

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**MOTO BROWNIANO  
FRAZIONARIO  
E APPLICAZIONI FINANZIARIE**

Tesi di Laurea in Matematica finanziaria

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA PASCUCCI

**Presentata da:**  
DOMENICO SOLURI

Seconda Sessione  
Anno Accademico 2015-2016

*Solo attorno a una donna che ama  
può formarsi una famiglia.*

FRIEDRICH SCHLEGEL



# Introduzione

Il nome moto Browniano deriva dal botanico scozzese Robert Brown (1773-1858) che nel 1827 osservò al microscopio come le particelle di polline in sospensione nell'acqua si muovessero continuamente in modo casuale e imprevedibile.

Nel 1905 fu Einstein a dare un'interpretazione molecolare al fenomeno del movimento osservato da Brown, mostrando come il moto delle particelle fosse descrivibile matematicamente ipotizzando che i salti di queste fossero dovuti agli scontri casuali delle particelle di polline con le molecole dell'acqua.

Il moto Browniano è oggi soprattutto uno strumento matematico nell'ambito della teoria della probabilità. Tale teoria matematica è stata utilizzata per descrivere un insieme sempre più vasto di fenomeni, studiati da discipline anche molto diverse dalla fisica. I prezzi dei titoli finanziari, la diffusione del calore, delle popolazioni di animali, dei batteri, di una malattia, del suono o della luce sono modellate con lo stesso strumento.

Un passo significativo nello studio del moto Browniano fu quello di Bachelier [4]. Egli fu il primo a rendersi conto che era possibile applicare tale teoria allo studio dei mercati finanziari.

Bachelier presuppone che i mercati sono in grado di annullare il rischio finanziario: gli investitori preparano delle previsioni sui futuri movimenti dei titoli partendo dall'assunto secondo cui in un mercato ideale la variazione odierna dei prezzi non sia influenzata dalla variazione dei prezzi rilevata in un giorno precedente, denotando una caratteristica di indipendenza. Qualora nel corso del periodo di investimento, i valori dei titoli dovessero

subire fluttuazioni improvvise, queste sarebbero dovute ai fattori di irrazionalità celermente corrette dal mercato che lima queste imperfezioni e frizioni tra i titoli.

La teoria della efficienza della scuola classica è stata successivamente criticata da diversi matematici ed economisti. Tra questi Mandelbrot [5] e Peters, secondo i quali non esistono investitori omogenei, uguali tra loro nella selezione dei titoli e delle informazioni. Gli investitori ad esempio si differenziano tra investitori cassetisti o speculatori.

Da questa affermazione si potrà comprendere come i mercati finanziari, in particolare il mercato azionario, sia paragonabile ad un ambiente caotico e non lineare o perfetto. I mercati hanno variazioni di prezzo che variano saltando bruscamente creando dei gap ampi in giorni molto volatili.

Altro tema ampiamente dibattuto riguarda la continuità delle distribuzione dei rendimenti dei titoli, che secondo la teoria classica risultano essere casuali. Secondo i risultati conseguiti da Mandelbrot, la presunta relazione di normalità dei rendimenti è da eliminare visto che eventi come la crisi del 1929, il crollo della borsa di Wall Street del 1987 e la grande recessione del 2007 si sarebbero dovuti verificare ogni migliaia di anni cosa che, in realtà, non si è verificata.

Partendo da questo presupposto, Mandelbrot ha affermato che i movimenti dei prezzi non sono indipendenti o Browniani, bensì subiscono l'influenza degli eventi passati, in grado di alterare le quotazioni future dei titoli.

Doveva quindi essere in azione un processo la cui evoluzione era dipendente in qualche misura dagli eventi passati. Questi fenomeni seguono un andamento nel tempo che può essere descritto come un processo stocastico noto come **moto Browniano frazionario** e in genere implicano la presenza di una dipendenza di lungo periodo nelle osservazioni. Un moto Browniano frazionario può presentare degli incrementi normalmente distribuiti, ma non indipendenti (al contrario di un moto Browniano puro).

Mandelbrot, per delineare il fattore di rischio presente sui mercati azionari, dove le quotazioni dei titoli in qualsiasi momento possono variare il loro

trend in maniera caotica, seguendo percorsi discontinui, utilizzò il coefficiente di Hurst che consente di indagare se nelle serie storiche azionarie si possono individuare delle tendenze, oppure se il loro andamento segue un cammino casuale, così come ipotizzato dalla teoria dei mercati efficienti.

Lo scopo di questa tesi è quindi sviluppare tali aspetti del moto Browniano frazionario e spiegare l'uso dei risultati teorici ottenuti nelle applicazioni, soprattutto in ambito finanziario.

Nel capitolo 1 introdurremo la storia del moto Browniano frazionario discutendo il ruolo del parametro di Hurst.

Nel capitolo 2 svilupperemo gli aspetti matematici che caratterizzano tale moto osservandone il diverso comportamento attraverso simulazioni in ambiente Matlab.

Nel capitolo 3 mostreremo l'importanza del moto Browniano frazionario nei mercati finanziari e, basandoci sulla proprietà di non essere una semimartingala, dimostreremo che si può creare una strategia che genera arbitraggio.



# Indice

Introduzione	i
<b>1 Storia Del Moto Browniano Frazionario</b>	<b>1</b>
1.1 L'indice di Hurst . . . . .	1
1.2 Definizione di H . . . . .	3
<b>2 Moto Browniano Frazionario</b>	<b>5</b>
2.1 Processi stocastici . . . . .	5
2.2 Processi auto-similari . . . . .	6
2.3 Processi H-ssi . . . . .	6
2.3.1 Proprietà dei processi H-sssi . . . . .	7
2.4 Moto Browniano . . . . .	9
2.4.1 Proprietà del moto Browniano . . . . .	10
2.5 Moto Browniano Frazionario . . . . .	11
2.5.1 Caratterizzazioni del moto Browniano frazionario . . . . .	11
2.6 Rumore Gaussiano frazionario . . . . .	12
2.6.1 Osservazioni e applicazioni . . . . .	13
<b>3 Il moto Browniano nei mercati finanziari</b>	<b>17</b>
3.1 Ipotesi di random walk e martingala . . . . .	17
3.1.1 Ipotesi di <i>random walk</i> . . . . .	17
3.1.2 Ipotesi di <i>martingala</i> . . . . .	20
3.2 Martingala e mercato efficiente . . . . .	21



---

3.3	Modello di Black - Scholes . . . . .	24
3.3.1	Strategie autofinanzianti . . . . .	26
3.4	Moto Browniano frazionario geometrico . . . . .	27
3.4.1	Applicazioni finanziarie . . . . .	31
	<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>

# Capitolo 1

## Storia Del Moto Browniano Frazionario

### 1.1 L'indice di Hurst

Per il moto Browniano frazionario molto importante risulta l'apporto dell'idrologo Hurst. Egli lavorando ai progetti di dighe sul Nilo dal 1907 all'inizio degli anni 50 ed occupandosi del controllo delle riserve idriche, concluse che una riserva ideale non dovrebbe mai straripare ed una politica di rilascio idrico dovrebbe essere formulata in modo da soddisfare i bisogni idrici a valle senza svuotare completamente la riserva.

