Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI PLURIDIMENSIONALE

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
André Georges Martinez

Presentata da:
Daniele Teloni

V Sessione
Anno Accademico 2015-2016

A tanti piccoli Uomini,
e a tante piccole Donne...

Introduzione

Fin dall'antichità lo studio di fenomeni fisici ha sempre ispirato lo sviluppo di teorie matematiche e, viceversa, si è sempre cercato di applicare queste ultime per descrivere situazioni rapportabili a un ambito più concreto. Tra gli esempi più ricorrenti c'è l'invenzione del calcolo differenziale da parte di Newton e Leibniz per descrivere in modo formale i concetti intuitivi di velocità e accelerazione. Nel XVIII secolo Leonhard Euler e Joseph-Louis Lagrange svilupparono le loro omonime equazioni, che descrivono il comportamento di un sistema meccanico a partire dalla funzione Lagrangiana

$$L(x, \dot{x}, t) = T(x, \dot{x}, t) - U(x, t)$$

dove T è l'energia cinetica e U l'energia potenziale del sistema meccanico considerato.
La tesi si sviluppa a partire da queste equazioni introducendo il sistema di Hamilton ed esponendo il problema della risoluzione generale dell'equazione di Hamilton-Jacobi.
Infine si applica il risultato alla meccanica quantistica, sottolineando ancora questo profondo intreccio tra la fisica (per quanto teorica) e concetti matematici apparentemente molto più astratti.

Indice

Capitolo 1

Metodo di Hamilton-Jacobi

1.1 Sistema di Hamilton

In generale, nella risoluzione di problemi di meccanica classica a n gradi di libertà l'approccio tipico è quello di partire dall' individuazione degli n parametri lagrangiani $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e della funzione di Lagrange $L = L(x, \dot{x}, t)$ per poter scrivere le *Equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t) = \nabla_x L(x, \dot{x}, t). \tag{EL}$$

Esse sono n equazioni differenziali del secondo ordine dal momento che in generale comparirà una derivata seconda della variabile x e hanno il ruolo di definire il moto del sistema meccanico una volta che siano state imposte $2n$ condizioni al tempo t_0, rispettivamente n per il vettore x e n per il vettore $\dot{x}$.

Tale sistema di equazioni è equivalente a un sistema di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine, detto *Sistema di Hamilton*:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_\xi H(x, \xi, t) \\ \dot{\xi} = -\nabla_x H(x, \xi, t) \end{cases} \tag{SH}$$

in cui si introducono il vettore dei momenti $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, e la funzione $H = H(x, \xi, t)$. Per definizione si avrà che $\xi = \nabla_{\dot{x}} L(x, \dot{x}, t)$, mentre H è la

Trasformata di Legendre della Lagrangiana L e si denominerà *Hamiltoniana*:

$$H(x, \xi, t) = \sup_{\dot{x} \in \mathbb{R}^n} (\langle \xi, \dot{x} \rangle - L(x, \dot{x}, t)).$$

L' integrale generale di (SH) sarà una funzione $t \mapsto (x(t), \xi(t))$, dove $t \mapsto x(t)$ è soluzione di (EL). Questa funzione a valori nello spazio delle fasi verrà indicata spesso dalla notazione $\phi_t(x_0, \xi_0)$, dove $(x_0, \xi_0) = (x(0), \xi(0))$ e denominata *flusso Hamiltoniano*.

Nel corso di questa tesi verranno trattate unicamente Hamiltoniane indipendenti dal tempo, ossia $H = H(x, \xi)$.

1.2 Trasformazioni canoniche e funzioni generatrici

A questo punto della trattazione non si ha necessariamente un vantaggio nell'usare il sistema di Hamilton piuttosto che le equazioni di Eulero-Lagrange, essendo ognuno di questi due metodi ricavabile dall' altro, per come si sono definiti i momenti ξ_i.

Si ha quindi bisogno di una trasformazione χ nello spazio delle fasi che porti a una semplificazione del problema, introducendo una nuova Hamiltoniana H' che abbia gli stessi valori numerici di H: $H' = H \circ \chi^{-1}$.

In particolare, se si arrivasse ad una Hamiltoniana in cui tutte le coordinate x_i siano cicliche, cioè $H = H(\xi)$, la soluzione sarebbe semplicemente la funzione

$$(x(t), \xi(t)) \mapsto (x_0 + t\nabla H(\xi_0), \xi_0),$$

con x_0 e ξ_0 costanti del moto. Si può fare l'esempio del moto di una particella nel piano soggetta a una forza centrale: se si utilizzano coordinate polari l'angolo ϑ è ciclico, mentre nessuna delle coordinate cartesiane x e y lo è.

Definizione 1.1 (Trasformazione canonica)**.** Sia

$$\chi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

un diffeomorfismo (eventualmente locale). χ è detta *trasformazione canonica* se e solo se per ogni funzione $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ si ha l'equivalenza tra i due sistemi:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_\xi H(x,\xi) \\ \dot{\xi} = -\nabla_x H(x,\xi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}' = \nabla_{\xi'} H'(x',\xi') \\ \dot{\xi}' = -\nabla_{x'} H'(x',\xi') \end{cases},$$

dove $H' = H \circ \chi^{-1}$ e $\chi(x,\xi) = (x',\xi')$.

Definizione 1.2 (Funzione generatrice)**.** Una funzione

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\xi') & \mapsto & \varphi(x,\xi') \end{array}$$

di classe C^∞ si dice *funzione generatrice* se il sistema

$$\begin{cases} \xi = \nabla_x \varphi(x,\xi') \\ x' = \nabla_{\xi'} \varphi(x,\xi') \end{cases} \tag{Sφ}$$

permette di scrivere (x',ξ') in funzione di (x,ξ) e l'applicazione

$$\chi_\varphi : (x,\xi) \mapsto (x',\xi')$$

è un diffeomorfismo locale.

