Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Supervarietà algebriche complesse: teoria ed applicazioni

Tesi di Laurea in Geometria

Relatrice:
Chiar.ma Prof.
RITA FIORESI

Presentata da:
LEONARDO CUOGHI

Sessione Unica
Anno Accademico 2015/2016

A Giampaolo, Francesca e Matteo
senza i quali oggi non sarei nulla.

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di definire e analizzare le varie tipologie di supervarietà su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$, dando spazio alla discussione approfondita di un esempio molto importante, la supervarietà grassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$.

L'interesse verso la supervarietà $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$, che è a tutti gli effetti un oggetto puramente matematico, è motivato, tuttavia, dalla fisica; in particolare dalla teoria della supersimmetria e dalla teoria dei campi quantici. Essa è infatti il frutto di una corrispondenza tra la supersimmetria delle particelle elementari e la supergeometria.

La supersimmetria è un potente strumento che fisici e matematici hanno sviluppato all'inizio degli anni '70 per trattare la convivenza, a livello microscopico (o *quantico*), di due tipi di particelle elementari, i *bosoni* (particelle prive di massa, come i *fotoni*) e i *fermioni* (comprendenti *protoni, neutroni* e *elettroni*).

Questa distinzione è basata su una grandezza, associata alle particelle, peculiare della meccanica quantistica: lo *spin*. I bosoni sono caratterizzati da uno spin intero, mentre i fermioni da uno spin semi-intero. Questi ultimi obbediscono al *principio di esclusione di Pauli*, secondo il quale due fermioni identici non possono occupare simultaneamente lo stesso spazio quantico.

In altre parole, possiamo descrivere i bosoni utilizzando funzioni d'onda che si comportano in modo simmetrico, mentre per descrivere i fermioni utilizziamo funzioni d'onda che si comportano in modo antisimmetrico. E' necessario prevedere la possibilità che, a causa delle interazioni fisiche, particelle descritte da funzioni simmetriche diano vita a particelle descritte da funzioni antisimmetriche e viceversa: la supersimmetria ci permette di introdurre questi nuovi tipi di trasformazioni che nella simmetria ordinaria non sono possibili, almeno non in modo naturale.

I bosoni saranno dunque descritti da funzioni *even*, mentre i fermioni da funzioni *odd*, su quello che chiameremo un *superspazio*.

Seguendo questa linea di pensiero, un risultato molto importante che si può ottenere è un'identificazione analoga a quella proposta nel capitolo 5, ma nel caso super: vedere cioè che un allargamento supersimmetrico dello spazio di Minkowski con delle coordinate *odd* (o *fermioniche*) può essere identificato con la grande cella dentro la supergrassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$.

Questo è sicuramente uno dei risultati più interessanti della supersimmetria, che per questioni di tempo e di complessità non tratteremo in questa tesi, ma lo studio del quale può essere approfondito, per esempio, in [3], [4], [6], [7], [9], [10].

Nel capitolo 1 proporremo un ripasso delle nozioni di algebra, geometria e topologia, fondamentali per trattare gli argomenti della tesi.

Per poter arrivare successivamente a parlare di supervarietà, introdurremo nel capitolo 2 i concetti di base di superalgebra lineare, quali le definizioni di superspazio vettoriale, superalgebra, supermodulo e matrice a valori in un superspazio, e le loro proprietà fondamentali.

Dedicheremo poi il capitolo 3 all'analisi della varietà grassmanniana ordinaria $G(2,4)$ dei sottospazi 2-dimensionali dello spazio 4-dimensionale complesso $\mathbb{C}^4$, mostrando come questa assuma la struttura di varietà algebrica analitica, e anche di varietà proiettiva: identificheremo infatti $G(2,4)$ con una sottovarietà algebrica dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, detta quadrica di Klein, tramite la cosiddetta immersione di Plücker. Tutto questo verrà poi ridiscusso nel caso super, una volta che parleremo di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$.

Nel capitolo 4 tratteremo l'argomento principale della tesi, ovvero la teoria delle supervarietà. Parleremo di fasci di algebre e superalgebre, strumenti molto utili per trattare concettualmente le varietà e le supervarietà, azioni di supergruppi e superspazi omogenei. Utilizzeremo anche il linguaggio del funtore dei punti, per analizzare gli oggetti del nostro studio dal punto di vista della teoria delle categorie.

Svilupperemo poi dettagliatamente il caso della supervarietà grassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$, l'estensione supergeometrica della varietà $G(2,4)$. Vedremo $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ come supervarietà analitica e come superspazio omogeneo, studieremo il suo funtore dei punti e mostreremo come, attraverso la super immersione di Plücker, questa sia isomorfa ad una supervarietà proiettiva dentro al superspazio $\mathbb{P}^{6|4}$, detta super quadrica di Klein.

Infine nel capitolo 5 vedremo come lo spaziotempo di Minkowski, oggetto molto importante nella teoria fisica della relatività, possa essere identificato con la *grande cella* U_{12}, un particolare aperto di $G(2,4)$.

Indice

Capitolo 1

Preliminari

In questo capitolo ci proponiamo di richiamare quelle nozioni di algebra commutativa che ci permetteranno poi di introdurre gli elementi alla base della cosiddetta *superalgebra lineare*. Per approfondimenti si faccia riferimento a [1] (capitolo 1), [11] (capitolo 1).

1.1 Anelli, omomorfismi di anelli e ideali

Per prima cosa richiamiamo alcuni concetti base di teoria degli anelli.

Definizione 1.1.1. Un *anello* A è un insieme con due operazioni binarie $(A, +, \cdot)$ tali che:

1. $(A, +)$ è un gruppo abeliano;
2. la moltiplicazione è associativa e distributiva rispetto alla somma:

$$(xy)z = x(yz), \quad \forall x, y, z \in A,$$
$$x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx, \quad \forall x, y, z \in A.$$

   Consideriamo poi anelli che sono *commutativi*:

3. $xy = yx, \quad \forall x, y \in A,$

   e aventi un *elemento identità* 1:

4. esiste ed è unico $1 \in A$ tale che $x1 = 1x = x, \forall x \in A$.

Se nell'anello A, 1 coincide con 0, allora A ha come unico elemento 0, e si indica $A = \mathbf{0}$.

Definizione 1.1.2. Un *omomorfismo* è una mappa f da un anello A a un anello B tale che:

i. $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in A;$

ii. $f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in A;$

iii. $f(1_A) = 1_B$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono omomorfismi di anelli, allora anche la loro composizione $g \circ f : A \to C$ è un omomorfismo di anelli.

Un sottoinsieme S di un anello A è un *sottoanello* di A se è chiuso rispetto alla somma e al prodotto e contiene l'identità di A. La mappa identità da S in A è un omomorfismo di anelli.

Ricordiamo ora il concetto fondamentale di ideale di un anello.

Definizione 1.1.3. Un *ideale* $\mathfrak{a}$ di un anello A è un sottogruppo additivo di A tale che $A\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, ovvero:

$$x \in A,\ y \in \mathfrak{a} \implies xy \in \mathfrak{a}.$$

Definizione 1.1.4. Si dice *anello quoziente* il gruppo quoziente $A/\mathfrak{a}$ ereditante (in maniera unica) la moltiplicazione da A, assieme alla quale forma un anello.

Gli elementi di $A/\mathfrak{a}$ sono i laterali di $\mathfrak{a}$ in A, e l'applicazione $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ che mappa ogni $x \in A$ nel suo laterale $x + \mathfrak{a}$ è un omomorfismo di anelli suriettivo. Molto frequente è l'utilizzo del seguente risultato:

Proposizione 1.1.5. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali $\mathfrak{b}$ di A che contengono $\mathfrak{a}$ e gli ideali $\bar{\mathfrak{b}}$ di $A/\mathfrak{a}$ dati da $\mathfrak{b} = \phi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$.* □

Se $f : A \to B$ è un qualsiasi omomorfismo di anelli, il *nucleo* di f (ovvero $f^{-1}(0)$) è un ideale $\mathfrak{a}$ di A, e l'*immagine* di f (ovvero $f(A)$) è un sottoanello C di B; inoltre, f induce un isomorfismo di anelli $A/\mathfrak{a} \simeq C$

Continuando a parlare di elementi all'interno di anelli, diamo le definizioni di nilpotente, divisore dello zero e unità, anch'esse importanti per la supergeometria.

Definizione 1.1.6. Un elemento $x \in A$ si dice *divisore dello zero* se esiste un elemento $y \neq 0$ in A tale che $xy = 0$. Un anello privo di divisori dello zero $\neq 0$ si dice *dominio d'integrità*. Per esempio, $\mathbb{Z}$ e $k[x_1, \ldots, x_n]$ (con k campo) sono domini d'integrità.

Definizione 1.1.7. Un elemento $x \in A$ si dice *nilpotente* se per un certo numero naturale $n > 0$ si ha $x^n = 0$. Un elemento nilpotente è sempre un divisore dello zero (a meno che $A = \mathbf{0}$), mentre il viceversa non è vero (in generale).

Definizione 1.1.8. Un elemento $x \in A$ si dice *unità* se esiste un elemento $y \in A$ tale che $xy = 1$. L'elemento y è univocamente determinato da x, e si denota con x^{-1}. Le unità in A formano un gruppo moltiplicativo abeliano.

I multipli ax di un elemento $x \in A$ formano un ideale *principale* di A, denotato con (x) o Ax. x è un'unità se e solo se $(x) = A = (1)$. L'ideale (0) viene di solito indicato con 0.

Un *campo* è un anello A in cui $1 \neq 0$ e ogni elemento non nullo è un'unità. Ogni campo è un dominio d'integrità (ma non viceversa: $\mathbb{Z}$ non è un campo).

Proposizione 1.1.9. *Sia A un anello $\neq \mathbf{0}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i. *A è un campo;*

ii. *gli unici ideali in A sono 0 e (1);*

iii. *ogni omomorfismo che mappa A in un anello $B \neq \mathbf{0}$ è iniettivo.*

Dimostrazione. Si veda [1], capitolo 1, proposizione 1.2. □

1.2 Ideali primi, ideali massimali e varietà affini

Vediamo ora due particolari classi di ideali che caratterizzano in maniera rilevante la struttura di anello.

Definizione 1.2.1. Un ideale $\mathfrak{p}$ in A si dice *primo* se $\mathfrak{p} \neq (1)$ e se $xy \in \mathfrak{p}$ implica $x \in \mathfrak{p}$ oppure $y \in \mathfrak{p}$. Un ideale $\mathfrak{m}$ in A si dice *massimale* se $\mathfrak{m} \neq (1)$ e se non esiste alcun ideale $\mathfrak{a}$ tale che $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$. Equivalentemente:

$$\mathfrak{p} \text{ è primo } \Leftrightarrow A/\mathfrak{p} \text{ è un dominio d'integrità;}$$
$$\mathfrak{m} \text{ è massimale } \Leftrightarrow A/\mathfrak{m} \text{ è un campo.}$$

Quindi un ideale massimale è anche primo (ma non viceversa, in generale). L'ideale 0 è primo se e solo se A è un dominio d'integrità.

Riportiamo ora di seguito alcuni importanti risultati riguardanti gli ideali massimali.

Teorema 1.2.2. *Ogni anello $A \neq 0$ ha almeno un ideale massimale.*

Corollario 1.2.3. *Se $\mathfrak{a} \neq (1)$ è un ideale di A, esiste un ideale massimale di A che contiene $\mathfrak{a}$.*

Corollario 1.2.4. *Ogni non-unità di A è contenuto in un ideale massimale.*

Un anello A con esattamente un ideale massimale è detto *anello locale.*

Proposizione 1.2.5. *i) Sia A un anello e $\mathfrak{m} \neq (1)$ un ideale di A tale che ogni $x \in A - \mathfrak{m}$ è un unità in A. Allora A è un anello locale e $\mathfrak{m}$ il suo ideale massimale.*
ii) Sia A un anello e $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A tale che ogni elemento di $1 + \mathfrak{m}$ è un unità in A. Allora A è un anello locale.

Per le dimostrazioni di questi risultati, si faccia sempre riferimento a [1], capitolo 1. $\square$

Esempio 1.2.6. Sia $A = k[x_1, ..., x_n]$, con k campo, e sia $f \in A$ un polinomio irriducibile. Per fattorizzazione unica, l'ideale (f) è primo.

Esempio 1.2.7. Sia $A = \mathbb{Z}$. Ogni ideale di $\mathbb{Z}$ è della forma (m), per qualche $m \geq 0$, e (m) è primo se e solo se $m = 0$ oppure m è un numero primo. Ogni ideale (p), con p primo, è massimale, e $\mathbb{Z}/(p)$ è un campo con p elementi.

Esempio 1.2.8. Un *dominio a ideali principali* è un dominio d'integrità dove ogni ideale è principale. In un anello del genere, ogni ideale primo $\neq 0$ è massimale.

Diamo ora la definizione di radicale di un ideale.

Definizione 1.2.9. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A. Si dice *radicale* di $\mathfrak{a}$ l'insieme

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ per qualche } n > 0\}.$$

Il radicale di un ideale di A è ancora un ideale di A, e si ha

$$r(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{a}.$$

Se si ha $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ si dice *ideale radicale.*

Nelle prossime pagine vogliamo costruire un collegamento, tipico della geometria algebrica, tra questi argomenti (puramente algebrici) e teorie più prettamente geometriche (come la topologia o la teoria delle varietà)

Definizione 1.2.10. Sia A un anello e sia X l'insieme dei suoi ideali primi. X è detto *spettro primo* di A, e si indica anche con $\mathrm{Spec}(A)$.

Vogliamo far vedere che $X = \mathrm{Spec}(A)$ possiede la struttura di spazio topologico.

Per ogni sottoinsieme E di A, denotiamo con $V(E)$ l'insieme di tutti gli ideali primi contenenti E. Vediamo che:

i. se $\mathfrak{a}$ è l'ideale generato da E, allora $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

   Per definizione, $\mathfrak{a}$ è il più piccolo ideale contenente E. Se $\mathfrak{a}$ è primo, allora $V(E) = \mathfrak{a} \cup V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$.
   Se $\mathfrak{a}$ non è primo, allora $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(E)$. Supponiamo esista un $\mathfrak{b}$ primo tale che $\mathfrak{b} \in V(E)$, $\mathfrak{b} \notin V(\mathfrak{a})$; allora $\mathfrak{b}$ contiene E ed è più piccolo di $\mathfrak{a}$, assurdo. Quindi dovrà essere $V(E) = V(\mathfrak{a})$.

ii. $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.

   Ogni ideale contiene 0, quindi a maggior ragione ogni ideale primo contiene 0, mentre ogni ideale contenente 1 è uguale ad A, quindi non è primo.

iii. Se $(E_i)_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi di A, allora

$$V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(E_i).$$

   Sia $\mathfrak{p} \in X$. Allora

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset \bigcup_{i \in I} E_i \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \supset E_i \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(E_i) \quad \forall i \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i). \end{aligned}$$

iv. $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ per ogni $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ideali di A.

   Dimostriamo che se $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, allora $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ oppure $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$.
   Supponiamo che $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{b}$. Presi $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$, $y \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{p}$, si ha $xy \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, assurdo, perchè $\mathfrak{p}$ è primo. Quindi si ha $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.
   Ora, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$, cioè $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Quindi $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. D'altra

parte, analogamente a prima, se $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{ab}$, allora $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} \vee \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$. Quindi si ha:

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}),$$

ma, dal momento che abbiamo dimostrato l'uguaglianza del primo e del terzo membro, si ottiene:

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}).$$

Questi risultati mostrano che gli insiemi $V(E)$ soddisfano gli assiomi per gli insiemi chiusi di uno spazio topologico.

Definizione 1.2.11. La topologia risultante è detta *topologia di Zariski* per lo spazio topologico $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Proposizione 1.2.12. *Per ogni $f \in A$, denotiamo con X_f il complementare di $V(f)$ in $X = \mathrm{Spec}(A)$. Gli insiemi X_f sono aperti. Essi formano una base di aperti per la topologia di Zariski, e si ha:*

i. $X_f \cap X_g = X_{fg}$;

ii. $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ *è nilpotente;*

iii. $X_f = X \Leftrightarrow f$ *è un'unità.*

Dimostrazione. Per ogni $E \subseteq A$, $V(E)$ è chiuso, quindi $X_E = V(E)^C$ è aperto, e ogni X_E si può scrivere come $X_E = \bigcup_{e \in E} X_e$.
i) Se un ideale primo non contiene nè f nè g, allora non contiene fg. Viceversa, se un ideale non contiene fg, allora non contiene nè f nè g.
ii) Sia f nilpotente. Se $f \notin \mathfrak{p}$, allora $f^n \notin \mathfrak{p} \quad \forall n$, ma allora $0 \notin \mathfrak{p}$, assurdo.
Viceversa, se tutti i $\mathfrak{p}$ primi contengono f, allora f appartiene all'intersezione di tutti gli ideali primi di A, quindi è nilpotente.
iii) Sia f un'unità. Se $\mathfrak{p} \ni f$, allora $\mathfrak{p} \ni 1$, cioè $\mathfrak{p} = A$. Quindi nessun $\mathfrak{p}$ dovrà contenere f.
Viceversa, supponiamo che nessun $\mathfrak{p}$ contenga f. Se f non è un'unità, allora f è contenuto in un ideale massimale. Ma un ideale massimale è anche primo, quindi f dovrà essere un'unità. □

Definizione 1.2.13. Sia A un anello. Il sottospazio di $\mathrm{Spec}(A)$ costituito dagli ideali *massimali* di A, con la topologia indotta, è detto *spettro massimale* di A e si denota con $\mathrm{Max}(A)$.