Nel tentativo di definire un modello matematico in grado di simulare il problema reale, Hurst ipotizza che la parte incontrollabile del sistema (l'afflusso di acqua nel bacino) segua un cammino casuale. Se l'ipotesi di cammino casuale risulta verificata, il range di fluttuazione dovrebbe crescere in proporzione alla radice quadrata dell'intervallo temporale di misurazione  $T$ . Le analisi empiriche svolte da Hurst sulle piene del Nilo contraddicono, però, tale ipotesi di casualità e queste lo spinsero a svolgere studi analoghi su altri sistemi naturali, dove nota che gran parte di essi non seguono un vero e proprio cammino casuale, ma un cammino casuale persistente. Queste considerazioni, riportate nelle esigenze pratiche di Hurst, sostanzialmente

implicano che, dopo un incremento del livello della riserva, è più probabile registrare un ulteriore incremento piuttosto che un suo decremento. Ad un certo punto questa tendenza termina, cioè avviene una brusca inversione del trend e diventa più probabile osservare un decremento del livello seguito da un ulteriore decremento. Se il sistema coincidesse con un cammino casuale il valore dell'esponente  $H$  sarebbe 0.5 ma, effettuando l'analisi su svariati fenomeni naturali, Hurst ottiene sempre valori di  $H$  assai superiori: ad esempio, per le variazioni logaritmiche del livello idrico del Nilo, Hurst calcola empiricamente un valore di  $H$  pari a circa 0.7 .

Questo sta a significare che la distanza coperta dal sistema è assai maggiore di quella predetta dal modello *Random Walk*: il sistema risulta caratterizzato da un effetto memoria per il quale ogni osservazione influenzata da quelle passate influenzerà quelle future.

Si osservano diverse situazioni al variare di  $H$ :

- per  $H = 1/2$  si denotano una serie di eventi indipendenti: ogni variazione non è influenzata dalle precedenti e neppure influenzerà quelle future;
- per  $H \in (0, 1/2)$  la serie è antipersistente. Ossia se in un dato periodo il sistema ha subito un incremento (decremento) è più probabile registrare un successivo decremento (incremento) che un ulteriore incremento (decremento). La serie risulta più volatile di una serie casuale (poichè caratterizzata da più frequenti inversioni) tanto più il valore di  $H$  si avvicina a zero;
- per  $H \in (1/2, 1)$  si ha una serie persistente, caratterizzata da una dipendenza positiva tra le variazioni generate dal processo: se nell'ultima osservazione abbiamo registrato un incremento (decremento) è più probabile che l'osservazione successiva registri un ulteriore incremento (decremento). La probabilità di registrare due variazioni di segno concorde risulta tanto più alta quando  $H$  si avvicina ad uno.

Il moto Browniano classico non si presta bene a descrivere fenomeni in cui si verificano questi casi di dipendenza. Questi fenomeni seguono un andamento che può essere descritto come un particolare processo stocastico definito *moto Browniano frazionario*.

## 1.2 Definizione di H

Si supponga  $x_1, \dots, x_n$  rappresentino i valori dell'acqua defluita dalla riserva al  $k$ -esimo anno, in  $n$  anni successivi.

Si considera  $\sum_{k=1}^n x_k$  la totalità di acqua defluita in  $n$  anni.

Pongo  $X_k = \sum_{k=1}^n x_k$ , e considero la quantità

$$X_k - \frac{k}{n} X_n$$

cioè la deviazione del valore  $X_k$  dalla rispettiva media calcolata su osservazioni raccolte in  $n$  anni.

Il range della deviazione è

$$R_n := \max_{1 \leq k \leq n} (X_k - \frac{k}{n} X_n) - \min_{1 \leq k \leq n} (X_k - \frac{k}{n} X_n)$$

Comunque, Hurst non operò con i valori di  $R_n$ ; lui considerò invece i valori normalizzati  $Q_n = R_n/S_n$ , dove

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right)^2}$$

Hurst scoprì che la quantità calcolata  $R_n/S_n$  si comportava come  $cn^H$  dove  $c$  è una costante e il parametro  $H$ , che è ora chiamato *parametro di Hurst*, è approssimativamente uguale a  $H = 0.7$ .

Passando al logaritmo la formula può essere riscritta come

$$\log R_n/S_n = \log c + H \log n$$

Perciò una buona stima di H è data dall'espressione

$$H \approx \frac{\log R_n/S_n}{\log n}$$



# Capitolo 2

## Moto Browniano Frazionario

In questi capitolo daremo le definizioni relative ai processi stocastici, ai processi auto-similari ed in particolare al moto Browniano frazionario, sviluppando le sue caratteristiche e le principali proprietà.

### 2.1 Processi stocastici

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  uno spazio di probabilità e sia  $I = [0, \infty)$ .

**Definizione 2.1.** Si definisce un **processo stocastico** a valori reali, una famiglia  $\{X_t\}_{t \in I}$  di variabili aleatorie reali definite su  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ :

$$X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad t \in I$$

**Definizione 2.2.** Una famiglia crescente  $\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$  di sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{F}$  è detta **filtrazione** in  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Definizione 2.3.** Un processo stocastico  $X$  è **adattato** alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$  (o semplicemente  $\mathcal{F}_t$ -*adattato*) se  $X_t$  è  $\mathcal{F}_t$ -*misurabile* per ogni  $t$ .

**Definizione 2.4.** Diremo che un processo stocastico  $X$  è un processo **sommabile** se  $X_t \in L^1(\Omega, P)$  per ogni  $t$ .

In particolare se

$$\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \text{ per ogni } t.$$

.

## 2.2 Processi auto-similari

**Definizione 2.5.** Diciamo che un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è **auto-similare**, e si indica con **H-ss**, se per ogni  $a > 0$ , esiste  $b > 0$  tale che:

$$\text{Legge}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Legge}(bX_t, t \geq 0)$$

In altre parole un processo è auto-similare se si presenta un'invarianza dei comportamenti rispetto alla scala utilizzata per descrivere il fenomeno: il cambiamento della scala dei tempi ( $t \rightarrow at$ ) produce gli stessi risultati dei cambiamenti della scala di fase ( $x \rightarrow bx$ )

**Definizione 2.6.** Se  $b = a^H$ , cioè se vale che

$$\text{Legge}(X_{at}, t \geq 0) = \text{Legge}(a^H X_t, t \geq 0)$$

si dice che  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è un *processo auto-similare* con indice di Hurst  $H$ .