Si ha il seguente

Teorema 1.2.1. *Il diffeomorfismo χ_φ associato ad una funzione generatrice φ è una trasformazione canonica.*

Dimostrazione. Si definisce *Azione Hamiltoniana* la quantità

$$A_H(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \langle \xi(t), \dot{x}(t) \rangle - H(x(t),\xi(t),t)\, dt$$

e per il principio di minima azione nello spazio delle fasi un moto $\gamma(t) = (x(t), \xi(t))$ è soluzione di (SH) se e solo se rende stazionaria l'azione hamiltoniana.
Ponendo $\gamma'(t) = \chi_\varphi(\gamma)$ si deve dimostrare che quest'ultimo è soluzione del sistema di Hamilton con l'Hamiltoniana trasformata (SH'), cioè rende stazionaria l'azione hamiltoniana nelle nuove coordinate e con la nuova Hamiltoniana $A_{H'}(\gamma')$.
Si dimostra che $A_H(\gamma)$–$A_{H'}(\gamma')$ dipende unicamente dai valori di $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$.
Da ciò, definendo $\tilde{\gamma} = \gamma + (h(t), k(t))$, con $h(t_0) = h(t_1) = k(t_0) = k(t_1) = 0$ e con dei passaggi algebrici si arriva a $A_H(\tilde{\gamma}) - A_H(\gamma) = A_{H'}(\tilde{\gamma}') - A_{H'}(\gamma')$ cioè γ' rende stazionaria la sua corrispondente azione hamiltoniana. □

A livello intuitivo la funzione generatrice ha il ruolo di collegare le vecchie coordinate nello spazio delle fasi con le nuove.

Esempio 1.1. Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo e sia $\varphi(x, \xi') = \langle F(x), \xi' \rangle$, allora si ottiene il sistema $(S\varphi)$ corrispondente:

$$\begin{cases} \xi = \nabla_x \varphi(x, \xi') = {}^t dF(x) \xi' \\ x' = \nabla_{\xi'} \varphi(x, \xi') = F(x) \end{cases}$$

e per ipotesi ${}^t dF(x)$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$, quindi vale

$$\begin{cases} \xi' = {}^t dF(x)^{-1} \xi \\ x' = F(x) \end{cases}$$

cioè si definisce la trasformazione canonica $\chi_\varphi(x, \xi) = (F(x), {}^t dF(x)^{-1} \xi)$.

1.3 Il metodo di Hamilton-Jacobi

Si è accennato poco sopra che per un'Hamiltoniana del tipo $H = H(\xi)$ la soluzione di (SH) è particolarmente semplice, del tipo

$$\phi_t(x_0, \xi_0) = (x_0 + t \nabla H(\xi_0), \xi_0).$$

Partendo da un' Hamiltoniana generica $H = H(x, \xi)$ il *metodo di Hamilton-Jacobi* consiste nel determinare una trasformazione canonica χ_φ generata da una $\varphi = \varphi(x, \xi')$, cioè, tramite il sistema $(S\varphi)$:

$$\chi_\varphi : (x, \nabla_x \varphi(x, \xi')) \mapsto (\nabla_{\xi'} \varphi(x, \xi'), \xi').$$

In particolare, essendo χ_φ una trasformazione canonica, la nuova Hamiltoniana H' è tale che

$$H'(\nabla_{\xi'} \varphi(x, \xi'), \xi') = H(x, \nabla_x \varphi(x, \xi')).$$

Quindi si richiederà che φ sia tale che

$$H(x, \nabla_x \varphi(x, \xi')) = H'(\xi'). \tag{EHJ}$$

Definizione 1.3 (Equazione di Hamilton-Jacobi)**.** L'equazione *(EHJ)* a cui ci si riconduce nel metodo di Hamilton-Jacobi si dice *Equazione di Hamilton-Jacobi.*
Equazioni del tipo

$$p(x, \nabla \varphi(x)) = E$$

con p a valori scalari ed E costante si dicono in letteratura *equazioni iconali.*

Nel seguente esempio si vedrà un' applicazione di quanto detto sopra nel caso 1-dimensionale.

Esempio 1.2. Siano $n = 1$ e $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Si consideri un' Hamiltoniana del tipo

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2m}\xi^2 + V(x), \tag{1.1}$$

dove $V(x)$ è l'energia potenziale nel punto x. A questa Hamiltoniana corrisponde un'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi')\right)^2 + V(x) = H'(\xi'). \tag{EHJ}$$

L'Hamiltoniana di partenza è costante lungo il moto, pertanto la si può indicare con E e considerare una delle nuove coordinate create dopo l' applicazione della trasformazione canonica generata da φ. Quindi si può scrivere $\xi' = E = H'(\xi')$ e l' equazione (EHJ) diventa:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E)\right)^2 + V(x) = E. \tag{*}$$

Si cercherà di risolvere l' equazione $(*)$ nell' incognita φ intorno a un punto (x_0, E_0) tale che $V(x_0) < E_0$.
Da $(*)$ si ha

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E)\right)^2 = 2m(E - V(x)), \tag{1.2}$$

ed essendo V continua, per (x, E) abbastanza vicino a (x_0, E_0), vale $E - V(x) > 0$. Da (1.2):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E) = \pm\sqrt{2m(E - V(x))}, \tag{1.3}$$

e inoltre a φ è associata la trasformazione canonica

$$\chi_\varphi : \left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E)\right) \mapsto \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E), E\right). \tag{1.4}$$

Partire da un punto $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$ di energia totale E_0 implica, per $(S\varphi)$, che $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, E_0) = \xi_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E)\right)^2 + V(x) = E \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2m}\xi_0^2 + V(x_0) = E_0 \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \xi_0^2 = 2m(E_0 - V(x_0)) \neq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Supponiamo $\xi_0 > 0$ (altrimenti basterà prendere il caso negativo di (1.3)) allora:

$$\xi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, E_0) = \sqrt{2m(E_0 - V(x_0))} \tag{1.6}$$

e quindi, per (1.3), in un intorno di (x_0, E_0)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,E) = \sqrt{2m(E - V(x))} \tag{1.7}$$

e la funzione

$$\varphi(x, E) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{2m(E - V(y))}\, dy \tag{1.8}$$

risolve (EHJ).

Affinchè φ sia effettivamente la funzione generatrice richiesta bisogna poter risolvere il sistema $(S\varphi)$ nelle incognite τ e E:

$$\begin{cases} \tau = \frac{\partial \varphi}{\partial E}(x, E) \\ \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, E) \end{cases} \tag{Sφ}$$

e mostrare che la sua trasformazione canonica associata:

$$\chi_\varphi : (x, \xi) \mapsto (\tau, E)$$

sia ben definita come diffeomorfismo locale. Si ha:

$$(S\varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \sqrt{2m(E - V(x))} \\ \tau = \sqrt{2m} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{(E - V(y))}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \frac{1}{2m}\xi^2 + V(x) \\ \tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{(\frac{1}{2m}\xi^2 + V(x) - V(y))}} \end{cases}$$

che mostra che $\tau = \tau(x, \xi)$ e $E = E(x, \xi)$ sono ben definite e regolari in un intorno di (x_0, ξ_0).