Sia ora X uno spazio compatto e di Hausdorff, e denotiamo con $C(X)$ l'anello di tutte le funzioni continue a valori reali su X. Preso un $x \in X$, sia $\mathfrak{m}_x$ l'insieme di tutte le $f \in C(X)$ tali che $f(x) = 0$. L'ideale $\mathfrak{m}_x$ è massimale, perchè è il nucleo dell'omomorfismo (suriettivo) $C(X) \to \mathbb{R}$ che manda f in $f(x)$.
Se scriviamo $\tilde{X} = \mathrm{Max}(C(X))$, abbiamo perciò definito una mappa

$$\begin{aligned} \mu : X &\to \tilde{X}, \\ x &\mapsto \mathfrak{m}_x. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si dimostra che μ è un omeomorfismo di X in $\tilde{X}$, e in particolare, se $f \in C(X)$:

$$\begin{gathered} \mu(U_f) = \tilde{U}_f, \\ \text{dove } \; U_f = \{x \in X : f(x) \neq 0\} \\ \text{e } \; \tilde{U}_f = \{\mathfrak{m} \in \tilde{X} : f \notin \mathfrak{m}\}. \end{gathered}$$

Sia ora k un campo algebricamente chiuso e sia

$$f_a(t_1, \ldots, t_n) = 0$$

un insieme di equazioni polinomiali in n variabili a coefficienti in k. L'insieme X di tutti i punti $x = (x_1, ..., x_n) \in k^n$ che soddisfano queste equazioni è una *varietà algebrica affine.*
Consideriamo l'insieme di tutti i polinomi $g \in k[t_1, ...t_n]$ tali che $g(x) = 0$ per ogni $x \in X$. Questo insieme è un ideale $\mathfrak{I}(X)$ nell'anello dei polinomi, ed è chiamato l'*ideale di definizione della varietà* X. L'anello quoziente

$$P(X) = k[t_1, \ldots, t_n]/\mathfrak{I}(X)$$

è l'anello delle funzioni polinomiali su X, perchè due polinomi g, h definiscono la stessa funzione polinomiale su X se e solo se $g - h$ si annulla in ogni punto di X, cioè se e solo se $g - h \in \mathfrak{I}(X)$.
Sia ξ_i l'immagine di t_i in $P(X)$. Gli ξ_i $(1 \leq i \leq n)$ sono le *funzioni coordinate* su X: se $x \in X$, allora $\xi_i(x)$ è la i-esima coordinata di x. $P(X)$ è generato, come k-algebra, dalle funzioni coordinate, ed è chiamato l'*anello delle coordinate* (o *algebra affine*) di X.
Come nell'esercizio precedente, per ogni $x \in X$ sia $\mathfrak{m}_x$ l'ideale di tutte le $f \in P(X)$ tali che $f(x) = 0$; quest'ultimo è un ideale massimale di $P(X)$. Dunque, se $\tilde{X} = \mathrm{Max}(P(X))$, abbiamo definito una mappa $\mu : X \to \tilde{X}$, ossia $x \mapsto \mathfrak{m}_x$.
È facile mostrare che μ è iniettiva: se $x \neq y$, deve essere $x_i \neq y_i$ per qualche

i, e quindi $\xi_i - x_i$ è in $\mathfrak{m}_x$ ma non in $\mathfrak{m}_y$, perciò $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. Meno ovvio (ma comunque vero) è il fatto che μ sia anche suriettiva.

Proponiamo adesso un altro procedimento per definire le varietà algebriche affini. Per approfondimenti e dimostrazioni si veda [11], capitolo 1.

Sia $\mathbb{C}$ il nostro campo di riferimento (in generale un campo algebricamente chiuso). Definiamo *n-spazio affine* su $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{C}^n$ di tutte le n-ple di elementi di $\mathbb{C}$. Un elemento $P \in \mathbb{C}^n$ è detto *punto*, e se $P = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in \mathbb{C}$, allora chiameremo le a_i *coordinate* di P.

Consideriamo ora gli elementi di $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ come funzioni dallo spazio affine a $\mathbb{C}$:

$$f(P) = f(a_1, \ldots, a_n), \qquad f \in A, \quad P \in \mathbb{C}^n.$$

Definiamo l'insieme degli *zeri* di f come $Z(f) = \{\, P \in \mathbb{C}^n \mid f(P) = 0 \,\}$. Più in generale, se T è un qualsiasi sottoinsieme di A, definiamo l'*insieme zero* di T come gli zeri comuni a tutti gli elementi di T, ovvero

$$Z(T) = \{\, P \in \mathbb{C}^n \mid f(P) = 0 \text{ per ogni } f \in T \,\}.$$

Chiaramente, se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A generato di T, allora $Z(T) = Z(\mathfrak{a})$. D'altra parte, dal momento che A è noetheriano, ogni ideale $\mathfrak{a}$ ha un insieme finito di generatori $f_1, \ldots, f_r$. Quindi $Z(T)$ può essere espresso come l'insieme degli zeri comuni all'insieme finito di polinomi $f_1, \ldots, f_r$.

Definizione 1.2.14. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{C}^n$ è detto *insieme algebrico* se esiste un sottoinsieme $T \subseteq A$ tale che $Y = Z(T)$

Proposizione 1.2.15. *L'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico. L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico. Il vuoto e l'intero spazio $\mathbb{C}^n$ sono insiemi algebrici* □

A questo punto possiamo definire la *topologia di Zariski* su $\mathbb{C}^n$ prendendo come insiemi aperti i complementari degli insiemi algebrici. Diremo poi che un sottoinsieme Y di uno spazio topologico è detto *irriducibile* se non può essere espresso come l'unione $Y = Y_1 \cup Y_2$ di due suoi sottoinsiemi propri, ognuno dei quali è strettamente contenuto in Y.

Definizione 1.2.16. Una *varietà algebrica affine* (o semplicemente *varietà affine*) è un sottoinsieme chiuso irriducibile di $\mathbb{C}^n$ (con la topologia indotta). Un sottoinsieme aperto di una varietà affine si dice *varietà quasi-affine*.

1.3 Il teorema degli zeri di Hilbert

Riportiamo ora uno dei risultati fondamentali per quanto riguarda la geometria algebrica. Per approfondimenti, si veda [2], capitolo 4.

Teorema 1.3.1 (Teorema degli zeri di Hilbert (*Nullstellensatz*))**.** *Sia J un ideale di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ e denotiamo con $V(J) \subset \mathbb{C}^n$ l'insieme dei vettori $\mathbf{z}$ tali che $p(\mathbf{z}) = 0$ per ogni $p \in J$. Se un qualche polinomio $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ si annulla su $V(J)$ (cioè se $f \in \mathfrak{I}(V(J))$), allora esiste un intero $d > 0$ dipendente da J tale che $f^d \in J$.*
In altre parole

$$\mathfrak{I}(V(J)) = r(J).$$

Dimostrazione. Si veda [2], capitolo 4, sezione 1. □

Questo importantissimo risultato, insieme alla costruzione vista prima, ci permette di dire che la mappa μ in (1.1) è a tutti gli effetti una biezione tra i *punti* di una varietà algebrica affine X di $\mathbb{C}^n$ e gli ideali *massimali* $\mathfrak{m}_x = \{f \in P(X) \mid f(x) = 0\}$:

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{\mu}{\longleftrightarrow} & P(X), \\ x & \stackrel{\mu}{\longleftrightarrow} & \mathfrak{m}_x. \end{array}$$

Più in generale, gli ideali *radicali* J di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ sono in corrispondenza biunivoca con le *varietà algebriche affini* $V(J)$ di $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{array}{ccc} J & \stackrel{V}{\longrightarrow} & V(J), \\ \mathfrak{I}(X) & \stackrel{\mathfrak{I}}{\longleftarrow} & X, \end{array}$$

mentre gli ideali *primi* di $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ sono in corrispondenza biunivoca con la varietà algebriche affini *irriducibili*, ovvero quelle varietà V non vuote che non possono scriversi come unione $V = V_1 \cup V_2$ di due varietà strettamente contenute in V.

Riassumendo:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ideali radicali di } \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]\} & \stackrel{\mu}{\longleftrightarrow} & \{\text{varietà algebriche affini di } \mathbb{C}^n\}, \\ \{\text{ideali primi di } \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]\} & \longleftrightarrow & \{\text{varietà irriducibili di } \mathbb{C}^n\}, \\ \{\text{ideali massimali di } \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]\} & \longleftrightarrow & \{\text{punti di } \mathbb{C}^n\}. \end{array}$$

1.4 Varietà proiettive

In questa sezione vogliamo definire le varietà proiettive con un procedimento analogo a quello utilizzato per definire le varietà affini, con la differenza che d'ora in poi lavoreremo in uno spazio proiettivo. Si prenda come testo di riferimento [11].

Definiamo *n-spazio proiettivo* su $\mathbb{C}$, denotato con $\mathbb{P}^n$, come l'insieme delle classi di equivalenza delle $(n+1)$-ple $(a_0, \ldots, a_n)$ di elementi non tutti nulli di $\mathbb{C}$, rispetto alla relazione d'equivalenza data da $(a_0, \ldots, a_n) \sim (\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$. In altre parole:

$$\mathbb{P}^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}}{\sim},$$

dove $\mathbb{C}^{n+1}$ è lo spazio vettoriale standard su $\mathbb{C}$.

Ogni elemento di $\mathbb{P}^n$ è detto punto dello spazio proiettivo. Se P è un punto di $\mathbb{P}^n$, allora ogni $(n+1)$-pla $(a_0, \ldots, a_n)$ nella classe d'equivalenza di P è detta *insieme delle coordinate omogenee* di P.

Vogliamo considerare ora l'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ come un anello graduato. Un *anello graduato* è un anello S insieme ad una decomposizione $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ di S in una somma diretta di gruppi abeliani S_d, tali che per ogni $d, e \geq 0$, $S_d \cdot S_e \subseteq S_{d+e}$. Un elemento di S_d è detto *elemento omogeneo di grado d*. Quindi ogni elemento di S può essere scritto in maniera unica come una somma (finita) di elementi omogenei.

Un ideale $\mathfrak{a} \subseteq S$ è un *ideale omogeneo* se $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geq 0}(\mathfrak{a} \cap S_d)$. Un ideale è omogeneo se e solo se è generato da elementi omogenei. La somma, il prodotto, l'intersezione, e il radicale di un ideale omogeneo sono omogenei. Condizione sufficiente affinchè un ideale omogeneo $\mathfrak{a}$ sia primo è che per ogni due elementi *omogenei* f, g, tali che $fg \in \mathfrak{a}$, si ha $f \in \mathfrak{a}$ oppure $g \in \mathfrak{a}$.

Consideriamo a questo punto l'ideale $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ come un anello graduato, dove per ogni $d \geq 0$ prendiamo come S_d l'insieme di tutte le combinazioni lineari di monomi di grado d in $x_0, \ldots, x_n$. Se $f \in S$ è un polinomio, non possiamo usarlo per definire una funzione su $\mathbb{P}^n$, a causa della non-unicità delle coordinate omogenee. Tuttavia, se f è un polinomio omogeneo di grado d, allora $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \ldots, a_n)$, e quindi la proprietà di f di essere zero oppure no dipende solo dalla classe di equivalenza di $(a_0, \ldots, a_n)$. Allora f dà una funzione da $\mathbb{P}^n$ a $\{0, 1\}$ secondo la quale $f(P) = 0$ se $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$, e $f(P) = 1$ se $f(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$.

A questo punto possiamo parlare dell'insieme degli *zeri* di un polinomio omogeneo, ovvero $Z(f) = \{ P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \}$. Se T è un qualsiasi insieme di elementi omogenei di S, definiamo l'*insieme zero* di T come

$$Z(T) = \{ P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \text{ per ogni } f \in T \}.$$

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale omogeneo di S, definiamo $Z(\mathfrak{a}) = Z(T)$, dove T è l'insieme di tutti gli elementi omogenei di $\mathfrak{a}$. Dato che S è un anello noetheriano, cioè i cui ideali sono finitamente generati, ogni insieme di elementi omogenei T ha un sottoinsieme finito $f_1, \dots, f_r$ tale che $Z(T) = Z(f_1, \dots, f_r)$.

Definizione 1.4.1. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{P}^n$ è detto *insieme algebrico* se esiste un insieme T di elementi omogenei di S tale che $Y = Z(T)$.

Proposizione 1.4.2. *L'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico. L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico. L'insieme vuoto e l'intero spazio ambiente sono insiemi algebrici.* □

Definizione 1.4.3. Definiamo la *topologia di Zariski* su $\mathbb{P}^n$ prendendo come insiemi aperti i complementari degli insiemi algebrici.

Una volta definita la topologia per $\mathbb{P}^n$, possiamo dare la definizione di varietà proiettiva.

Definizione 1.4.4. Una *varietà algebrica proiettiva* (o semplicemente *varietà proiettiva*) è un insieme algebrico irriducibile di $\mathbb{P}^n$, con la topologia indotta. Un sottoinsieme aperto di una varietà proiettiva si dice *varietà quasi-proiettiva*. La *dimensione* di una varietà proiettiva o quasi-proiettiva è la sua dimensione come spazio topologico.
Se Y è un sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$, definiamo l'*ideale omogeneo* di Y in S, denotato con $I(Y)$, come l'ideale generato da

$$\{\, f \in S \ \mid\ f \text{ è omogeneo e } f(P) = 0 \text{ per ogni } P \in Y \,\}.$$

Se Y è un insieme algebrico, definiamo l'*anello delle coordinate omogenee* di Y come $S(Y) = S/I(Y)$.

Il nostro prossimo obiettivo è mostrare che un n-spazio proiettivo ammette un ricoprimento aperto costituito da n-spazi affini, e quindi che ogni varietà proiettiva ammette un ricoprimento aperto di varietà affini. Prima introduciamo qualche notazione.

Se $f \in S$ è un polinomio lineare omogeneo, allora l'insieme zero di f è chiamato *iperpiano*. In particolare denotiamo l'insieme zero di x_i con H_i, per $i = 0, \dots, n$. Sia U_i l'insieme aperto $\mathbb{P}^n \setminus H_i$. Allora $\mathbb{P}^n$ è ricoperto dagli aperti U_i, dal momento che se $P = (a_0, \dots, a_n)$ è un punto, dovrà avere almeno una $a_i \neq 0$, quindi $P \in U_i$. Definiamo poi una mappa $\phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$

come segue: se $P = (a_0, \dots, a_n) \in U_i$, allora $\phi_i(P) = Q$, dove Q è il punto di coordinate affini

$$\left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right),$$

con a_i/a_i omesso. Notare che ϕ_i è ben definita dal momento che le frazioni a_i/a_i sono indipendenti dalla scelta delle coordinate omogenee.

Proposizione 1.4.5. *La mappa ϕ_i è un omeomorfismo di U_i, con la sua topologia indotta, in $\mathbb{C}^n$, con la topologia di Zariski.*

Corollario 1.4.6. *Se Y è una varietà proiettiva, allora Y è ricoperta dagli aperti $Y \cap U_i$, $i = 0, \dots, n$, i quali sono omeomorfi alle varietà affini tramite le mappe ϕ_i definite sopra.*

Per le dimostrazioni si veda [11], capitolo 1, sezione 2.

1.5 Morfismi e azioni di gruppi

In questa sezione vogliamo definire i morfismi di varietà e le azioni di gruppi. Per poter fare ciò, definiamo per prima cosa le funzioni regolari su una varietà.

Sia Y una varietà quasi-affine di $\mathbb{C}^n$, e consideriamo le funzioni f da Y a $\mathbb{C}$.

Definizione 1.5.1. Una funzione $f : Y \to \mathbb{C}$ si dice *regolare in un punto* $P \in Y$ se esistono un intorno aperto U con $P \in U \subseteq Y$, e due polinomi $g, h \in A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, tali che h non si annulla mai in U, e $f = g/h$ in U. Diremo che f è *regolare su* Y se è regolare in ogni punto di Y.

Lemma 1.5.2. *Una funzione regolare è continua, quando $\mathbb{C}$ è identificato con la retta $\mathbb{C}^1$ con la topologia di Zariski.* □

Ora consideriamo una varietà quasi-proiettiva $Y \subseteq \mathbb{P}^n$.

Definizione 1.5.3. Una funzione $f : Y \to \mathbb{C}$ si dice *regolare in un punto* $P \in Y$ se esistono un intorno aperto U con $P \in U \subseteq Y$, e due polinomi omogenei $g, h \in S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, dello stesso grado, tali che h non si annulla mai in U, e $f = g/h$ in U. Diremo che f è *regolare su* Y se è regolare in ogni punto di Y.

Osservazione 1.5.4. Come nel caso quasi-affine, una funzione regolare è necessariamente continua. Un'importante conseguenza di questo fatto è che se f e g sono funzioni regolari su una varietà X, e se $f = g$ su qualche sottoinsieme aperto non vuoto $U \subseteq X$, allora $f = g$ dappertutto. Infatti, l'insieme di punti dove $f - g = 0$ è chiuso e denso, quindi è uguale a X.

