

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

GRAFI E
GRUPPI LIBERI

Tesi di Laurea in Topologia Computazionale

Relatore:
Chiar.m Prof.
STEFANO
FRANCAVIGLIA

Presentata da:
Guido Marinoni

Sessione Unica
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

*Aiutando la geometria,
l'algebra moderna aiuta innanzi tutto sé stessa*
Oskar Zariski

La struttura di un gruppo libero assomiglia sotto molti aspetti a quella di uno spazio vettoriale. Infatti, su un gruppo libero sono ben definite le nozioni di *sistema libero di generatori* e di *rango*, che fanno le veci rispettivamente della base e della dimensione negli spazi vettoriali. In questo modo un qualunque gruppo libero di rango n può essere identificato (a meno di isomorfismo) con il prodotto libero $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$, così come un \mathbb{R} -spazio vettoriale di dimensione n può essere identificato con $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}$. Si può essere quindi tentati di immaginare un gruppo libero così come ci si immagina uno spazio vettoriale: una retta, un piano, uno spazio...

Tuttavia le differenze fra le due strutture sono notevoli. Una per tutte il fatto che il gruppo libero F_3 di rango 3 è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo libero F_2 di rango due; portata negli spazi vettoriali, questa affermazione significherebbe che \mathbb{R}^3 è isomorfo ad un sottospazio di \mathbb{R}^2 , che è ovviamente falso. Lo stesso paradosso di Banach–Tarski, che asserisce che "una palla a tre dimensioni Euclidee è equiscomponibile a due copie di se stessa", basa la sua dimostrazione sull'utilizzo dell'assioma della scelta e dei gruppi liberi di rango 2.

Questo carattere controintuitivo ed apparentemente poco geometrico della struttura di gruppo libero ha suscitato l'interesse di John R. Stallings (1935-2008), che si è chiesto se (ed eventualmente come) fosse possibile visualizzare in maniera semplice i gruppi liberi. La questione che andremo a trattare è: anche se conosco la definizione di gruppo libero, come faccio a "vederlo" nella mia testa?

La risposta, come vedremo, arriva dalla topologia ed in particolare dallo studio dei grafi, i cui gruppi fondamentali sono liberi.

Nel primo capitolo vengono introdotti i gruppi liberi, viene definita la categoria dei grafi e vengono richiamate le nozioni appartenenti alla teoria delle categorie di *pushout* e *pullback*. Per semplicità la categoria dei grafi sarà definita in maniera combinatoria, ma è importante non perdere di vista il contenuto geometrico degli argomenti.

Nel secondo capitolo ci occuperemo di studiare alcune proprietà delle mappe fra grafi localmente iniettive ed introdurremo il *folding*. Il *folding* è in sostanza un'operazione che ripiega un grafo, identificandone due lati.

Nel terzo capitolo verranno invece affrontate questioni algebriche con argomenti topologici. Vedremo come è possibile visualizzare un endomorfismo di gruppi liberi come una mappa fra grafi e come si può rappresentare un sottogruppo di un gruppo libero con un'applicazione di grafi localmente iniettiva. Da qui ricaveremo due proprietà puramente algebriche dei gruppi liberi: vedremo che i gruppi liberi sono hopfiani (ossia ogni endomorfismo suriettivo di un gruppo libero è biiettivo) e che l'intersezione di due sottogruppi finitamente generati di un gruppo libero è a sua volta finitamente generata.

Indice

1	Concetti di base	7
1.1	Gruppi liberi	7
1.2	Grafi in maniera combinatoria	8
1.3	Grafi in maniera topologica	10
1.4	<i>Pushout</i> e <i>pullback</i>	11
2	Immersioni e <i>folding</i>	13
2.1	Proprietà delle immersioni	13
2.2	Il <i>folding</i>	15
2.3	Suriettività del <i>folding</i> sui gruppi fondamentali	20
3	Risultati sui gruppi liberi	23
3.1	Hopfianità	23
3.2	Intersezione di gruppi liberi	27
	Bibliografia	31

Capitolo 1

Concetti di base

1.1 Gruppi liberi

Definizione 1.1 (Gruppo libero). Un gruppo F si dice *libero* se esiste un suo sottoinsieme S tale che ogni $g \in F$ si scriva in maniera unica come combinazione di elementi in S a coefficienti in \mathbb{Z} ; diremo che S genera liberamente F e scriveremo $F = \langle S \rangle$.

F si dice *finitamente generato* se S è finito; in tal caso il *rango* di F è $rg(F) := |S|$.

Definizione 1.2 (Costruzione astratta di un gruppo libero). : Dato un insieme S , possiamo creare un gruppo $F(S)$ che risulti libero generato liberamente da S nel seguente modo:

- Per ogni $s \in S$ introduciamo un nuovo simbolo s^{-1} e poniamo che $s^{-1} \notin S$; chiamo $S^{-1} = \{s^{-1}, \text{ con } s \in S\}$.
- $F(S)$ sarà l'insieme delle stringhe ad elementi in S e S^{-1} con la seguente relazione $\forall s \in S \cup S^{-1}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, s, s^{-1}, x_{n+1}, \dots = x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$$

- L'operazione di prodotto su $F(S)$ sarà definita banalmente dalla concatenazione:

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_m) = x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$$

Teorema 1.1.1. *Siano S un insieme e G un gruppo; sia $f : S \rightarrow G$ una funzione. Allora esiste unico un morfismo di gruppi $\tilde{f} : F(S) \rightarrow G$ che estende f ; inoltre $\tilde{f}(F(S))$ è generato (non per forza liberamente) da $f(S)$.*

Osservazione 1. : Dati S_1, S_2 insiemi finiti di cardinalità uguale è possibile costruire un isomorfismo ovvio fra $F(S_1)$ e $F(S_2)$; questo giustifica il primo punto della seguente notazione.

Notazione 1. Utilizzeremo le seguenti notazioni:

- Identificando i gruppi isomorfi fra loro, chiameremo F_n un generico gruppo libero generato da un insieme di cardinalità n ; per esempio avremo che $\mathbb{Z} = F_1$.
- Diremo che $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle$.
- La concatenazione di $s \in S$ n volte sarà spesso indicato con s^n .

1.2 Grafi in maniera combinatoria

Definizione 1.3 (Grafo). Un *grafo* è una quaterna $(V, E, i, \bar{\cdot})$, dove:

- V ed E sono insiemi finiti; in particolare $V \neq \emptyset$;
- $i : E \rightarrow V$ è una funzione;
- $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$ è una biiezione tale che $\bar{\bar{e}} = e$ ed $\bar{e} \neq e, \forall e \in E$.

In questa notazione V è l'insieme dei *vertici*, E è l'insieme dei *lati*, i è la funzione *vertice iniziale* e $\bar{\cdot}$ è la funzione *lato inverso*.

Dato un grafo Γ , $V(\Gamma)$ sarà l'insieme dei suoi vertici ed $E(\Gamma)$ sarà l'insieme dei suoi lati; con un piccolo abuso di notazione, le funzioni vertice iniziale e lato inverso vengono in generale indicate rispettivamente con i e $\bar{\cdot}$. Il *vertice finale* di un lato $e \in E(\Gamma)$ è $i(\bar{e})$.

Il numero di lati di Γ è la cardinalità di $E(\Gamma)$ a meno di inverso, ossia $|E(\Gamma)|/2$; il numero di vertici di Γ è la cardinalità di $V(\Gamma)$. La *caratteristica di Eulero* del grafo Γ (indicata con $\chi(\Gamma)$) è il suo numero di vertici meno il suo numero di lati.