**Definizione 2.7.** Un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è detto un processo ad **incrementi stazionari**, e si indica con **si**, se per ogni  $h \geq 0$  vale:

$$\text{Legge}(X_{t+h} - X_h, t \geq 0) = \text{Legge}(X_t - X_0, t \geq 0) = \text{Legge}(X_t, t \geq 0)$$

## 2.3 Processi H-ssi

**Definizione 2.8.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  uno spazio di probabilità con filtrazione. Un processo stocastico  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  adattato alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$  è detto **H-ssi** se è auto-similare, con indice di Hurst  $H$ , ed ha incrementi stazionari.

### 2.3.1 Proprietà dei processi H-sssi

Sia  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un processo **H-ssi** a varianza finita; allora valgono le seguenti proprietà:

1.  $X_0 = 0$  quasi sicuramente:  
cioè il processo inizia da un punto che può essere considerato l'origine.

per ogni  $a > 0$  si ha:

$$\text{Legge}(X_0, t \geq 0) = \text{Legge}(X_{a0}, t \geq 0) = \text{Legge}(a^H X_0, t \geq 0)$$

2. Se  $H \neq 1$ , allora per ogni  $t \geq 0$  si ha:

$$\mathbb{E}(X_t) = 0$$

.

Dato che vale:

$$\mathbb{E}_{2t} = 2^H \mathbb{E}(X_t)$$

dalla stazionarietà degli incrementi e dalla proprietà 1 si ha:

$$2^H \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_{2t}) = \mathbb{E}(X_{2t} - X_t) + \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_t - X_0) + \mathbb{E}(X_t) = 2\mathbb{E}(X_t) \iff \mathbb{E}(X_t) = 0$$

3. si ha:

$$\text{Legge}(X_{-t}, t \geq 0) = \text{Legge}(-X_t, t \geq 0)$$

che segue dalla proprietà 1 e dalla stazionarietà degli incrementi data da:



$$\begin{aligned} \text{Legge}(X_{-t}, t \geq 0) &= \text{Legge}(X_{-t} - X_0, t \geq 0) = \\ &= \text{Legge}(X_0 - X_t, t \geq 0) = \text{Legge}(-X_t, t \geq 0) \end{aligned}$$

4. La varianza: sia  $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1)^2$  allora:

$$\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(X_{|t|\text{sign}(t)}^2) = |t|^{2H} \mathbb{E}(X_{\text{sign}(t)}^2) = |t|^{2H} \mathbb{E}(X_1^2) = |t|^{2H} \sigma^2$$

In particolare

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}((X_{t-s})^2) = |t - s|^{2H} \sigma^2$$

Il processo  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è detto standard se  $\sigma^2 = 1$ .

5. la funzione di autocovarianza:

$$\Gamma_{s,t}^H = \frac{\sigma^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

segue dalla proprietà 4 e dalla stazionarietà degli incrementi:

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = \frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}((X_t - X_s)^2))$$

6. se  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è un processo **H-sssi**, allora  $H \leq 1$ .

Il vincolo dell'esponente di Hurst deriva dalla richiesta di stazionarietà degli incrementi:

$$2^H \mathbb{E}|X_1| = \mathbb{E}|X_2| = \mathbb{E}|X_2 - X_1 + X_1| \leq \mathbb{E}|X_2 - X_1| + \mathbb{E}|X_1| = 2\mathbb{E}|X_1|$$

allora si ha:

$$2^H \leq 2 \iff H \leq 1$$

## 2.4 Moto Browniano

**Definizione 2.9.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  uno spazio di probabilità con filtrazione. Un **moto Browniano reale** è un processo stocastico  $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$  in  $\mathbb{R}$  tale che:

1.  $P(B_0 = 0) = 1$ ;
2.  $B$  è  $\mathcal{F}_t$ -adattato e continuo;
3. per  $t > s \geq 0$ , l'incremento  $B_t - B_s$  ha distribuzione normale  $\mathcal{N}_{0, t-s}$  ed è indipendente da  $\mathcal{F}_s$ .

Intuitivamente si può pensare al moto incessante di una particella immersa in un liquido omogeneo, provocato dai continui urti con le molecole di quest'ultimo. In questo esempio le  $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$  indicano lo spostamento della particella nell'intervallo di tempo  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Il moto è del tutto casuale; le varie posizioni assunte dalla particella in intervalli di tempo successivo dipendono dalla posizione subito precedente ma anche da un fattore, casuale, rappresentato dagli urti con le molecole.

### 2.4.1 Proprietà del moto Browniano

Sia  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  un moto Browniano reale di punto iniziale l'origine, si mostrano le relative proprietà:

- Le traiettorie partono per  $t = 0$ , quasi sicuramente, dall'origine e sono continue.
- Per ogni  $t \geq 0$  si ha:

$$B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$$

infatti dalla definizione precedente si ha:

$$B_t = B_t - B_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$$

- $B_t$  ha incrementi indipendenti nel senso che le variabili aleatorie  $B_{t_2} - B_{t_1}$  e  $B_{t_4} - B_{t_3}$  sono indipendenti per ogni  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ .
- Il moto Browniano è un processo auto-similare con esponente di Hurst  $H = \frac{1}{2}$ ; infatti per ogni  $t > 0$  si ha:

$$a^{\frac{1}{2}} B_t \sim \mathcal{N}(0, at)$$

ovvero

$$\text{Legge}(B_{at}, t \geq 0) = \text{Legge}(a^{\frac{1}{2}} B_t, t \geq 0)$$

## 2.5 Moto Browniano Frazionario

**Definizione 2.10.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  uno spazio di probabilità con filtrazione ed  $I \subseteq \mathbb{R}$ ; un processo stocastico normale  $B^H = \{B_t^H\}_{t \in I}$ , **H-sssi**, con  $0 < H < 1$ , adattato alla filtrazione  $\mathcal{F}_t$ , è detto **moto Browniano frazionario**.

$B^H$  è detto standard se  $\sigma^2 = \mathbb{E}(B_1^H) = 1$

### 2.5.1 Caratterizzazioni del moto Browniano frazionario

**Proposizione 2.5.1.** Sia  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un processo stocastico definito sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  che verifica le seguenti proprietà:

- $P(X_0 = 0) = 1$ ;
- $X$  è  $\mathcal{F}_t$  adattato;
- per ogni  $t > 0$  allora:

$$X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 |t|^{2H})$$

per qualche  $\sigma > 0$  e  $0 < H < 1$ ;

- $X_t$  è un processo ad incrementi stazionari;

allora  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  è il **moto Browniano frazionario**.