Possiamo ora definire la categoria delle varietà, e quindi i morfismi tra varietà.

Definizione 1.5.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Una *varietà su k* (o semplicemente *varietà*) è una qualsiasi varietà affine, quasi-affine, proiettiva, o quasi-proiettiva che abbiamo descritto prima. Se X, Y sono due varietà, un *morfismo* $\varphi : X \to Y$ è una mappa continua tale che per ogni aperto $V \subseteq Y$, ed ogni funzione regolare $f : V \to k$, la funzione $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$ è regolare.

La composizione di due morfismi è un morfismo, quindi abbiamo una categoria. In particolare, abbiamo la nozione di isomorfismo: un *isomorfismo* $\varphi : X \to Y$ di due varietà è un morfismo che ammette un morfismo inverso $\psi : Y \to X$ con $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ e $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Notare che un isomorfismo è necessariamente un morfismo biettivo e bicontinuo, mentre il viceversa in generale non è vero.

Diamo ora la definizione di azione di un gruppo su una varietà.

Definizione 1.5.6. Siano G un gruppo e M una varietà. Si dice *azione di G su M* un morfismo:

$$\begin{array}{rccc} a: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

che soddisfi le seguenti proprietà:

1. $1_G \cdot x = x$, $\forall x \in M$;
2. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, $\forall x \in M$, e $\forall g_1, g_2 \in G$.

L'azione a si dice *transitiva* se per ogni $x, y \in M$, esiste un $g \in G$ tale che $y = g \cdot x$. In questo caso, la varietà M prende il nome di *spazio omogeneo*.

Capitolo 2

Superalgebra lineare

L'algebra lineare è fondamentale per poter affrontare gli argomenti di teoria delle varietà e geometria algebrica di cui ci occuperemo in questa tesi. Pertanto in questo capitolo affronteremo lo studio dell'algebra in un contesto $\mathbb{Z}_2$-graduato, a cui ci riferiremo con l'aggettivo *super*.

L'idea di base è di sviluppare la teoria seguendo le stesse linee della teoria ordinaria, apportando modifiche là dove è necessario. Noi quindi per prima cosa costruiremo i fondamenti dell'algebra lineare nel contesto super. Per questo capitolo i nostri testi di riferimento saranno [3] (capitolo 1), [4] (capitolo 1), [7], [9] (capitolo 3), [10].

2.1 Superspazi vettoriali

Fissiamo un campo k di riferimento, con $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$.

Definizione 2.1.1. Un *superspazio vettoriale* è uno spazio vettoriale V $\mathbb{Z}_2$-graduato:

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

dove V_0 e V_1 sono sottospazi di V. Gli elementi di V_0 sono detti *even* (pari), mentre quelli di V_1 sono detti *odd* (dispari). La *parità* di $v \in V$, denotata con $p(v)$ o $|v|$, è definita solo per gli elementi *omogenei* non nulli, cioè per gli elementi o di V_0 o di V_1:

$$p(v) = |v| = \begin{cases} 0 & \text{se } v \in V_0 \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{se } v \in V_1 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

In generale, un elemento $v = v_0 + v_1 \in V$, con $v_0 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$, non è nè pari nè dispari. Se V è finito dimensionale e fissiamo una base omogenea

$v_1, \ldots, v_m, \nu_1, \ldots, \nu_n$, dove $v_i \in V_0$, $\nu_j \in V_1$, allora possiamo identificare:

$$V \cong k^m \oplus k^n$$

Se $m = \dim(V_0)$ e $n = \dim(V_1)$, indichiamo con $m|n$ la *superdimensione* del superspazio V e indichiamo il superspazio $k^m \oplus k^n$ con la notazione $k^{m|n}$.

Se $(e_1, \ldots, e_m)$ è la base canonica per k^m, e $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ è la base canonica per k^m, indichiamo con $(e_1, \ldots, e_m, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la *base canonica* di $k^{m|n}$.

Definizione 2.1.2. Un *morfismo* da un superspazio vettoriale V ad un superspazio vettoriale W è una mappa lineare da V a W che preserva la parità. Indichiamo con $\mathrm{Hom}(V, W)$ lo spazio vettoriale dei morfismi da V in W.

Se denotiamo con $\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)$ *tutte* le mappe lineari da v a W, abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_0 = \{T : V \to W \mid T \text{ preserva la parità}\} \quad (= \mathrm{Hom}(V, W));\\
&\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_1 = \{T : V \to W \mid T \text{ inverte la parità}\}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Se $V = k^{m|n}$ e $W = k^{p|q}$, abbiamo, nella base canonica (e_i, ϵ_j):

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

dove A, B, C, D sono rispettivamente matrici $(p \times m)$, $(p \times n)$, $(q \times m)$ e $(q \times n)$, a coefficienti in k. Per ogni $T \in \underline{\mathrm{Hom}}(V, W)_0 = \mathrm{Hom}(V, W)$ si ha:

$$T(V_0) \subseteq W_0, \quad T(V_1) \subseteq W_1.$$

Il prodotto tensoriale $V \otimes W$ di due superspazi vettoriali è ancora un superspazio vettoriale, con:

$$\begin{aligned}
(V \otimes W)_0 &= (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1),\\
(V \otimes W)_1 &= (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0).
\end{aligned}$$

Inoltre, $V \otimes W$ e $W \otimes V$ sono tra loro isomorfi attraverso la *mappa di commutatività*:

$$\begin{array}{rccc}
c_{V,W}: & V \otimes W & \longrightarrow & W \otimes V \\
& v \otimes w & \mapsto & (-1)^{|v||w|} w \otimes v.
\end{array}$$

Definizione 2.1.3. Una *superalgebra* è un super spazio vettoriale A insieme ad un morfismo moltiplicazione $\tau : A \otimes A \to A$.

Diremo che una superalgebra A è *(super)commutativa* se:

$$\tau \circ c_{A,A} = \tau,$$

cioè se il prodotto di elementi omogenei soddisfa la regola:

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba. \tag{2.2}$$

Similmente, diremo che A è *associativa* se:

$$\tau \circ (\tau \otimes \mathrm{id}) = \tau \circ (\mathrm{id} \otimes \tau) \quad \text{in } A \otimes A \otimes A,$$

ovvero se $(ab)c = a(bc)$. Diremo poi che A ha un'*unità* se c'è un elemento even 1 tale che:

$$\tau(1 \otimes a) = \tau(a \otimes 1) = a \quad \forall a \in A,$$

ovvero se $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Il prodotto tensoriale $A \otimes B$ di due superalgebre è ancora una superalgebra, con la seguente moltiplicazione:

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}(ac \otimes bd).$$

Esempio 2.1.4. Un esempio classico di superspazio vettoriale è la superalgebra dei polinomi $A = k[x_1, \dots, x_m] \otimes \bigwedge(\xi_1, \dots, \xi_n)$, dove $k[x_1, \dots, x_m]$ è l'algebra dei polinomi nelle m variabili even $x_1, \dots, x_m$ e $\bigwedge(\xi_1, \dots, \xi_n)$ è l'algebra esterna nelle n variabili odd $\xi_1, \dots, \xi_n$. Le variabili x_i, ξ_j soddisfano le proprietà:

$$\begin{aligned}
&x_i x_j = x_j x_i, \quad i, j = 1, \dots, m, \\
&x_i \xi_j = \xi_j x_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\
&\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i, \quad i, j = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

che seguono immediatamente da (2.2). Dall'ultima proprietà segue che $\xi_i^2 = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Indicheremo l'algebra A con $k[x_1, \dots, x_m, \xi_1, \dots, \xi_n]$ e la chiameremo la *superalgebra dei polinomi* nelle variabili even $x_1, \dots, x_m$ e odd $\xi_1, \dots, \xi_n$. Abbiamo:

$$A_0 = \Big\{ f_0 + \sum_{|I| \ even} f_I \xi_I \mid I = \{i_1 < ... < i_r\} \Big\},$$

dove $\xi_I = \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_r}$, $|I| = r$ e $f_0, f_I \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$, e

$$A_1 = \Big\{ \sum_{|J| \ odd} f_J \xi_J \mid J = \{j_1 < ... < j_s\} \Big\}.$$

Un generico polinomio $p \in A$ sarà quindi della forma:

$$p = \sum_{I,J} a_{IJ} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n}.$$

2.2 Moduli per superalgebre

Sia A una superalgebra, associativa ma non necessariamente commutativa.

Definizione 2.2.1. Un A-*supermodulo sinistro* è un superspazio vettoriale M con un morfismo $A \otimes M \to M$ ($a \otimes m \mapsto am$) di superspazi vettoriali che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $a(x+y) = ax + ay$,
2. $(a+b)x = ax + bx$,
3. $(ab)x = a(bx)$,
4. $1x = x$,

per ogni $a, b \in A$ e $x, y \in M$.

In maniera del tutto simile si definisce un A-*supermodulo destro*. Se A è commutativa, un A-supermodulo sinistro è anche A-supermodulo destro se definiamo la regola dei segni:

$$m \cdot a = (-1)^{|m||a|} a \cdot m, \quad m \in M,\ a \in A.$$

Avendo già la nozione di superspazio vettoriale $k^{p|q}$ su k, possiamo definire $A^{p|q} := A \otimes k^{p|q}$, dove:

$$\begin{aligned}(A^{p|q})_0 &= A_0 \otimes (k^{p|q})_0 \oplus A_1 \otimes (k^{p|q})_1,\\ (A^{p|q})_1 &= A_1 \otimes (k^{p|q})_0 \oplus A_0 \otimes (k^{p|q})_1.\end{aligned}$$

Possiamo scrivere equivalentemente:

$$\begin{aligned}A^{p|q} &= (A^{p|q})_0 \oplus (A^{p|q})_1\\ &= \mathrm{span}_A\{e_1, \dots, e_p, \epsilon_1, \dots, \epsilon_q\}.\end{aligned}$$

Diamo ora la definizione di A-supermodulo libero.

Definizione 2.2.2. Un A-supermodulo M si dice *libero* se è isomorfo a $A^{p|q}$ per qualche p, q.

Questa definizione equivale a dire che M contiene p elementi even $\{e_1, \dots, e_p\}$ e q elementi odd $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_q\}$ tali che:

$$M_0 = \mathrm{span}_{A_0}\{e_1, \dots, e_p\} \oplus \mathrm{span}_{A_1}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_q\},$$
$$M_1 = \mathrm{span}_{A_1}\{e_1, \dots, e_p\} \oplus \mathrm{span}_{A_0}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_q\}.$$

Diremo anche che M è il *supermodulo libero* generato su A dagli elementi even $e_1, \dots, e_p$ e dagli elementi odd $\epsilon_1, \dots, \epsilon_q$.

Sia ora $T : A^{p|q} \to A^{r|s}$ un morfismo di A-supermoduli liberi, e indichiamo gli elementi della base odd $\epsilon_1, \dots, \epsilon_q$ con $e_{p+1}, \dots, e_{p+q}$. Allora T è definito sulla base $\{e_1, \dots, e_{p+q}\}$ da:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{p+q} e_i t^i_j.$$

Notiamo che gli elementi della base *precedono* le coordinate t^i_j. Questo è importante per mantenere in ordine i segni, e viene in maniera naturale dalla composizione:

$$(S \cdot T)(e_j) = S\left(\sum_i e_i t^i_j\right) = \sum_{i,k} e_k s^k_i t^i_j.$$

T può essere rappresentato come una matrice $(r+s) \times (p+q)$:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

dove T_1 è una matrice $r \times p$ di elementi even di A, T_2 è una matrice $r \times q$ di elementi odd, T_3 è una matrice $s \times p$ di elementi odd, e T_4 è una matrice $s \times q$ di elementi even. Inoltre, per ogni $x \in A^{p|q}$ possiamo esprimere x come il vettore colonna $x = \sum e_i x^i$, e in questo modo $T(x)$ è dato dalla matrice prodotto Tx. Chiameremo T_1 e T_4 *blocchi even*, e T_2 e T_3 *blocchi odd*.

Notiamo anche che, dal momento che T per essere un morfismo di A-supermoduli deve preservare la parità, deve accadere che:

$$T((A^{p|q})_0) \subseteq (A^{r|s})_0, \quad T((A^{p|q})_1) \subseteq (A^{r|s})_1.$$

Quindi la parità degli elementi di ciascun blocco è determinata.

2.3 Il linguaggio delle matrici

Approfondiamo ora lo studio delle matrici a blocchi del tipo (2.3). Sia A un superalgebra commutativa. Vogliamo ora considerare *tutte* le mappe lineari da M a M, cioè ci interessiamo di $\underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$ (si veda (2.1)). In questo caso avremo a che fare con matrici del tipo

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix},$$

dove i generici elementi di ogni blocco R_i sono del tipo $a^i_j + \beta^i_j$, con a^i_j even e β^i_j odd:

$$R = \begin{pmatrix} (a^1_j + \beta^1_j)_j & (a^2_k + \beta^2_k)_k \\ \\ (a^3_r + \beta^3_r)_r & (a^4_s + \beta^4_s)_s \end{pmatrix}.$$

Ora, possiamo scomporre la matrice R nella somma di due matrici nel seguente modo:

$$R = \begin{pmatrix} (a^1_j)_j & (\beta^2_k)_k \\ \\ (\beta^3_r)_r & (a^4_s)_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\beta^1_j)_j & (a^2_k)_k \\ \\ (a^3_r)_r & (\beta^4_s)_s \end{pmatrix} = T + S,$$

dove T è una matrice del tipo (2.3). Quindi in $\underline{\mathrm{Hom}}(M, M)$ possiamo trovare, tra le altre, matrici "pari" T, che conservano la parità, e matrici "dispari" S, che invertono la parità; queste ultime saranno divise a blocchi in modo analogo a T, ma la parità dei suddetti sarà invertita:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix},$$

dove S_1 è un blocco $p \times p$ odd, S_4 un blocco $q \times q$ odd, S_2 un blocco $p \times q$ even, e S_3 un blocco $q \times p$ even.

Denotiamo questa superalgebra di matrici $(p + q) \times (p + q) = p|q + p|q$ pari e dispari con $\mathrm{Mat}(A^{p|q})$ $(= \underline{\mathrm{Hom}}(A^{p|q}, A^{p|q}))$.

Notiamo che, nel caso in cui $M = k^{p|q}$, cioè $A = k$ campo, i blocchi odd sono semplicemente dei blocchi di zeri, in quanto $(k)_1 = 0$.

Diversamente, denotiamo con $\mathrm{M}_{p|q}(A)$ la *parte pari* di $\mathrm{Mat}(A^{p|q})$, cioè:

$$\mathrm{Mat}(A^{p|q})_0 = \mathrm{M}_{p|q}(A) = \mathrm{Hom}(A^{p|q}, A^{p|q}).$$

Vediamo ora un'estensione supergeometrica del concetto di *traccia* di una matrice. Sia $T : A^{p|q} \to A^{p|q}$ un morfismo con la forma a blocchi vista prima:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(A^{p|q})_0.$$

Definizione 2.3.1. Definiamo la *super traccia* di T come

$$\operatorname{str}(T) := \operatorname{tr}(T_1) - \operatorname{tr}(T_4),$$

dove "tr" denota la traccia ordinaria.

La scelta di questa definizione e di questo segno meno verrà motivata fra poco quando discuteremo l'estensione supergeometrica del determinante.

Diamo ora la definizione supergeometrica di gruppo generale lineare.

Definizione 2.3.2. Se M è un A-supermodulo, definiamo $\mathrm{GL}(M)$ come il gruppo degli automorfismi di M, e lo chiamiamo il *gruppo super generale lineare degli automorfismi di M*. Se $M = A^{p|q}$ è il A-supermodulo libero generato da p variabili even e q variabili odd, allora scriveremo anche $\mathrm{GL}(M) = \mathrm{GL}_{p|q}(A) = \mathrm{GL}(A^{p|q})$ e avremo $\mathrm{GL}(A^{p|q}) \subset \mathrm{M}_{p|q}(A)$.

È naturale chiedersi se, come in algebra lineare, esiste una nozione analoga al determinante e se essa possa dare uno strumento utile per la caratterizzazione del gruppo generale lineare. In realtà, lo strumento che andremo a introdurre a breve, che è a tutti gli effetti una generalizzazione del determinante al caso supergeometrico, mostrerà quanto la supergeometria lineare sia profondamente diversa da quella ordinaria.

Proposizione 2.3.3. *Sia $T : A^{p|q} \to A^{p|q}$ un morfismo con l'usuale forma a blocchi* (2.3) *(cioè $T \in \mathrm{Mat}_{p|q}(A)$). Allora T è invertibile se e solo T_1 e T_4 sono invertibili.*

Dimostrazione. Sia $J_{odd} \subset A$ l'ideale generato dagli elementi odd di A e sia $\bar{A} = A/J_{odd}$. Si ha una mappa naturale $M_{p|q}(A) \to M_{p|q}(\bar{A})$, $T \mapsto \bar{T}$, dove $\bar{T}$ è ottenuta dalla matrice T applicando ai suoi elementi la mappa $A \to \bar{A}$.