Resta da verificare che il differenziale del cambio di coordinate $d(\tau, E)(x_0, \xi_0)$ abbia determinante non nullo:

$$d(\tau, E)(x_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial x}(x_0, \xi_0) & \frac{\partial \tau}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) \\ \frac{\partial E}{\partial x}(x_0, \xi_0) & \frac{\partial E}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Andando a calcolare i singoli elementi si trova:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x_0, \xi_0) = \frac{m}{\xi_0},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x_0, \xi_0) = V'(x_0),$$
$$\frac{\partial E}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) = \frac{\xi_0}{m},$$

quindi

$$d(\tau, E)(x_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} \frac{m}{\xi_0} & 0 \\ V'(x_0) & \frac{\xi_0}{m} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

che ha determinante 1. Ciò prova che χ_φ è un diffeomorfismo che mappa (x_0, ξ_0) in $(0, E_0)$ per il teorema dell'invertibilità locale.

Nelle nuove coordinate il sistema di Hamilton si scrive:

$$\begin{cases} \dot{\tau} = \frac{\partial H'}{\partial E} = 1 \\ \dot{E} = -\frac{\partial H'}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

che ha la semplice soluzione:

$$\begin{cases} \tau(t) = t + \tau(0) \\ E(t) = E_0 \end{cases} . \tag{1.12}$$

Per il caso generale in cui $x \in \mathbb{R}^n$ di equazioni iconali che derivano dal metodo di Hamilton-Jacobi $p(x, \nabla_x \varphi(x, \xi')) = E$ si devono usare strumenti di geometria simplettica.

Capitolo 2

Geometria simplettica

In questo capitolo si daranno le definizioni di strumenti matematici utili per risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso generale n-dimensionale, tra i quali la forma simplettica canonica.

Si arriverà quindi a utilizzare quest'ultima per definire il concetto di varietà lagrangiana, che permetterà nel Capitolo 3 di risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi.

2.1 k-forme differenziali

Definizione 2.1 (Spazio duale)**.** Si definisce *spazio duale* di $\mathbb{R}^n$ l'insieme

$$(\mathbb{R}^n)^* = \Big\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ lineare} \Big\}.$$

Esso è uno spazio vettoriale di dimensione n e una sua base è data dalle applicazioni

$$\begin{array}{rccc} dx_j\colon & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & dx_j(h) = h_j, \end{array}$$

con $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Bisogna tenere presente che la definizione di spazio duale si estende a spazi vettoriali in generale diversi da $\mathbb{R}^n$.

Si indica invece con

$$M_k(\mathbb{R}^n) := \Big\{ f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{volte}} \to \mathbb{R} \,\Big|\, f\ k\text{-lineare e antisimmetrica} \Big\}.$$

Notare che $M_1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$.

Definizione 2.2 (1-forma differenziale)**.** Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si chiama *1-forma differenziale* un'applicazione

$$\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$$

che si scrive nella forma

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x) dx_j$$

dove $\omega_j : \Omega \to \mathbb{R}$ sono funzioni lineari.

Il ruolo finale delle 1-forme è quello di associare a un vettore uno scalare, ma spesso si ha bisogno di associare uno scalare a una coppia di vettori, o in generale a k vettori, come nel caso dell'area di un parallelogramma o del volume di un parallelepipedo. Per fare questo bisogna generalizzare il concetto di 1-forma tramite il *prodotto esterno.*

Siano dx_i e dx_j come sopra, il loro prodotto esterno si applica a due vettori del tipo $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ e vale

$$(dx_i \wedge dx_j)(h, k) = \begin{vmatrix} h_i & h_j \\ k_i & k_j \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Perciò il prodotto esterno di due $1-$forme ω_1, ω_2 è una funzione:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) : \Omega \to M_2(\mathbb{R}^n).$$

Alla forma quadratica a cui si arriva vanno poi applicati due vettori fino ad ottenere uno scalare:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x)(h, k) = \begin{vmatrix} \omega_1(x)(h) & \omega_2(x)(h) \\ \omega_1(x)(k) & \omega_2(x)(k) \end{vmatrix}.$$

Più generalmente una $k-$forma differenziale è un'applicazione differenziabile $\omega : \Omega \to M_k(\mathbb{R}^n)$ del tipo:

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \tag{2.2}$$

con $a_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ funzioni lisce.

Lo spazio delle $k-$forme differenziali su Ω si indica con $\Lambda^k(\Omega)$ e il prodotto esterno si estende in modo che il prodotto di una una $l-$forma per una $m-$forma produca una $(l+m)-$forma.

Definizione 2.3 (Derivata di una forma differenziale)**.** Data una $k-$forma differenziale su $\mathbb{R}^n$ del tipo (2.2), la sua derivata $d\omega$ è la $(k+1)-$forma:

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \frac{\partial a_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i}(x)\, dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \tag{2.3}$$

Si vede da questa definizione che $\forall \omega \in \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$

$$d^2\omega = 0 \tag{2.4}$$

perchè nella sommatoria sarà presente il prodotto esterno di due $1-$forme con lo stesso indice.

Una $k-$forma ω si dice *esatta* se esiste una $(k-1)-$forma η tale che $d\eta = \omega$. Si dice invece *chiusa* se $d\omega = 0$. Una forma esatta è anche chiusa mentre il teorema di Poincarè asserisce che l'inverso vale se ω è definita in un aperto di $\mathbb{R}^n$ semplicemente connesso.

In particolare la seguente forma permette di creare un collegamento tra il formalismo hamiltoniano che deriva dallo studio di sistemi meccanici e i concetti geometrici più astratti che si useranno per risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi.

2.2 2-forma simplettica canonica

Definizione 2.4 (Forma simplettica e forma simplettica canonica)**.** Una *forma simplettica* su Ω è una 2-forma differenziale su Ω chiusa e non degenere.

Siano $u = (u_x, u_\xi)$ e $v = (v_x, v_\xi)$ in $\mathbb{R}^{2n}$. La *2-forma simplettica canonica* è l'applicazione bilineare e antisimmetrica

$$\sigma : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$

definita da:

$$\sigma(u, v) = u_x \cdot v_\xi - u_\xi \cdot v_x = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_x \\ v_\xi \end{pmatrix} \right\rangle \tag{2.5}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ che compare in (2.5) si indicherà nel seguito con $\mathbf{J}$ e vale $\mathbf{J}^t\mathbf{J} = \mathbf{I}$.