*Osservazione 1.* Sia  $B^H = \{B_t^H\}_{t \in I}$ ,  $0 < H < 1$ , un moto Browniano frazionario standard. Vale:

- $B^H$  è un processo auto-similare con indice di Hurst  $H$ . Infatti

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B_{as}^H B_{at}^H) &= \frac{1}{2}((at)^{2H} + (as)^{2H} - |at - as|^{2H}) = \frac{1}{2}a^{2H}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) = \\ &= a^{2H}\mathbb{E}(B_s^H B_t^H) = \mathbb{E}((a^H B_s^H)(a^H B_t^H))\end{aligned}$$

Allora siccome la funzione di autocovarianza è omogenea di ordine  $2H$ ,

$$Legge(B_{at}^H) = Legge(a^H B_t^H)$$

- per  $H = \frac{1}{2}$ ,  $B^{\frac{1}{2}}$  è l'usuale moto Browniano standard, con funzione di autocovarianza

$$\Gamma_{s,t}^{\frac{1}{2}} = (|t| + |s| - |t - s|) = \min(|s|, |t|)$$

## 2.6 Rumore Gaussiano frazionario

In molti campi della teoria della probabilità applicata un moto Browniano  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  è considerato un modo semplice per ottenere un *rumore bianco*. Consideriamo

$$h_t = B_t - B_{t-1}, \quad t \geq 1$$

otteniamo una sequenza  $h = (h_t)_{t \geq 1}$  di indipendenti identicamente distribuite variabili Gaussiane casuali con  $\mathbb{E}(h_t) = 0$  e  $\mathbb{E}(h_t^2) = 1$ .

Chiamiamo tale sequenza **rumore bianco gaussiano**.

Un moto Browniano frazionario  $B^H$  è utile per la costruzione di sequenze Gaussianhe stazionarie con forti effetti collaterali (sistemi con dipendenza di lunga portata), e sequenze con intermittenza, (fenomeni di turbolenza), mettendo in evidenza le similitudini tra tali modelli e il comportamento dei prezzi dei mercati azionari.

Similmente, consideriamo

$$h_t = B_t^H - B_{t-1}^H \quad t \geq 1$$

e chiameremo la sequenza  $h = (h_t)_{t \geq 1}$  *rumore Gaussiano frazionario con parametro di Hurst*, con  $0 < H < 1$ .

La funzione di autocovarianza del processo  $h_t$  vale:

$$\Gamma_t^H = \mathbb{E}(h_k h_{k+t}) = \frac{1}{2}(|t+1|^{2H} - 2|t|^{2H} + |t-1|^{2H})$$

da cui:

$$\Gamma_t^H \sim H(2H-1)|t|^{2H-2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

### 2.6.1 Osservazioni e applicazioni

Analizziamo il processo per i diversi valori di  $H$ :

- $H = \frac{1}{2}$

Se  $H = \frac{1}{2}$ , allora  $\Gamma_t^H = 0$  per  $t \neq 0$  e il processo  $h = (h_t)_{t \geq 1}$  è un processo normale identicamente indipendente, cioè un processo puramente casuale o **white noise**.

- $\frac{1}{2} < H < 1$

Se  $\frac{1}{2} < H < 1$ , allora  $\Gamma_t^H > 0$  e tende a zero per  $t \rightarrow \infty$  così lentamente (come  $|t|^{-(2-2H)}$ ) che la serie  $\sum_{t=1}^{\infty} \Gamma_t^H$  diverge (*serie persistente*).

Il corrispondente rumore  $h = h_t$  è spesso detto **black noise**.

Una positiva covarianza significa che positivi (negativi) valori di  $h_t$  sono seguiti da positivi (rispettivamente, negativi) valori, così il rumore Gaussiano frazionario con  $\frac{1}{2} < H < 1$  può essere un utile modello nella descrizione dei fenomeni caratterizzati da *forti effetti collaterali con dipendenza di lunga portata*. Fenomeni di questo tipo sono riscontrati nel comportamento dei livelli dei fiumi, o dell'attività solare e, in particolare, nell'analisi dei rendimenti  $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t_1}}$  per **titoli azionari** e molti altri indici finanziari  $S = (S_t)$ .

- $0 < H < \frac{1}{2}$   
Se  $0 < H < \frac{1}{2}$ , allora  $\Gamma_t^H < 0$  per  $t \neq 0$  e la serie  $\sum_{t=1}^{\infty} \Gamma_t^H$  converge (*serie antipersistente*).

Il corrispondente rumore  $h = h_t$  è spesso detto **pink noise**.

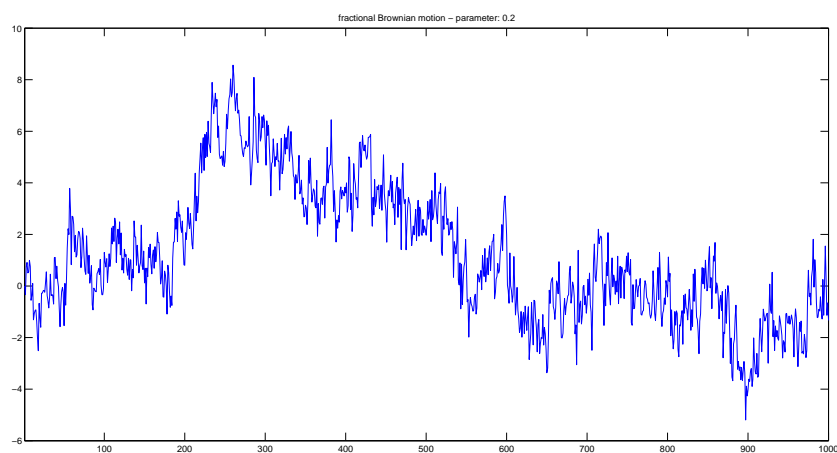
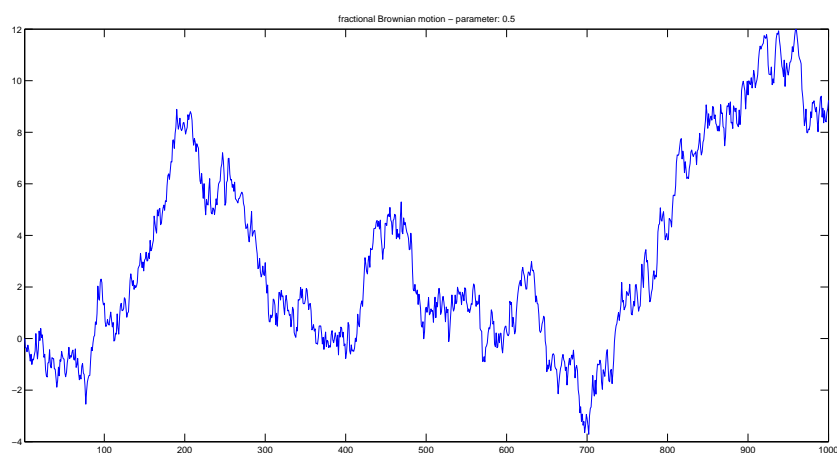
Una negativa covarianza significa che positivi (negativi) valori di  $h_t$  sono di solito seguiti da negativi (rispettivamente, positivi) valori. Tipici esempi di sistemi con tali valori di  $H$ , sono dotati di **turbolenza**. Tale alternanza ('up and down and up...') è infatti relativa all'analisi del comportamento delle **volatilità**.