Vediamo che T è invertibile se e solo se $\bar{T}$ è invertibile. Una implicazione è ovvia, ossia il caso in cui T è invertibile. Assumiamo ora che $\bar{T}$ sia invertibile. Ciò implica che esiste $\bar{S} \in M_{p|q}(A)$ tale che $\bar{T}\bar{S} = \bar{S}\bar{T} = I$ dove I denota l'identità (sia in $M_{p|q}(\bar{A})$ che in $M_{p|q}(A)$). Quindi esiste $S \in M_{p|q}(A)$ tale che $TS = I + N$, con $N = (n_{ij})$, $n_{ij} \in J_{odd}$.

Per dimostrare che T è invertibile, è sufficiente dimostrare che $I + N$ è invertibile, dal momento che in questo modo si ottiene

$$TS(I+N)^{-1} = (I+N)(I+N)^{-1} = I \quad \Rightarrow S(I+N)^{-1} = T^{-1}.$$

Per vedere che $I + N$ è invertibile è sufficiente mostrare che $N^r = 0$ per qualche intero $r > 0$. Poichè N contiene un numero finito m di elementi, possiamo rimpiazzare A_1 con la sottoalgebra generata dagli elementi odd in

N. Pertanto ogni elemento di N^{m+1} contiene almeno un fattore $\xi_i^2 = 0$, $i \in 1, \ldots, m$, dove $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ sono i generatori di A_1.

A questo punto, utilizzando la serie telescopica:

$$(I + N)(I - N + N^2 - N^3 + ... + N^r) = I,$$

otteniamo $I + N$ invertibile, e quindi T invertibile.

Ora, se T è della forma:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix},$$

allora

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} \bar{T}_1 & 0 \\ 0 & \bar{T}_4 \end{pmatrix},$$

in quanto gli elementi di $\bar{T}_2$ e $\bar{T}_3$ appartengono a J_{odd}. Quindi $\bar{T}$ è invertibile se e solo se $\bar{T}_1, \bar{T}_4$ sono invertibili, ovvero se e solo se T_1, T_4 sono invertibili. □

Diamo ora la definizione di Bereziniano, un oggetto molto importante, in quanto esso è, essenzialmente, la versione "super" del determinante, e infatti in alcuni testi è detto *superdeterminante*.

Definizione 2.3.4. Sia T un elemento invertibile di $\mathrm{Mat}_{p|q}(A)$, cioè $T \in \mathrm{GL}(A^{p|q})$, con la forma a blocchi standard (2.3). Allora definiamo il *Bereziniano* Ber:

$$\mathrm{Ber}(T) = \det(T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3) \det(T_4)^{-1}, \tag{2.4}$$

dove "det" è l'usuale determinante.

Osservazione 2.3.5. La prima cosa che notiamo è che, nella categoria "super", noi definiamo il Bereziniano per le trasformazioni *invertibili*. Questa precisazione denota un'importante differenza col determinante, che è definito, nell'algebra lineare ordinaria, per tutti gli endomorfismi di uno spazio vettoriale. Vediamo immediatamente che è necessario che il blocco T_4 sia invertibile perchè la formula (2.4) abbia senso, perciò potremmo definire il Bereziniano per tutte la matrici con *solo* il blocco T_4 invertibile (quindi anche per le matrici che hanno il blocco T_4 invertibile, ma che di per sè non sono invertibili). Si ha poi una formulazione del Bereziniano simile a quella data precedentemente, che richiede che solo il blocco T_1 sia invertibile:

$$\mathrm{Ber}(T) = \det(T_4 - T_3 T_1^{-1} T_2)^{-1} \det(T_1).$$

Quindi possiamo definire il Bereziniano su tutte le matrici con T_1 invertibile *oppure* T_4 invertibile. Notare che nel caso in cui entrambi i blocchi sono invertibili (cioè T è invertibile), entrambe le formule del Bereziniano danno lo stesso risultato, come vedremo in seguito.

Proposizione 2.3.6. *Il Bereziniano è moltiplicativo:*

$$\mathrm{Ber}(ST) = \mathrm{Ber}(S)\mathrm{Ber}(T), \quad \forall S, T \in \mathrm{GL}(A^{p|q}).$$

Dimostrazione. Diamo un'idea di massima della dimostrazione. Per prima cosa notiamo che ogni $T \in \mathrm{GL}(A^{p|q})$ con la forma a blocchi (2.3) può essere scritta come prodotto delle seguenti "matrici elementari":

$$T_+ = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_0 = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{pmatrix}, \quad T_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{pmatrix}.$$

Se imponiamo l'uguaglianza $T = T_+T_0T_-$, otteniamo le equazioni

$$\begin{aligned} X &= T_2T_4^{-1}, \\ Y_1 &= T_1 - T_2T_4^{-1}T_3, \\ Y_2 &= T_4, \\ Z &= T_4^{-1}T_3. \end{aligned}$$

È anche facile verificare che $\mathrm{Ber}(ST) = \mathrm{Ber}(S)\mathrm{Ber}(T)$ per S del tipo $\{T_+, T_0\}$ per ogni T *oppure* per T del tipo $\{T_-, T_0\}$ per ogni S.
Sia $G \subset \mathrm{GL}_{p|q}(A)$ l'insieme degli elementi S tali che $\mathrm{Ber}(ST) = \mathrm{Ber}(S)\mathrm{Ber}(T)$ per ogni T. Si verifica che G è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_{p|q}(A)$. Per provare il nostro risultato è sufficiente provare che le matrici del tipo $T_+, T_-, T_0 \in G$ dal momento che generano $\mathrm{GL}_{p|q}(A)$. Nella nostra precedente discussione $T_+, T_0 \in G$, quindi dobbiamo solo provare che $\mathrm{Ber}(ST) = \mathrm{Ber}(S)\mathrm{Ber}(T)$ per S del tipo T_- per ogni T. Notiamo che

$$\mathrm{Ber}(ST_+T_0T_-) = \mathrm{Ber}(ST_+)\mathrm{Ber}(T_0)\mathrm{Ber}(T_-)$$

per quello che abbiamo già visto. Quindi, l'ultimo caso da verificare è per

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Z & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo supporre che sia X che Z abbiamo entrambe un solo elemento non nullo, dal momento che nel risultato del prodotto di due matrici di tipo T_+ si ottiene la somma dei due blocchi in alto a destra, e analogamente con il prodotto di due matrici di tipo T_-. Siano $x_{ij}, z_{kl} \neq 0$. Allora

$$ST = \begin{pmatrix} 1 & X \\ Z & 1 + ZX \end{pmatrix}$$

e $\mathrm{Ber}(ST) = \det(1 - X(1 + ZX)^{-1}Z)\det(1 + ZX)^{-1}$. Dato che X e Z hanno solo un elemento non nullo, $(1 + ZX)^{-1} = (1 - ZX)$, quindi

$$\det(1 - X(1 + ZX)^{-1}Z) = \det(1 - X(1 - ZX)Z) = \det(1 - XZ).$$

Questo perchè tutti i valori nei determinanti o sono triangolari superiori o contengono un'intera colonna di zeri (X, Z hanno al massimo un elemento non zero), perciò i valori x_{ij}, z_{kl} contribuiscono al determinante solo dove il prodotto ZX ha il suo termine non nullo sulla diagonale, cioè solo quando $i = j = k = l$. $\mathrm{Ber}(ST) = \det(1 - XZ)\det(1 - ZX) = (1 - x_{ii}z_{ii})(1 + x_{ii}z_{ii})$. Un calcolo diretto mostra che $\mathrm{Ber}(S) = \mathrm{Ber}(T) = 1$. □

Corollario 2.3.7. *Sia $T \in \mathrm{GL}(A^{p|q})$. Allora*

$$\mathrm{Ber}(T) = \det(T_4 - T_3T_1^{-1}T_2)^{-1}\det(T_1).$$

Dimostrazione. Consideriamo la decomposizione:

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_3T_1^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_4 - T_3T_1^{-1}T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T_1^{-1}T_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per moltiplicatività del Bereziniano, si ha la tesi. □

Corollario 2.3.8. *Il Bereziniano è un omomorfismo*

$$\mathrm{Ber} : \mathrm{GL}(A^{p|q}) \to \mathrm{GL}_{1|0}(A) = A_0^\times$$

negli elementi invertibili di A.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla moltiplicatività. □

Siamo ora pronti per dare la formula per l'inversa di una supermatrice.

Proposizione 2.3.9. *Sia*

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{p|q}(A)$$

(quindi T_1 e T_4 sono matrici ordinarie invertibili). Allora

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} (T_1 - T_2T_4^{-1}T_3)^{-1} & -T_1^{-1}T_2(T_4 - T_3T_1^{-1}T_2)^{-1} \\ -T_4^{-1}T_3(T_1 - T_2T_4^{-1}T_3)^{-1} & (T_4 - T_3T_1^{-1}T_2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Per verifica diretta. □

Concludiamo questo nostro riassunto di superalgebra lineare con la definizione di rango di un endomorfismo di $A^{p|q}$.

Definizione 2.3.10. Sia $T \in \mathrm{End}(A^{p|q})$ (cioè $T \in \mathrm{Hom}(A^{p|q}, A^{p|q})$). Allora il *rango* di T, $\mathrm{rank}(T)$, è la superdimensione della più piccola sottomatrice invertibile di T (ottenuta per eliminazione di righe e colonne).

Proposizione 2.3.11. *Sia* $T \in \mathrm{End}(A^{p|q})$ *con la forma a blocchi* (2.3). *Allora* $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T_1)|\mathrm{rank}(T_4)$.

Dimostrazione. Assumiamo che $\mathrm{rank}(T) = r|s$. Allora c'è una sottomatrice $r|s \times r|s$ invertibile di T, e dovrà essere $r \leq \mathrm{rank}(T_1)$, $s \leq \mathrm{rank}(T_4)$.

Viceversa, se $\mathrm{rank}(T_1) = r'$ e $\mathrm{rank}(T_4) = s'$, chiaramente esiste una sottomatrice $r'|s' \times r'|s'$ invertibile di T. Quindi dovrà essere $r = r'$, $s = s'$. □

Osservazione 2.3.12. In questo contesto possiamo dunque avere matrici diverse dalla matrice nulla che hanno rango nullo. Si pensi per esempio alle matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & T_2 \\ T_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{p|q}(A).$$

Capitolo 3

La grassmanniana $G(2,4)$

In questo capitolo vogliamo descrivere la grassmanniana $G(2,4)$ dei piani di $\mathbb{C}^4$ come una varietà analitica, algebrica e proiettiva. L'interesse verso questa varietà verrà giustificato nei prossimi capitoli, dove studieremo l'estensione supergeometrica della grassmanniana $G(2,4)$ e anche il suo legame con la fisica. Per approfondimenti riguardo agli argomenti di questo capitolo si faccia riferimento a [4] (capitolo 2), [8] (capitolo 2).

3.1 La grassmanniana $G(2,4)$

Definiamo la grassmanniana $G(2,4)$ come:

$$G(2,4) = \{\, \text{piani in } \mathbb{C}^4 \,\},$$

cioè $G(2,4)$ è l'insieme dei sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{C}^4$. Un piano è individuato da due vettori linearmente indipendenti:

$$\pi = \operatorname{span}\{a, b\} \in G(2,4)$$

dove $a, b \in G(2,4)$ possono essere pensati come vettori colonna. La coppia (a,b) non è unica. Infatti, date due coppie di vettori (a,b) e (a',b') individuanti lo stesso piano

$$\operatorname{span}\{a,b\} = \operatorname{span}\{a',b'\},$$

allora esse differiranno per un cambio di base:

$$(a',b') = (a,b)\cdot g := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Quindi, $G(2,4)$ è identificata con le coppie di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{C}^4$ modulo l'azione destra di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, che equivale ad un cambio di base nella descrizione del piano:

$$G(2,4) = \{\, (a,b) \;\mid\; a,b \in \mathbb{C}^4,\; a,b \text{ linearmente indipendenti} \,\} \,/\, \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Indichiamo con $F(2,4)$ l'insieme delle matrici 4×2 di rango 2. Possiamo vedere $F(2,4)$ come un sottoinsieme di $\mathbb{C}^8$ con la topologia euclidea. Indichiamo poi con $\sim$ la relazione d'equivalenza definita dal cambio di base:

$$A \sim B \quad \text{se e solo se esiste una matrice } g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ tale che } B = Ag.$$

Questa è una relazione d'equivalenza aperta. Infatti, se consideriamo la proiezione naturale:

$$\begin{array}{cccc} \pi : & F(2,4) & \to & F(2,4)/\sim \\ & A & \mapsto & [A], \end{array}$$

dato U insieme aperto di $F(2,4)$, si ha $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})} \{\, Ag \mid A \in U \,\}$ aperto.

Quindi abbiamo anche che $G(2,4)$ è secondo numerabile, in quanto $G(2,4) = F(2,4)/\sim$, $\sim$ è aperta e $F(2,4)$ è secondo numerabile.

Infine possiamo vedere che $G(2,4)$ è Hausdorff. Sia $S = F(2,4)$ e consideriamo il grafico della relazione $\sim$:

$$R = \{\, (A,B) \in S \times S \mid B = Ag \text{ per qualche } g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \,\}.$$

Se scrivo A e B come un'unica matrice 4×4 $[A\ B]$, R è costituito dalle matrici $[A\ B]$ in $S \times S$ di rango ≤ 2, in quanto le colonne di B sono combinazioni lineari delle colonne di A. Ora, $\mathrm{rk}[A\ B] \leq 2$ se e solo se ogni minore 3×3 di $[A\ B]$ è zero. Come insieme di zeri di un numero finito di polinomi, R è dunque un sottoinsieme chiuso di $S \times S$. Dal momento che $\sim$ è aperta, si ha $S/\sim\, = G(2,4)$ Hausdorff.

3.1.1 $G(2,4)$ come spazio omogeneo

Vediamo ora $G(2,4)$ come spazio omogeneo per il gruppo $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ (si veda sezione 1.5). Per fare questo consideriamo l'azione del gruppo $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ su $G(2,4)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) & \times & G(2,4) & \longrightarrow & G(2,4) \\ g & , & \pi & \mapsto & g\pi. \end{array}$$

Questa azione è transitiva, cioè presi due qualsivoglia piani $\pi_1, \pi_2 \in G(2,4)$, esiste $g \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ tale che $g\pi_1 = \pi_2$. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{C}^4$ e consideriamo il piano π_0 generato dai vettori e_1 e e_2.

Lo stabilizzatore del piano π_0, anche detto gruppo di isotropia di π_0, è

$$I_0 = \{\, g \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \ \mid \ g\pi_0 = \pi_0 \,\} = \left\{ \begin{pmatrix} L & M \\ 0 & N \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \right\}, \tag{3.1}$$

dove L, M, R sono matrici 2×2, e L, R son invertibili. Dal momento che I_0 è un sottogruppo chiuso, il quoziente $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/I_0$ acquisisce la struttura di varietà analitica complessa, ed è isomorfo alla varietà su cui $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ agisce transitivamente. Quindi

$$G(2,4) \cong \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/I_0.$$

3.1.2 $G(2,4)$ come varietà analitica

Vogliamo ora descrivere la struttura di varietà analitica di $G(2,4)$.

Se $\pi = \mathrm{span}\{a, b\}$ è un piano, cioè i vettori a e b sono linearmente indipendenti, la matrice 4×2

$$(a,b) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, ovvero almeno uno dei 6 minori $y_{ij} = a_i b_j - b_i a_j$, $1 \leq i < j \leq 4$ è diverso da zero. Quindi possiamo ricoprire $G(2,4)$ con gli insiemi aperti

$$U_{ij} = \{\, (a,b) \ \mid \ y_{ij} \neq 0 \,\} \,/\, \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \subset G(2,4), \quad i < j, \tag{3.2}$$

ovvero

$$G(2,4) = \bigcup_{i<j} U_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, 4.$$

Facciamo vedere ora che $U_{ij} \cong \mathbb{C}^4$. Per esempio, consideriamo U_{12}. Indichiamo con $V_{12} = \{\, (a,b) \ \mid \ y_{12} \neq 0 \,\} \subset F(2,4)$. Allora $U_{12} = V_{12}/\sim$. Per ogni $A \in V_{12}$, se chiamiamo A_{12} la sottomatrice 2×2 non singolare di A abbiamo

$$A \sim AA_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ A_{34}A_{12}^{-1} \end{pmatrix}.$$

La mappa

$$\begin{array}{rccc} \bar{\phi}_{12}: & V_{12} & \to & \mathbb{C}^{2\times 2} \\ & A & \mapsto & A_{34}A_{12}^{-1}, \end{array}$$

induce un omeomorfismo $\phi_{12} : U_{12} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, e analogamente possiamo definire $\phi_{ij} : U_{ij} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ per ogni $1 \leq i < j \leq 4$.

Possiamo dunque scrivere ogni elemento di U_{12} nella forma

$$U_{12} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{C}^4$$

moltiplicando a destra per un elemento di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Questo rappresentante è unico e α, β, γ e δ sono numeri complessi arbitrari che possiamo prendere come coordinate su U_{12}. Quindi $U_{12} \cong \mathbb{C}^4$. Similmente, per un generico U_{ij}, possiamo scegliere un rappresentante (a, b) della forma

$$a = e_i + \alpha e_k + \gamma e_l, \quad b = e_j \beta e_k + \delta e_l,$$
$$\text{con } k \neq l, \text{ e } k, l \neq i, j$$

tramite moltiplicazione a destra per un apposito elemento di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Quindi $U_{ij} \cong \mathbb{C}^4$.