Non è difficile notare che la forma canonica $\sigma(u, v)$ altro non è che il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} u_\xi & v_\xi \\ u_x & v_x \end{pmatrix}.$$

e da ciò discende la proprietà di antisimmetria e il fatto di essere non degenere:

$$\sigma(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow u = 0.$$

Consideriamo la 1-forma $\omega = \sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$ e calcolando la sua derivata si ha:

$$\begin{aligned} d\omega =& \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1 + \cdots + \\ &+ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 \wedge dx_1 + \cdots + \\ &+ \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 \wedge dx_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial \xi_n} d\xi_n \wedge dx_1 = \\ =& \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j \end{aligned} \tag{2.6}$$

che corrisponde a σ per come agisce applicata a due vettori del tipo $v = (v_x, v_\xi) \in \mathbb{R}^n$. Ciò dimostra che la forma canonica è esatta e quindi chiusa.

Essa permette di caratterizzare in modo equivalente il concetto di trasformazione canonica (simplettica) già trattato nel capitolo 1: siano U e V aperti di $\mathbb{R}^{2n}$, allora un diffeomorfismo di classe C^∞

$$\begin{array}{rccc} k: & U & \to & V \\ & (x,\xi) & \mapsto & (y(x,\xi), \eta(x,\xi)) \end{array}$$

è una trasformazione canonica se conserva σ nelle nuove coordinate, formalmente

$$d\eta \wedge dy = d\xi \wedge dx, \tag{2.7}$$

dove il primo membro si scrive in funzione di $(dx, d\xi)$ come

$$\begin{aligned} d\eta \wedge dy &= \sum_{i=1}^{n} d\eta_i \wedge dy_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i} d\xi_i\Big) \wedge \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial y_j}{\partial \xi_k} d\xi_k\Big). \end{aligned} \tag{2.8}$$

I termini nelle parentesi nell'ultimo membro dell'equazione sono i differenziali delle funzioni $\eta_j(x,\xi)$ e $y_j(x,\xi)$ e ciò suggerisce che una trasfomazione k è canonica se il suo differenziale in un punto $dk(\rho)$ conserva la forma simplettica canonica:

$$(k^*\sigma)_\rho(u,v) := \sigma(dk(\rho)\cdot u, dk(\rho)\cdot v) = \sigma(u,v). \tag{2.9}$$

Questa caratterizzazione di trasformazione canonica si può esprimere puramente in termini matriciali: dati X e $X' \in \mathbb{R}^{2n}$, $\sigma(X,X') = \langle JX, X'\rangle$. Sia ora $dk(\rho)$ la matrice jacobiana della trasformazione canonica k: per (2.9) vale

$$\begin{aligned} \sigma(dk(\rho)X, dk(\rho)X') &= \langle J dk(\rho)X, dk(\rho)X'\rangle = \\ &= \langle {}^t dk(\rho) J dk(\rho) X, X'\rangle = \\ &= \langle JX, X'\rangle = \sigma(X,X'), \end{aligned} \tag{2.10}$$

quindi condizione necessaria e sufficiente affinche k si una trasformazione canonica è che ${}^t dk(\rho) J dk(\rho) = J$.

2.3 Campo hamiltoniano

In questo paragrafo viene illustrato il collegamento tra il sistema di Hamilton e la geometria simplettica tramite la nozione di *campo hamiltoniano.*

Definizione 2.5 (Campo hamiltoniano)**.** Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Il *campo hamiltoniano* di f, indicato con Γ_f è il campo vettoriale su $\mathbb{R}^{2n}$ tale che:

$$\Gamma_f(x, \xi) = (\nabla_\xi f(x, \xi), -\nabla_x f(x, \xi)). \tag{2.11}$$

Utilizzando la notazione del campo hamiltoniano il sistema di Hamilton si scrive

$$(\dot{x}, \dot{\xi}) = \Gamma_H(x, \xi) = \frac{d}{dt}\phi_t(x_0, \xi_0). \tag{2.12}$$

Osservazione 1. Per ogni $u \in T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$ La funzione $\sigma(\cdot, \Gamma_f(x, \xi))$ è una forma lineare su $T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste unico un vettore $v \in T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$ tale che σ si scriva come prodotto scalare. Analiticamente si vede che $v = \nabla f(x, \xi)$: $\forall u \in T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}
\sigma(u, \Gamma_f(x, \xi)) &= \langle Ju, \Gamma_f(x, \xi)\rangle = \\
&= \langle u, -J\Gamma_f(x, \xi)\rangle = \\
&= \left\langle u, -J^2\nabla f(x, \xi)\right\rangle = \\
&= \langle u, \nabla f(x, \xi)\rangle = \\
&= df(x, \xi) \cdot u.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Data *f*, l'applicazione $u \mapsto df(x, \xi) \cdot u$ è un campo scalare su $T_{(x,\xi)}\mathbb{R}^{2n}$, cioè è indipendente dalle coordinate usate. (2.13) implica che il campo hamiltoniano è una nozione simplettica, ossia è indipendente dalla scelta di coordinate (y, η) tali che $\sigma = dy \wedge d\eta$.

Definizione 2.6 (Parentesi di Poisson)**.** Date due funzioni *f,g* nelle *2n* variabili (x, ξ) la *parentesi di Poisson* è un'operazione binaria definita come:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{2.14}$$

scritto in notazione di Einstein.

Osservazione 2. Nel formalismo simplettico $\{f, g\} = \sigma(\Gamma_f, \Gamma_g)$ e per quanto visto sopra anche la parentesi di Poisson è una nozione che non dipende dalle coordinate locali su $T\mathbb{R}^{2n}$ tali che $\sigma = d\xi \wedge dx$.

Il seguente teorema illustra la profonda natura simplettica del sistema di Hamilton, dal momento che il flusso (cioè la soluzione del sistema) mappa (x, ξ) in $\phi_t(x, \xi)$ e questa trasformazione è simplettica.

Teorema 2.3.1. *Sia $H = H(x, \xi)$ una funzione Hamiltoniana indipendente dal tempo,* U *un aperto limitato di $\mathbb{R}^{2n}$ tale che il flusso hamiltoniano corrispondente ad H $\phi_t(x_0, \xi_0)$, con $(x_0, \xi_0) \in U$, sia ben definito per un intervallo temporale $]-T_-, T_+[$, allora $\forall t \in]-T_-, T_+[$ l'applicazione*

$$U \ni (x, \xi) \mapsto \phi_t(x_0, \xi_0) \in \exp(t\Gamma_H(U)) \tag{2.15}$$

è una trasfomazione canonica.