Un esempio di 'turbolenza finanziaria', con parametro di Hurst  $0 < H < \frac{1}{2}$ , è dimostrato dalla sequenza  $\hat{r} = (\hat{r}_t)$  con  $\hat{r}_t = \ln \frac{\hat{\sigma}_t}{\hat{\sigma}_{t_1}}$ , dove

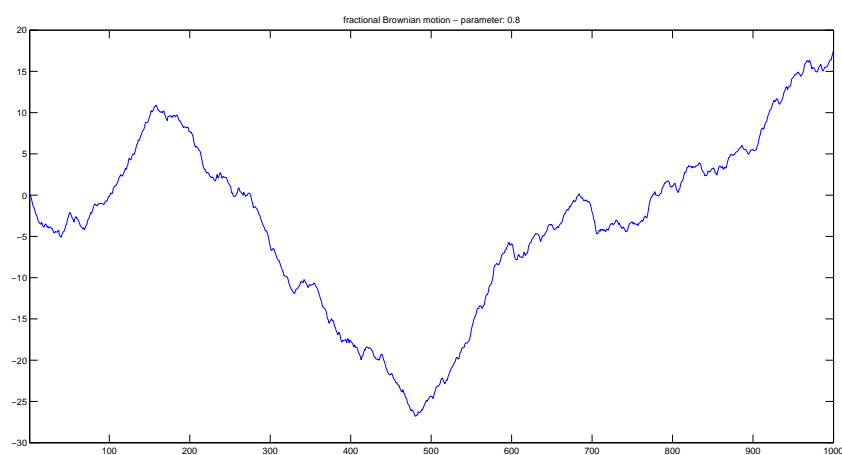
$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{k=1}^t (h_k - \bar{h}_t)^2$$

è l'empirica varianza (volatilità) della sequenza dei rendimenti logaritmici  $h = (h_t)$ , con  $\bar{h}_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t h_k$  e  $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t_1}}$ , calcolata per titoli azionari, l'indice Dow Jones, S&P500, etc.

Di seguito possiamo osservare delle simulazioni di un moto Browniano frazionario per i diversi valori di  $H$ .

Figura 2.1: Moto Browniano Frazionario per  $H=0.2$ Figura 2.2: Moto Browniano Frazionario per  $H=0.5$ 

I continui movimenti delle traiettorie rappresentano l'acquisto e la vendita di un'azione.

Figura 2.3: Moto Browniano Frazionario per  $H=0.8$





# Capitolo 3

## Il moto Browniano nei mercati finanziari

In diversi studi effettuati nel 1930 sull'analisi empirica di varie caratteristiche finanziarie si cercò di rispondere alle domande: è possibile prevedere l'evoluzione dei mercati azionari?

Come dei processi stocastici possono essere usati per descrivere il comportamento e il valore dei prezzi?

### 3.1 Ipotesi di random walk e martingala

#### 3.1.1 Ipotesi di *random walk*

Nella nostra descrizione delle dinamiche dei prezzi e dei derivati finanziari considereremo mercati senza opportunità di arbitraggio.

Matematicamente, questa trasparente ipotesi economica significa che esiste una cosiddetta **martingala** (neutrale al rischio) misura di probabilità tale che i prezzi (scontati) sono delle martingala rispetto a tale misura.

Consideriamo gli incrementi  $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$  logaritmici dei prezzi  $S_t$ ,  $t \geq 1$  e la sequenza  $(H_t)_{t \geq 1}$ , dove  $H_t = h_1 + \dots + h_t$

Sotto tale ipotesi si arrivò alla conclusione che gli incrementi  $h_t$  devono essere indipendenti e che la sequenza  $H_t$  aveva la natura di una *random walk* (cioè, somma di indipendenti variabili casuali), in contraddizione con la precedente idea che i prezzi avevano una natura ciclica e ritmica. Non c'erano infatti importanti ricerche in questo campo fino a quando nel 1953, M. Kendall pubblicò [3], che aprì l'era moderna nella ricerca dell'evoluzione degli indicatori finanziari.

Il punto iniziale dell'analisi di Kendall era l'intenzione di rilevare periodicità nel comportamento dei prezzi di azioni. Analizzando diversi dati, scoprì che non vi erano trend o cicli. In altre parole, i logaritmi dei prezzi  $S = (S_t)$  si comportavano come una *random walk*:

scelto  $h_t = \ln \frac{S_t}{S_{t_1}}$  dimostrò che

$$S_t = S_0 e^{H_t}, \quad t \geq 1$$

dove  $H_t$  è la somma di indipendenti variabili casuali  $h_1, \dots, h_t$ .

Il primo autore a presentare l'idea di usare una random walk per per descrivere l'evoluzione dei prezzi fu L. Bachelier in [4]. Egli ipotizzò che i prezzi  $S^{(\Delta)} = (S_{k\Delta}^{(\Delta)})$  cambiassero i loro valori a istanti  $\Delta, 2\Delta, \dots$  così che

$$S_{k\Delta}^{(\Delta)} = S_0 + \xi_{\Delta} + \xi_{2\Delta} + \dots + \xi_{k\Delta}$$

dove  $(\xi_{i\Delta})$  sono indipendenti identicamente distribuite variabili casuali che prendono i valori  $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$  con probabilità  $\frac{1}{2}$ .

Quindi

$$\mathbb{E}(S_{k\Delta}^{(\Delta)}) = S_0, \quad \text{Var}(S_{k\Delta}^{(\Delta)}) = \sigma^2 k\Delta$$

Definendo  $k = \frac{t}{\Delta}$ ,  $t > 0$ , e passando formalmente al limite, L. Bachelier scoprì che il processo  $S = (S_t)_{t \geq 0}$ , dove  $S_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{k\Delta}^{(\Delta)}$  (interpretando qui il limite in un certo senso probabilistico), ha la seguente forma:

$$S_t = S_0 + \sigma W_t$$

dove  $W = (W_t)$  (con  $W_0 = 0$ ,  $\mathbb{E}(W_t) = 0$ ,  $\mathbb{E}(W_t^2) = t$ ) era un processo che è ora chiamato **moto Browniano standard** o *processo di Wiener*: un processo con indipendenti incrementi Gaussiani (normali) e continue traiettorie.

In seguito F.M. Osborne in [6] e P.Samuelson in [7] basandosi sugli studi di Bachelier e dell'ipotesi di random walk, arrivarono alla conclusione che erano i logaritmi dei prezzi  $S_t$  a variare secondo la legge di un moto Browniano (con *drift*), non i prezzi stessi. Quindi introdussero nella teoria finanziaria un **moto Browniano geometrico**

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

dove  $W = (W_t)$  è un moto Browniano standard.

Questa ipotesi ha dato origine al concetto di *mercato efficiente*, la cui iniziale destinazione era dimostrare argomenti in favore dell'uso di concetti probabilistici e, in questo contesto, di dimostrare la plausibilità dell'*ipotesi di random walk* e dell'*ipotesi di martingala*.

### 3.1.2 Ipotesi di *martingala*

Perchè l'ipotesi della proprietà martingala, che generalizza la random walk, è inerente con il concetto di mercato efficiente? La miglior spiegazione può essere data nel contesto della *teoria di mercato libero da arbitraggio*, che associa l'efficienza di un mercato con l'assenza di opportunità di arbitraggio.