È conveniente organizzare le coordinate di U_{ij} come una matrice 2×2, avendo così $U_{ij} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Nel caso di U_{12}:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ A \end{pmatrix} \in U_{12}. \tag{3.3}$$

Il cambio di carta $\psi_{ij,kl} : U_{ij} \cap U_{kl} \to U_{ij} \cap U_{kl}$ è effettivamente un diffeomorfismo analitico, quindi abbiamo definito una struttura di varietà analitica complessa su $G(2, 4)$.

Vediamo qualche esempio. Il diffeomorfismo analitico $\psi_{12,13}$ si realizza nel modo seguente. Se π è un piano in $U_{12} \cap U_{13}$, esso avrà coordinate $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in U_{12} e coordinate $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ in U_{13}, in accordo con l'identificazione $U_{ij} \cong \mathbb{C}^4$ descritta sopra. Ovvero abbiamo due rappresentanti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \tag{3.4}$$

legati da una trasformazione di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Da questi possiamo calcolare a, b, c, d e $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in funzione di α, β, γ e δ,

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\frac{\alpha}{\beta}, & \beta' &= \frac{1}{\beta}, \\ \delta' &= \frac{\delta}{\beta}, & \gamma' &= \gamma - \frac{\alpha\delta}{\beta}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notare che $\beta, \beta' \neq 0$ se $\pi \in U_{12} \cap U_{13}$. Questo mostra che il cambio di coordinate $\psi_{12,13}$ è analitica.

Proviamo ora a scrivere $\psi_{23,34}$. In maniera del tutto analoga a prima, avremo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo

$$\alpha' = \beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma}, \qquad \beta' = \frac{\alpha}{\gamma},$$
$$\delta' = \frac{1}{\gamma}, \qquad \gamma' = -\frac{\delta}{\gamma},$$

con $\gamma, \delta' \neq 0$ in $U_{23} \cap U_{34}$.

Facciamo ora vedere che le carte ϕ_{ij} sono C^∞ compatibili. Consideriamo per esempio ϕ_{12} e ϕ_{13} e vediamo che $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ è C^∞.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\phi_{12}^{-1}} & U_{12} \cap U_{13} & \xrightarrow{\phi_{13}} & \mathbb{C}^4 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \mapsto & \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & \beta' \\ 0 & 1 \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}\right] & \mapsto & (\alpha', \beta', \gamma', \delta'). \end{array}$$

Per quanto abbiamo visto in (3.4) e (3.5), abbiamo:

$$(\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1})(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \Big(-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}, \frac{\delta}{\beta}, \gamma - \frac{\alpha\delta}{\beta} \Big), \quad \text{con } \beta \neq 0,$$

cioè $\phi_{13} \circ \phi_{12}^{-1}$ è C^∞. Analogamente si può dimostrare la compatibilità di tutte le altre carte.

Abbiamo quindi definito anche la struttura di varietà C^∞ di $G(2, 4)$, dove abbiamo preso come atlante $\{ (U_{ij}, \phi_{ij}) \}_{1 \leq i < j \leq 4}$.

Nella prossima sezione daremo a $G(2, 4)$ anche una struttura di varietà algebrica, e vedremo come possiamo identificare ogni U_{ij} con uno spazio affine complesso $\mathbb{A}^4$.

3.2 L'immersione di Plücker e la quadrica di Klein

In questa sezione vogliamo mostrare che possiamo immergere $G(2,4)$ nello spazio proiettivo
$$\mathbb{P}^5(\mathbb{C}) = \{\text{rette di } \mathbb{C}^6\}$$
procurando una specifica mappa detta *immersione di Plücker*. Identificheremo poi l'immagine di $G(2,4)$ attraverso questa immersione con una sottovarietà chiusa di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, detta *quadrica di Klein*.

Consideriamo lo spazio vettoriale $\wedge^2(\mathbb{C}^4) \approx \mathbb{C}^6$, con base $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$, $i,j = 1,\dots,4$, e consideriamo il piano:

$$\pi = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right\} \in G(2,4).$$

Abbiamo:

$$a \wedge b = \sum_{i<j} y_{ij} e_i \wedge e_j, \quad y_{ij} = a_i b_j - b_i a_j, \quad 1 \le i < j \le 4.$$

Se scegliamo un'altra base per π, $(a', b') = (a, b)g$, per $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, otteniamo

$$a' \wedge b' = \det(g) a \wedge b.$$

Quindi esiste una mappa

$$\begin{array}{ccc} G(2,4) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \\ \pi = \operatorname{span}\{a, b\} & \mapsto & [a \wedge b] \cong [y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}, y_{34}] \end{array}$$

ben definita, dove abbiamo identificato $\mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ dopo aver stabilito l'isomorfismo tra spazi vettoriali $\wedge^2(\mathbb{C}^4) \cong \mathbb{C}^6$,

$$\begin{array}{ll} e_1 \wedge e_2 \longrightarrow f_1, & e_2 \wedge e_3 \longrightarrow f_4, \\ e_1 \wedge e_3 \longrightarrow f_2, & e_2 \wedge e_4 \longrightarrow f_5, \\ e_1 \wedge e_4 \longrightarrow f_3, & e_3 \wedge e_4 \longrightarrow f_6. \end{array}$$

Questa mappa è iniettiva e analitica. Infatti, notiamo che quando ϕ è ristretta ad un sottoinsieme aperto U_{ij}, essa è un morfismo di varietà analitiche complesse. Per esempio, quando restringiamo ϕ all'aperto U_{12}, abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} U_{12} & \xrightarrow{\phi|_{U_{12}}} & \mathbb{P}(\wedge^2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \\ \pi = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right\} & \mapsto & [1, \beta, \delta, -\alpha, -\gamma, \alpha\delta - \beta\gamma] \end{array}$$

Quindi, $G(2,4)$ è una varietà proiettiva complessa.

La mappa ϕ è detta *immersione di Plücker* e y_{ij} sono dette *coordinate plückeriane omogenee.*

Ora vogliamo caratterizzare l'immagine della mappa di Plücker in modo da identificare $G(2,4)$ con una sottovarietà algebrica chiusa di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. Se $p \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)$, $[p]$ sta nell'immagine della mappa di Plücker se e solo se $p = a \wedge b$ per qualche $a, b \in \mathbb{C}^4$. Cioè p può essere scritto come

$$p = y_{12} e_1 \wedge e_2 + y_{13} e_1 \wedge e_3 + \ldots + y_{34} e_3 \wedge e_4,$$

dove $y_{ij} = a_i b_j - b_i a_j$ è il determinante della matrice formata dalle righe i e j della matrice che ha come colonne i vettori a e b. Si può facilmente verificare che questi minori soddisfano

$$y_{12} y_{34} - y_{13} y_{24} + y_{14} y_{23} = 0. \tag{3.6}$$

Questa è detta *relazione di Plücker* e definisce una quadrica K in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ detta *quadrica di Klein.*

A questo punto vogliamo far vedere che non esistono ulteriori relazioni tra le coordinate plückeriane y_{ij}. Consideriamo uno degli insiemi aperti, per esempio U_{12}. Su questo aperto, $y_{12} = 1$, quindi la relazione diventa:

$$y_{34} = y_{13} y_{24} - y_{14} y_{23}.$$

Possiamo esprimere la variabile y_{34} in termini di y_{13}, y_{24}, y_{14}, y_{23} e così ogni altra relazione può essere espressa in termini di queste quattro variabili. Non possiamo avere altre relazioni, però, dal momento che $(y_{13}, y_{24}, y_{14}, y_{23})$ danno le coordinate per l'isomorfismo di U_{12} con $\mathbb{C}^4$. Un discorso del tutto analogo può essere fatto per tutti gli altri U_{ij}. Quindi, l'insieme delle soluzioni della quadrica di Klein nello spazio proiettivo è in corrispondenza uno a uno con gli elementi di $G(2,4)$.

Consideriamo ora il polinomio

$$f = x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_5].$$

Questo è un polinomio omogeneo di grado 2 irriducibile, il quale insieme degli zeri è proprio la quadrica K:

$$K = \{ P \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \mid f(P) = 0 \}.$$

Quindi K è un insieme algebrico irriducibile di $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, ovvero la quadrica di Klein (e quindi $G(2,4)$) è una varietà algebrica proiettiva.

Osservazione 3.2.1. C'è un modo equivalente di derivare la *relazione di Plücker*, che è molto utile per i calcoli espliciti. Come abbiamo rimarcato prima, dato $p \in \wedge^2(\mathbb{C}^4)$, $[p]$ sta nell'immagine della mappa di Plücker se e solo se $p = a \wedge b$. D'altra parte, $p = a \wedge b$ se e solo se $p \wedge p = 0$. Se scriviamo p nelle coordinate y_{ij}, un semplice calcolo restituisce

$$p \wedge p = (y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 = 0.$$

Quindi abbiamo recuperato la relazione di Plücker descritta sopra.

La varietà K è liscia: questo si verifica facilmente calcolando il differenziale della relazione di Plücker in ogni aperto affine U_{ij} ed osservando che non si annulla mai. Vediamo per esempio il caso di $U_0 = \{[x_0, \ldots, x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid x_0 \neq 0\}$:

$$U_0 = \left\{ \left[1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_5}{x_0}\right] \right\} = \{ [1, u_1, \ldots, u_5] \}.$$

Si ha:

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathbb{C}^5 & \to & \mathbb{C} \\ & (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) & \mapsto & u_5 - u_1u_4 + u_2u_3, \end{array}$$

Calcolando la matrice jacobiana otteniamo:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial u_i}\right) = \begin{pmatrix} -u_4 & u_3 & u_2 & -u_1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

In alternativa, dal momento che $K \cong G(2,4)$ è uno spazio omogeneo (si veda 3.1.1), esso deve essere liscio.

Riassumiamo i risultati che abbiamo precedentemente discusso nel seguente teorema.

Teorema 3.2.2. *L'immersione di Plücker* $G(2,4) \to \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ *è un morfismo di varietà analitiche e realizza un isomorfismo tra* $G(2,4)$ *e la quadrica di Klein* K *in* $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ *definita dell'equazione (3.6). Quindi,* $G(2,4)$ *acquista la struttura di varietà proiettiva analitica complessa e il ricoprimento aperto* $\{U_{ij}\}$ *è compatibile con il ricoprimento aperto standard* $\{U_i\}$ *di* $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$*:*

$$U_{ij} = G(2,4) \cap U_i, \quad U_i = \{\, [x_0, \ldots, x_5] \mid x_i \neq 0 \,\} \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C}).$$

Inoltre, questa immersione conferisce a $G(2,4)$ *una struttura di varietà proiettiva algebrica, che è compatibile che la struttura analitica definita nella sezione 3.1.2.* $\square$

Capitolo 4

Supervarietà

L'obiettivo di questo capitolo è di definire i concetti di varietà differenziabile e affine nel contesto supergeometrico, per poi studiare approfonditamente la versione super della grassmanniana $G(2,4)$.

4.1 Cenni di teoria dei fasci

Il concetto di fascio è molto utile perchè ci permette di trattare concettualmente in un unico modo oggetti geometrici molto differenti quali varietà differenziabili e varietà algebriche. Diamo quindi ora la definizione di prefascio, e successivamente quella di fascio.

Definizione 4.1.1. Sia M un insieme con una topologia e sia $|M|$ il corrispondente spazio topologico. Un *prefascio* di algebre commutative $\mathcal{F}$ su M è un assegnamento

$$U \longrightarrow \mathcal{F}(U),$$

dove U è aperto in $|M|$ e $\mathcal{F}(U)$ è un'algebra commutativa, tale che:

(1) se $U \subset V$ sono due aperti in $|M|$, allora esiste un morfismo

$$\mathcal{F}(V) \xrightarrow{\mathrm{r}_{V,U}} \mathcal{F}(U),$$

chiamato *restrizione* (denotato con $\mathrm{r}_{V,U}(f) = f|_U$), tale che:

(a) $\mathrm{r}_{U,U} = \mathrm{id}$,

(b) $\mathrm{r}_{W,U} = \mathrm{r}_{V,U} \circ \mathrm{r}_{W,V}$.

Il prefascio $\mathcal{F}$ si dice *fascio* se:

(2) dato $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di U e una famiglia $\{f_i\}_{i\in I}$, $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, tale che $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ per ogni $i,j \in I$, esiste un'unica $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ si dicono *sezioni* su U; quando $U = |M|$ chiamiamo questi elementi *sezioni globali* e li denotiamo con $\mathcal{F}(M)$.

Definizione 4.1.2. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ prefasci su $|M|$. Un *morfismo di prefasci* $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una collezione di morfismi $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto U in $|M|$ tali che per ogni $V \subset U$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle r_{UV}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Un *morfismo di fasci* è semplicemente un morfismo dei prefasci sottostanti.

Esempio 4.1.3 (I fasci strutturali)**.** Consideriamo l'assegnamento che associa ad un aperto di U nella varietà differenziabile M l'algebra commutativa $C^\infty(U)$, costituita dalle funzioni differenziabili su U. Sia $\mathrm{r}_{V,U}$ l'usuale mappa di restrizione. Questo assegnamento è un fascio ed è chiamato *fascio delle funzioni differenziabili* su M. Similmente, possiamo definire il *fascio delle funzioni olomorfe* su una varietà complessa M attraverso l'assegnamento: $U \to \mathcal{H}(U)$, dove $\mathcal{H}(U)$ sono le funzioni olomorfe sull'aperto U. Infine, se X è una varietà algebrica, l'assegnamento $U \to \mathcal{O}_X(U)$ con U aperto nella varietà algebrica X e $\mathcal{O}_X(U)$ l'anello delle funzioni polinomiali su X, definisce il *fascio delle funzioni algebriche* su X.
Questi sono detti *fasci strutturali* dal momento che, insieme alla struttura di spazio topologico, identificano univocamente la struttura algebrica.

Un oggetto molto importante associato ad un prefascio è la spiga in un punto.

Definizione 4.1.4. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio sullo spazio topologico $|M|$ e sia x un punto in $|M|$. Definiamo la *spiga* $\mathcal{F}_x$ di $\mathcal{F}$ nel punto x come segue: $\mathcal{F}_x$ consiste nell'unione disgiunta di tutte le coppie (U, s) con U aperto di $|M|$ contenente x, e $s \in \mathcal{F}(U)$, modulo la relazione di equivalenza: $(U, s) \cong (V, t)$ se e solo se esiste un intorno aperto W di x, $W \subset U \cap V$, tale che $s|_W = t|_W$. Gli elementi di $\mathcal{F}_x$ sono chiamati *germi di sezioni* in x.

La prossima definizione e le successive due proposizioni risultano essere molto utili quando vogliamo definire un fascio su uno spazio topologico partendo dai dati locali. Per le dimostrazioni si faccia riferimento a [5].

Definizione 4.1.5. Sia $\mathcal{B}$ una base per la topologia nello spazio topologico $|M|$. Un $\mathcal{B}$-*fascio* su $|M|$ è un assegnamento che assegna ad ogni insieme aperto di $\mathcal{B}$ un'algebra commutativa e che soddisfa le proprietà (1) e (2) della definizione 4.1.1, dove abbiamo sostituito $U_i \cap U_j$ con $V \in \mathcal{B}$, $V \subset U_i \cap U_j$.

Proposizione 4.1.6. *Sia $\mathcal{B}$ una base per gli aperti dello spazio topologico $|M|$.*

(1) Ogni $\mathcal{B}$-fascio si estende univocamente ad un fascio su $|M|$.

(2) Se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ sono due fasci su $|M|$ e per ogni U in $\mathcal{B}$ abbiamo una collezione di morfismi

$$\psi_U : \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

che commutano con le restrizioni, allora c'è un unico morfismo di fasci $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tale che $\phi_U = \psi_U$ per ogni $U \in \mathcal{B}$.

□

Proposizione 4.1.7. *Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto dello spazio topologico $|M|$. Supponiamo che:*

(1) abbiamo definito fasci $\mathcal{F}_{U_i}$ per ogni i;

(2) $\phi_{U_iU_j} : \mathcal{F}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{F}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$ sono isomorfismi che soddisfano le condizioni di compatibilità:

$$\phi_{U_iU_j}\phi_{U_kU_i} = \phi_{U_kU_j}, \quad \textit{su} \;\; U_i \cap U_j \cap U_k, \quad \forall i, j, k \in I;$$

allora esiste un unico fascio $\mathcal{F}$ su $|M|$ tale che $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_{U_i}$.

□

Siamo ora pronti per la definizione di spazio anellato.

Definizione 4.1.8. Uno *spazio anellato* è una coppia $M = (|M|, \mathcal{F})$ costituita da uno spazio topologico $|M|$ e un fascio di anelli commutativi $\mathcal{F}$ su M. Diciamo che lo spazio anellato $(|M|, \mathcal{F})$ è *localmente anellato* se la spiga $\mathcal{F}_x$ è un anello locale per ogni $x \in |M|$ (cioè ha un unico ideale massimale).

Osservazione 4.1.9. Se M è una varietà differenziabile e $\mathcal{O}_M$ il suo fascio strutturale, la coppia $(|M|, \mathcal{O}_M)$ è uno spazio localmente anellato. Questo è vero anche nel caso un cui M sia una varietà complessa o una varietà algebrica.
A questo punto, possiamo vedere la definizione di varietà differenziabile da

un altro punto di vista. In particolare, possiamo definire una varietà differenziabile come uno spazio localmente anellato $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ localmente isomorfo allo spazio localmente anellato $(\mathbb{R}^p, C^\infty_{\mathbb{R}^p})$.
Similmente, possiamo definire una varietà complessa come uno spazio localmente anellato $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ localmente isomorfo allo spazio localmente anellato $(\mathbb{C}^p, \mathcal{H}_{\mathbb{C}^p})$.

