le lancette in senso orario in modo da segnare le 3:40, mentre l'altro componente del gruppo sposta le lancette in senso antiorario in modo da segnare le quattro meno venti.
   Come sono le lancette dei due orologi?
   ____
   ____
   ____
   Se il movimento in senso orario e antiorario lo definissimo rotazione. Chi ha eseguito una rotazione maggiore?
   ____
   ____
   ____
8. Quale angolo descrive la lancetta dei minuti in un minuto? Spiega come hai fatto a determinarlo.
   ____
   ____
   ____
9. Osserva la lancetta dei minuti dopo quanto tempo ritorna nella posizione di partenza? Nello stesso tempo di quanto si muove la lancetta delle ore?
   ____
   ____
   ____
10. Quali angoli formano le due lancette? Completa la tabella:

Posiziona le lancette alle ore:	Angolo:
3:00	
4:20	
6:00	
9:00	

Le due lancette individuano sempre in maniera univoca un solo angolo?
____
____
____

Appendice D

Allegato n.4: Scheda di lavoro n.2

Seconda attività (geogebra)

1. Apri Geogebra. Utilizzando il comando *Semiretta* traccia una semiretta di origine O. Con lo stesso comando traccia una seconda semiretta con l'origine in comune. Cosa osservi?

   ____

   ____

   ____

2. Utilizza lo strumento *Angolo* toccando tre punti (un punto appartenete alla prima semiretta, l'origine delle due semirette e un punto sella seconda semiretta) ottengo la misura di un angolo. Riesegui lo stesso procedimento, toccando tre punti, partendo adesso dalla seconda semiretta (un punto appartenete alla seconda semiretta, l'origine delle due semirette e un punto sella prima semiretta) ottengo la misura dell'altro angolo. Sporta la posizione di una semiretta cosa osservi? Se sommi i due angoli che misura ottieni sempre?

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Costruzione semipiano. Traccia una retta supponiamo che si chiama a. Questa retta individua due semipiani: uno che sta sopra la retta e uno che sta sotto la retta. Per poterli evidenziare con colori differenti basta scrivere nella barra di inserimento $y>a(x)$ e $y<a(x)$. Quanti punti ha per voi un semipiano?

   ____

   ____

   ____

4. Apri un nuovo foglio di lavoro traccia una retta che si chiama 'a' e inserisci nella barra di inserimento $y>a(x)$ (modifica le proprietà affinché il semipiano abbia il colore rosso). Traccia una seconda retta e chiamala 'b' e inserisci nella barra di inserimento $y>b(x)$ (modifica le proprietà affinché il semipiano abbia il colore giallo). Si intersecano i due semipiani? Cosa si ottiene dall'intersezione dei due semipiani?

   ____

   ____

   ____

5. Aprite il file porzione_piano.ggp. In questo file trovate un angolo già disegnato e evidenziato con colori differenti. Se muovete uno dei lati dell'angolo cosa osservate? Provate a dare una vostra definizione di angolo utilizzando la parola semipiano.

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

   ____

Appendice E

Allegato n.5: Scheda di lavoro n.3

Terza attività (geogebra)

1. Apri Geogebra. Utilizzando il comando *Retta* traccia due rette con un punto in comune che chiamiamo V. Cosa puoi osservare? Quanti angoli si formano?

   ____
   ____
   ____

2. Utilizza lo strumento *Angolo* misura gli angoli formate dalle due rette. Cosa osservi?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3. Con lo strumento *Muovi* sposta una delle due rette e riporta su una tabella le misure dei nuovi angoli. Sposta ancora la retta altre 3 volte e annota le misure degli angoli (dividi le colonne della tabella a seconda degli angoli che hai individuato).

1° spostamento	
2° spostamento	
3° spostamento	
4° spostamento	

   Descrivi i dati riportati in tabella. Trovi una relazione particolare che lega i vari angoli?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

Appendice F

Allegato n.6: Sviluppo storico trigonometria

Che cosa è la trigonometria?

Il significato della parola trigonometria *deriva dal greco:* "metron" *significa misura e* "trigonos" *vuol dire tre angoli; misura, dunque, di un triangolo, o, meglio, dei suoi elementi e cioè di angoli e lati.*

Vedrete però che la trigonometria non è "chiusa" nello studio dei triangoli ma abbraccia e influenza campi molto vasti, che vanno dall'astronomia all'acustica, dalla topografia all'ottica, all'elettronica.

Non rimane quindi che mettere sotto accusa la denominazione "trigonometria" che fa pensare solo al triangolo; questo nome fu dato nel 1595 dal matematico tedesco Bartolomeus Pitiscus in un libro che, senza troppa modestia, aveva intitolato Trigonometria sive de solutione triangolorum tractatus brevis et perspicuus, *cioè «Trigonometria, ovvero trattato breve e intelligente sulla risoluzione dei triangoli».*

Non è certo strano che sia stata l'astronomia ad avere eccitato la fantasia degli uomini fin dai tempi più remoti e in tanti paesi. Il sorgere e il tramontare del Sole, l'alternarsi dei giorni e delle notti, il succedersi, sempre uguale, delle fasi della Luna in un cielo immobile, sono fenomeni che non potevano sfuggire neanche all'occhio meno attento. Sulla volta celeste, due sono gli astri che, per la loro grandezza, avevano soprattutto impressionato: il Sole e la Luna. Quanto distavano dalla Terra? quanto erano grandi? È con queste domande che ha inizio l'astronomia.

Siamo in Grecia, e Aristarco di Samo, vissuto nel III secolo a.C., riesce a fissare il rapporto fra le distanze Terra-Luna e Terra-Sole. Ecco come procede: da un punto T della Terra (Fig. 1) vengono osservati la Luna L e il Sole S quando il triangolo TLS è rettangolo in L. Il rapporto $\frac{TL}{TS}$ *fu trovato da Aristarco misurando l'angolo* α *formato dai lati TL e TS; ma — è chiaro — non si può dire che è l'ampiezza dell'angolo* α *ad essere uguale a quel rapporto!*

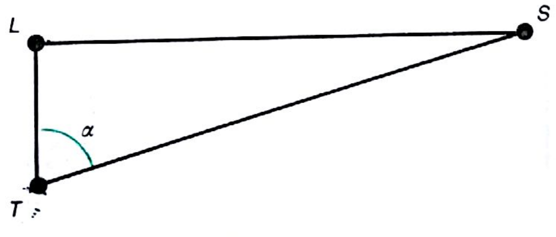


Fig. 1

Aristarco era dunque riuscito a fissare in una relazione le impressioni di bellezza e di ordine date dalle posizioni del Sole e della Luna. Erano gli inizi della scienza del cielo, **l'astronomia**, *ed erano anche gli inizi di un ramo della matematica,* **la trigonometria**.