La notazione $\exp(t\Gamma_H(U))$ indica il flusso hamiltoniano dell'aperto U. Il teorema si generalizza a funzioni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Dimostrazione. Per semplicità poniamo $M_t := d\phi_t(x, \xi)$ e $\phi_t(x, \xi) = (X(t), \Xi(t))$. In notazione matriciale $\phi_t(x, \xi)$ è canonica se vale

$${}^tM_t\mathbf{J}M_t = \mathbf{J}. \tag{2.16}$$

La prova sfrutta il fatto che lo è in $t = 0$ e la proprietà di flusso

$$\phi_{t+s}(x, \xi) = \phi_s(x, \xi)\phi_t(x, \xi)$$

$\forall s \in]-T_- - t, T_+ - t[$, estende il risultato all'aperto U.
Banalmente per $t = 0$, $M_0 = \mathbf{I}$. Basta provare che $\forall t \in]-T_-, T_+[$ si ha

$$\frac{d}{dt}({}^tM_t\mathbf{J}M_t) = {}^t\dot{M}_t\mathbf{J}M_t + {}^tM_t\mathbf{J}\dot{M}_t = 0. \tag{2.17}$$

In $t = 0$ $M_0 = \mathbf{I}$, per cui bisogna provare che $\left({}^t\dot{M}_t\mathbf{J} + \mathbf{J}\dot{M}_t\right)\Big|_{t=0} = 0$. Scrivendo M_t e $\dot{M}_t$ come matrici a blocchi

$$M_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

e sfruttando il fatto che $\phi_t(x,\xi) = (X(t), \Xi(t))$ è la soluzione del sistema di Hamilton, si arriva alle relazioni ${}^t\dot{A}_0 = -{}^t\dot{D}_0$, ${}^t\dot{B}_0 = \dot{B}_0$, ${}^t\dot{D}_0 = \dot{D}_0$.
Quindi

$$\left({}^t\dot{M}_t\mathbf{J} + \mathbf{J}\dot{M}_t\right)\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} -{}^t\dot{C}_0 & {}^t\dot{A}_0 \\ -{}^t\dot{D}_0 & {}^t\dot{B}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^t\dot{C}_0 & {}^t\dot{D}_0 \\ -{}^t\dot{A}_0 & -{}^t\dot{B}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{2.19}$$

Il caso $t = 0$ implica che $\forall v \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\frac{d}{dt}\left({}^t d\phi_t(v)\mathbf{J}d\phi_t(v)\right)\Big|_{t=0} = 0. \tag{2.20}$$

Allora $\forall s \in]-T_- - t, T_+ - t[$ componendo a destra per $d\phi_s(v)$ e a sinistra per ${}^t d\phi_s(v)$, si ha

$$\frac{d}{dt}\left({}^t d\phi_{t+s}(v)\mathbf{J}d\phi_{t+s}(v)\right)\Big|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}\left({}^t d\phi_s(v)\mathbf{J}d\phi_s(v)\right) = 0. \tag{2.21}$$

□

2.4 Varietà lagrangiane

Definizione 2.7. Una varietà $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ si dice *lagrangiana* se ha dimensione n e $\forall \rho \in \Lambda$, $\sigma|_{T_\rho\Lambda} = 0$ (cioè $\forall u, v \in T_\rho\Lambda, \sigma(u,v) = 0$).

Ciò è equivalente a scrivere $T_\rho\Lambda \subseteq (T_\rho\Lambda)^{\perp_\sigma}$.
Siano $u_1, \dots, u_n \in T_\rho\Lambda$ linearmente indipendenti, $v \in (T_\rho\Lambda)^{\perp_\sigma} \subset \mathbb{R}^{2n}$, allora $\forall j, \quad \sigma(u_j, v) = 0$. Se queste n equazioni sono linearmente indipendenti, lo spazio delle soluzioni $(T_\rho\Lambda)^{\perp_\sigma}$ ha dimensione $2n - n = n$:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i\sigma(u_i, v) = 0 \quad \forall v \in (T_\rho\Lambda)^{\perp_\sigma} \Rightarrow \sigma\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, v\Big) = 0 \overbrace{\Rightarrow}^{\sigma\text{non degenere}}$$
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

quindi le equazioni sono linearmente indipendenti e si ha che $T_\rho\Lambda$ ha dimensione n ed è incluso in uno spazio anch'esso di dimensione n:

$$(T_\rho\Lambda)^{\perp_\sigma} = T_\rho\Lambda. \tag{2.22}$$

Una trasformazione canonica manda un intorno che contiene una varietà lagrangiana in un intorno di una varietà lagrangiana dal momento che conserva la forma simplettica.

Esempio 2.1. Sia $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, si consideri la varietà n-dimensionale

$$\Lambda_\varphi := \Big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \xi = \nabla\varphi(x)\Big\}. \tag{2.23}$$

Essa è una sottovarietà lagrangiana. Per dimostrarlo basta calcolare la forma simplettica σ sui punti di Λ_φ e vedere che si annulla. Per (2.5) :

$$\begin{aligned}
\sigma\Big|_{\Lambda_\varphi} &= \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i\Big|_{\Lambda_\varphi} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i\Big)\Big|_{\Lambda_\varphi} = \\
&= \sum_{i<j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}\Big(dx_j \wedge dx_i + dx_i \wedge dx_j\Big)\Big|_{\Lambda_\varphi} = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Il seguente teorema illustra infine il collegamento tra le varietà lagrangiane e le equazioni iconali, di cui abbiamo visto fare parte l'equazione di Hamilton-Jacobi.

Teorema 2.4.1. *Sia Λ una sottovarietà $n-$dimensionale di $\mathbb{R}^{2n}$ tale che la proiezione*

$$\begin{array}{cccc} \pi: & \Lambda & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x,\xi) & \mapsto & x, \end{array}$$

sia un diffeomorfismo locale. Allora Λ è lagrangiana se e solo se localmente i suoi punti sono descritti da un'equazione del tipo $\xi = \nabla\varphi(x)$ per una certa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^∞.

Dimostrazione. Essendo Λ una varietà il teorema della funzione implicita e la proiezione π assicurano l'esistenza di una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liscia tale che $\xi = F(x)$.

Λ lagrangiana significa che $\sigma|_\Lambda = d\omega|_\Lambda = 0$ cioè che $\omega|_\Lambda$ è una 1-forma chiusa. Per il teorema di Poincaré $\omega|_\Lambda$ è localmente esatta. Questo si traduce nella relazione

$$F(x)dx = d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i,$$

cioè $\xi = \nabla\varphi(x) = F(x)$. $\square$

Capitolo 3

Risoluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

In questo capitolo si risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi già presentata nel capitolo 1:

$$p(x, \nabla\varphi(x)) = E \tag{3.1}$$

in un intorno $U(x_0)$ di un punto x_0, dove E è un valore reale costante.