Definizione 1.4 (Morfismo di grafi). Un *morfismo* (o *mappa* o *applicazione*) di grafi da Γ_1 a Γ_2 è una coppia di funzioni

$$f_V : V(\Gamma_1) \rightarrow V(\Gamma_2), \quad f_E : E(\Gamma_1) \rightarrow E(\Gamma_2)$$

tali che $i_2(f_E(e)) = f_V(i_1(e))$ e $f_E(\bar{e}) = \overline{f_E(e)} \forall e \in E(\Gamma_1)$. Indicheremo il morfismo di grafi (f_V, f_E) come un'unica funzione $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$, sottintendendo che $f|_{E(\Gamma_1)} = f_E$ e $f|_{V(\Gamma_1)} = f_V$.

Definizione 1.5 (Stella, immersione, rivestimento). Definiamo alcuni tipi di morfismo di grafi; per farlo ci servirà la nozione di *stella*:

- Dato un grafo Γ ed un suo vertice v , la *stella di v in Γ* è $St(v, \Gamma) = \{e \in E(\Gamma) \text{ tc } i(e) = v\}$; la *valenza* di v è $\delta(v) := |St(v, \Gamma)|$ (viene sottointeso il grafo di cui v è vertice). È chiaro che, dato un morfismo di grafi $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, questo induce una funzione $f_v : St(v, \Gamma_1) \longrightarrow St(f(v), \Gamma_2)$ sulla stella di ogni vertice $v \in V(\Gamma)$.
- Dato un morfismo fra grafi $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$, questo si dice:
 - *Immersione* se ogni f_v indotta da f è iniettiva;
 - *Rivestimento* se ogni f_v indotta da f è biiettiva.

Definizione 1.6 (cammino, gruppo fondamentale). Sia Γ un grafo; un *cammino* di lunghezza n in Γ è una n -pla p di lati $e_1 \dots e_n$ che siano concatenati, ossia tali che $i(e_{j+1}) = i(\bar{e}_j)$, $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$; $v = i(e_1)$ e $w = i(\bar{e}_n)$ sono rispettivamente il *vertice iniziale* e il *vertice finale* del cammino p . Con un piccolo abuso di notazione, un cammino può essere di lunghezza zero, ma in questo caso va specificato esplicitamente qual è il vertice iniziale (che sarà anche il vertice finale) del cammino.

Γ dice *connesso* se per ogni $v, w \in V(\Gamma)$ esiste un cammino che vada da v a w .

Un *ciclo* è un cammino in cui vertice iniziale e finale coincidono.

Un cammino si dice *ridotto* se nella n -pla non compaiono mai due lati vicini del tipo $e\bar{e}$; se, al contrario, un cammino c ha un sottocammino del tipo $e\bar{e}$, togliendo questi due lati si ottiene un cammino c' di lunghezza inferiore di 2 rispetto a c ; questa operazione si chiama *cancellazione elementare* e l'equivalenza \simeq generata in questo modo si chiama *omotopia*.

Il *gruppo fondamentale* è il gruppo dei cicli a meno di omotopia con l'operazione di composizione; tutti i risultati topologici riguardo al gruppo fondamentale valgono anche con questa definizione (che è perfettamente equivalente). Sia f un morfismo di grafi; questo induce un morfismo $f_{\#}$ sui gruppi fondamentali, dove l'immagine della classe di omotopia del ciclo $c_1 \dots c_n$ è la classe del ciclo $f(c_1) \dots f(c_n)$.

Proposizione 1.2.1. *Sia Γ un grafo connesso. Allora esiste un albero massimale T contenuto in Γ ; inoltre $V(\Gamma) = V(T)$.*

Proposizione 1.2.2. *Sia Γ un grafo connesso. Il gruppo fondamentale di Γ è un gruppo libero di rango $1 - \chi(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Trovando un albero massimale in Γ (come da 1.2.1) e facendolo collassare ad un punto trovo un grafo Δ con un solo vertice tale che $\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\Delta)$ e $\chi(\Gamma) = \chi(\Delta)$, da cui Δ ha $\chi(\Gamma) + 1$ lati. La tesi segue da una semplice applicazione del Teorema di Seifert-Van Kampen. \square

Notazione 2. Con *grafo colorato* intenderemo un grafo in cui ad ogni lato è assegnata in maniera formale un'etichetta in un insieme di indici (che per noi saranno colori).

Definizione 1.7 (*core-graph*). Un grafo Γ si dice *core-graph* se non ha vertici di valenza 1.

Proposizione 1.2.3. *Sia Γ un grafo connesso. Esiste un unico sottografo connesso di Γ , detto $core(\Gamma)$, tale che:*

1. $core(\Gamma)$ è un *core-graph*;
2. $rg(\pi_1(\Gamma)) = rg(\pi_1(core(\Gamma)))$;
3. ogni sottografo di Γ che è un *core-graph* è sottografo di $core(\Gamma)$.

Dimostrazione. Procedo per induzione sul numero n di lati di Γ .

Il passo induttivo con $n = 0$ è ovvio.

Suppongo ora che il numero di lati di Γ sia $n + 1$. Se Γ non ha vertici di valenza 1, $core(\Gamma) = \Gamma$. Sia invece $v \in \Gamma$ di valenza 1, quindi $St(v, \Gamma) = \{e\}$. Considero ora il sottografo Γ' di Γ ottenuto togliendo v , e ed \bar{e} da Γ ; si noti che questa operazione mantiene la caratteristica di Eulero. Questo grafo ha un numero di lati pari a n ; posso quindi applicare l'ipotesi di induzione e trovare $core(\Gamma') = core(\Gamma)$. Il risultato sul rango del gruppo fondamentale è dato dal fatto che la caratteristica di Eulero è conservata e da 1.2.2. La massimalità di $core(\Gamma)$ deriva dalla costruzione: non posso infatti aggiungere dei lati senza aggiungere un vertice di valenza 1.

1.3 Grafi in maniera topologica

Definizione 1.8. Diamo un modo equivalente di vedere i grafi, ma in ambito geometrico, non combinatorio.

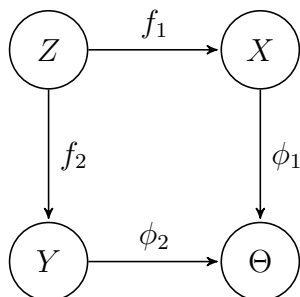
- Un *grafo* è un CW-complesso di dimensione 1; in pratica possiamo considerarlo come delle copie di $[0,1]$ che collegano dei punti
- Una *mappa di grafi* $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ è un'applicazione continua da Γ_1 a Γ_2 ; f si dice:

- *Immersione* se è localmente iniettiva
- *Rivestimento* se è localmente un omeomorfismo
- Le definizioni di cammino, ciclo, omotopia e gruppo fondamentale sono quelle proprie della topologia.

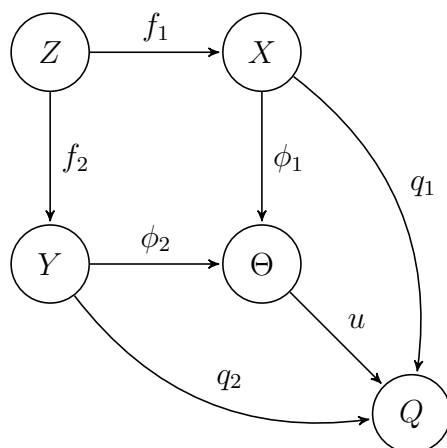
Per comodità useremo sempre la notazione combinatoria per i grafi, che ci permette di utilizzare strutture più semplici.