Spettava ora alla trigonometria di precisare quella relazione fra un rapporto di lati di un triangolo rettangolo e l'ampiezza di un angolo acuto.

Ma torniamo all'astronomia: per misurare l'angolo α *si dovevano, prima di tutto, individuare le direzioni TL e TS; come* puntare *sulla Luna e sul Sole?*

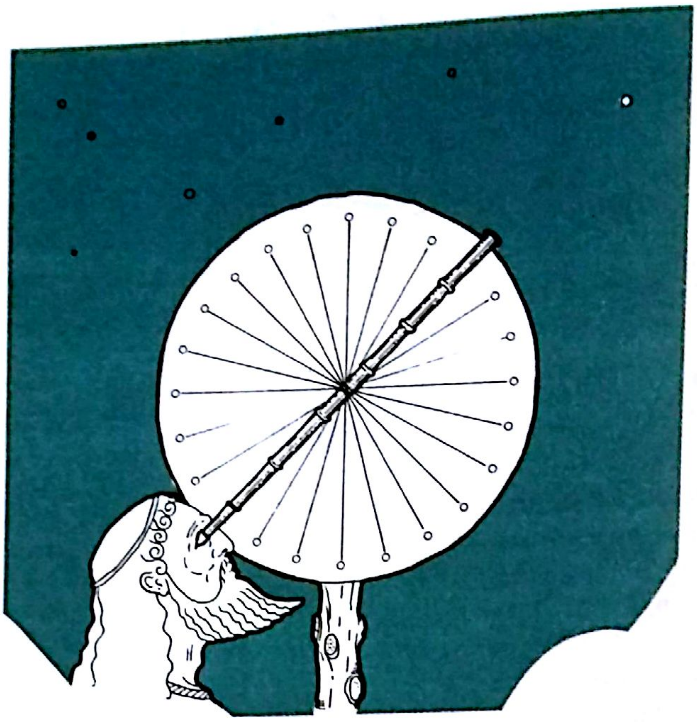


Fig. 2

A questa domanda risponde uno strumento ideato da un altro greco, Ipparco di Nicea, vissuto un secolo dopo Aristarco. Dotato di un particolare senso tecnico, Ipparco costruisce la diottra, *un apparecchio che può considerarsi come il teodolite dell'antichità. La diottra (Fig. 2) è costituita essenzialmente da un disco situato verticalmente e sostenuto da un paletto ad altezza d'uomo; sul bordo del disco c'è una graduazione di 360°, e al centro del disco è imperniata, in modo che si possa ruotare, una canna di bambù, cioè un tubicino. Guardando attraverso questo tubicino si può puntare l'astro, e si riesce così a determinare l'angolo di elevazione rispetto ad un riferimento fisso (Fig. 3).*

È probabilmente proprio questo strumento ad aver suggerito l'idea di sostituire all'ampiezza α di un angolo la lunghezza l dell'arco corrispondente.

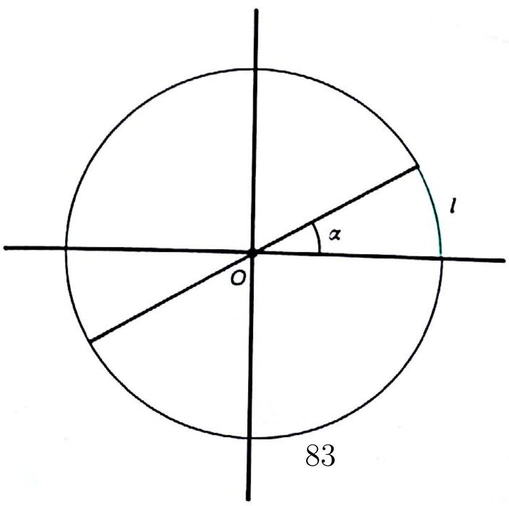


Fig. 3

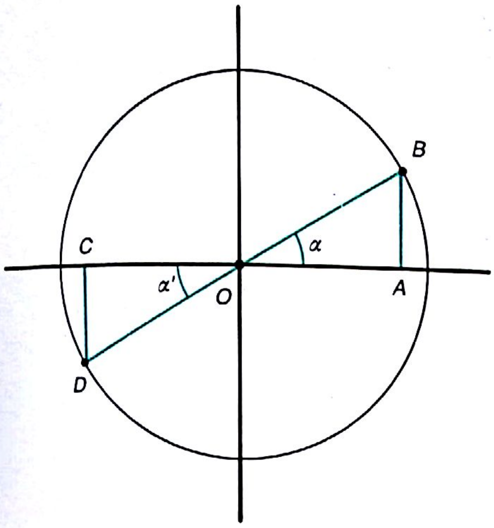


Fig. 4

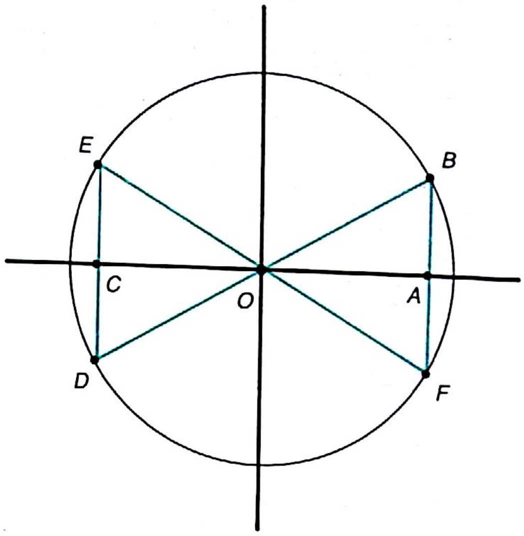


Fig. 5

Passano i secoli: il cerchio graduato porta a riflettere: se l'ampiezza dell'angolo α del triangolo OAB (Fig. 4) è legata da una certa relazione al rapporto $\frac{AB}{OB}$, la stessa relazione dovrebbe valere per il rapporto $\frac{CD}{OD}$ del triangolo OCD (che è uguale ad OAB), dato che $\alpha'=\alpha$; e dovrebbe anche valere per i triangoli OCE e OAF (Fig. 5) che sono anch'essi uguali ad OAB. Ma allora, come distinguere un triangolo dall'altro? È solo dopo l'introduzione del piano cartesiano (XVII secolo) che quei 4 angoli al centro uguali vengono distinti dal segno dell'ascissa e dell'ordinata dei punti B, E, D, F. Ecco, dalla considerazione statica di un triangolo si passa a quella dinamica di un angolo di vertice O (Fig. 6): l'ampiezza dell'angolo formato dalla lancetta OP con l'asse delle x cambia da un istante all'altro, e cambiano anche, a seconda del quadrante che si considera, i segni delle coordinate di P.

Si osserva allora il punto H, e così il problema passa al campo della fisica: è come se H fosse l'ombra sull'asse delle x di un punto P che si muove su un cerchio (Fig. 7); si è dunque condotti a studiare il moto armonico.