L'idea è di costruire una varietà Lagrangiana tale che la proiezione

$$\Lambda \ni (x, \xi) \mapsto x \in U(x_0)$$

sia un diffeomorfismo locale, cioè del tipo:

$$\Lambda_\varphi = \Big\{(x, \nabla\varphi(x)); x \in U(x_0)\Big\} \tag{3.2}$$

sulla quale $(p - E) = 0$.

Teorema 3.0.2. *Sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\rho_0 := (x_0, \xi_0) \in p^{-1}(E)$ e sia $\Lambda' \subset p^{-1}(E)$ una sottovarietà di dimensione $n-1$ contenente ρ_0 tale che $\sigma|_{\Lambda'} = 0$ e che Γ_p sia trasverso a Λ' in ρ_0. Allora esiste $t_0 > 0$ e un intorno Λ'_0 di ρ_0 in Λ' tale che l'insieme*

$$\Lambda = \bigcup_{|t|<t_0} \exp(t\Gamma_p(\Lambda'_0)) \tag{3.3}$$

sia una sottovarietà Lagrangiana di $\mathbb{R}^{2n}$ *tale che*

$$\Lambda' \subset \Lambda \subset p^{-1}(E). \tag{3.4}$$

Osservazione 3. La sottovarietà Λ' non è Lagrangiana avendo dimensione $n-1$ invece che n come richiesto dalla definizione.

Osservazione 4. Il fatto che $\Gamma_p(\rho_0)$ sia trasverso a Λ' in ρ_0 significa che:

$$T_{\rho_0}\Lambda' \cap \langle \Gamma_p(\rho_0) \rangle = \{0\}. \tag{3.5}$$

Dimostrazione. $\langle \Gamma_p \rangle$ ha dimensione 1 e Λ' $n-1$, per cui la loro trasversalità assicura che Λ sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^{2n}$ di dimensione n per Λ'_0 e t_0 abbastanza piccoli. Una sua parametrizzazione allora deriverà da una parametrizzazione $(n-1)$-dimensionale di Λ' con l'aggiunta del parametro t. Se $\rho = \phi_t(\rho') = \exp(t\Gamma_p(\rho'))$, con $\rho' \in \Lambda'$, si ha

$$\sigma|_{T_\rho \Lambda} = \phi^* \sigma|_{T_{\rho'}\Lambda' \oplus \langle \Gamma_p(\rho') \rangle}. \tag{3.6}$$

Siccome il flusso è una trasformazione canonica, come dimostrato nel teorema (2.3.1), vale:

$$\sigma(X, Y) := \sigma(d\phi_t(\rho')X', d\phi_t(\rho')Y') = \sigma(X', Y'), \tag{3.7}$$

dove si è posto

$$\begin{cases} X' = u + \mu\Gamma_p(\rho') \\ Y' = v + \mu'\Gamma_p(\rho') \end{cases} \tag{3.8}$$

in cui $u, v \in T_{\rho'}\Lambda'$ e $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$.
Inoltre $\sigma(u, v) = 0$ per ipotesi su Λ' e il campo hamiltoniano genera $(T_{\rho'}\Lambda')^{\perp_\sigma}$

poiché $\forall u \in T_{\rho'}\Lambda'$

$$\begin{aligned}
\sigma(u, \Gamma_p(\rho')) &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla_\xi p(\rho') \\ -\nabla_x p(\rho') \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_\xi p(\rho') \\ -\nabla_x p(\rho') \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_\xi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla_x p(\rho') \\ \nabla_\xi p(\rho') \end{pmatrix} \right\rangle = \\
&= \Big\langle \nabla p(\rho'), u \Big\rangle = 0
\end{aligned}$$

dal momento che $\Lambda' \subset p^{-1}(E)$ implica $T_{\rho'}\Lambda' \subset T_{\rho'}(p^{-1}(E))$ e quest'ultimo ha equazione $\nabla(p - E)(\rho') \cdot u = \nabla p(\rho') \cdot u = 0$.

Infine

$$\sigma\left(\Gamma_p(\rho'), \Gamma_p(\rho')\right) = -\nabla_x p(\rho')\nabla_\xi p(\rho') + \nabla_x p(\rho')\nabla_\xi p(\rho') = 0$$

per cui

$$\begin{aligned}
\sigma(X, Y) &= \sigma(u + \mu\Gamma_p(\rho'), v + \mu'\Gamma_p(\rho')) = \\
&= \sigma(u, v) + \mu'\sigma(u, \Gamma_p(\rho')) - \mu\sigma(v, \Gamma_p(\rho')) + \mu\mu'\sigma(\Gamma_p(\rho'), \Gamma_p(\rho')) = \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Inoltre anche nei punti di Λ la funzione p vale E, perché $\forall t$, $|t| < t_0$

$$\frac{d}{dt} p\Big(\exp(t\Gamma_p(\rho'))\Big)\Big|_{t=0} = \Big\langle \nabla p\Big(\exp(t\Gamma_p(\rho'))\Big), \exp(t\Gamma_p(\rho'))\Gamma_p(\rho') \Big\rangle\Big|_{t=0} = 0$$

dal momento che $\nabla p(\rho')$ è ortogonale a $\Gamma_p(\rho')$ e si estende all'intervallo $]-t_0, t_0[$.

Ciò dimostra il teorema poiché la forma canonica σ si annulla anche sugli spazi tangenti dei punti di Λ, che ha dimensione n e quindi tutte le caratteristiche di una varietà Lagrangiana. $\square$

Per risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi (3.1) nel caso n-dimensionale si deve applicare il precedente teorema andando a verificarne le ipotesi.

D'ora in avanti si userà la notazione per cui se $v \in \mathbb{R}^n$, $v' = (v_1, \dots, v_{n-1})$.

Si fissa $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\rho_0 := (x_0, \xi_0) \in p^{-1}(E)$, con $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, con la condizione

$$\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0) \neq 0. \tag{3.10}$$

Sia $\psi = \psi(x') \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ una funzione arbitraria tale che

$$\nabla_{x'}\psi(x'_0) = \xi'_0. \tag{3.11}$$

Per esempio una funzione del genere può essere $\psi(x') = \langle x', \xi'_0 \rangle$.