1.4 *Pushout e pullback*

Definizione 1.9 (*Pushout*). Sia C una categoria; dati $X, Y, Z \in Ob(C)$ e $f_1 \in Mor_C(Z, X)$, $f_2 \in Mor_C(Z, Y)$, diremo che

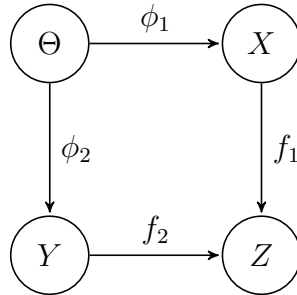


è un *diagramma di Pushout* (e Θ è detto *Pushout* di f_1 e f_2) se $\forall Q \in Ob(C)$, $\forall q_1 \in Mor_C(X, Q)$, $\forall q_2 \in Mor_C(Y, Q)$ esiste unico $u \in Mor_C(\Theta, Q)$ che faccia commutare il diagramma:

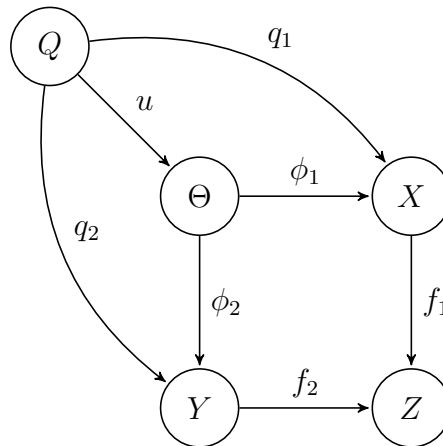


Nella categoria *Set* degli insiemi il *pushout* è costruito come $X \sqcup Y / \sim$, dove \sim è la relazione di equivalenza tale che, presi $x \in X$ e $y \in Y$, $x \sim y$ se $f_1^{-1}(x) \cap f_2^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Definizione 1.10 (*pullback*). Sia C una categoria; dati $X, Y, Z \in Ob(C)$ e $f_1 \in Mor_C(X, Z)$, $f_2 \in Mor_C(Y, Z)$, diremo che



è un *diagramma di Pullback* (e Θ è detto *Pullback* di f_1 e f_2) se $\forall Q \in Ob(C)$, $\forall q_1 \in Mor_C(Q, X)$, $\forall q_2 \in Mor_C(Q, Y)$ esiste unico $u \in Mor_C(Q, \Theta)$ che faccia commutare il diagramma:



In *Set* il *pullback* si costruisce come $\{(x, y) \in X \times Y \text{ tali che } f_1(x) = f_2(y)\}$ e $\phi_1(x, y) = x$, $\phi_2(x, y) = y$.

Osservazione 2. Nella categoria dei grafi il *pushout* può essere costruito quando X, Y e Z hanno orientazioni preservate da f_1 e f_2 ; è invece sempre possibile costruire il *pullback*.

Quando possibili, le strutture di *pushout* e *pullback* sono mantenute dai funtori *vertici* e *lati* che dai grafi vanno alla categoria *Set*.

Capitolo 2

Immersioni e *folding*

2.1 Proprietà delle immersioni

Proposizione 2.1.1. *Sia $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ un'immersione di grafi. Si ha che:*

1. *se c è un cammino ridotto in Γ , allora $f(c)$ è un cammino ridotto di Δ .*
2. *se c_1 e c_2 sono cammini ridotti in Γ con lo stesso vertice iniziale e $f(c_1) = f(c_2)$, allora $c_1 = c_2$.*
3. *se Θ è un grafo connesso e g_1, g_2 sono applicazioni da Θ a Γ tali che $fg_1 = fg_2$ e che per un certo $v \in V(\Theta)$ $g_1(v) = g_2(v)$, allora $g_1 = g_2$.*

Dimostrazione. 1. Se $f(c)$ non fosse un cammino ridotto, avrebbe un sottocammino del tipo $f(e_1)\overline{f(e_1)}$. Quindi in c ci sarebbe un sottocammino e_1e_2 , dove $f(e_2) = \overline{f(e_1)}$, da cui, poiché f è un'immersione e $i(\bar{e}_1) = i(e_2)$, $e_1 = e_2$. Il cammino c non sarebbe allora ridotto.

2. Procedo per induzione sulla lunghezza di c_1 (che è uguale alla lunghezza di c_2 , avendo i due la stessa immagine). Se c_1 ha lunghezza 1, la tesi è diretta conseguenza della definizione di immersione. Se invece c_1 ha lunghezza $n > 1$, considero i cammini \tilde{c}_1 e \tilde{c}_2 formati dai primi $n - 1$ lati rispettivamente di c_1 e di c_2 ; questi coincidono per ipotesi induttiva (quindi coincideranno anche i rispettivi vertici finali); il che ci porta a dire che anche l'ultimo lato di c_1 coincide con l'ultimo lato di c_2 , sempre per ipotesi induttiva.
3. Sia $e \in E(\Theta)$ arbitrario. Considero un cammino ridotto c in Θ che abbia v come vertice iniziale ed e (o, se non fosse possibile, \bar{e}) come ultimo lato. Procedo per induzione sulla lunghezza di c . Se c ha lunghezza 1,

poiché $f(g_1(e)) = f(g_2(e))$, f è un'immersione e $i(g_1(e)) = i(g_2(e))$, si ha che $g_1(e) = g_2(e)$. Se c ha lunghezza $n > 1$, considero il cammino \tilde{c} formato dai primi $n - 1$ lati di c ; per ipotesi induttiva, avrò che g_1 e g_2 coincidono sul cammino \tilde{c} , quindi anche sul suo vertice finale w ; da qui, sempre per ipotesi induttiva, avrò che $g_1(e) = g_2(e)$. \square

Proposizione 2.1.2. *Se c_1 e c_2 sono cammini ridotti omotopi in un grafo Γ , allora $c_1 = c_2$.*

Dimostrazione. Si chiami Δ il grafo ottenuto identificando tutti i vertici di Γ e sia $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ la proiezione. Poiché Δ ha un solo vertice, l'isomorfismo naturale fra $\pi_1(\Delta)$ e F_n manda la classe di un lato di Δ in un generatore di F_n , da cui l'unicità della forma ridotta di un elemento di F_n ed il fatto che $f(c_1) \simeq f(c_2)$ implicano che $f(c_1) = f(c_2)$. Poiché f è biiettiva sui lati, è un'immersione, quindi per 2.1.1 si ha che $c_1 = c_2$. \square

Proposizione 2.1.3. *Sia $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ un'immersione e sia $v \in V(\Gamma)$. Allora il morfismo $f_\#$ fra i gruppi fondamentali basati su v è iniettivo.*

Dimostrazione. Siano c_1, c_2 due cicli ridotti basati su v tali che $f(c_1) \simeq f(c_2)$. Essendo f un'immersione, per 2.1.1 e 2.1.2, $f(c_1)$ ed $f(c_2)$ sono lo stesso cammino ridotto. Abbiamo allora che, sempre per la proposizione, $c_1 = c_2$, da cui rappresentano naturalmente la stessa classe di omotopia. \square

Lemma 2.1.4. *Sia $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ un'immersione di grafi e sia $v \in V(\Gamma)$; si etichetti ogni lato di Γ con la sua immagine. Allora $f_\#(\pi_1(\Gamma, v))$ è dato univocamente dalle parole formate dalle etichette che si leggono lungo i cicli di Γ basati su v .*

Dimostrazione. Considero i cicli ridotti c_1, \dots, c_n basati su v che rappresentano i generatori del gruppo fondamentale di Γ e le loro immagini; per costruzione, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(c_i)$ è la parola formata dalle etichette (lette in ordine) di p_i . Poiché per 2.1.3 $f_\#$ è iniettivo, estendendo la funzione ad un morfismo di gruppi come da 1.1.1 ottengo la tesi. \square

Lemma 2.1.5. *Siano Γ un grafo connesso e R_n un bouquet di n circonferenze, sia $f : (\Gamma, v) \rightarrow (R_n, w)$ un'immersione suriettiva sui gruppi fondamentali; allora $\Gamma = R_n$ e f è la mappa identica (a meno di permutazione di petali).*

Dimostrazione. Etichetto ogni lato di $V(\Gamma)$ con la propria immagine; per 2.1.4 e per la suriettività di $f_\#$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ devo poter trovare un lato in $E(\Gamma)$ che sia etichettato con e_i e che costituisca un ciclo basato su v

di lunghezza 1.