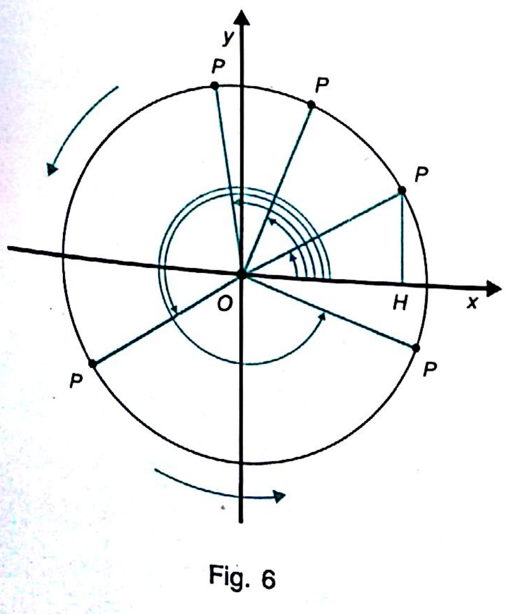


Fig. 6

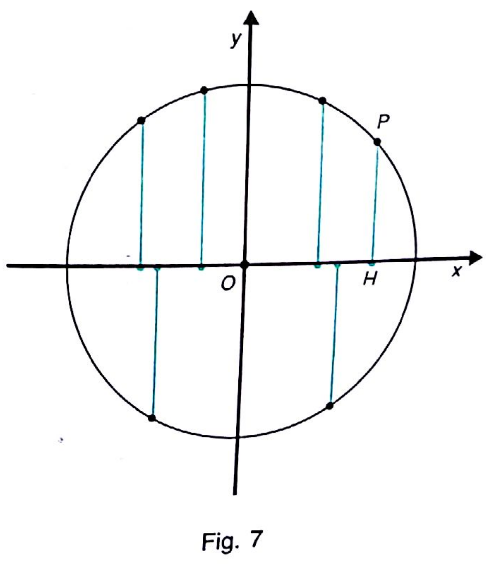


Fig. 7

Dal problema astronomico di Aristarco allo studio geometrico dei triangoli, alla considerazione del cerchio graduato che porta a sostituire l'arco all'angolo, alla fisica dei moti armonici,... : ecco un cammino che può dare un'idea dello sviluppo della trigonometria. Ma si tratta solo di un'interpretazione che è, senz'altro, molto limitata rispetto a quanto accadde veramente nella storia. Perché, prima di tutto, le investigazioni di Aristarco non erano "nate dal nulla"; risentivano certamente di osservazioni e di studi condotti, lungo molti secoli, dagli Egiziani e dai Babilonesi. Ci rimane però ben poco delle ricerche trigonometriche di questi popoli. E, del resto, nulla ci rimane direttamente delle opere di Aristarco e di Ipparco; è solo attraverso gli scritti dell'astronomo Tolomeo di Alessandria (vissuto nel II secolo d.C.) che sappiamo qualcosa dei lavori dei due astronomi greci.

Dopo Tolomeo occorre fare un salto di secoli per giungere, con la rivoluzione islamica del secolo VIII, ad un nuovo accendersi dello spirito investigativo. La cultura islamica riuscì ad assorbire la scienza greca, ormai in piena decadenza, a svilupparne alcuni settori, per trasmetterla poi, attraverso numerose traduzioni in arabo, ad un'Europa ancora addormentata negli anni bui del Medioevo. Il territorio dove avvenne la diffusione di questa cultura era immenso, dall'India ai Pirenei, un territorio dunque ancor più vasto di quello che era stato l'Impero Romano. È proprio in questo mondo musulmano, dove s'incrociavano correnti culturali provenienti da paesi tanto diversi come la Grecia, la Siria, la Persia e l'India, che lo studio della trigonometria raggiunse un alto livello. E sono queste conoscenze che arrivarono in Europa negli anni mille, attraverso la Spagna.

Occorre dire che oggi, con il ritrovamento recente di numerosi manoscritti negli archivi di Istanbul, ci si rende conto sempre di più del come la matematica araba s'imponga con ricerche originali ad altissimo livello; si tratta soprattutto di lavori di algebra e di trigonometria.

Ancora dei secoli dovevano passare perché la cultura araba fosse fatta "propria" e l'Europa riuscisse a produrre dei lavori originali. Si deve al matematico tedesco Johann Müller, detto Regiomontano (era questo il nome latino di Könisberg, la città dove era nato), l'opera De triangulis omnimodis libri V*; è questo lavoro, scritto nel 1464, che costituisce il primo libro esclusivamente dedicato alla trigonometria.*

Lo sviluppo dell'algebra, e cioè la nascita del simbolo per sostituire un segno a una parola e una formula ad una frase — siamo alla fine del Cinquecento —, ha condotto poi i matematici ad unificare varie scoperte di trigonometria fatte in epoche diverse. Furono così messe in rilievo quelle poche idee fondamentali che illuminano tutta una teoria. Sono queste idee che vengono oggi applicate per risolvere i problemi più vari, anche molto distanti da quelli astronomici che avevano motivato la nascita della trigonometria; sono problemi che vanno — come vedrete — dalla topografia all'acustica, dall'ottica all'elettronica, all'economia.

Appendice G

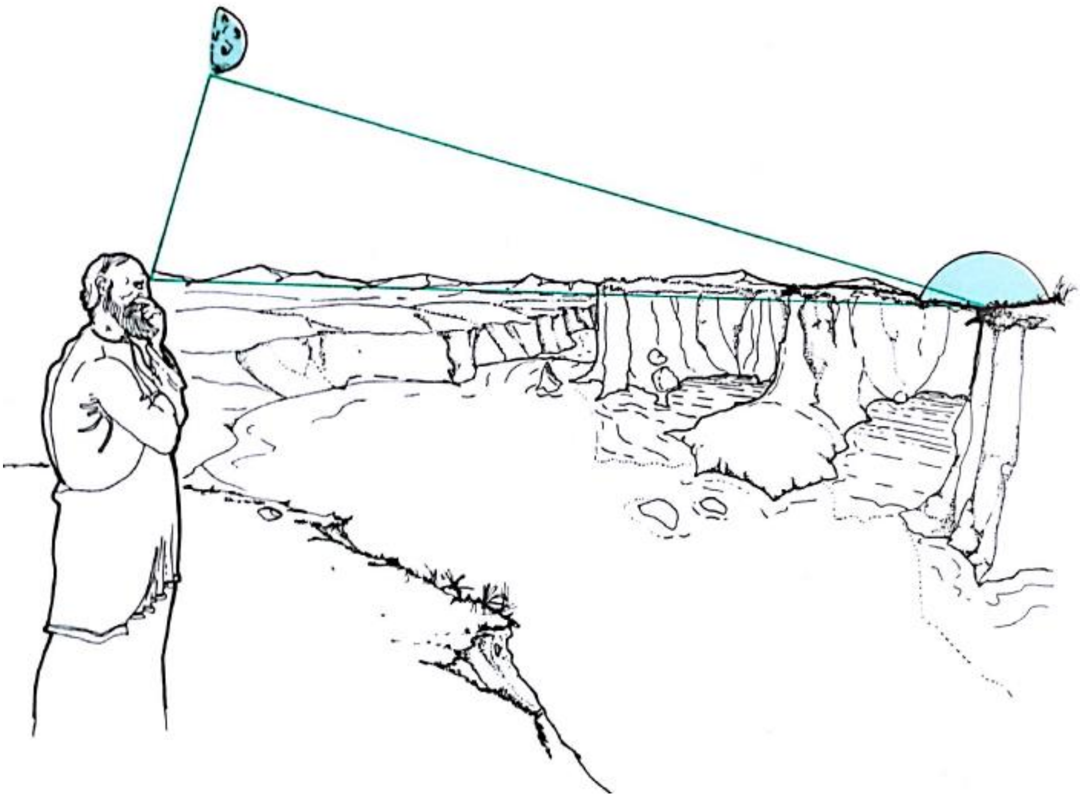
Allegato n.7: Alla ricerca delle relazioni tra gli angoli