4.2 Superspazi e supervarietà

In questa sezione vogliamo dare le definizioni di supervarietà differenziabili reali e analitiche complesse. Ci limitiamo quindi al caso in cui il campo di riferimento k sia uguale rispettivamente a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$.

Cominciamo col dare la definizione di superspazio.

Definizione 4.2.1. Un *superspazio* $S = (|S|, \mathcal{O}_S)$ è uno spazio topologico $|S|$ dotato di un fascio di superalgebre $\mathcal{O}_S$ tale che la spiga in un punto $x \in |S|$, denotata con $\mathcal{O}_{S,x}$, è una superalgebra locale per ogni $x \in |S|$ (cioè $\mathcal{O}_{S,x}$ ha un unico ideale massimale). Più in generale, parliamo di *superspazio anellato* ogni volta che abbiamo uno spazio topologico e un fascio di superanelli.

Definizione 4.2.2. Un *morfismo* $\phi : S \to T$ di superspazi è dato da $\phi = (|\phi|, \phi^*)$, dove $|\phi| : |S| \to |T|$ è una mappa di spazi topologici e $\phi^* : \mathcal{O}_T \to \phi_*\mathcal{O}_S$ (dove $\phi_*\mathcal{O}_S(U) = \mathcal{O}_S(\phi^{-1}(U))$ per ogni U aperto di T) è tale che

$$\phi_x^{-1}(\mathbf{m}_x) = \mathbf{m}_{|\phi|(x)},$$

dove $\mathbf{m}_{|\phi|(x)}$ e $\mathbf{m}_x$ sono gli ideali massimali nelle spighe $\mathcal{O}_{T,|\phi|(x)}$ e $\mathcal{O}_{S,x}$ rispettivamente.

Esempio 4.2.3. Il superspazio $k^{p|q}$ è lo spazio topologico k^p dotato del seguente fascio di superalgebre: per ogni sottoinsieme aperto $U \subset k^p$

$$\mathcal{O}_{k^{p|q}}(U) = \mathcal{O}_{k^p} \otimes \wedge(\xi^1, \ldots, \xi^q),$$

dove $\mathcal{O}_{k^p}$ denota il fascio C^∞ su k^p quando $k = \mathbb{R}$ e il fascio delle analitiche complesse su k^p quando $k = \mathbb{C}$.

Definizione 4.2.4. Una *supervarietà differenziabile* (o semplicemente *supervarietà*) di dimensione $p|q$ è un superspazio $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ localmente isomorfo a $k^{p|q}$, cioè per ogni $x \in |M|$ esistono un aperto $V_x \subset |M|$ e $U \subset k^p$ tali che V_x e U sono omeomorfi ed esiste un isomorfismo di fasci

$$\mathcal{O}_M|_{V_x} \cong \mathcal{O}_{k^{p|q}}|_U.$$

Un *morfismo* di supervarietà è semplicemente un morfismo di superspazi.

La varietà classica $|M|$ sottostante la supervarietà M è detta lo *spazio ridotto* di M. Il suo fascio in ogni aperto U è $\mathcal{O}_M(U)$ modulo l'ideale generato dagli elementi nilpotenti $J_{\mathcal{O}_M(U)}$.

A questo punto, con un abuso di notazione, $k^{p|q}$ denota sia il superspazio vettoriale $k^p \oplus k^q$ sia il superspazio $(k^p, \mathcal{O}_{k^{p|q}})$. Se $t^1, \dots, t^p$ sono coordinate globali per k^p e $\theta^1, \dots, \theta^q$ per k^q, possiamo parlare di $t^1, \dots, t^p, \theta^1, \dots, \theta^q$ come di un insieme di *coordinate globali* per il superspazio $k^{p|q}$.

Enunciamo ora il teorema della carta, che prescrive come ottenere un morfismo tra *superdomini*, ovvero supervarietà del tipo $(U, \mathcal{O}_{k^{m|n}}|_U)$, dove U è un sottoinsieme aperto di $k^{m|n}$.

Teorema 4.2.5 (Teorema della carta)**.**

- Versione locale. *Siano $U \subset k^{p|q}$ e $V \subset k^{m|n}$ superdomini aperti. Esiste una biezione tra*
  - *(i) l'insieme dei morfismi $\phi : V \to U$ e*
  - *(ii) l'insieme dei sistemi di p funzioni even t^i e q funzioni odd θ^j in $\mathcal{O}_{k^{m|n}}(V)$ tale che $(t^1(m), \dots, t^p(m)) \in |U|$ per ogni $m \in |V|$.*
- Versione globale. *Siano $U \subset k^{p|q}$ un superdominio e M una supervarietà. Esiste una corrispondenza 1-1 tra i morfismi $M \to U$ e l'insieme delle $(p+q)$-ple di p funzioni even t^i e q funzioni odd θ^j su M, tale che $(t^1(x), \dots, t^p(x)) \in |U|$ per ogni $x \in |M|$.*

Dimostrazione. Si veda [3], capitolo 4. □

Nella geometria ordinaria, una varietà algebrica affine X su un campo algebricamente chiuso k è costituita dai punti di un certo spazio affine di k^n, che formano l'insieme degli zeri di un insieme finito F di polinomi (si vedano i risultati illustrati al capitolo 1). Possiamo assumere tale insieme come *irriducibile*, cioè che non può essere scritto come unione di due suoi sottoinsiemi, anch'essi costituiti da zeri di un insieme finito di polinomi. L'anello delle coordinate di X è definito come $\mathcal{O}(X) := k[x_1, \dots, x_n]/I$, dove I è l'ideale di tutti i polinomi che si annullano su X ed è generato dagli elementi di F. L'irriducibilità di X equivale alla condizione che I sia un ideale primo, oppure che $\mathcal{O}(X)$ sia un dominio di integrità.

L'anello $\mathcal{O}(X)$ permette di ricostruire totalmente la varietà algebrica X, e i suoi ideali massimali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di X. Di conseguenza, la varietà affine classica X può essere effettivamente identificata con l'algebra $\mathcal{O}(X)$, che è un dominio d'integrità finitamente generato. Questo tipo di algebre sono dette *algebre affini*.

Vogliamo adesso esaminare l'impostazione supergeometrica. Sia k il nostro campo di riferimento, normalmente $k = \mathbb{C}$.

Definizione 4.2.6. Diremo che una superalgebra commutativa A è una *superalgebra affine* se:

- A_0 è una superalgebra finitamente generata tale che la sua algebra ridotta associata $A_{0,r} = A_0/J_{A_0}$ sia un'algebra affine;
- A_1 è un A_0-modulo finitamente generato.

Sia A una superalgebra affine. Allora A_0 è un'algebra ordinaria e la sua algebra ridotta $A_{0,r}$ corrisponde alla varietà affine X_0 con il sottostante spazio topologico $|X| \subset k^n$. La topologia di $|X|$ è la topologia di Zariski ereditata dallo spazio affine ambiente ed è indipendente dalla immersione $X_0 \hookrightarrow k^n$. In questa topologia, un insieme è chiuso se e solo se è costituito dagli zeri di un ideale in $k[x_1, \ldots, x_n]$, l'anello delle funzioni polinomiali su k^n.

Consideriamo un elemento non zero $f \in A_0$. possiamo definire la *localizzazione* del A_0-modulo A nell'elemento f come

$$A_f = \left\{ \frac{g}{f} \;\middle|\; g \in A \right\}.$$

Dalla definizione della topologia di Zariski,

$$U_f = \{\, x \in |X| \;\mid f(x) \neq 0 \,\}$$

è un aperto in $|X|$ e infatti $\{U_f\}_{f \in A_0}$ formano una base per la topologia di $|X|$ (si veda sezione 1.2). Si può verificare che l'assegnamento $U_f \to A_f$ definisce un $\mathcal{B}$-fascio su $|X|$, e quindi esiste un unico fascio di algebre $\mathcal{O}_X$ su $|X|$ tale che $\mathcal{O}_X|_{U_{f_i}} = \mathcal{O}_X$, per la proposizione 4.1.6.

Fatta questa costruzione, è il momento di dare la definizione di supervarietà affine.

Definizione 4.2.7. Sia $\mathcal{O}(X)$ una superalgebra affine. Definiamo la *supervarietà affine* X associata a $\mathcal{O}(X)$ come il superspazio $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$, dove $|X|$ è lo spazio topologico della varietà affine ordinaria definita da $\mathcal{O}(X)_r := \mathcal{O}(X)/J_{\mathcal{O}(X)}$, mentre $\mathcal{O}_X$ è il fascio di superalgebre su $|X|$ descritto precedentemente. Notare che l'insieme delle sezioni globali di $\mathcal{O}_X$ è $\mathcal{O}(X)$.
Abbiamo quella che si chiama una *equivalenza di categorie* tra la categoria

delle superalgebre affine e la categoria delle supervarietà affini, in perfetta analogia con il caso ordinario:

$$\begin{array}{ccc} \text{(superalgebre affini)} & \longleftrightarrow & \text{(supervarietà affini)} \\ A & \longrightarrow & (|X|, \mathcal{O}_X) \\ \mathcal{O}(X) & \longleftarrow & X, \end{array}$$

dove $(|X|, \mathcal{O}_X)$ è ottenuta da A tramite la procedura descritta sopra.
Definiamo poi una *supervarietà algebrica* come un superspazio localmente isomorfo ad una supervarietà affine.

Esempio 4.2.8 (Due supervarietà algebriche non differenziabili)**.** Consideriamo i due seguenti ideali di $\mathbb{C}[x, y]$:

$$I = (y^2 - x^3), \quad J = (x^3 + x^2 + y^2 x - y^2),$$

associati alle due curve:

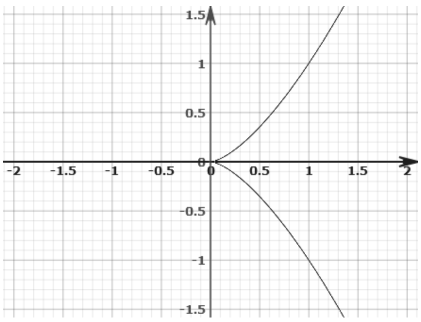

Figura 4.1: $y^2 = x^3$

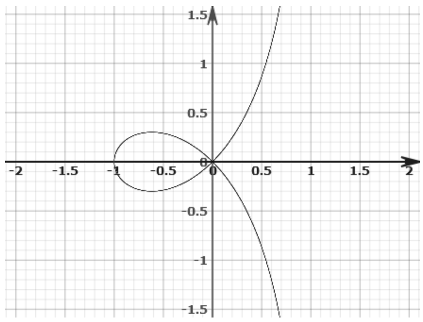

Figura 4.2: $x^3 + x^2 + y^2 x = y^2$

nel piano $\mathbb{C}^2$. Costruiamo poi le supervarietà:

$$V = \mathbb{C}[x, y]/I \otimes \bigwedge(\xi_1, \xi_2),$$
$$W = \mathbb{C}[x, y]/J \otimes \bigwedge(\xi_1, \xi_2).$$

V e W così definite sono supervarietà algebriche, ma non sono supervarietà differenziabili. Infatti, l'equazione in figura 4.1 non è differenziabile in 0, mentre nel grafico in figura 4.2, preso un qualsiasi intorno aperto di 0, non si riesce a trovare un diffeomorfismo tra il grafico ristretto all'aperto e $\mathbb{C}^2$.

Esempio 4.2.9 (Il superspazio affine)**.** Abbiamo definito la *superalgebra dei polinomi* come

$$k[x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q] := k[x_1, \ldots, x_p] \otimes \wedge(\xi_1, \ldots, \xi_q).$$

Vogliamo interpretare questa superalgebra come un superanello coordinato di una supervarietà che chiamiamo *superspazio affine* di dimensione $p|q$, e che possiamo denotare con $k^{p|q}$. Vogliamo poi distinguerlo dal caso differenziale, perciò lo denoteremo con $\mathbb{A}^{p|q}$ che significa che abbiamo scelto la topologia di Zariski. In questo modo lo spazio topologico sottostante è $\mathbb{A}^p$, ovvero k^p con la topologia di Zariski, e il fascio sarà

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{p|q}}(U) := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^p}(U) \otimes \wedge(\xi_1, \ldots, \xi_q).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{p|q} &= (\mathbb{A}^p, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^p} \otimes \wedge(\xi_1, \ldots, \xi_q)) \\ &= (|k^p|, \mathcal{O}_{k^p} \otimes \wedge(\xi_1, \ldots, \xi_q)).\end{aligned}$$

Esempio 4.2.10 (Il superspazio proiettivo $\mathbb{P}^{2|2}$)**.** Ci proponiamo di studiare il superspazio $\mathbb{P}^{2|2} = (|\mathbb{P}^2|, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \otimes \wedge(\xi_1, \xi_2))$. Consideriamo il piano proiettivo ordinario $\mathbb{P}^2$ come il quoziente $k^3 \setminus \{0\} \ / \sim$ con la topologia di Zariski, cioè $\mathbb{P}^2 = \{[x_0, x_1, x_2]\}$. Possiamo ricoprire $\mathbb{P}^2$ con sottoinsiemi affini aperti $U_i \cong k^2$, $i = 0, 1, 2$, dove $x_i \neq 0$ su U_i. Su ogni U_i diamo le coordinate ordinarie globali $u_k := x_k/x_i$ come segue:

$$\begin{aligned}U_0 &= \{[u_1^0, u_2^0]\}, \\ U_1 &= \{[u_0^1, u_2^1]\}, \\ U_2 &= \{[u_0^2, u_1^2]\}.\end{aligned}$$

A questo punto definiamo il fascio di superalgebre $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}(V) = \mathcal{O}_{U_i}(V) \otimes \wedge(\xi_1^i, \xi_2^i), \quad V \text{ aperto in } U_i,$$

dove ora $\mathcal{O}_{U_i}$ è il fascio delle funzioni polinomiali ordinarie su U_i, e ξ_1^i, ξ_2^i sono variabili odd. $\mathcal{U}_i = (U_i, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i})$ è una supervarietà, isomorfa al superspazio affine $\mathbb{A}^{2|2}$.

Vogliamo definire ora i morfismi del tipo $\phi_{ij} : \mathcal{O}_{\mathcal{U}_j}(U_i \cap U_j) \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}(U_i \cap U_j)$, dove

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}(U_i \cap U_j) = k[u_0^i, \ldots, \hat{u}_i^i, \ldots, u_2^i, \xi_1^i, \xi_2^i][{u_j^i}^{-1}].$$

Definiamo:

$$(u_0^j, \ldots, \hat{u}_i^j, ..., u_2^j, \xi_1^j, \xi_2^j) \ \xrightarrow{\phi_{ij}} \ \left(\frac{u_0^i}{u_j^i}, \ldots, \frac{1}{u_j^i}, \ldots, \frac{u_2^i}{u_j^i}, \frac{\xi_1^i}{u_j^i}, \frac{\xi_2^i}{u_j^i}\right),$$

dove nel membro di destra il termine $1/u_j^i$ appare alla i-esima posizione e la j-esima posizione viene omessa. Per intenderci, facciamo l'esempio di $\phi_{10} : \mathcal{O}_{\mathcal{U}_0}(U_1 \cap U_0) \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1}(U_1 \cap U_0)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_0}(U_1 \cap U_0) &= k[u_1^0, u_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0][{u_1^0}^{-1}], \\ \mathcal{O}_{\mathcal{U}_1}(U_1 \cap U_0) &= k[u_0^1, u_2^1, \xi_1^1, \xi_2^1][{u_0^1}^{-1}],\end{aligned}$$

quindi

$$(u_1^0, u_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0) \xrightarrow{\phi_{10}} \left(\frac{1}{u_0^1}, \frac{u_2^1}{u_0^1}, \frac{\xi_1^1}{u_0^1}, \frac{\xi_2^1}{u_0^1}\right).$$

Si dimostra poi che le ϕ_{ij} soddisfano la condizione di compatibilità:

$$\phi_{ij}\phi_{ki} = \phi_{kj}, \quad \text{su } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k,$$

quindi esse ci permettono, in virtù della proposizione 4.1.7, di definire un unico fascio, denotato con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2|2}}$, e quindi una struttura di supervarietà sullo spazio topologico $\mathbb{P}^2$.