Ho così che il bouquet R_n è contenuto in Γ . Se ci fosse in $V(\Gamma)$ un lato \tilde{e} che non sta nel bouquet R_n e che ha v come vertice iniziale, la sua immagine sarebbe naturalmente uguale a quella di un lato del bouquet; essendo però f un'immersione, questo non è possibile.

Quindi ho che, per la connessione di Γ , $\Gamma = R_n$; inoltre i lati di Γ e di R_n risultano in corrispondenza biunivoca, da cui f è in effetti la mappa che ad ogni circonferenza del bouquet associa una circonferenza del bouquet. \square

2.2 Il folding

Definizione 2.1 (*folding*). Una coppia di lati e_1, e_2 di un grafo Γ è detta *ammissibile* se $e_1 \neq \bar{e}_2$ e $i(e_1) = i(e_2)$.

Data e_1, e_2 una coppia ammissibile di lati di un grafo Γ , il grafo ottenuto identificando fra loro e_1 con e_2 , \bar{e}_1 con \bar{e}_2 e $i(\bar{e}_1)$ con $i(\bar{e}_2)$ è indicato con $\Gamma/[e_1 = e_2]$; questa operazione di identificazione è detta *folding*.

Sia $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ una mappa di grafi e sia e_1, e_2 una coppia di lati ammissibili in Γ ; si dice che f *folda* la coppia di lati se $f(e_1) = f(e_2)$.

Notazione 3. Data una mappa di grafi $f : \Gamma \rightarrow \Delta$, introduciamo una *colorazione indotta* da f . Questo significa assegnare ad ogni lato di Δ un colore diverso ed assegnare ad ogni lato di Γ il colore della sua immagine lungo f .

In questo modo avremo che f *folda* una coppia di lati ammissibile se e solo se questi hanno lo stesso colore.

Lemma 2.2.1. *Ogni mappa che non sia un'immersione folda in maniera non banale una coppia ammissibile di lati; viceversa, se una mappa folda una coppia ammissibile di lati distinti, allora non è un'immersione.*

Dimostrazione. È una conseguenza diretta della definizione di immersione.

Lemma 2.2.2. *Sia Γ un grafo connesso e $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$ un ciclo in Γ basato su $v \in V(\Gamma)$. Supponiamo che esista un unico lato $\delta \in E(\Gamma)$ tale che:*

1. γ ha almeno un lato che non sta in $\{\delta, \bar{\delta}\}$;
2. ogni cancellazione elementare possibile in γ è del tipo $\delta\bar{\delta}$ (o il suo inverso);
3. dato un sottocammino $\gamma_r \gamma_{r+1}$ di γ della forma $\delta\bar{\delta}$ o $\bar{\delta}\delta$, si ha che, se $r \neq 1$ e $r \neq n - 1$, $\gamma_{r-1} \neq \bar{\gamma}_{r+2}$.

Allora $\gamma \not\cong 1$.

Dimostrazione. Procedo per induzione sul numero k di cancellazioni elementari che si possono effettuare su γ .

Il passo base con $n = 0$ è ovvio per 2.1.2.

Ora supponiamo vera l'ipotesi induttiva per $k \in \mathbb{N}$ e supponiamo che in γ sia possibile effettuare esattamente $k + 1$ cancellazioni elementari diverse. Mostriamo che il ciclo γ' ottenuto cancellando in γ una coppia del tipo $\delta\bar{\delta}$ o $\bar{\delta}\delta$ soddisfa ancora le ipotesi:

1. è ovvio che, avendo cancellato solamente un lato δ e un lato $\bar{\delta}$, γ' ha ancora almeno un lato che non sta in $\{\delta, \bar{\delta}\}$.
2. tutti i sottocammini di lunghezza 2 di γ' erano anche sottocammini di γ , tranne eventualmente $\gamma_{r-1}\gamma_{r+2}$, se esiste. Poiché per ipotesi $\gamma_{r-1} \neq \bar{\gamma}_{r+2}$, tutte le cancellazioni possibili in γ' erano già possibili in γ , da cui sono sempre nella forma $\delta\bar{\delta}$ o $\bar{\delta}\delta$ e sono esattamente k .
3. la terza proprietà è ereditata direttamente da γ .

Poiché, come abbiamo visto nel punto 2, su γ' è possibile effettuare solo k cancellazioni elementari, possiamo applicare su di esso l'ipotesi di induzione, da cui $1 \not\cong \gamma' \simeq \gamma$. \square

Lemma 2.2.3. *Consideriamo un grafo connesso Γ ed una coppia ammissibile di suoi lati distinti e_1, e_2 con vertice iniziale v . Se e_1 ed e_2 hanno vertici finali distinti (rispettivamente w_1 e w_2), la proiezione $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$ che folda e_1 ed e_2 è iniettiva sui gruppi fondamentali.*

Dimostrazione. Poiché Γ è connesso, posso scegliere qualunque vertice come punto base per il suo gruppo fondamentale; in particolare scelgo v e studio il Ker di $p_{\#} : \pi_1(\Gamma, v) \rightarrow \pi_1(\Gamma/[e_1 = e_2], p(v))$.

Considero in Γ un ciclo ridotto c basato su v che ha la lati solo in $\{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$; perché c non sia omotopo all'identità, dovrò avere che $w_1 = v$ (o equivalentemente $w_2 = v$) e $c = e_1 \dots e_1$ oppure $c = \bar{e}_1 \dots \bar{e}_1$. Avrò così che $p(c) = p(e_1) \dots p(e_1)$ o $p(c) = p(\bar{e}_1) \dots p(\bar{e}_1) = \overline{p(e_1)} \dots \overline{p(e_1)}$, che non sono omotopi all'identità.

Sia ora $c = c_1 \dots c_n$ un ciclo ridotto in Γ basato su v non omotopo all'identità che ha (anche) lati fuori da $\{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Mostro che $p(c)$ soddisfa le ipotesi di 2.2.2 con $\gamma = p(c)$ e $\delta = p(e_1) = p(e_2)$.