Alla ricerca delle relazioni tra gli angoli

<u>Problema 1</u>

L'interesse per l'astronomia è molto antico e ovunque presente nella storia: Greci, Indiani, Arabi, Cinesi, popoli dell'America in epoca precolombiana furono affascinati dalle stelle, dal Sole dalla Luna e ne studiarono i movimenti.

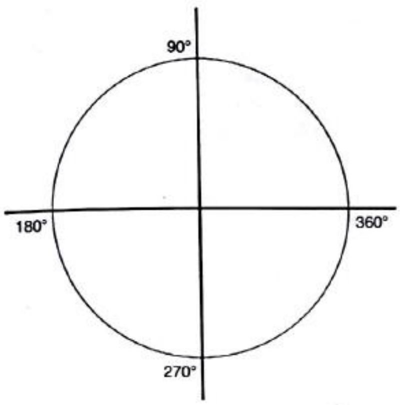
Problema di Aristarco di Samo (III secolo a.C.): "Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna , l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante: quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna?"

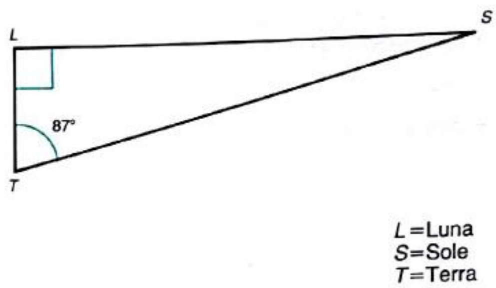


Il problema così descritto è di difficile comprensione, anche perché al tempo di Aristarco non c'era un uso sistematico nell'utilizzo della misura degli angoli in gradi.

Usando la misura degli angoli in gradi il quadrante di Aristarco equivale ad un angolo di 90 e un trentesimo di quadrante sarà un angolo ampio: 90°:30°=3°.

Perciò l'angolo indicato da Aristarco risulta ampio: 90°-3°=87°





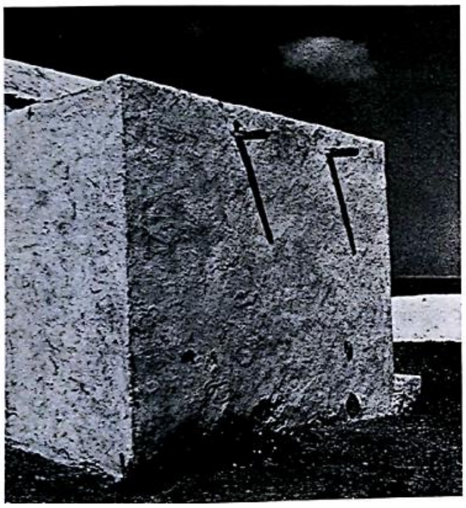
Il problema può quindi essere schematizzato nel triangolo LTS se si conosce l'angolo $L\widehat{T}S$ =87° e si vuole calcolare il rapporto fra la distanza Terra-Luna (il cateto LT) e la distanza Terra-Sole (l'ipotenusa TS).

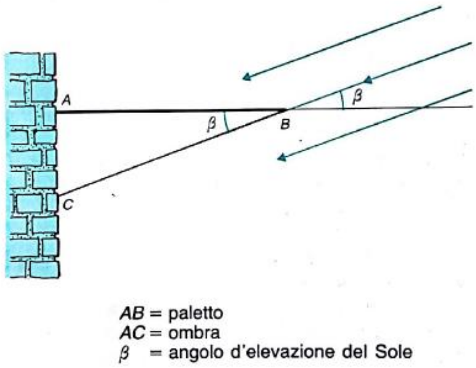
Ma quale relazione lega l'angolo $L\widehat{T}S$ al rapporto $\frac{LT}{TS}$?

Problema 2

Problema studiato da Indiani e Arabi fin dal X secolo: la lunghezza delle ombre al variare dell'altezza del Sole. L'ombra di un paletto conficcato orizzontalmente su una parete verticale variava al variare dell'altezza del Sole. Questo fenomeno fu studiato per trovare l'angolo di elevazione del sole a partire dalla lunghezza dell'ombra.

Nella figura riportata sotto schematizza la situazione studiata e fa capire che entrano in gioco relazioni tra lati e angoli di un triangolo rettangolo.