Sia  $S = (S_t)_{t \geq 1}$ , dove  $S_t$  è il prezzo di un'azione all'istante  $t$ .

Sia

$$\rho_t = \frac{\Delta S_t}{S_{t-1}}, \quad t \geq 1$$

(qui  $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$ ) la relativa variazione dei prezzi (*il tasso di interesse*) e assumiamo che il mercato è organizzato in modo tale che, rispetto alla filtrazione (flusso di informazioni)  $(\mathcal{F}_t)$  di dati accessibili, le variabili  $S_t$  siano  $(\mathcal{F}_t)$ -misurabili e (quasi certamente in probabilità)

$$\mathbb{E}(\rho_t | \mathcal{F}_{t-1}) = r$$

per qualche costante  $r$ .

Consideriamo le ultime due formule

$$S_t = (1 + \rho_t)S_{t-1}$$

e (assumendo che  $1 + r \neq 0$ )

$$S_{t-1} = \frac{\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_{t-1})}{1 + r}$$

e prendiamo un *conto bancario*  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  tale che

$$\Delta B_t = rB_{t-1}, \quad t \geq 1$$

dove  $r$  è il *tasso di interesse* del conto e  $B_0 > 0$ .

Osserviamo che

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_t}{B_t} \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = \frac{S_{t-1}}{B_{t-1}}$$

Questo significa precisamente che la sequenza  $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)_{t \geq 1}$  è una **martingala** rispetto alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 1}$ .

L'assunzione  $\mathbb{E}(\rho_t | \mathcal{F}_{t-1}) = r$  (P-quasi certamente) sembra essere abbastanza neutrale dal punto di vista economico: altrimenti (per esempio, se  $\mathbb{E}(\rho_t | \mathcal{F}_{t-1}) > r$  (P-quasi certamente) o  $\mathbb{E}(\rho_t | \mathcal{F}_{t-1}) < r$  (P-quasi certamente) per  $t \geq 1$ ) gli investitori scopriranno subito che è più redditizio restringere i loro investimenti sul titolo (nel primo caso) o sul conto bancario (nel secondo caso).

## 3.2 Martingala e mercato efficiente

L'idea centrale del concetto del mercato efficiente è l'assunzione che i prezzi istantaneamente assimilano nuovi dati e sono sempre impostati in modo tale da non dare opportunità di 'acquistare a buon mercato e vendere immediatamente ad un prezzo più alto', cioè non ci sono opportunità di **arbitraggio**. L'idea di un mercato 'giusto' porta a prezzi di mercato descritti dalle **martingale** (rispetto ad una misura equivalente rispetto a quella iniziale).

**Definizione 3.1.** Sia  $X$  un processo stocastico sommabile e adattato sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ .

Diremo che  $X$  è una **martingala** rispetto alla filtrazione  $(\mathcal{F}_t)$  e alla misura  $P$  se

$$X_s = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s), \quad \text{per ogni } 0 \leq s \leq t;$$

Quindi, possiamo dire che la nostra ipotesi di martingala per i prezzi  $(X_t)$  corrisponde all'assunzione (economicamente concepibile) che, in un mercato ben organizzato, la migliore proiezione dei prezzi di 'domani' può essere fatta sulla base dell'informazione di 'oggi' sull'attuale livello dei prezzi.

Esempi di modelli più diffusi di mercati efficienti senza opportunità di arbitraggio sono il *modello di Bachelier*, basato su un moto Browniano lineare, e il *modello di Black-Scholes* basato su un moto Browniano geometrico.

Il prossimo risultato mostra alcuni notevoli esempi di martingale che possono essere costruite usando un moto Browniano.

**Proposizione 3.2.1.** *Se  $W$  è un moto Browniano su  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  e  $\sigma \in \mathbb{R}$ , allora*

1.  $W_t$ ;
2.  $W_t^2 - t$ ;
3.  $\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$

*sono continue  $\mathcal{F}_t$ -martingale.*

*Dimostrazione:*

- 1) Dalla diseguaglianza di Hölder:

$$\mathbb{E}(|W_t|)^2 \leq \mathbb{E}(W_t^2) = t$$

e quindi  $W$  è sommabile. Inoltre, per  $0 \leq s \leq t$  abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) = \\ & \text{(poichè } W_t - W_s \text{ è indipendente da } \mathcal{F}_s \text{ e } W_s \text{ è } \mathcal{F}_s \text{- misurabile)} \\ &= \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s.\end{aligned}$$

2)  $M_t = W_t^2 - t$  è sommabile e adattato.

Inoltre, per  $s < t$  abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s + W_s)^2 - t|\mathcal{F}_s) = \\ & \mathbb{E}((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2(W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s^2 - t|\mathcal{F}_s) = \\ & \text{(poichè } (W_t - W_s)^2 \text{ è indipendente da } \mathcal{F}_s \text{ e } W_s^2 \text{ è } \mathcal{F}_s \text{- misurabile)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \mathbb{E}((W_t - W_s)^2) + 2W_s\mathbb{E}((W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) + W_s^2 - t = \\ &= t - s + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s^2 - t = W_s^2 - s = M_s\end{aligned}$$

3)  $M_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$  è sommabile e adattato.

Inoltre, per  $s < t$  abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)|\mathcal{F}_s) = \exp(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t)\mathbb{E}(\exp(\sigma(W_t - W_s))|\mathcal{F}_s) = \\ & \text{(poichè } W_t - W_s \text{ è indipendente da } \mathcal{F}_s \text{ e } W_s \text{ è } \mathcal{F}_s \text{- misurabile)} \\ &= \exp(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t)\mathbb{E}(\exp(\sigma(W_t - W_s))) = \exp(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}t)\exp(\frac{\sigma^2}{2}(t - s)) = \\ &= \exp(\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s) = M_s\end{aligned}$$



### 3.3 Modello di Black - Scholes

L'ipotesi essenziale su cui si costruisce il modello di **Black - Scholes** sta nel fatto che i prezzi dei beni finanziari seguano una legge  $S_t$ , dove  $t$  è il tempo secondo il quale la legge si evolve.

Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), P)$  uno spazio di probabilità dove la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_k$  rappresenta l'informazione data dal mercato fino al tempo  $t_k$  in cui avvengono le transazioni.

Nel modello di Black - Scholes il mercato è formato da una coppia (B,S) dove:

- B è un conto bancario o bond (un *non-risky asset*);
- S è il prezzo dell'azione o stock (un *risk asset*).

Assumiamo che

- l'evoluzione de conto bancario sia descritta da un processo stocastico positivo

$$B = (B_n)_{n \geq 0}$$

dove le variabili  $B_n$  sono  $\mathcal{F}_{n-1}$  - misurabili per ogni  $n \geq 1$ .