È ovvio che tutte le cancellazioni in $p(c)$ sono nella forma $p(e_1)\overline{p(e_1)}$, poiché p è una biiezione sui lati fuori da $\{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Ora dimostro che soddisfa la proprietà 3 di 2.2.2. Considero in c un sottocammino massimale $\tilde{c} = c_r \dots c_s$ (non nullo) che abbia lati soltanto in $\{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Poiché c è ridotto, abbiamo che:

- Se $w_1 \neq v \neq w_2$, \tilde{c} è nella forma e_1, e_2 o $\bar{e}_1 e_2$ (o uno dei loro inversi). Nei primi due casi, in $p(\tilde{c})$ non è ovviamente possibile effettuare alcuna cancellazione. Nel terzo caso, posso cancellare in $p(c)$ il cammino $p(c_r)p(c_{r+1})$ in $p(c)$. Si noti però che, se $r \neq 1$ e $r \neq n - 1$, poiché $w_1 \neq w_2$, abbiamo che $c_{r-1} \neq \bar{c}_{r+2}$; da qui, essendo p una biiezione sui lati fuori da $\{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, è ovvio che $p(c_{r-1}) \neq \overline{p(c_{r+2})}$.
- Se $w_1 = v$ (il caso $w_2 = v$ è equivalente), \tilde{c} è in una delle seguenti forme a meno di inverso:
 1. $\tilde{c} = e_1 \dots e_1$: in questo caso non è possibile effettuare alcuna cancellazione in $p(\tilde{c})$.
 2. $\tilde{c} = e_1 \dots e_1 e_2$: in questo caso non è possibile effettuare alcuna cancellazione in $p(\tilde{c})$.
 3. $\tilde{c} = \bar{e}_1 \dots \bar{e}_1 e_2$: in questo caso è possibile effettuare in $p(\tilde{c})$ una ed una sola cancellazione. Anche qui, se esistono, il lato precedente e quello successivo a quelli cancellati non sono l'inverso l'uno dell'altro per un argomento simile a quello visto nel caso $w_1 \neq v \neq w_2$.
 4. $\tilde{c} = \bar{e}_2 e_1 \dots e_1 e_2$: anche in questo caso è possibile effettuare una ed una sola cancellazione in $p(\tilde{c})$, che crea un nuovo sottocammino di lunghezza 2, $p(c_{r-1})p(c_{r+2})$. Questo è ridotto poiché, osservando che $\tilde{c} \neq \bar{e}_2 e_2$ perché c è ridotto, $c_{r+2} \in \{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ e $c_{r-1} \notin \{e_1, e_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Per 2.2.2 si ha così che $p(c) \not\cong 1$. Abbiamo quindi mostrato che, se un ciclo ridotto c in Γ non è omotopo all'identità, $p(c)$ non è omotopo all'identità, ossia che $\text{Ker}(p_\#) = 0$, da cui p è iniettiva sui gruppi fondamentali. \square

Lemma 2.2.4. *Dato un grafo connesso Γ ed una coppia ammissibile di suoi lati distinti e_1, e_2 con vertice iniziale v e vertici finali rispettivamente w_1 e w_2 , abbiamo che $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/[e_1 = e_2])$; inoltre $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma/[e_1 = e_2])$ se e solo se la proiezione $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$ è iniettiva sui gruppi fondamentali.*

Dimostrazione. Abbiamo che:

- se $w_1 = w_2$ il *folding*, identificando due lati distinti e due vertici uguali, alza la caratteristica di Eulero di 1;

- se $w_1 \neq w_2$ il *folding* identifica due lati distinti e due vertici distinti, mantenendo la caratteristica di Eulero invariata.

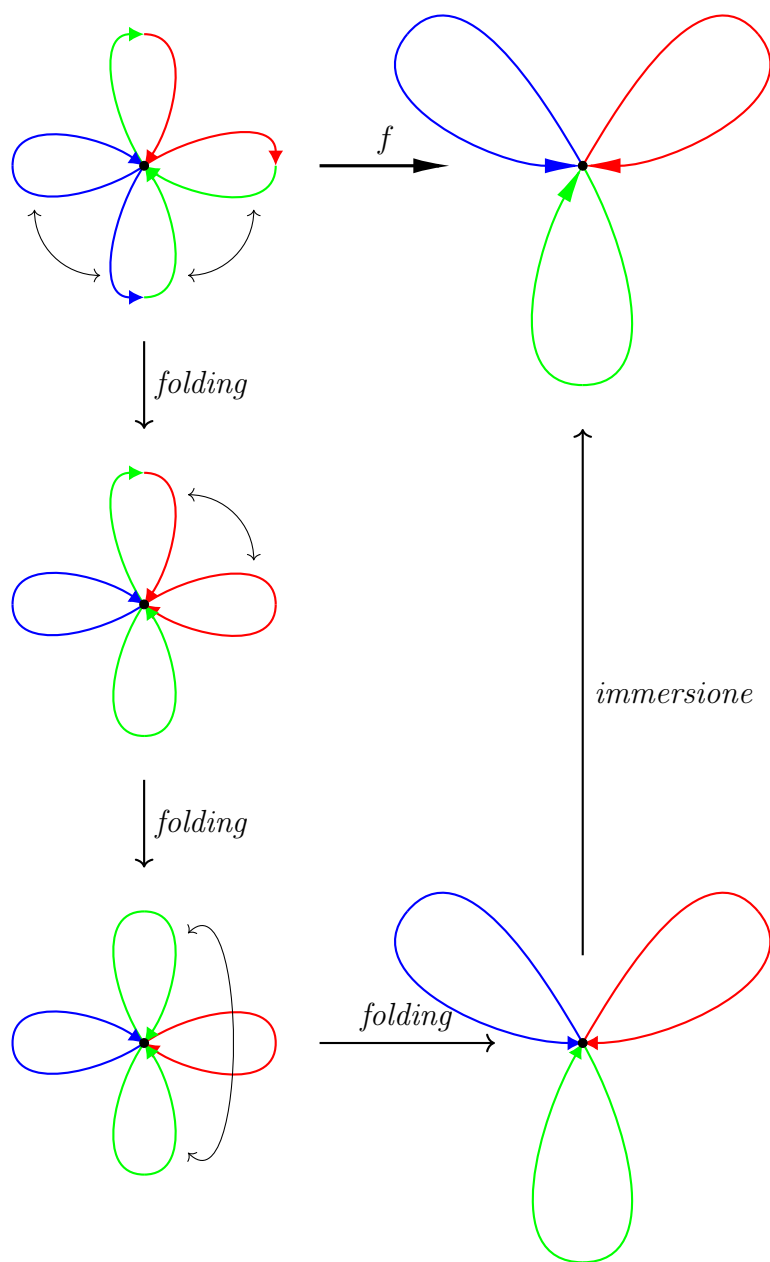
Supponiamo che $\chi(\Gamma) \leq \chi(\Gamma/[e_1 = e_2])$, ossia che $w_1 = w_2$; consideriamo il cammino (non omotopo all'identità poiché la coppia di lati è ammissibile) $e_1\bar{e}_2$: questo sarà mandato da p nel cammino $f(e_1)\overline{f(e_1)}$, che è omotopo all'identità. Abbiamo che la classe di omotopia di $e_1\bar{e}_2$ sta in $\text{Ker}(p_\#)$ ma non è lo zero del gruppo, che contraddice l'iniettività.

L'altra implicazione deriva da 2.2.3. □

Teorema 2.2.5. *Una mappa di grafi $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ può essere fattorizzata in una successione di folding ed un'immersione.*

Dimostrazione. Procedo per induzione sul numero di lati (a meno di inverso) del grafo. Se il grafo ha un solo lato o non ha lati, l'iniettività locale è banalmente soddisfatta. Consideriamo ora un grafo con n lati. Se f non *folda* alcuna coppia di lati, è già un'immersione per il lemma 2.2.1. Se invece f *folda* due lati e_1 ed e_2 , considero la proiezione di *folding* $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$ ed applico l'ipotesi di induzione a $\Gamma/[e_1 = e_2]$, che risulta avere $n - 1$ lati. □

Esempio 2.2.1. Considero la seguente mappa di grafi f e la fattorizzo in *folding* e immersione (per semplicità uso la colorazione indotta per indicare la mappa):



2.3 Suriettività del *folding* sui gruppi fondamentali

Proposizione 2.3.1. *Analogamente ai risultati della teoria dei rivestimenti negli spazi topologici, abbiamo che:*