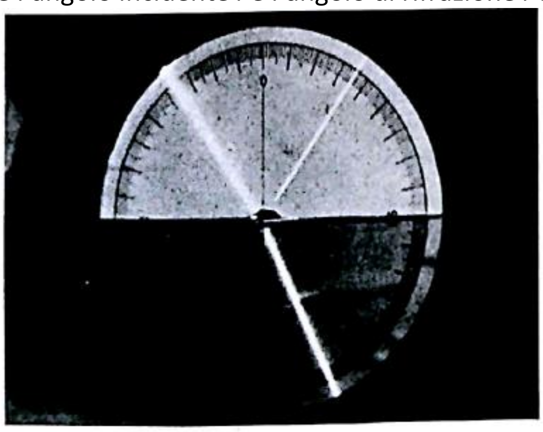


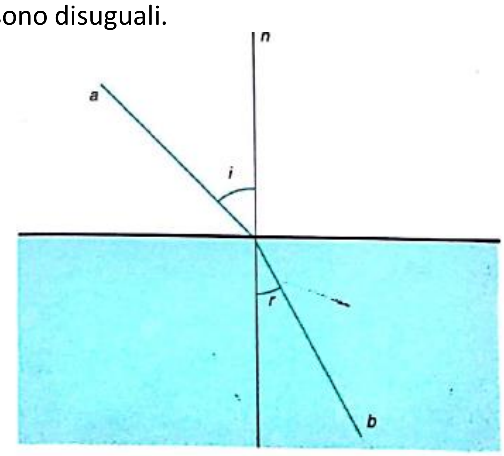


Problema 3

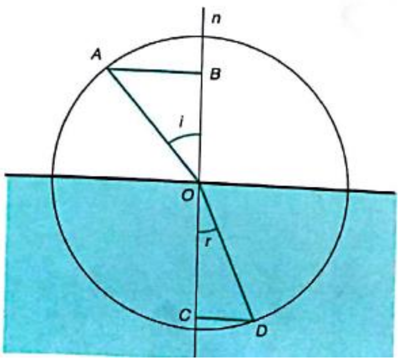
Lungo e faticoso è stato il cammino che ha portato a descrivere con leggi matematiche la rifrazione che subisce la luce, passando da un mezzo trasparente ad un altro. Nella figura riportata sotto è stato fotografato il cammino della luce che passa dall'aria al vetro.

Si nota che raggio incidente a, raggio rifratto b e normale n si trovano sullo stesso piano, ma nell'esperienza risulta che l'angolo incidente *i* e l'angolo di rifrazione *r* sono disuguali.





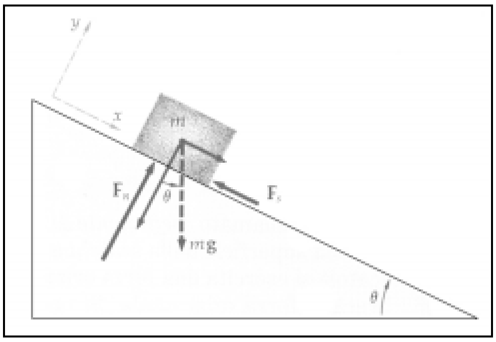
C'è una legge matematica che lega i ad r?



Osservando i due triangoli rettangoli ABO e CDO si capisce che la lunghezza dei due cateti dipende solo dagli angoli *i* ed *r*, dato che le ipotenuse sono uguali.

Per trovare questa relazione tra *i* ed *r* dobbiamo esaminare triangoli con la stessa ipotenusa e scoprire come un cateto è legato all'angolo opposto. (problema simile a quello di Aristarco)

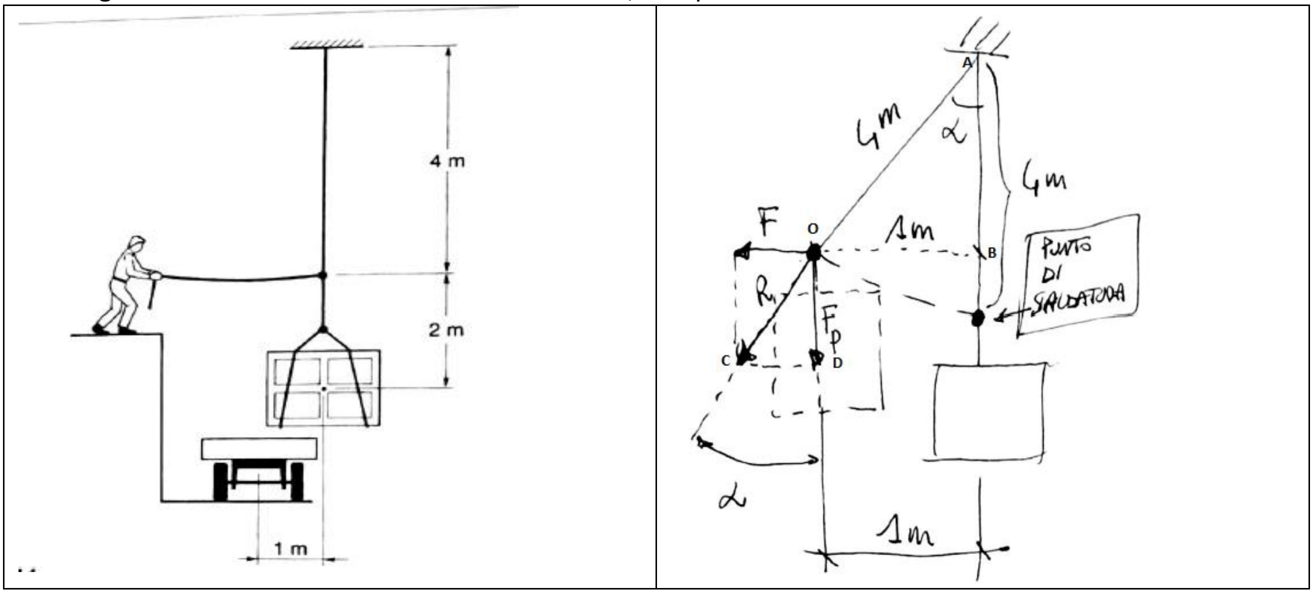
Problema 4



Quando due corpi sono a contatto, il coefficiente di attrito statico μ_S esprime il rapporto tra la forza di attrito statico F_S che si oppone al movimento reciproco dei due corpi e la forza normale F_n esercitata dalla superficie di un corpo su quella dell'altro, ovvero $\mu_S = \frac{F_S}{F_n}$. Sperimentalmente si osserva che tale coefficiente dipende dalla natura delle due superfici che sono a contatto, ma è indipendente dalla loro area.
Problema: dato un oggetto di massa m poggiato su un piano inclinato di pendenza θ e coefficiente di attrito radente statico μ_S, quale è l'angolo critico θ_C oltre il quale l'oggetto inizia a muoversi?

Problema 5

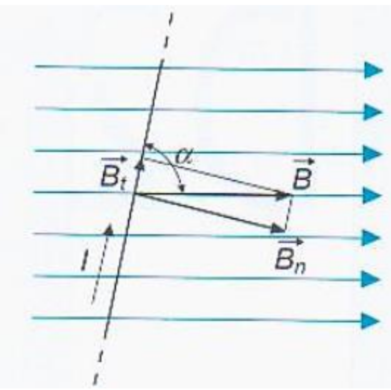
Un magazziniere deve posizionare esattamente sulla verticale di un carrello una cassa attaccata alla catena di una gru. Quale forza orizzontale dovrà esercitare, se il peso della cassa è di 930 N?



Schematizzando il problema come in figura si nota che si vengono a creare due triangoli simili OAB e OCD. Che relazione c'è tra la forza peso, la forza che richiede l'esercizio e l'angolo che si viene a formare tra la risultante e la forza peso?