- l'evoluzione del prezzo dell' $i$ -esima azione  $S^i$  può anche essere descritta da un processo stocastico positivo

$$S^i = (S_n^i)_{n \geq 0}$$

dove le variabili  $S_n$  sono  $\mathcal{F}_n$  - misurabili per ogni  $n \geq 0$ .

Da queste definizioni si può chiaramente vedere la cruciale differenza tra un bond e uno stock. La  $\mathcal{F}_{n-1}$  misurabilità di  $B_n$  significa che lo stato di un conto bancario al tempo  $n$  è già chiaro al tempo  $n - 1$ : le variabile  $B_n$  è *predicibile* (in questo senso).

La situazione con i prezzi delle azioni è completamente differente: le variabili  $S_n^i$  sono  $\mathcal{F}_n$  - misurabili, che significa che il loro attuali valori sono conosciuti solo dopo che si ottengono tutte le ‘informazioni’  $\mathcal{F}_n$  al tempo  $n$ .

Questo spiega perchè diciamo che un conto bancario è ‘risk - free’ mentre le azioni sono ‘risk’ assets.

Inoltre il conto bancario verifica l’equazione

$$dB_t = rB_t dt$$

dove  $r$  è il *tasso di interesse*, assunto essere costante. Quindi il bond segue un’evoluzione deterministica: se fissiamo  $B_0 = 1$ , allora

$$B_t = e^{rt}.$$

Il prezzo dell’azione è un moto Browniano geometrico, che verifica l’equazione

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

la cui soluzione è

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$$

vale a dire che  $S_t$  soddisfa l’equazione integrale

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

dove

- $\mu \in \mathbb{R}$  è il *tasso di rendimento atteso*;
- $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$  è la *volatilità*;
- $(W_t)_{t \in [0, T]}$  è un moto Browniano reale.

### 3.3.1 Strategie autofinanzianti

**Definizione 3.2.** Una strategia (o **portfolio**) è un processo stocastico  $\pi = (\beta, \gamma)$  dove  $\beta = (\beta_n)_{n \geq 0}$  e  $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$  sono tali che le variabili aleatorie  $\beta_n$  e  $\gamma_n$  sono  $\mathcal{F}_{n-1}$  - misurabili per ogni  $n \geq 0$ .

L'assunzione di  $\mathcal{F}_{n-1}$  misurabilità significa che le variabili  $\beta_n$  e  $\gamma_n$ , che descrivono la posizione finanziaria dell'investitore al tempo  $n$ , sono determinabili dalle informazioni disponibili al tempo  $n - 1$  non  $n$ .

**Definizione 3.3.** Il *valore di un portfolio*  $\pi = (\beta, \gamma)$  è un processo stocastico definito da

$$V_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$$

$\beta_t B_t$  rappresenta l'ammontare presente nel conto bancario al tempo  $t$  e  $\gamma_t$  rappresenta il numero di azioni possedute al tempo  $t$ .

**Definizione 3.4.** Una strategia d'investimento  $\pi = (\beta, \gamma)$  è **autofinanziante** (*self-financing*) se

$$dV_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$$

Intuitivamente, questa esprime il fatto che la variazione istantanea del valore del portfolio è causata unicamente dai cambiamenti del tasso di interesse bancario e dal movimento dei prezzi dei titoli, e non da un intervento esterno con cui si è aggiunta o tolta liquidità.

Consideriamo ora il concetto di ammissibilità di una strategia in relazione con l'assenza di arbitraggio nel modello di Black - Scholes. Un *arbitraggio* è una strategia di investimento che richiede un investimento iniziale nullo e che dà la possibilità di ottenere profitti senza sottoporsi a rischi.

**Definizione 3.5.** Un **arbitraggio** è una strategia autofinanziante  $\pi = (\beta, \gamma)$  il cui valore  $V$  è tale che:

- i)*  $V_0 = 0$  quasi sicuramente;  
ed esiste  $t_0 \in ]0, T]$  tale che
- ii)*  $V_{t_0} \geq 0$  quasi sicuramente;
- iii)*  $P(V_{t_0} > 0) > 0$ .

### 3.4 Moto Browniano frazionario geometrico

Arrivati a questo punto è lecito porsi una domanda. Se al posto di un moto Browniano geometrico o lineare considerassimo un moto Browniano frazionario? Potrebbe esistere un mercato con opportunità di arbitraggio? I più semplici di tali modelli sono modelli modificati di Bachelier and Black-Scholes, in cui al posto di un moto Browniano è sostituito un *moto Browniano frazionario* con  $H \in (0, 1/2), \cup(1/2, 1)$

Cutland, Kopp and Willinger in [8] hanno proposto di modellizzare il prezzo di un azione con un processo stocastico

$$S = (S_t)_{t \in [0, T]}, \quad S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t^H}$$

dove  $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ , è un moto Browniano frazionario standard, con  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ , cioè soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^H,$$

e il processo stocastico  $S_t$  è detto *moto Browniano frazionario geometrico*

Osserviamo che l'analogia con il moto Browniano geometrico è solo formale in quanto, come mostrato da L.R.C. Rogers in [9], il moto Browniano frazionario con  $H \in (0, 1/2), \cup(1/2, 1)$  non è una *semimartingala*, cioè  $B^H$  non si può scrivere come somma di una martingala locale e di un processo a

variazione limitata, quindi la corrispondente misura martingala è inesistente e, in generale, non è possibile considerare

$$\int_0^t S_s dB_s^H$$

come integrale stocastico di Itô.

In particolare indicata con  $\Pi = t_k : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  una partizione dell'intervallo  $[0, t]$  e con  $|\Pi| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$  in generale

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} (B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H)$$

non esiste come limite in probabilità. Tuttavia nel caso in cui  $H \in (1/2, 1)$  il moto Browniano frazionario  $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$  è un processo a variazione quadratica nulla.

**Teorema 3.4.1.** *Sia  $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$  un moto Browniano frazionario con  $H \in (1/2, 1)$ , allora per ogni partizione  $\Pi$  di  $[0, t]$  risulta*

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H)^2 = 0$$

*in probabilità.*

*Dimostrazione*

Per la proprietà di autosimilarità si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^n (B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H)^2 \right) &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^{2H} = \\ &= \sum_{k=1}^n |\Pi|^{2H-1} (t_k - t_{k-1}) \left( \frac{t_k - t_{k-1}}{|\Pi|} \right)^{2H-1} \leq \\ &\leq T |\Pi|^{2H-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } |\Pi| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

essendo  $H \in (1/2, 1)$ .

Grazie a questo risultato è possibile dimostrare che per ogni funzione reale  $\phi \in C^1(\mathbb{R})$  è possibile dimostrare che

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} (B_{t_k}^H - B_{t_{k-1}}^H)$$

esiste in probabilità per ogni scelta di  $X_t = \phi(B_t^H)$ .