1. *Un cammino in un grafo può sempre essere sollevato ad un rivestimento in maniera unica a meno della scelta di un punto base.*
2. *Un'omotopia di cammini in un grafo può sempre essere sollevata ad un rivestimento.*
3. *Una mappa puntata di grafi $f : (\Theta, v) \longrightarrow (\Delta, u)$ può essere sollevata mantenendo il punto base ad un rivestimento puntato $h : (\Gamma, u') \longrightarrow (\Delta, u)$ se e solo se $f_{\#}(\pi_1(\Theta, v)) \subset h_{\#}(\pi_1(\Gamma, u'))$; in tal caso il sollevamento è unico.*
4. *Dato un grafo Δ connesso, un suo vertice u ed $H \leq \pi_1(\Delta, u)$, esistono unici (a meno di isomorfismo) un grafo connesso Γ ed una proiezione di rivestimento $h : (\Gamma, u') \longrightarrow (\Delta, u)$ tali che $h_{\#}(\pi_1(\Gamma, u')) = H$.*

Teorema 2.3.2. *Consideriamo il seguente diagramma di pushout di grafi connessi:*

$$\begin{array}{ccc}
 (\Gamma, u) & \xrightarrow{f_1} & (\Delta_1, v_1) \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow \phi_1 \\
 (\Delta_2, v_2) & \xrightarrow{\phi_2} & (\Theta, w)
 \end{array}$$

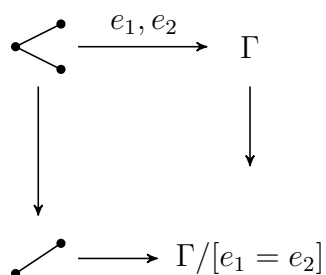
Allora $\pi_1(\Theta, w)$ coincide con il suo sottogruppo H generato da $\phi_{1\#}(\pi_1(\Delta_1, v_1)) \cup \phi_{2\#}(\pi_1(\Delta_2, v_2))$.

Dimostrazione. Sia $\bar{\Theta} \rightarrow \Theta$ il rivestimento di Θ relativo al sottogruppo H (che esiste per il punto 4 della 2.3.1). Per il punto 3 della stessa proposizione, ϕ_1 e ϕ_2 possono essere sollevati al rivestimento $\bar{\Theta}$ con q_1 e q_2 . Allora $q_1 f_1$ e $q_2 f_2$ sono sollevamenti di $\phi_1 f_1 = \phi_2 f_2$, da cui $q_1 f_1 = q_2 f_2$ per l'unicità del sollevamento. A questo punto, usando la proprietà del *pushout*, posso trovare $u : \Theta \rightarrow \bar{\Theta}$ che faccia commutare il diagramma con l'inserimento di $\bar{\Theta}$. Questo sarà l'inverso della proiezione di rivestimento, da cui Θ e $\bar{\Theta}$ sono isomorfi. \square

2.3. SURIETTIVITÀ DEL FOLDING SUI GRUPPI FONDAMENTALI 21

Corollario 2.3.3. *Dato un grafo connesso Γ ed una sua coppia di lati ammissibile e_1, e_2 , la proiezione $p : \Gamma \rightarrow \Gamma/[e_1 = e_2]$ è suriettiva sui gruppi fondamentali.*

Dimostrazione. Costruisco il seguente diagramma di *pushout*:



La prova del corollario è ora un'applicazione del Teorema 2.3.2. □

Capitolo 3

Risultati sui gruppi liberi

3.1 Hopfianità

Il prossimo teorema ci dà un modo per rappresentare un endomorfismo del gruppo libero F_n con una mappa di grafi:

Teorema 3.1.1. *Dato $f : F_n \rightarrow F_n$, esiste un grafo connesso Γ ottenuto da un'opportuna suddivisione della rosa a n petali R_n ed esiste $g : \Gamma \rightarrow R_n$ una mappa di grafi tale che, chiamati $\phi : \pi_1(\Gamma) \rightarrow F_n$ e $\psi : \pi_1(R_n) \rightarrow F_n$ gli isomorfismi canonici, $g_{\#} = \psi^{-1} f \phi$.*

Dimostrazione. Sia $F_n = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$; considero il bouquet di n circonferenze e creo il grafo Γ suddividendo, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, la i -esima circonferenza in un numero di lati pari alla lunghezza della parola $f(a_i)$ scritta nell'alfabeto $\{a_1, \dots, a_n\}$; etichetto il j -esimo lato della i -esima circonferenza di Γ con il j -esimo elemento della parola $f(a_i)$.

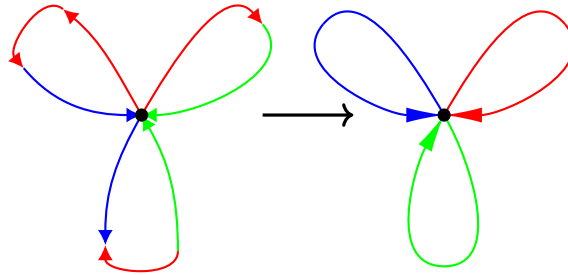
Considero ora un identico bouquet di circonferenze $\Delta = R_n$ e, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, etichetto la i -esima circonferenza con a_i .

Costruisco l'applicazione fra grafi g che mappa ogni lato di Γ nel lato di R_n che ha la stessa etichetta. Per 2.1.4 ho che $g_{\#} = f$. \square

Esempio 3.1.1. Considero l'endomorfismo

$$f : F_3 = \langle a, b, c \rangle \rightarrow F_3$$

tale che $f(a) = b^2 \cdot a$, $f(b) = b \cdot c$ e $f(c) = c^{-1} \cdot b \cdot a^{-1}$. Il morfismo di grafi che cerco è un'applicazione da una suddivisione di un bouquet di tre circonferenze ad un bouquet di tre circonferenze costruita come segue, dove sto utilizzando la colorazione indotta per indicare la mappa di grafia a è di colore rosso, b è di colore blu e c è di colore verde:



È chiaro che il gruppo fondamentale del primo grafo è generato da tre elementi (che chiamiamo sempre a, b, c) che vengono mandati attraverso il morfismo indotto dall'applicazione di grafi negli elementi del gruppo fondamentale del secondo che corrispondono alle immagini attraverso f di a, b e c .

Teorema 3.1.2. *I gruppi liberi sono Hopfiani, ossia ogni endomorfismo suriettivo di un gruppo libero è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Rappresentiamo il gruppo libero $F_k = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ come un bouquet di k circonferenze R_k e l'endomorfismo (che supponiamo suriettivo) come un'applicazione di grafi da un'opportuna suddivisione Γ_0 di R_k a R_k come da 3.1.1. Ora fattorizzo l'applicazione in ripiegamenti $\Gamma_0 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_n$ ed immersione $\Gamma_n \rightarrow R_k$ come da 2.2.5.

Perché l'endomorfismo sia suriettivo, l'immersione dovrà essere suriettiva sui gruppi fondamentali, da cui è a tutti gli effetti un'identità fra bouquet di circonferenze ed induce un isomorfismo di gruppi liberi per 2.1.5. Questo ci dice anche che $rg(\Gamma_n) = k$

Inoltre, poiché $\chi(\Gamma_0) = 1 - rg(\Gamma_0) = 1 - k = 1 - rg(\Gamma_n) = \chi(\Gamma_n)$, il lemma 2.2.4 ci assicura che la caratteristica di Eulero viene mantenuta costante da tutte le mappe di *folding*, che sono risultano iniettive (quindi degli isomorfismi per 2.3.3) sui gruppi fondamentali.