Problema 6

Un conduttore di lunghezza l 0,5m percorso dalla corrente I=10A, è posto in un campo magnetico di induzione costante B=1T. Calcola la forza agente sul conduttore nel caso in cui l'angolo tra il conduttore e le line di forza è α=30°.



Nel caso in cui il conduttore non è posto perpendicolare alle line di forza del campo magnetico la forza esercitata dal campo magnetico è dovuta alla componente normale dell'induzione B_n quindi la formula della forza può essere scritta $F = B_n Il$.

Appendice H

Allegato n.8: Scheda di lavoro

Scheda di lavoro n.1

A) Triangoli rettangoli con un angolo di 30°

- Disegna un triangolo rettangolo OAB con l'ipotenusa OA lunga 2 e l'angolo BOA di 30°(usando goniometro e righello).

- Puoi determinare la lunghezza del segmento OB? Se la risposta è affermativa come faresti?

____
____
____

- Disegna con geogebra un angolo di 30°. Indichiamo su uno dei suoi lati tanti punti A, A', A'' … e da questi conduci le perpendicolari AB, A'B', A''B'' all'altro lato. Cosa ottieni?

____
____
____

- Si vengono a formare tre triangoli rettangoli che possiamo chiamare t1,t2 e t3.
  a) Misura i segmenti AB, A'B' e A''B'' (rappresentano i cateti con l'angolo opposto a 30° c1,c2,c3)
  b) Misura i segmenti OA, OA',OA'' (rappresentano l'ipotenusa i1, i2, i3)
  c) Misura i segmenti OB, OB', OB'' (rappresentano i cateti con l'angolo adiacente a 30° C1,C2,C3)

  Riportali nella seguente tabella:

c1	c2	c3	i1	i2	i3	C1	C2	C3
AB	A'B'	A''B''	OA	OA'	OA''	OB	OB'	OB''

  Calcola i seguenti quozienti:

$\frac{AB}{OA}$		$\frac{A'B'}{OA'}$		$\frac{A''B''}{OA''}$	
$\frac{OB}{OA}$		$\frac{OB'}{OA'}$		$\frac{OB''}{OA''}$	
$\frac{AB}{OB}$		$\frac{A'B'}{OB'}$		$\frac{A''B''}{OB''}$	

  Guardando i risultati ottenuti, cosa puoi congetturare? Hanno qualche fondamento teorico le tue considerazioni?

____
____
____

B) Triangoli rettangoli con un angolo di 45° (lavoro per casa)

- Disegna un triangolo rettangolo OAB con angolo di 45° e un cateto lunga 1(usando goniometro e righello).

- Puoi determinare la lunghezza del segmento OA? Se la risposta è affermativa come faresti?

____
____
____

- Disegna con geogebra un angolo di 45°. Indichiamo su uno dei suoi lati tanti punti A, A', A'' … e da questi conduci le perpendicolari AB, A'B', A''B'' all'altro lato. Cosa ottieni?

____
____
____

- Si vengono a formare tre triangoli rettangoli che possiamo chiamare t1,t2 e t3.
  d) Misura i segmenti AB, A'B' e A''B'' (rappresentano i cateti con l'angolo opposto a 30° c1,c2,c3)
  e) Misura i segmenti OA, OA',OA'' (rappresentano l'ipotenusa i1, i2, i3)
  f) Misura i segmenti OB, OB', OB'' (rappresentano i cateti con l'angolo adiacente a 30° C1,C2,C3)

  Riportali nella seguente tabella:

c1	c2	c3	i1	i2	i3	C1	C2	C3
AB	A'B'	A''B''	OA	OA'	OA''	OB	OB'	OB''

Calcola i seguenti quozienti:

$\frac{AB}{OA}$		$\frac{A'B'}{OA'}$		$\frac{A''B''}{OA''}$	
$\frac{OB}{OA}$		$\frac{OB'}{OA'}$		$\frac{OB''}{OA''}$	
$\frac{AB}{OB}$		$\frac{A'B'}{OB'}$		$\frac{A''B''}{OB''}$	

Guardando i risultati ottenuti, cosa puoi congetturare? Hanno qualche fondamento teorico le tue considerazioni?

____
____
____

Appendice I

Allegato n.9: Testo verifica 3EA Serale

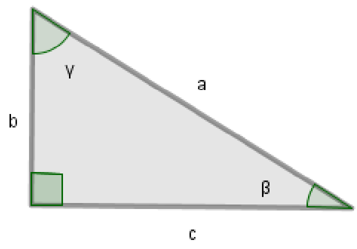
Cognome ……………… Classe……………………

Nome ………………… Data……………………...

Tempo 120'

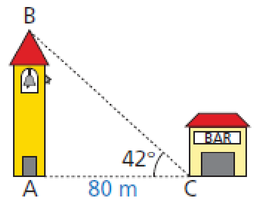
COMPITO DI MATEMATICA: TRIGONOMETRIA (triangoli rettangoli)

1. Di un triangolo rettangolo si conosce un cateto c=654,3 e l'ipotenusa a=931. Determina il valore dell'altro cateto e dei due angoli acuti utilizzando le regole della trigonometria (verifica i risultati ottenuti con il teorema di Pitagora e con il teorema della somma degli angoli interni).



…/10

2. Calcola l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80 metri da esso si vede la sua cima secondo un angolo di 42°.

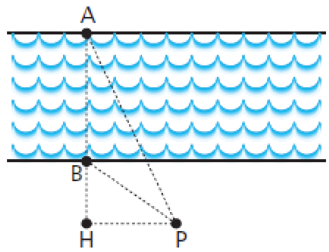


…/10

3. Un geometra deve misurare la larghezza di un canale. Dopo aver individuato un punto di riferimento *A* sulla sponda opposta alla sua, pianta due paletti: uno, sull'argine, nella posizione *B* e l'altro nella posizione *H* in modo che la retta *ABH* risulti perpendicolare alle sponde (figura a lato). Dalla posizione *P*, tale che $P\widehat{H}A = 90°$, misura gli angoli $H\widehat{P}B$, $H\widehat{P}A$ e la distanza *PH*:

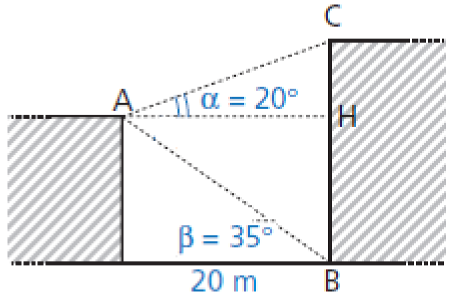
$$H\widehat{P}B = 35°;\ H\widehat{P}A = 65°;\ PH = 20 \text{ m}.$$

Qual è la larghezza *AB* del canale?



…/10

4. Due edifici sono posti uno di fronte all'altro come nella figura riportata sotto. Determina l'altezza dei due edifici?