Osservazione 4.2.11. Siano M una supervarietà e $\mathcal{O}(M)$ la superalgebra delle sezioni globali su M. Vogliamo focalizzare l'attenzione sulla differenza sostanziale che sussiste tra le *sezioni even* di M e le *sezioni ridotte* di M_0. Per sezioni ridotte si intendono le sezioni appartenenti a

$$\mathcal{O}(M_0) := \mathcal{O}(M)/J_M,$$

dove J_M è l'ideale generato dagli elementi nilpotenti (odd) di M. Se le confrontiamo con le sezioni di $\mathcal{O}(M)$, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(M) & \longrightarrow & \mathcal{O}(M_0), \\ M_0 & \longrightarrow & M. \end{array}$$

Per sezioni even invece si intendono le sezioni appartenenti a

$$\mathcal{O}(M)_0 := \mathcal{O}(M)/J_{\mathcal{O}(M)},$$

dove $J_{\mathcal{O}(M)}$ è l'ideale generato delle sezioni nilpotenti (odd) di $\mathcal{O}(M)$. Se le confrontiamo con le sezioni di $\mathcal{O}(M)$, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(M)_0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(M), \\ M & \longrightarrow & M_0', \end{array}$$

dove $M_0' \ncong M_0$. Per fare un esempio, prendiamo $M = \mathbb{C}^{4|2}$, e consideriamo come sezioni globali le coordinate del tipo $(u_1, u_2, u_3, u_4, \nu_1, \nu_2) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{4|2})$. Ora, la sezione $\nu_1\nu_2$ appartiene a $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{4|2})_0$, e quindi è una sezione even, ma non è una sezione ridotta di $\mathcal{O}(\mathbb{C}_0^{4|2})$

4.3 Il funtore dei punti

Vogliamo ora introdurre il funtore dei punti nel contesto supergeometrico.

Nel caso ordinario, il funtore dei punti è un potente, nonchè tecnico espediente utilizzato soprattutto in teoria degli schemi (si veda [5], sezione I.4); in supergeometria esso diventa uno strumento essenziale nel contesto sia differenziale sia algebrico, perchè ci permette di recuperare l'intuizione geometrica, altrimenti non utilizzabile nella formulazione di supervarietà e supervarietà affini.

Possiamo esaminare il funtore dei punti di una varietà sopra diversi campi e anelli. Per esempio possiamo pensare ai punti razionali della sfera complessa ordinaria definita dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in $\mathbb{C}^3$. Questi sono in corrispondenza uno a uno con i morfismi: $\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \to \mathbb{Q}$. Infatti, ognuno di questi morfismi è specificato dalla conoscenza delle immagini dei generatori. L'idea dietro al funtore dei punti è di estendere questo quadro e considerare *tutti* i morfismi dall'anello delle coordinate di una varietà affine X a *tutte* le algebre affini. Questo è equivalente a considerare tutti i morfismi $T \to X$ per ogni varietà T affine.

Nel contesto supergeometrico, dobbiamo fare un ulteriore passo di astrazione e definire i T-punti per un superspazio S. Questo ci permetterà di parlare di T-punti di una supervarietà differenziabile e di una supervarietà affine tutte in una volta.

In questa sezione useremo linguaggio e termini tipici della teoria delle categorie. Per chiarimenti sui concetti basilari di questa teoria, si veda l'appendice A.

Ricordiamo che un superspazio S consiste in una coppia $(|S|, \mathcal{O}_S)$, dove $|S|$ è uno spazio topologico e $\mathcal{O}_S$ è un fascio di superalgebre commutative, con $\mathcal{O}_{S,x}$ superalgebra locale per ogni $x \in |S|$.

Definizione 4.3.1. Siano S e T due superspazi. Un *T-punto* di S è un morfismo $T \to S$. Denotiamo l'insieme dei T-punti con $S(T)$. Equivalentemente,

$$S(T) = \mathrm{Hom}(T, S).$$

Sia (sspaces) la categoria dei superspazi e denotiamo con $(\text{sspaces})^o$ la categoria opposta. Definiamo il *funtore dei punti* del superspazio S come il funtore $S : (\text{sspaces})^o \to (\text{sets})$ dato come segue. Sugli oggetti è dato da:

$$S(T) = \mathrm{Hom}(T, S), \quad T \in (\text{sspaces}),$$

mentre sui morfismi

$$\begin{array}{ccccc} S(T) & \xrightarrow{S(\phi)} & S(T'), & & \text{con } \phi : T' \to T \\ f & \mapsto & S(\phi)f = f \circ \phi, & & \end{array}$$

(notare che se $\phi : T' \to T$, abbiamo $f \circ \phi : T' \to T \to S$, quindi per ogni $f \in S(T)$ otteniamo un elemento $f \circ \phi \in S(T')$).

Per un comune abuso di notazioni, il superspazio S e il funtore dei punti di S vengono denotati con la stessa lettera.

Abbiamo definito il funtore dei punti di un superspazio. Chiaramente, possiamo anche definire il funtore dei punti di una supervarietà differenziabile o affine, semplicemente cambiando la categoria di partenza.

Siano (smflds) e (svar) rispettivamente la categoria delle supervarietà differenziabili e quella delle supervarietà affini, introdotte in precedenza.

Definizione 4.3.2. Definiamo il *funtore dei punti della supervarietà* M come il funtore $M : (\text{smflds})^o \to (\text{sets})$ tale che

$$T \to M(T) = \text{Hom}_{(\text{smflds})}(T, M), \quad M(\phi)f = f \circ \phi.$$

Similmente definiamo il *funtore dei punti della supervarietà affine* X come il funtore $X : (\text{svar})^o \to (\text{sets})$ tale che

$$T \to X(T) = \text{Hom}_{(\text{svar})}(T, X), \quad X(\phi)f = f \circ \phi.$$

Date due supervarietà (differenziabili o affini) X e Y, il lemma di Yoneda stabilisce una corrispondenza uno a uno tra i morfismi $X \to Y$ e le trasformazioni naturali tra i corrispondenti funtori dei punti.

Lemma 4.3.3 (Lemma di Yoneda)**.** *Siano M e N due superspazi (rispettivamente supervarietà differenziabili o affini). Esiste una biezione tra l'insieme dei morfismi $\varphi : M \to N$ e l'insieme delle mappe $\varphi_T : M(T) \to N(T)$, funtoriali in T. In particolare, M e N sono isomorfi se e solo se sono isomorfi i loro funtori dei punti.*

Dimostrazione. Data una mappa $\varphi : M \to N$, per ogni morfismo $t : T \to M$ la composizione $\varphi \circ t$ è un morfismo $T \to N$. Viceversa, possiamo attribuire al sistema (φ_T) l'immagine della mappa identità da $\varphi_M : M(M) \to N(M)$. □

La prossima proposizione è molto utile quando vogliamo descrivere esplicitamente il funtore dei punti di una supervarietà differenziabile o affine. Per alleggerire la notazione indichiamo con $\mathcal{O}(T)$ le sezioni globali di T.

Proposizione 4.3.4. *Siano $M = (|M|, \mathcal{O}_M)$ e $T = (|T|, \mathcal{O}_T)$ supervarietà differenziabili o affini. Allora*

$$\text{Hom}(T, M) = \text{Hom}(\mathcal{O}(M), \mathcal{O}(T)).$$

Dimostrazione. Si veda [3], capitoli 4 e 10. □

Notare che questo risultato *non* vale per le supervarietà analitiche complesse, in quanto le loro sezioni globali potrebbero non contenere abbastanza informazioni sulla supervarietà.

Esempio 4.3.5 (I T-punti di $\mathbb{C}^4$)**.** $\mathbb{C}^4$ è costituito per definizione da tutti i morfismi $T \to \mathbb{C}^4$. In pratica, per ogni morfismo f otteniamo quattro funzioni olomorfe su T, che altro non sono che quattro sezioni globali del fascio olomorfo su T, $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathcal{O}(T)$:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^4 \\ t & \mapsto & (t_1(t), t_2(t), t_3(t), t_4(t)). \end{array}$$

Quindi, per il teorema della carta 4.2.5 possiamo identificare $\mathbb{C}^4$ con $\mathcal{O}(T)^4 := \mathcal{O}(T) \otimes \mathbb{C}^4$.

Esempio 4.3.6 (I T-punti di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$)**.** Un morfismo $f : T \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ consiste nella scelta di quattro funzioni olomorfe $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ su T che soddisfino la relazione $t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$. Quindi, sempre in virtù del teorema 4.2.5, possiamo identificare i T-punti di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ con le matrici 2×2 a coefficienti in $\mathcal{O}(T)$, le sezioni olomorfe globali su T,

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; t_{ij} \in \mathcal{O}(T),\ t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1 \right\}.$$

In maniera analoga possiamo trovare i T-punti del generico $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

4.4 Azioni di supergruppi e superspazi omogenei

In questa sezione introduciamo la nozione di supergruppo di Lie e di superspazio omogeneo. Per prima cosa, dobbiamo definire i supergruppi e il modo in cui questi agiscono sulle supervarietà.

I supergruppi sono molto importanti in supergeometria e in generale in supersimmetria in fisica. Essi sono gli oggetti della categoria delle supervarietà differenziabili (o affini) che hanno struttura di gruppo.

Sia k il nostro campo di riferimento ($k = \mathbb{R}$ oppure $k = \mathbb{C}$).

Definizione 4.4.1. Un *supergruppo di Lie* è una supervarietà G il cui funtore dei punti (denotato anch'esso con G)

$$G : (\text{smflds})^o \to (\text{sets})$$

è tale che per ogni supervarietà T, $G(T)$ è un gruppo, e per ogni $f : S \to T$, la mappa $G(f) : G(T) \to G(S)$ è un omomorfismo di gruppi.
Se G è un supergruppo di Lie (o, equivalentemente, se il funtore G ha valori in gruppi) abbiamo i seguenti diagrammi commutativi di trasformazioni naturali:

1. *Moltiplicazione* $\mu : G \times G \to G$, tale che $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}) = (\mu \times \mathrm{id}) \circ \mu$, cioè

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}} & G \times G \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \times \mu}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

2. *Unità* $e : e_k \to G$, dove e_k è il funtore $e_k : (\mathrm{smflds})^o \to (\mathrm{sets})$ che associa ad ogni oggetto T l'unico morfismo $k \to \mathcal{O}(T)$ che manda 1_k in $1_{\mathcal{O}(T)}$. e deve essere tale che $\mu \circ (\mathrm{id} \otimes e) = \mu \circ (e \times \mathrm{id})$, cioè

$$\begin{array}{ccccc} G \times e_k & \xrightarrow{\mathrm{id} \times e} & G \times G & \xrightarrow{e \times \mathrm{id}} & e_k \times G \\ \Big\downarrow & & {\scriptstyle \mu}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ G & =\!= & G & =\!= & G \end{array}$$

3. *Inverso* $i : G \to G$, tale che $\mu \circ (\mathrm{id} \times i) = e \circ \mathrm{id}$, cioè

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(\mathrm{id}, i)} & G \times G \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\ e_k & \xrightarrow{e} & G \end{array}$$

Analogamente, possiamo dare la definizione di supergruppo nel caso delle supervarietà algebriche affini.

Definizione 4.4.2. Un *supergruppo algebrico* è una supervarietà algebrica il cui funtore dei punti

$$G : (\mathrm{svar})^o \to (\mathrm{sets})$$

ha valori in gruppi. Anche in questo caso ritroviamo gli stessi diagrammi visti nella definizione 4.4.1.

Diamo ora la definizione di azione di un supergruppo.

Definizione 4.4.3. Siano G un supergruppo di Lie e M una supervarietà. Diremo che G *agisce* su M se abbiamo un morfismo:

$$a : G \times M \to M, \qquad a_T(g, x) = g \cdot x, \quad \forall g \in G(T),\ \forall x \in M(T),$$

tale che, per ogni supervarietà T:

1. $1 \cdot x = x$, $\forall x \in M(T)$, dove 1 è l'unità di $G(T)$,

2. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, $\forall x \in M(T)$, e $\forall g_1, g_2 \in G(T)$.

Queste corrispondono al fatto che sia commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times M & \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times a} & G \times M \\ {\scriptstyle \mu \times \mathrm{id}_M}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle a} \\ G \times M & \xrightarrow{a} & M \end{array}$$

Se il morfismo $G \to M$, $g \mapsto g \cdot m$ è una summersione suriettiva, allora diciamo che G agisce *transitivamente* su M. In questo caso, M si dice *superspazio omogeneo*.

4.5 Il funtore dei punti di $G(2,4)$

Ci proponiamo ora di descrivere i T-punti della grassmanniana $G(2,4)$.

Sia $f : T \to G(2,4)$ un T-punto. Dal momento che $G(2,4)$ è una varietà proiettiva, non possiamo aspettarci una descrizione globale dei T-punti come quella trovata negli esempi precedenti. Consideriamo quindi un ricoprimento aperto di $G(2,4)$ dato dai sei aperti U_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$, visti nel capitolo precedente. Allora il nostro morfismo f è completamente determinato dalla famiglia di sei morfismi

$$V_{ij} \xrightarrow{f_{ij}} U_{ij} \cong \mathbb{C}^4, \quad \text{con } V_{ij} = f^{-1}(U_{ij}),\ f_{ij} = f|_{V_{ij}},$$

e $1 \leq i < j \leq 4$. Se $\mathcal{O}_T$ è il fascio delle funzioni olomorfe su T, ogni f_{ij} è un V_{ij}-punto di $U_{ij} \cong \mathbb{C}^4$, al quale corrisponde la scelta di quattro sezioni globali su V_{ij}, ossia quattro elementi in $\mathcal{O}_T(V_{ij})$. Abbiamo allora la seguente identificazione (per $i, j = 1, 2$ e similmente per tutti gli altri valori):

$$f_{12} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}, \quad t_{kl} \in \mathcal{O}(V_{12}).$$

In altre parole, il morfismo $f_{12} : V_{12} \to U_{12} \cong \mathbb{C}^4$ corrisponde alla scelta di quattro sezioni t_{ij}, $i, j = 1, 2$ in $\mathcal{O}(V_{12})$, in virtù del teorema della carta.

Definiamo ora

$$\mathcal{F}_T(V_{12}) := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T(V_{12})^4 := \mathcal{O}_T(V_{12}) \otimes \mathbb{C}^4,$$

e similmente possiamo definire $\mathcal{F}_T(V_{ij})$ per ogni i, j, $1 \leq i < j \leq 4$. Per esempio

$$\mathcal{F}_T(V_{13}) := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ s_{11} \\ 0 \\ s_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ s_{12} \\ 1 \\ s_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T(V_{13})^4.$$

Le s_{ij} non sono sezioni arbitrarie di $\mathcal{O}(V_{13})$; esse sono in relazione con le t_{ij} su $V_{12} \cap V_{13}$ nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{11} & s_{12} \\ 0 & 1 \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{11} & s_{12} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Questa equazione è formalmente uguale alla (3.4), a parte il significato degli insiemi a cui appartengono le variabili.

Abbiamo quindi l'assegnamento $\mathcal{F}_T^{12} : V \mapsto \mathcal{F}_T(V_{12})|_V$, dove $V \subset V_{12}$ è un aperto e

$$\mathcal{F}_T(V_{12})|_V := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t_{11}|_V \\ t_{21}|_V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t_{12}|_V \\ t_{22}|_V \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T(V)^4.$$

Similmente, per i, j generici, si definiscono sei fasci $\mathcal{F}_T^{ij}$, uno per ogni aperto V_{ij} che ricopre T.

A questo punto, dimostriamo che esiste una corrispondenza uno a uno tra i T-punti di $G(2, 4)$ e i sottofasci che sono somma diretta di $\mathcal{O}_T^4$ di rango 2:

$$G(2, 4) = \{ \mathcal{F}_T \subset \mathcal{O}_T^4 \ | \ \mathcal{F}_T \text{ localmente libero di rango } 2 \}.$$

Abbiamo già visto come associare ad ogni T-punto di $G(2, 4)$ un unico $\mathcal{F}_T$, che è indipendente dalla scelta del ricoprimento V_{ij} di T. Vediamo il viceversa. Sia $\mathcal{F}_T$ un qualunque fascio, e costruiamo un morfismo $F : T \to G(2, 4)$. Ricopriamo T con degli aperti V_{ij} tali che $\mathcal{F}_T|_{V_{ij}}$ sia libero di rango 2:

$$\mathcal{F}_T(V_{ij}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T(V_{ij})^4.$$

Possiamo assumere che uno dei determinanti $a_ib_j - b_ia_j$ sia invertibile. Assumiamo $i, j = 1, 2$, e dopo un opportuno cambio di base scriviamo:

$$\mathcal{F}_T(V_{12}) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T(V_{12})^4.$$

Possiamo definire quindi il morfismo:

$$\begin{array}{ccc} V_{12} & \xrightarrow{f_{12}} & U_{12} \subset G(2,4) \\ & & \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t_{11}(x) & t_{12}(x) \\ t_{21}(x) & t_{22}(x) \end{pmatrix}, \end{array}$$

e in maniera analoga gli altri $f_{ij} : V_{ij} \to U_{ij} \subset G(2,4)$. Una volta verificato che

$$f_{ij}|_{V_{ij} \cap V_{kl}} = f_{kl}|_{V_{ij} \cap V_{kl}},$$

per il teorema dalla carta abbiamo un morfismo $f : T \to G(2,4)$.

Vogliamo ora dare una caratterizzazione del funtore dei punti di $G(2,4)$. Consideriamo il funtore $\mathcal{G} : (\text{smflds})^o \to (\text{sets})$

$$\mathcal{G}(T) = \{\, \mathcal{F}_T \subset \mathcal{O}_T^4,\ \mathcal{F}_T \text{ localmente libero di rango } 2 \,\}.$$

Sui morfismi, $\mathcal{G}$ è definito come segue. Se $\psi : T \to S$ è un morfismo di varietà analitiche complesse, allora $\psi_U^* : \mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_T(\psi^{-1}(U))$ induce un morfismo sui fasci, dal quale possiamo ottenere $\mathcal{G}(\psi) : \mathcal{G}(S) \to \mathcal{G}(T)$. Si verifica che il funtore $\mathcal{G}$ così ottenuto è il funtore dei punti della grassmanniana $G(2,4)$.