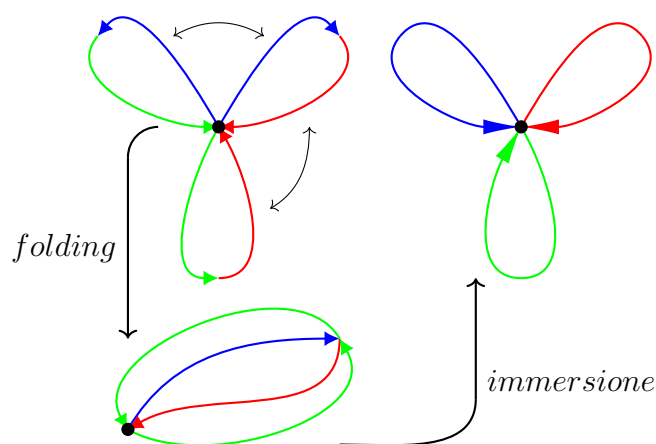
L'endomorfismo risulta quindi un isomorfismo perché è una composizione di isomorfismi. \square

Corollario 3.1.3. *Esiste un algoritmo per controllare se un endomorfismo di gruppi liberi è un isomorfismo.*

Dimostrazione. L'algoritmo consiste nel rappresentare l'endomorfismo con una mappa di grafi $f : \Gamma \rightarrow \Delta$, con $\Delta = R_n$ come da 3.1.1 e *foldare* le coppie ammissibili di lati di Γ che hanno la stessa colorazione indotta da f . Per quanto visto in 3.1.2, se alla fine del procedimento ho un bouquet di circonferenze in cui ogni petalo ha un colore diverso e dove compare ogni colore possibile, allora l'endomorfismo risulta essere un isomorfismo; altrimenti l'endomorfismo non è suriettivo.

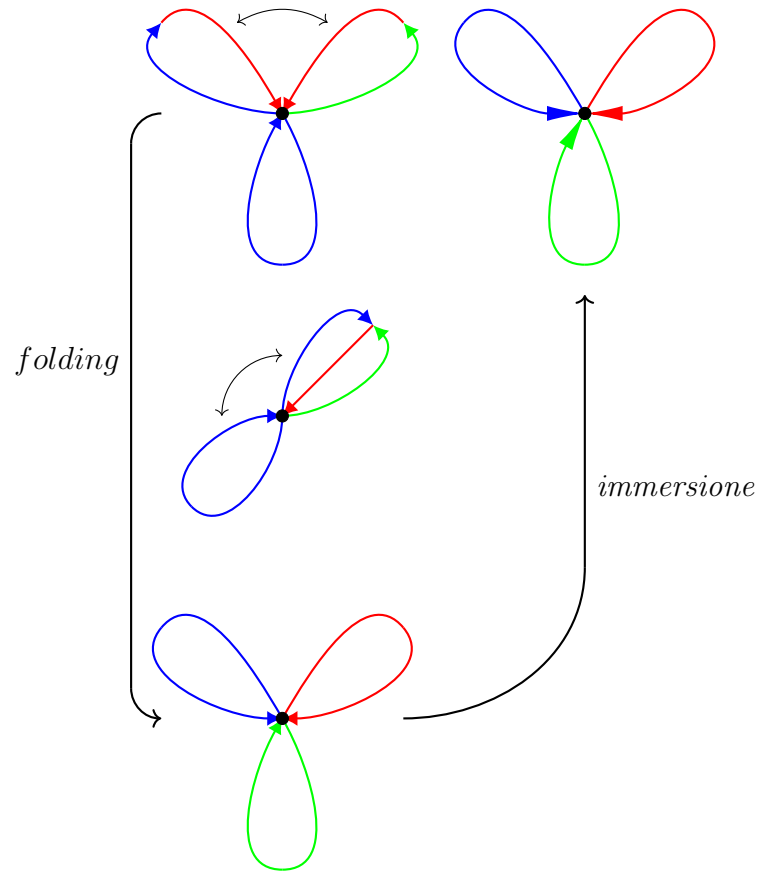
Esempio 3.1.2. Consideriamo due endomorfismi di F_3 e controlliamo se sono isomorfismi.

1. $f : F_3 = \langle a, b, c \rangle \longrightarrow F_3$, con da $f(a) = b \cdot a$, $f(b) = b \cdot c$ e $f(c) = c^{-1} \cdot a^{-1}$.



Il grafo in basso a sinistra non è esattamente quello di arrivo, quindi l'endomorfismo non è un isomorfismo. Infatti, ad esempio, non possiamo trovare un ciclo (basato sul vertice evidenziato) omotopo al cammino blu.

2. $f : F_3 = \langle a, b, c \rangle \rightarrow F_3$, con da $f(a) = a \cdot b$, $f(b) = c \cdot b$ e $f(c) = a$.



In questo caso abbiamo che l'immersione è suriettiva sui gruppi fondamentali, quindi l'endomorfismo è biiettivo.

3.2 Intersezione di gruppi liberi

Troviamo un algoritmo per rappresentare un sottogruppo di un gruppo libero con un'immersione di grafi:

Proposizione 3.2.1. *Siano Δ un grafo, v un suo vertice e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ elementi distinti di $\pi_1(\Delta, v)$ ed $S = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$. Allora esistono un grafo connesso Γ , un suo vertice w ed un'immersione $f : (\Gamma, w) \rightarrow (\Delta, v)$ tali che $f_{\#}(\pi_1(\Gamma, w)) = S$.*

Dimostrazione. Scelgo, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, il cammino ridotto p_i che rappresenta la classe α_i ; chiamo m_i la lunghezza di p_i . Considero ora il grafo $\tilde{\Gamma}$ ottenuto dalla suddivisione del bouquet di n circonferenze attaccate nel vertice \tilde{w} in cui la i -esima circonferenza viene suddivisa in m_i lati.

Sia ora \tilde{f} l'applicazione di grafi che mappa la i -esima circonferenza di $\tilde{\Gamma}$ nel cammino p_i ; per costruzione $S = \tilde{f}_{\#}(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{w}))$.

Per il teorema 2.2.5 posso fattorizzare \tilde{f} nei *folding* $\tilde{\Gamma} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\Gamma}_n =: \Gamma$ e nell'immersione $f : \Gamma \rightarrow \Delta$; essendo ogni immersione suriettiva sui gruppi fondamentali per 2.3.3, preso w immagine lungo i folding di \tilde{w} , avrò che $f_{\#}(\pi_1(\Gamma, w)) = \tilde{f}_{\#}(\pi_1(\tilde{\Gamma}, \tilde{w})) = S$.

□

Teorema 3.2.2. *Consideriamo il seguente diagramma di pullback di grafi, dove f_1 e f_2 sono immersioni:*

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_3, v_3) & \xrightarrow{\phi_1} & (\Gamma_1, v_1) \\ \downarrow \phi_2 & & \downarrow f_1 \\ (\Gamma_2, v_2) & \xrightarrow{f_2} & (\Delta, w) \end{array}$$

Chiamiamo $f_3 = f_1\phi_1 = f_2\phi_2 : \Theta \rightarrow \Delta$ e sia, per ogni $j \in \{1, 2, 3\}$, $S_j = f_{j\#}(\pi_1(\Gamma_j, v_j))$. Allora $S_3 = S_1 \cap S_2$.

Dimostrazione. Poiché $S_3 = f_{1\#}\phi_{1\#}(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = f_{2\#}\phi_{2\#}(\pi_1(\Gamma_3, v_3))$ è chiaro che $S_3 \subset S_1 \cap S_2$.

Viceversa, sia $\alpha \in S_1 \cap S_2$. Considero i cicli ridotti c_1 in Γ_1 e c_2 in Γ_2 tali che $f_1(c_1) \in \alpha$ e $f_2(c_2) \in \alpha$. Per le proposizioni 2.1.1 e 2.1.2, $f_1(c_1)$ e $f_2(c_2)$ sono cicli ridotti omotopi, quindi $f_1(c_1) = f_2(c_2)$.