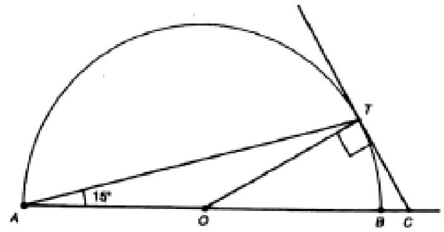
…/10

5. Ad un punto materiale vengono applicate contemporaneamente due forze perpendicolari F1=156N e F2=284N. Qual è la direzione della risultante R rispetto ad F1(regola del parallelogramma)? Rappresenta qui a fianco un disegno che schematizza il problema.

…/10

Cognome ……………… Classe……………………
Nome ………………… Data……………………...

Tempo 120'

6. In una semicirconferenza di diametro AB=10 m è data una cora AT tale che $T\hat{A}B = 15°$. Condurre la tangente in T; questa interseca il prolungamento di AB in C. Calcola il perimetro del triangolo OTC. *(Ricorda che essendo una circonferenza di centro O i lati AO e OT del triangolo AOT sono congruenti AO=OT quindi il triangolo OAT è isoscele, questo mi permette di determinare l'angolo $A\hat{O}T$ …)*		…/15
7. Le basi di un trapezio rettangolo sono lunghe rispettivamente 23,7 e 12,4 m. L'angolo che forma la base minore con il lato obliquo misura 145°. Calcola l'area e il perimetro.*(Traccia le altezze del trapezio, questo mi permette di vedere il trapezio come somma di un quadrato e un triangolo rettangolo…)*		…/15

TOTALE PUNTEGGIO	…/80
VOTO	

I voti vanno da 2 a 10. I punti sono 80. La valutazione si ottiene aggiungendo a 20 il punteggio ottenuto e dividendo per 10.

Appendice J

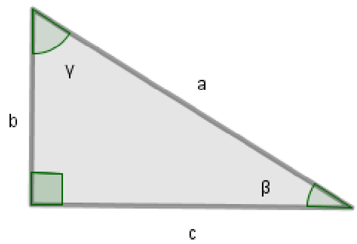
Allegato n.10: Testo verifica 3MA Diurno

Cognome ……………… Classe……………………
Nome ………………… Data……………………...

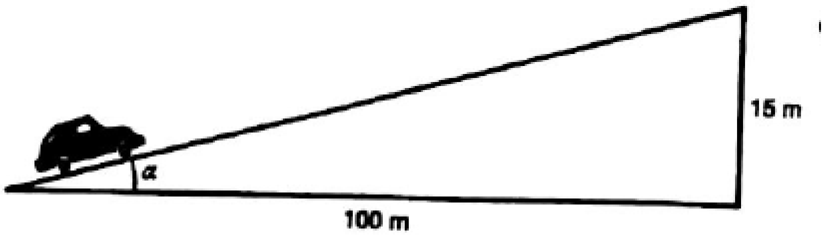
Tempo 60'

COMPITO DI MATEMATICA: TRIGONOMETRIA (triangoli rettangoli)

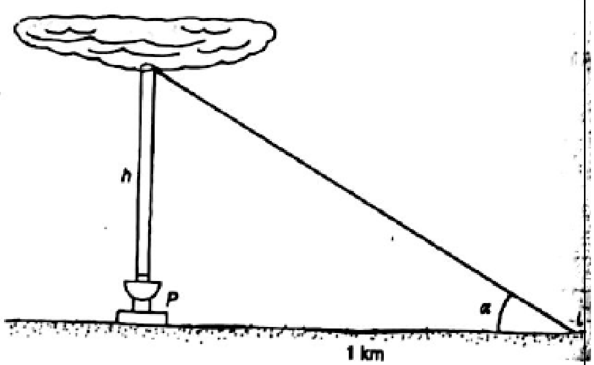
<table>
<tr><td>1. Di un triangolo rettangolo si conosce un cateto c=717,17 e un angolo acuto $\beta = 47°$ Determina il valore dell'ipotenusa e del secondo cateto e l'altro angolo acuto utilizzando i due teoremi sui triangoli rettangoli (verifica i risultati ottenuti con il teorema di Pitagora e con il teorema della somma degli angoli interni).</td><td>



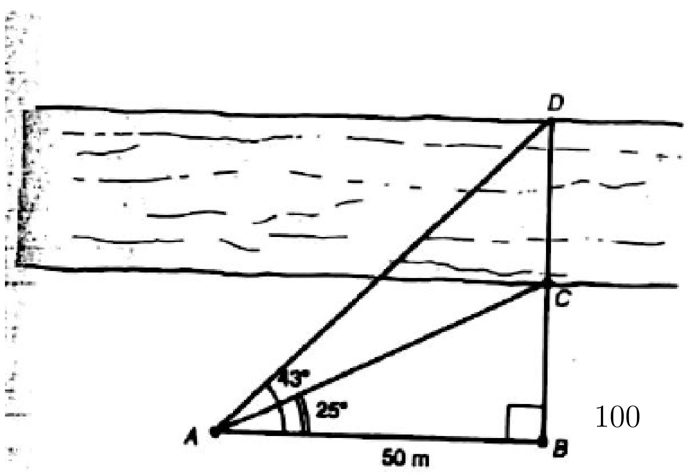
</td><td>…/10</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. La figura sotto rappresenta una strada che sale di 15 m su una distanza orizzontale di 100 m. Quanto vale l'angolo α di inclinazione della strada? Quanto m deve percorre la macchina per arrivare in cima alla strada?



</td><td>…/10</td></tr>
<tr><td>3. Per misurare di notte l'altezza di una nuvola si procede così: da terra si punta un proiettore P verticalmente in modo da colpire la nuvola con un fascio di luce; si osserva la macchi luminosa sulla nuvola da una località L, allo stesso livello del proiettore che dista 1 km da P e si misura un angolo d'elevazione α di 58°. Qual è l'altezza della nuvola in metri?</td><td>