Avendo una varietà descritta dall'equazione $p(x, \xi) = E$, il teorema della funzione implicita assicura l'esistenza, sotto l'ipotesi (3.10), di una funzione f tale che la variabile ξ_n possa essere scritta come

$$\xi_n = f(x, \xi') \tag{3.12}$$

e, viceversa, quest'ultima equazione descrive la varietà $p^{-1}(E)$.
In particolare, fissando la n-esima variabile:

$$p(x', x_n^0, \xi) = E \quad \Leftrightarrow \quad \xi_n = \lambda(x', \xi'), \tag{3.13}$$

dove λ è appunto la funzione f con l'n-esima variabile fissata: $\lambda(x', \xi') := f(x', x_n^0, \xi')$.

Consideriamo la varietà

$$\Lambda' = \Big\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}; \quad x_n = x_n^0, \quad \xi' = \nabla_{x'}\psi(x'), \quad \xi_n = \lambda(x', \xi')\Big\}, \tag{3.14}$$

essa ha dimensione $n-1$ perché ci sono $2n$ variabili legate tra loro da $1 + (n-1) + 1$ relazioni. La funzione p su questa varietà, per (3.13) vale E:

$$\Lambda' \subset p^{-1}(E) \tag{3.15}$$

e $\rho_0 \in \Lambda'$ per (3.11) e (3.13).
Studiamo ora lo spazio tangente in ρ_0 a Λ'. Le equazioni che lo descrivono sono le equazioni di Λ' linearizzate in modo che esso abbia dimensione $n-1$:

$$\begin{cases} x_n = 0 \\ \xi' = Hess_{x'}\psi(x_0') \cdot x' \\ \xi_n = d\lambda(x_0', \xi_0') \cdot (x', \xi'). \end{cases} \tag{3.16}$$

Il teorema richiede che $\sigma|_{\Lambda'} = 0$: siano

$$a = (a_x, a_\xi) = (a_x', 0, Hess\,\psi(x_0') \cdot a_x', d\lambda(x_0', \xi_0') \cdot (a_x', a_\xi'))$$

e

$$b = (b_x, b_\xi) = (b_x', 0, Hess\,\psi(x_0') \cdot b_x', d\lambda(x_0', \xi_0') \cdot (b_x', b_\xi'))$$

due vettori arbitrari di $T_{\rho_0}\Lambda'$. La forma canonica in (a, b) vale ($Hess\,\psi$ e $d\lambda$ sono ovviamente applicate a x_0' e (x_0', ξ_0'))

$$\begin{aligned} \sigma(a,b) &= \big(Hess\psi \cdot a_x', d\lambda \cdot (a_x', a_\xi')\big) \begin{pmatrix} b_x' \\ 0 \end{pmatrix} - \big(a_x', 0\big) \begin{pmatrix} Hess\psi \cdot b_x' \\ d\lambda \cdot (b_x', b_\xi') \end{pmatrix} = \\ &= \langle Hess\psi \cdot a_x', b_x' \rangle - \langle a_x', Hess\psi \cdot b_x' \rangle = 0 \end{aligned}$$

perché il teorema di Schwarz assicura la simmetria di $Hess\psi(x_0', \xi_0')$ essendo ψ di classe C^∞.

L'ultima ipotesi del teorema è la trasversalità di $T_{\rho_0}\Lambda'$ e $\Gamma_p(\rho_0)$ in ρ_0: il campo hamiltoniano è $\Gamma_p(\rho_0) = (\nabla_\xi p(\rho_0), -\nabla_x p(\rho_0))$ e la sua coordinata n-esima vale

$$(\Gamma_p(\rho_0))_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0) \neq 0 \tag{3.17}$$

per ipotesi, quindi $\Gamma_p(\rho_0) \notin \Lambda'$ ed effettivamente l'intersezione del campo hamiltoniano con $T_{\rho_0}\Lambda'$ è l'unico punto ρ_0.

A questo punto della trattazione sono verificate tutte le ipotesi del teorema (3.0.2) e quindi esiste una varietà lagrangiana Λ di dimensione n contenuta in $p^{-1}(E)$:

$$\Lambda = \bigcup_{|t|<t_0} \Big\{ \exp t\Gamma_p(\rho'),\ \rho' \in \Lambda' \,\text{vicino}\, \rho_0 \Big\}. \tag{3.18}$$

In riferimento al teorema (2.4.1) nel capitolo precedente, sotto l'ipotesi aggiuntiva che la proiezione

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \Lambda & \to & \mathbb{R}^n, \\ & (x,\xi) & \mapsto & x, \end{array}$$

sia un diffeomorfismo locale, allora la varietà è descritta da un'equazione del tipo $\xi = \nabla\varphi(x)$. Il fatto che π sia un diffeomorfismo equivale alla doppia implicazione

$$(x,\xi) \in T_{\rho_0}\Lambda \quad \Leftrightarrow \quad \xi = Ax \tag{3.19}$$

per una certa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, semplicemente perché $T_{\rho_0}\Lambda$ è uno spazio vettoriale.

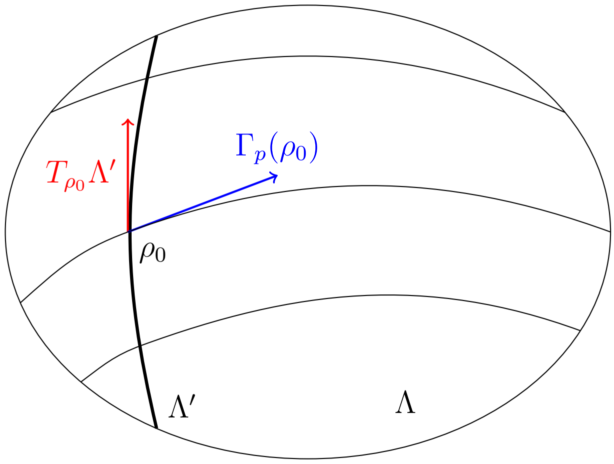
La trasversalità di Λ' e $\Gamma_p(\rho_0)$ in ρ_0 implica che valga la relazione tra gli spazi tangenti

$$T_{\rho_0}\Lambda = T_{\rho_0}\Lambda' \oplus \langle \Gamma_p(\rho_0) \rangle, \tag{3.20}$$

equivalente all'equazione vettoriale in $\mathbb{R}^{2n}$

$$\underbrace{(x,\xi)}_{\in T_{\rho_0}\Lambda} = \underbrace{(y,\eta)}_{\in T_{\rho_0}\Lambda'} + \mu\Gamma_p(\rho_0), \tag{3.21}$$

con μ parametro reale, come illustrato nel seguente disegno.