Vedendo i cicli c_1 e c_2 come le immagini di una circonferenza Θ suddivisa un numero opportuno di volte, per la proprietà del *pullback* esisterà in Γ_3 un ciclo c_3 tale che $\phi_1(c_3) = c_1$ e $\phi_2(c_3) = c_2$, da cui $f_3(c_3) = f_1(c_1) = f_2(c_2)$, quindi $\alpha \in f_{3\#}(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = S_3$. \square

Corollario 3.2.3. *Siano S_1 ed S_2 sottogruppi liberi finitamente generati di un gruppo libero F . Allora $S_1 \cap S_2$ è un gruppo libero finitamente generato.*

Dimostrazione. Rappresento F come il gruppo fondamentale di un grafo Δ che abbia un solo vertice w . Rappresento S_1 ed S_2 con le immersioni rispettivamente $f_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Delta$ e $f_2 : \Gamma_2 \rightarrow \Delta$ come da proposizione (dove Γ_1 e Γ_2 sono connessi).

Costruisco ora il diagramma di *pullback*

$$\begin{array}{ccc} (\Gamma_3, v_3) & \xrightarrow{\phi_1} & (\Gamma_1, v_1) \\ \downarrow \phi_2 & & \downarrow f_1 \\ (\Gamma_2, v_2) & \xrightarrow{f_2} & (\Delta, w) \end{array}$$

Il pullback è costruito nel seguente modo:

- $V(\Gamma_3) = \{(x_1, x_2) \in V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2) \text{ tali che } f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$
- $E(\Gamma_3) = \{(e_1, e_2) \in E(\Gamma_1) \times E(\Gamma_2) \text{ tali che } f_1(e_1) = f_2(e_2)\}$
- $\overline{(e_1, e_2)} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$
- $i(e_1, e_2) = (i(e_1), i(e_2))$
- $\phi_1(e_1, e_2) = e_1$, $\phi_2(e_1, e_2) = e_2$; similmente per ϕ_3

Quindi Γ_3 è un grafo finito e $f_{3\#}(\pi_1(\Gamma_3, v_3)) = S_1 \cap S_2$ per il teorema 3.2.2. Chiamo ora $f_3 = f_1\phi_1 = f_2\phi_2$. Sia x_3 un vertice di Γ_3 e siano $(e_1, e_2), (e'_1, e'_2)$ due lati di $St(\Gamma_3, x_3)$ che hanno la stessa immagine indotta da f_3 . Ho così che $f_1(e_1) = f_1\phi_1(e_1, e_2) = f_3(e_1, e_2) = f_3(e'_1, e'_2) = f_1\phi_1(e'_1, e'_2) = f_1(e'_1)$, da cui, essendo f_1 un'immersione, $e_1 = e'_1$; similmente $e_2 = e'_2$. Questo implica che f_3 è un'immersione, quindi (per 2.1.3) $f_{3\#}$ è un isomorfismo sull'immagine $S_1 \cap S_2$, che è quindi un gruppo libero finitamente generato. \square

Proposizione 3.2.4. *Siano S_1 ed S_2 sottogruppi liberi finitamente generati di un gruppo libero F che hanno intersezione non banale. Allora vale la seguente relazione:*

$$rg(S_1 \cap S_2) - 1 \leq 2(rg(S_1) - 1)(rg(S_2) - 1)$$

Dimostrazione. Utilizzo la stessa costruzione di 3.2.3 e ricordo che da 1.2.2 abbiamo che, per un qualunque grafo connesso Γ , $rg(\pi_1(\Gamma)) = 1 - \chi(\Gamma)$. Sia quindi Γ' la componente connessa di Γ_3 che contiene il vertice v_3 . Naturalmente $f' := f_{3|\Gamma_1}$ è un'immersione e la sua immagine coincide con $S_1 \cap S_2$. Ho così che $rg(S_1 \cap S_2) - 1 = -\chi(\Gamma')$.

Mostro che ϕ_1 è un'immersione, quindi che, preso $v \in V(\Gamma')$, $\delta(v) \leq \delta(\phi_1(v))$. Infatti:

1. preso $e = (e_1, e_2) \in St(v, \Gamma')$, ho che $\phi_1(v) = \phi_1(i(e_1), i(e_2)) = i(e_1)$, quindi $e_1 \in St(\phi_1(v), \Gamma_1)$.
2. presi $e = (e_1, e_2)$, $\tilde{e} = (e_1, \tilde{e}_2)$ (cioè due lati che hanno la stessa immagine lungo ϕ_1) che abbiano vertice iniziale in v , abbiamo che $i(e_2) = i(\tilde{e}_2)$ e che $f_2(e_2) = f_1(e_1) = f_2(\tilde{e}_2)$, da cui $e_2 = \tilde{e}_2$ perché f_2 è un'immersione.

Similmente si ha che ϕ_2 è un'immersione e che $\delta(v) \leq \delta(\phi_2(v))$.

Considero ora il grafo $core(\Gamma')$ come da 1.2.3. Per quanto detto sopra si ha che $\phi_1(\Gamma)$ e $\phi_2(\Gamma)$ sono *core-graph*, da cui $\phi_1(core(\Gamma')) \subseteq core(\Gamma_1)$ e $\phi_2(core(\Gamma')) \subseteq core(\Gamma_2)$ per la massimalità del *core*. Inoltre, per ogni $v \in V(core(\Gamma'))$, avremo che $\delta(v) - 2 \leq (\delta(\phi_1(v)) - 2)(\delta(\phi_2(v)) - 2)$, poiché siamo nel caso $\delta(v) - 2 \geq 0$ e, se a, b, c sono interi non negativi con $a \leq b$ e $a \leq c$, allora $a \leq bc$.

Possiamo ora dire che:

$$\begin{aligned} 2(rg(S_1 \cap S_2) - 1) &= -2\chi(core(\Gamma')) = \sum_{v \in V(core(\Gamma'))} (\delta(v) - 2) |V(core(\Gamma'))| = \\ &= \sum_{v \in V(core(\Gamma'))} (\delta(v) - 2) \leq \sum_{v \in V(core(\Gamma'))} (\delta(\phi_1(v)) - 2)(\delta(\phi_2(v)) - 2) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{v_1 \in V(core(\Gamma_1)) \\ v_2 \in V(core(\Gamma_2))}} (\delta(v_1) - 2)(\delta(v_2) - 2) = (-2\chi(core(\Gamma_1)))(-2\chi(core(\Gamma_2))) = \\ &= 4(rg(S_1) - 1)(rg(S_2) - 1). \end{aligned}$$

□

Bibliografia

- [1] **John R. Stallings**, *Topology of finite graphs*, *Inventiones Mathematicae* 71 (1983), no. 3, 551–565
- [2] **Mladen Bestvina**, *Folding graphs and applications, d'après Stallings*, Fall 2001 Class Notes, updated 2010
- [3] **Sergei Matveev e Michael Polyak**, *Cubic complexes and finite type invariants*, *Geometry & Topology Monographs*, Volume 4: Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), pagine 215–233

Ringraziamenti

Ringrazio (in ordine puramente cronologico):

il professor Stefano Sarti, che, negli anni del liceo, mi ha stimolato ed incoraggiato a seguire quella che si è rivelata essere la mia strada;

il professor Luca Migliorini per avermi fatto conoscere ed amare il mondo della geometria e per l'interessamento che dimostra per il mio futuro;

il professor Stefano Francaviglia per avermi dato fiducia ed avermi corretto ogni volta che sbagliavo (specie per quel che riguarda un paio di maledetti lemmi).

Un ringraziamento speciale va ai miei amici e compagni di corso, sempre disponibili ad aiutarmi passandomi gli appunti delle lezioni a cui non riesco ad assistere per problemi di salute.