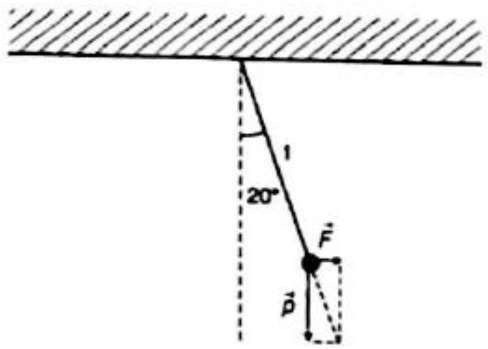
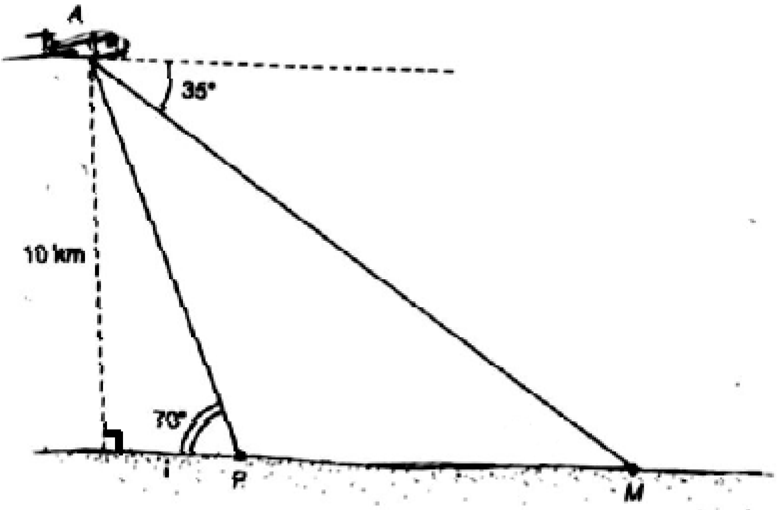
</td><td>…/10</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Quanto vale la larghezza del fiume rappresentato nella figura sotto?



</td><td>…/10</td></tr>
</table>

Cognome ……………… Classe……………………
Nome ………………… Data……………………...

Tempo 60'

5. Un pendolo è costituito da una massa di 2 kg appesa ad un filo; il filo, lungo un metro, è fissato al soffitto di una stanza. Determina l'intensità della forza $\vec{F}$ orizzontale che mantiene il filo spostato di 20° rispetto alla posizione di equilibrio.	 $\vec{p}$ è la forza peso, che ha modulo $p=mg$; in questo caso risulta: $p=2\cdot 9{,}8$ Newton.	…/10
6. Una ricognizione militare A fotografa una base missilistica M in costruzione. Se la situazione è quella mostrata in figura sotto, quanto vale la distanza fra il paese P e l'installazione M? 		…/15
7. Risolvere un triangolo ABC, rettangolo in A, di cui si conosce l'angolo β=40° e l'area S=900 m^2.(*Suggerimento: imposta un sistema contenenti due equazioni in cui compaiono i cateti del triangolo sfruttando le informazioni a disposizione…*)		…/15

TOTALE PUNTEGGIO	…/80
VOTO	

I voti vanno da 2 a 10. I punti sono 80. La valutazione si ottiene aggiungendo a 20 il punteggio ottenuto e dividendo per 10.

Bibliografia

[1] Abbati S., Carante P.,Cena A., Coviello A.,Fratti S.,Genoni L., Trinchero G.,Turiano F.(2016) Significati matematici e valutazione formativa. La matematica e la sua didattica convegno del trentennale. Bologna Pitagora.

[2] Boyer C.(2006). Storia della Matematica. Milano, Mondadori.

[3] Castelnuovo, Gori, Valenti (1986). Trigonometria. Firenze, La Nuova Italia.

[4] D'Amore B. (1999). Elementi di didattica della matematica. Bologna, Pitagora.

[5] D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2001). La "matematica del quotidiano". La Matematica e la sua didattica. 3, 256-263.

[6] D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I.,Iori M., Matteuzzi M. (2013) Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "paradosso di Duval"L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol.36 B N.3.

[7] D'Amore B., Marazzani I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. La matematica e la sua didattica. Vol. 22, n° 3, 285-329. ISSN: 1120-9968.

[8] Fandiño Pinilla M. I. (2002). Curricolo e Valutazione in matematica. Bologna, Pitagora.

[9] Morselli F., Sibilla A., Testera M.(2016). Lo sviluppo delle competenze argomentative nella scuola secondaria di primo e secondo grado. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate 548-565.

[10] Palladino F., Sicoli S. (2004). Angoli Linee Stelle. Origini e sviluppo della trigonometria. Roma: Aracne.

[11] Progetto di ricerca (CRT): metodologie, tecnologie e attività per l'apprendimento della matematica in modo accessibile e inclusivo

[12] Quartara S. Prime esperienze di uso "argomentativo"delle prove INVALSI in classe. La matematica e la sua didattica convegno del trentennale. Bologna Pitagora.

[13] Sasso L. LA matematica a colori 1. Torino, Petrini

[14] Sbaragli 2005. L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. Estratto da Bollettino dei docenti di matematica, nr. 50. Maggio 2005. 69-76.

[15] Vastarella S. (2016). Dalla calsse capovolta all'apprendimento capovolto: la matematica in video e la sfida del modello Flipped Mastery. La matematica e la sua didattica convegno del trentennale. Bologna Pitagora.

[16] Verardi(2014), Elementi di Geometria da un punto di vista superiore.

Ringraziamenti

La fine di questo percorso così tante volte sognato è finalmente arrivato. Sicuramente pochi hanno capito le ragioni che mi hanno spinto a iscrivermi ad un nuovo corso di laurea. Era semplicemente un sogno, un sogno rimasto in un cassetto per tanto tempo.

Di questi due anni mi restano tante emozioni, stimoli e sono pieni di ricordi.

Il primo giorno di lezione, aula Enriques, piena di persone sconosciute.

Le mie amiche d'università, Mariachiara, Mariligia e Luisa, così carine, gentili e giovanissime rispetto a me. Mille consigli e tanti appunti, di tutte le materie che non riuscivo a seguire.

I viaggi in treno, le lezioni da studente e subito dopo le mie lezioni da insegnante, i pranzi veloci e le mille cene con le mie amiche-bidelle al serale.

I giorni prima degli esami, scuola-treno-casa. Studiare, studiare e studiare con in mezzo preparazione delle lezioni e compiti da correggere. Senza tempo per nessuno.

I messaggi di tutti i miei amici che non si sono mai dimenticati dei miei esami Ilaria, Elisa, Luca, Giorgia, Carlotta, Jennifer, Michela, lo Gnomo, il Pino, Luciana, Martina e Stefania.

Gli esami, lo stesso patema, gli stessi timori, non ci si abitua mai agli esami!

I pranzi così piacevoli con Antonella alla fine delle lezioni, i saluti velocissimi a Sara che per vederla mi imbucavo alle sue lezioni a frequenza obbligatoria in via Belmeloro.

I miei studenti, i consigli dei miei colleghi, i confronti con Santina, la disponibilità e la professionalità del mio relatore.

I miei genitori, le mie nonne, i miei zii, mia sorella che forse non hanno mai ben capito che cosa facessi, ma erano sempre comunque presenti.
E infine Emanuele, non per importanza, ma perché lui era sempre presente, in tutto. A lui va sicuramente un ringraziamento particolare per aver sempre creduto in me, per avermi spinto a realizzare i miei sogni senza paura, quella paura che mi bloccava in tante scelte.
Soltanto una cosa rende impossibile un sogno: la paura di fallire. Paulo Coelho, da "L'Alchimista".