Farà comodo nella trattazione scrivere quest'ultima equazione come

$$\begin{cases} x = y + \mu\nabla_\xi p(\rho_0) \\ \xi = \eta - \mu\nabla_x p(\rho_0) \end{cases} . \tag{3.22}$$

Notare che ξ è funzione di η e μ e che il vettore $(2n-2)$-dimensionale (y,η) rispetta le condizioni del sistema (3.16) per ipotesi:

$$\begin{cases} y_n = 0 \\ \eta' = Hess_{x'}\psi(x'_0)\cdot y' \\ \eta_n = d\lambda(x'_0,\xi'_0)\cdot(y',\eta') = d\lambda(x'_0,\xi'_0)\cdot(y', Hess_{x'}\psi(x'_0)\cdot y'). \end{cases} \tag{3.23}$$

La questione dell'esistenza della proiezione π a questo punto ricade sull' esistenza di una funzione $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tale che

$$\xi = F(x), \tag{3.24}$$

cioè sul fatto che η e μ dipendano unicamente dalle variabili $(x_1,\dots,x_n)$. La seconda e terza equazione di (3.23) assicurano che η sia una funzione unicamente di y'. Allora dalla prima equazione di (3.22) si ha che

$$y' = x' - \mu\nabla_{\xi'}p(\rho_0), \tag{3.25}$$

che mostra che $\xi = g(x',\mu)$. Allo stesso modo, dalla stessa equazione discende

$$x_n = \mu\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0) \tag{3.26}$$

poiché $y_n = 0$. Immediatamente si arriva a

$$\mu = \frac{x_n}{\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0)} \tag{3.27}$$

che mostra che μ dipende unicamente da x_n. Infine la funzione $F(x)$ richiesta esiste e vale semplicemente $g(x', \frac{x_n}{\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0)})$.

Da tutta questa discussione segue il

Corollario 3.0.3. *Sia $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in p^{-1}(E)$, $\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0) \neq 0$ e $\psi = \psi(x') \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ vicino x_0 arbitraria tale che*

$$\nabla\psi(x'_0) = \xi'_0,$$

allora esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ in un intorno di x_0 tale che

$$\nabla\varphi(x_0) = \xi_0;$$

$$\varphi(x', x_n^0) = \psi(x');$$

$$p(x, \nabla\varphi(x)) = E$$

in un intorno di x_0.

Riprendendo il discorso iniziale, il metodo di Hamilton-Jacobi richiedeva una funzione $\varphi = \varphi(x)$ che fosse generatrice per una trasformazione canonica con il fine di creare una nuova Hamiltoniana $H'(\xi')$ indipendente da x. Si arrivava quindi all'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(x, \nabla\varphi(x)) = H'(\xi') \tag{3.28}$$

che corrisponde all'equazione di inizio capitolo con $H'(\xi') = E$. Siccome $T_{\rho_0}\Lambda$ si proietta tramite un diffeomorfismo su $\mathbb{R}^n$, per (3.20) il teorema (2.4.1) assicura che Λ è della forma (3.2)

$$\Lambda_\varphi = \Big\{(x, \nabla\varphi(x)); x \in U(x_0)\Big\}$$

Di fatto la funzione φ viene definita a meno di una costante additiva dalle relazioni

$$\begin{cases} \nabla_{x'}\varphi(x) = Hess\,\psi \cdot (x' - \nabla_{\xi'}p) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) = d\lambda(x', Hess\,\psi \cdot x') \cdot (x' - \frac{x_n}{\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0)}\nabla_{\xi'}p, Hess\,\psi \cdot (x' - \frac{x_n}{\frac{\partial p}{\partial \xi_n}(\rho_0)}\nabla_{\xi'}p)) \end{cases} \tag{3.29}$$

dove $Hess\,\psi = Hess\,\psi(x_0')$ e $\nabla_{\xi'}p = \nabla_{\xi'}p(\rho_0)$.
Inoltre, in questo caso, si può fissare in modo quasi arbitrario l'n-esima componente $\varphi|_{x_n=x_n^0}$.

Capitolo 4

Applicazioni alla meccanica quantistica

Si considera ora $n = d + 1$, $x' = q \in \mathbb{R}^d$ e $x_n = t \in \mathbb{R}$ con la funzione di variabile temporale.

Si definisce inoltre una nuova funzione $\tilde{H} = \tilde{H}(q, p)$ a valori scalari, in cui anche $p \in \mathbb{R}^d$.

Il risultato precedente permette di trovare, $\forall\, y \in \mathbb{R}^d$, una funzione

$$\varphi_y = \varphi_y(q, t) \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

che sia soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + \tilde{H}(q, \nabla_q \varphi_y(q, t)) = 0 \\ \varphi_y|_{t=0} = y \cdot q \end{cases} . \tag{4.2}$$

Si definisce una funzione

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{R}^{2n} & \to & \mathbb{R} \\ & (\underbrace{q, t}_{x}, \underbrace{p, \tau}_{\xi}) & \mapsto & \tau + \tilde{H}(q, p) \end{array}$$

tale per cui in questo caso l'ipotesi del corollario precedente diventi

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_n} = \frac{\partial H}{\partial \tau} = 1. \tag{4.3}$$

A partire da questa funzione φ_y si può costruire un operatore

$$U_t : f = f(q) \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(\varphi_y(q,t) - z \cdot q)/h} a_h(q,t,y) f(z)\, dq dz \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

dove $h > 0$ è la *costante di Planck* e a_h una funzione regolare tale che $\psi_t := U_t f$ sia soluzione approssimata dell'*equazione di Schrödinger*

$$\begin{cases} ih\frac{\partial \psi_t}{\partial t}(y) = \tilde{H}(y, \frac{h}{i}\nabla_y)\psi_t \\ \psi_t|_{t=0} = f \end{cases} \tag{4.5}$$

che descrive l'evoluzione di un sistema quantistico di Hamiltoniana $\tilde{H}$, analogamente alla famosa legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{4.6}$$

con errori che tendono a 0 molto velocemente per $h \to 0$.

Bibliografia

[1] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Meccanica Classica*, Bologna, Zanichelli, 2005.

[2] V. I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Roma, Editori Riuniti, 2010.

[3] A. G. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, New York, Springer, 2011.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare soprattutto la mia famiglia: i miei genitori, mia sorella, i miei nonni e zii; i miei coinquilini, che ormai considero fratelli acquisiti. Un pensiero non può che andare ai miei amici, sia i maceratesi, sia tutti quelli conosciuti a Bologna che sono diventati una seconda famiglia. Se avessi ricambiato anche solo un milionesimo del sostegno che tutti quanti mi avete dato sarei l'uomo più generoso del mondo.
Un ringraziamento speciale infine al Prof. Martinez per la pazienza e la disponibilità mostrate.