Dunque enunciamo il seguente

**Teorema 3.4.2.** *Sia  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $Y_0 = 0$ , un processo continuo avente variazione quadratica nulla.*

*Allora per ogni funzione reale  $\phi \in C^1(\mathbb{R})$  e per ogni successione di partizioni  $(\Pi)_{n \in \mathbb{N}}$  di  $[0, t]$  con  $\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} n \rightarrow \infty$ , risulta*

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \phi(Y_{t_{k-1}}) (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) = \int_0^{Y_t} \phi(y) dy \quad (3.1)$$

*in probabilità.*

*Dimostrazione* Sia  $\psi(x) = \int_0^x \phi(y) dy$ . Applicando la formula di Taylor a  $\psi$  abbiamo

$$\begin{aligned} \psi(Y_t) &= \sum_{k=1}^n [\psi(Y_{t_k}) - \psi(Y_{t_{k-1}})] = \\ &= \sum_{k=1}^n \phi(Y_{t_k}) (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \phi'(\xi_k) (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2 \end{aligned}$$

dove  $\xi_k = \theta_k Y_{t_{k-1}} + (1 - \theta_k) Y_{t_k}$  per qualche  $\theta_k \in (0, 1)$ .

Osserviamo che per il secondo addendo dell'uguaglianza precedente vale

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \phi'(\xi_k) (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2 \right| \leq \frac{1}{2} M \sum_{k=1}^n (Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}})^2 \rightarrow 0 \quad \text{per } |\Pi| \rightarrow 0$$

dato che

$$M := \sup_{s \in [0, t]} |\phi'(Y_s)|$$

è una variabile aleatoria finita data la continuità di  $Y$  e  $\phi'$ , e  $Y$  è un processo a variazione quadratica nulla.

Dunque

$$\lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \psi(Y_t) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \phi(Y_{t_k})(Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}) = \int_0^{Y_t} \phi(y) dy$$

*Osservazione 2.* Utilizzando questi teoremi, per ogni  $\phi \in C^1(\mathbb{R})$  e  $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$  continuo e a variazione quadratica nulla, possiamo definire

$$\int_0^t \phi(Y_s) dY_s := \int_0^{Y_t} \phi(y) dy$$

come limite in probabilità di somme di Riemann.

Inoltre, per ogni funzione reale  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ , la (3.1) può essere così riformulata

$$\psi(Y_t) - \psi(Y_s) = \int_s^t \psi'(Y_\tau) dY_\tau, \quad \tau \in (s, t)$$

che possiamo scrivere in notazione differenziale come

$$d\psi(Y_\tau) = \psi'(Y_\tau) dY_\tau. \quad (3.2)$$

Quindi per un moto Browniano frazionario con indice  $H \in (\frac{1}{2}, 1)$  ha senso concordare che

$$(dB_t^H)^2 = 0.$$

### 3.4.1 Applicazioni finanziarie

Consideriamo un mercato finanziario (B,S) frazionario dove sono presenti due tipi di investimenti:

- un titolo non rischioso: un conto bancario di valore  $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ , con un tasso di interesse istantaneo costante  $r$ ;

Tale valore evolve in modo deterministico secondo l'equazione differenziale ordinaria

$$dB_t^H = rB_t dt, \quad B_0^H = 0.$$

- un titolo rischioso: il prezzo di un'azione  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ .

Tale valore non evolve in modo deterministico ma in modo stocastico.

Infatti grazie ai risultati ottenuti possiamo dimostrare che il moto Browniano geometrico  $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$  è soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t^H, \quad X_0 = S_0$$

Tale equazione può essere scritta come

$$dX_t = X_t dY_t$$

dove  $Y_t = \mu t + \sigma B_t^H$  è un processo a variazione quadratica nulla e in accordo con le notazioni precedenti scegliamo  $\psi(Y_t) =: S_t$ .

Dall'osservazione risulta allora che

$$S_t = S_0 e^{Y_t} = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t^H}$$

è soluzione. Infatti abbiamo

$$dS_t = S_0 e^{Y_t} dY_t = S_t dY_t$$



Non essendo il moto Browniano frazionario una semimartingala per  $H \neq 1/2$ , manca una corrispondente (locale) misura martingala: questa è un'indiretta indicazione che potrebbe esistere arbitraggio in un modello di mercato (B,S) frazionario.

Presentiamo ora un esempio, dovuto a Shiryaev [1], di strategia autofinanziante che genera arbitraggio.

**Esempio 3.1.** Consideriamo un (B,S) - market tale che

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1,$$

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t^H), \quad S_0 = 1,$$

dove  $B^H = \{B_t^H\}_{t \geq 0}$  è un moto Browniano frazionario con  $\frac{1}{2} < H < 1$ .

Dai risultati precedenti abbiamo

$$B_t = e^{rt},$$

$$S_t = e^{rt + \sigma B_t^H}.$$

Consideriamo ora la strategia  $\pi = (\beta, \gamma)$  con

$$\beta_t = 1 - e^{2\sigma B_t^H},$$

$$\gamma_t = 2(e^{\sigma B_t^H}).$$

Per questa strategia vale che

$$V_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t = e^{rt} (e^{\sigma B_t^H} - 1)^2$$

Usando la formula (3.2) e ricordando che il moto Browniano frazionario è un processo a variazione quadratica nulla con  $(dB_t^H)^2 = 0$  otteniamo

$$dV_t = r e^{rt} (e^{\sigma B_t^H})^2 dt + 2\sigma e^{rt + \sigma B_t^H} (e^{\sigma B_t^H} - 1) dB_t^H$$

e, utilizzando le equazioni precedenti, è facile vedere che l'espressione sulla destra è uguale a  $\beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$ .

Quindi

$$dV_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$$

che significa che la strategia  $\pi = (\beta, \gamma)$  è autofinanziante.

Poichè per questa strategia abbiamo anche che  $V_0 = 0$  and  $V_t > 0$  per  $t > 0$ , questo modello genera arbitraggio per ogni  $t > 0$ .



# Bibliografia

- [1] A.N. Shiryaev. *Essential of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory.*
- [2] R. Liptser, A.N. Shiryaev. *Theory of Martingales (Mathematics and its Applications).*
- [3] M.G. Kendall. *The analysis of economic time series. Part 1. Prices*".
- [4] L. Bachelier *Théorie de la spéculation.*
- [5] B. Mandelbrot *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence.*
- [6] F.M. Osborne *Brownian Motion in the Stock Market.*
- [7] P.Samuelson *Rational theory of warrant pricing.*
- [8] Cutland, Kopp and Willinger in *Stock price returns and the Joseph effects: A Fractional Version of the Black-Scholes Model.*
- [9] L.R.C. Rogers. *Arbitrage with fractional Browniano motion.*
- [10] A. Monsellato. *Approssimazioni del moto browniano frazionario e mercati con arbitraggio.*
- [11] G.Ghiara. *Approssimazioni del moto browniano frazionario e passeggiate aleatorie.*
- [12] A.Pascucci. *PDE and Martingale Methods in Option Pricing.*
- [13] A.Pascucci. *Calcolo stocastico per la finanza.*

- [14] Lin, S. J. *Stochastic analysis of fractional Brownian motions.*