4.6 La supervarietà grassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$

In questa sezione vogliamo studiare la supervarietà grassmanniana complessa dei $2|0$-spazi in uno spazio vettoriale complesso $4|1$-dimensionale, denotata con $G(2|0,4|1)$.

La nostra strategia sarà quella di definire per prima cosa una supervarietà che sia localmente isomorfa alla supervarietà analitica complessa $\mathbb{C}^{4|2}$; questa sarà una buona candidata per $G(2|0,4|1)$ e la denoteremo con $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$.

4.6.1 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ come supervarietà analitica

Iniziamo a studiare $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$. Lo spazio topologico sottostante è $G(2,4)$, che ammette un ricoprimento formato da sei aperti U_{ij}, con $i<j$, $i,j=1,\dots,4$, come abbiamo già descritto nel capitolo 3, e il cui funtore dei punti abbiamo descritto nella sezione precedente. Su ognuno dei sottoinsiemi U_{ij} definiamo la struttura di supervarietà:

$$\mathcal{U}_{ij}=(U_{ij},\mathcal{O}_{ij}),\quad \mathcal{O}_{ij}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{4|2}},$$

dove $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{4|2}}$ è il fascio strutturale della supervarietà analitica complessa $\mathbb{C}^{4|2}$. Quindi $\mathcal{U}_{ij}\cong\mathbb{C}^{4|2}$ come supervarietà. Sulla supervarietà $\mathcal{U}_{ij}$ abbiamo sei coordinate globali che denotiamo con

$$u^{ij}_{k1},\ \ u^{ij}_{k2},\ \ \nu^{ij}_{51},\ \ \nu^{ij}_{52},\qquad k\neq i,j,\quad 1\leq k\leq 4.$$

Queste possono essere convenientemente organizzate in una matrice 2×5 come nell'esempio seguente:

$$\begin{pmatrix} u^{23}_{11} & u^{23}_{12}\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ u^{23}_{41} & u^{23}_{42}\\ \nu^{23}_{51} & \nu^{23}_{51}\end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

In generale, organizziamo le coordinate globali come segue: il posto delle righe i,j è occupato dalla matrice identità e le coordinate sono nelle posizioni corrispondenti ai loro pedici.

Il fascio strutturale $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}}$ di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ è $\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}}|_{U_{ij}}=\mathcal{O}_{ij}$ su ogni aperto. Dobbiamo ora dare i morfismi di supervarietà tra gli $\mathcal{U}_{ij}$ che corrispondono ai cambi di carta su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$:

$$\phi^{ij}_{kl}:(U_{ij}\cap U_{kl},\mathcal{O}_{ij}|_{U_{kl}})\longrightarrow(U_{ij}\cap U_{kl},\mathcal{O}_{kl}|_{U_{ij}}),$$

dopo aver definito le superalgebre $\mathcal{O}_{ij}|_{U_{kl}}$. Per ognuno di questi morfismi dobbiamo verificare le condizioni di incollamento, ovvero

$$\phi^{kl}_{rs}\circ\phi^{ij}_{kl}=\phi^{ij}_{rs},\quad \text{in}\quad \mathcal{U}_{ij}\cap\mathcal{U}_{kl}\cap\mathcal{U}_{rs}. \tag{4.2}$$

In questo modo possiamo dare il fascio su tutta $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ (proposizione 4.1.7).

Possiamo vedere questo con un paio di esempi. Consideriamo

$$\phi^{12}_{23}:\mathcal{U}_{12}\cap\mathcal{U}_{23}\longrightarrow\mathcal{U}_{12}\cap\mathcal{U}_{23}. \tag{4.3}$$

Dal teorema della carta 4.2.5, per dare questo morfismo è sufficiente specificare quattro sezioni globali even e due odd in $\mathcal{O}_{12}|_{U_{23}}$. La regola per determinare queste sezioni è la seguente: per prima cosa scriviamo le sezioni globali di $\mathcal{U}_{12}$ in forma di matrice (4.1), poi moltiplichiamo a destra questa matrice per una matrice 2×2 invertibile in modo che il risultato sia nella forma di una sezione globale in $\mathcal{U}_{23}$. Per il momento questa è solo una regola, ma il suo significato geometrico apparirà evidente quando introdurremo la notazione del funtore di punti. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \\ \nu_{51} & \nu_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{32}u_{31}^{-1} & u_{31}^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{32}u_{31}^{-1} & u_{31}^{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -u_{41}u_{32}u_{31}^{-1} + u_{42} & u_{41}u_{31}^{-1} \\ -\nu_{51}u_{32}u_{31}^{-1} + \nu_{52} & \nu_{51}u_{31}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Abbiamo eliminato gli apici u_{kl}^{12} per alleggerire la notazione. Notare che possiamo considerare le sezioni even ridotte come sezioni della *ordinaria* $G(2,4)$. La condizione perchè le sezioni in U_{12} descrivano le coordinate di punti in $U_{12} \cap U_{23}$ è che il determinante del minore 2×2 corrispondente alle righe (2,3) sia invertibile (si veda sezione 3.1). Richiamando il fatto che una super sezione è invertibile se e solo se lo è la sua parte ridotta, possiamo tranquillamente assumere u_{31} invertibile.

Quindi, il morfismo (4.3) è definito sui punti della topologia usando la formula (4.4):

$$\begin{array}{ccc} U_{12} \cap U_{23} & \xrightarrow{|\phi_{23}^{12}|} & U_{12} \cap U_{23} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{u}_{31} & \tilde{u}_{32} \\ \tilde{u}_{41} & \tilde{u}_{42} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} -\tilde{u}_{32}\tilde{u}_{31}^{-1} & \tilde{u}_{31}^{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\tilde{u}_{41}\tilde{u}_{32}\tilde{u}_{31}^{-1} + \tilde{u}_{42} & \tilde{u}_{41}\tilde{u}_{31}^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Abbiamo identificato i punti in U_{12} e U_{23} con matrici con elementi complessi (le $\tilde{u}_{ij} \in \mathbb{C}$) come in (4.1), come si fa nel caso ordinario. Sui fasci usiamo ancora (4.4):

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{23}|_{U_{12}} & \xrightarrow{(\phi^{12}_{23})^*} & (\phi^{12}_{23})^*(\mathcal{O}_{12}|_{U_{23}}) \\
u^{23}_{11} & \longrightarrow & -u^{12}_{32}(u^{12}_{31})^{-1} \\
u^{23}_{12} & \longrightarrow & (u^{12}_{31})^{-1} \\
u^{23}_{41} & \longrightarrow & -u^{12}_{41}u^{12}_{32}(u^{12}_{31})^{-1} + u^{12}_{42} \\
u^{23}_{42} & \longrightarrow & u^{12}_{41}(u^{12}_{31})^{-1} \\
\nu^{23}_{51} & \longrightarrow & -\nu^{12}_{51}u^{12}_{32}(u^{12}_{31})^{-1} + \nu^{12}_{52} \\
\nu^{23}_{52} & \longrightarrow & \nu^{12}_{51}(u^{12}_{31})^{-1},
\end{array}$$

dove abbiamo definito:

$$\mathcal{O}_{23}|_{U_{12}} := \mathcal{O}_{23}[u^{23\,-1}_{12}],$$
$$\mathcal{O}_{12}|_{U_{23}} := \mathcal{O}_{12}[u^{12\,-1}_{31}].$$

Per fare un altro esempio, calcoliamo ora

$$\phi^{23}_{34} : \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34} \longrightarrow \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34}. \tag{4.5}$$

Applicando il procedimento visto sopra, omettendo sempre gli apici u^{23}_{kl}, otteniamo

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{41} & u_{42} \\ \nu_{51} & \nu_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_{42}u_{41}^{-1} & u_{41}^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{11}u_{42}u_{41}^{-1} + u_{12} & u_{11}u_{41}^{-1} \\ -u_{42}u_{41}^{-1} & u_{41}^{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\nu_{51}u_{42}u_{41}^{-1} + \nu_{52} & \nu_{51}u_{41}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

avendo assunto u_{41} invertibile. Di conseguenza avremo il morfismo (4.5) definito sui punti della topologia:

$$U_{23} \cap U_{34} \xrightarrow{|\phi^{23}_{34}|} U_{23} \cap U_{34}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \tilde{u}_{41} & \tilde{u}_{42} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\tilde{u}_{11}\tilde{u}_{42}\tilde{u}_{41}^{-1} + \tilde{u}_{12} & \tilde{u}_{11}\tilde{u}_{41}^{-1} \\ -\tilde{u}_{42}\tilde{u}_{41}^{-1} & \tilde{u}_{41}^{-1} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre sui fasci, usando (4.6), avremo:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{34}|_{U_{23}} & \xrightarrow{(\phi^{23}_{34})^*} & (\phi^{23}_{34})^*(\mathcal{O}_{23}|_{U_{34}}) \\[2ex]
u^{34}_{11} & \longrightarrow & -u^{23}_{11}u^{23}_{42}(u^{23}_{41})^{-1} + u^{23}_{12} \\[2ex]
u^{34}_{12} & \longrightarrow & u^{23}_{11}(u^{23}_{41})^{-1} \\[2ex]
u^{34}_{21} & \longrightarrow & -u^{23}_{42}(u^{23}_{41})^{-1} \\[2ex]
u^{34}_{22} & \longrightarrow & (u^{23}_{41})^{-1} \\[2ex]
\nu^{34}_{51} & \longrightarrow & -\nu^{23}_{51}u^{23}_{42}(u^{23}_{41})^{-1} + \nu^{23}_{52} \\[2ex]
\nu^{34}_{52} & \longrightarrow & \nu^{23}_{51}(u^{23}_{41})^{-1},
\end{array}
$$

dove abbiamo definito:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{34}|_{U_{23}} &:= \mathcal{O}_{34}[u^{34\,-1}_{22}], \\
\mathcal{O}_{23}|_{U_{34}} &:= \mathcal{O}_{23}[u^{23\,-1}_{41}].
\end{aligned}
$$

Ora è chiaro come definire il più generico ϕ^{ij}_{kl}. Rimangono da verificare le condizioni di incollamento (4.2). Vediamo, per esempio, che

$$\phi^{23}_{34} \circ \phi^{12}_{23} = \phi^{12}_{34}, \quad \text{in} \quad \mathcal{U}_{12} \cap \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34}.$$

Mettendo insieme (4.4) e (4.6) e sviluppando i calcoli, otteniamo:

$$
\begin{array}{cccc}
\phi^{23}_{34} \circ \phi^{12}_{23}: & \mathcal{U}_{12} \cap \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34} & \longrightarrow & \mathcal{U}_{12} \cap \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34} \\[2ex]
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \\ \nu_{51} & \nu_{52} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} u_{32}u_{31}^{-1}u_{41}u_{31}^{-1}\Delta + u_{31}^{-1} & -u_{32}u_{31}^{-1}\Delta \\ -u_{41}u_{31}^{-1}\Delta & \Delta \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \Sigma u_{41}u_{31}^{-1}\Delta + \nu_{51}u_{31}^{-1} & \Sigma\Delta \end{pmatrix},
\end{array}
$$

dove $\Sigma = \nu_{51}u_{32}u_{31}^{-1} - \nu_{52}$, e $\Delta = (-u_{41}u_{32}u_{31}^{-1} + u_{42})^{-1}$ (abbiamo omesso gli apici u^{12}_{kl} per alleggerire la notazione). Notare che $u_{31} \neq 0$ in $U_{12} \cap U_{23}$, e $u_{31}u_{42} - u_{32}u_{41} \neq 0$ in $U_{12} \cap U_{34}$. Osserviamo che la matrice di destra si può ottenere attraverso la moltiplicazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \\ \nu_{51} & \nu_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{32}u_{31}^{-1}u_{41}u_{31}^{-1}\Delta + u_{31}^{-1} & -u_{32}u_{31}^{-1}\Delta \\ -u_{41}u_{31}^{-1}\Delta & \Delta \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi ottenuto una scrittura per

$$\phi_{34}^{12} : \mathcal{U}_{12} \cap \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34} \longrightarrow \mathcal{U}_{12} \cap \mathcal{U}_{23} \cap \mathcal{U}_{34}.$$

Con un procedimento analogo si possono verificare le condizioni di incollamento per ogni coppia $\phi_{rs}^{kl}, \phi_{kl}^{ij}$.

4.6.2 Il funtore dei punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$

Vogliamo ora studiare il funtore dei punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$. Iniziamo col definire il funtore $\mathcal{G} : (\text{smflds})^o \to (\text{sets})$. Sugli oggetti esso è definito come segue: se T è una supervarietà allora

$$\mathcal{G}(T) = \{\, \mathcal{F} \subset \mathcal{O}_T^{4|1} \;\mid\; \mathcal{F} \text{ sottofascio localmente libero di rango } 2|0 \,\}.$$

dove $\mathcal{O}_T^{4|1} := (\mathbb{C}^{4|1} \otimes \mathcal{O}_T)_0$. Sui morfismi, $\mathcal{G}$ è definito come segue: se $T \to S$ è un morfismo di supervarietà, esso induce un morfismo di fasci $f^* : \mathcal{O}_S \to f_*\mathcal{O}_T$. Questo manda sottofasci di $\mathcal{O}_S^{4|1}$ in sottofasci di $f_*(\mathcal{O}_T)^{4|1}$. Un sottofascio di $f_*(\mathcal{O}_T)^{4|1}$ definisce un sottofascio di $\mathcal{O}_T$.

Proposizione 4.6.1. *$\mathcal{G}$ è il funtore dei punti della supervarietà grassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$, cioè abbiamo un'identificazione funtoriale $\mathcal{G}(T) \cong \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) = \mathrm{Hom}(T, \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}})$ per ogni $T \in (\text{smflds})$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}_T \in \mathcal{G}(T)$, vogliamo costruire il morfismo $T \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ corrispondente. Ricopriamo T con degli insiemi aperti V_i tali che $\mathcal{F}_T(V_i)$ sia libero:

$$\mathcal{F}_T(V_i) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)} \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \\ t_{41} \\ \theta_{51} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \\ t_{42} \\ \theta_{52} \end{pmatrix} \right\},$$

dove t_{ij}, θ_{kl} sono, rispettivamente, sezioni even e odd di $\mathcal{O}_T(V_i)$. Dal momento che il rango è $2|0$, almeno uno dei minori 2×2 delle prime quattro righe della matrice formata dai due generatori deve essere non singolare. Quindi

possiamo moltiplicare a destra per un elemento di $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_T(V_i))$ in modo da rendere questo minore uguale all'identità. Questo corrisponde ad un cambio di base in $\mathcal{F}_T(V_i)$.
Supponiamo, per semplicità, che tale minore corrisponda alle prime due righe:

$$\mathcal{F}_T(V_i) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s_{31} \\ s_{41} \\ \sigma_{51} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s_{32} \\ s_{42} \\ \sigma_{52} \end{pmatrix} \right\}.$$

Abbiamo allora il morfismo

$$f_i : \mathcal{V}_i \to \mathcal{U}_{12} \subset \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}},$$

dove $\mathcal{V}_i$ è la supervarietà $(V_i, \mathcal{F}_T|_{V_i})$. Infatti, per il teorema della carta, il morfismo f_i corrisponde alla scelta di 4 sezioni even e 2 sezioni odd in $\mathcal{O}(V_i)$, ovvero le s_{ij} e le σ_{kl}.
I cambi di carta di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ permettono poi alle f_i di incollarsi bene, e quindi di dare un morfismo $f : T \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ tale che $f|_{\mathcal{V}_i} = f_i$.

Viceversa, consideriamo un morfismo $f : T \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$. Sia $V_{ij} = |f|^{-1}(U_{ij})$ e sia $f_{ij} = f|_{V_{ij}}$, tale che

$$\mathcal{V}_{ij} \xrightarrow{f_{ij}} \mathcal{U}_{ij},$$

dove $\mathcal{V}_{ij}, \mathcal{U}_{ij}$ sono le sottosupervarietà aperte di T e $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ corrispondenti agli aperti V_{ij} e U_{ij} rispettivamente. Per il teorema della carta, abbiamo che il morfismo f_{ij} corrisponde alla scelta di 4 sezioni even e 2 sezioni odd in $\mathcal{O}(V_{ij})$. Chiamiamo queste sei sezioni globali come avevamo già fatto

$$v_{k1}^{ij}, \quad v_{k2}^{ij}, \quad \eta_{51}^{ij}, \quad \eta_{52}^{ij}, \qquad k \neq i, j, \quad 1 \leq k \leq 4,$$

e le organizziamo in una matrice (si veda (4.1)). Definiamo $\mathcal{F}_T(V_{ij})$ come lo span sopra $\mathcal{O}_T(V_{ij})$ delle colonne della matrice data. Per esempio, per V_{12}:

$$\mathcal{F}_T(V_{12}) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_{12})} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_{31} \\ v_{41} \\ \eta_{51} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v_{32} \\ v_{42} \\ \eta_{52} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{O}_T^{4|1}(V_{12}).$$

Definiamo ora un fascio $\mathcal{F}_T^{ij}$ sopra V_{ij} per opportune restrizioni sulle sezioni. Per esempio, per $V \subset V_{12}$:

$$\mathcal{F}_T^{12}(V) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_{31}|_V \\ v_{41}|_V \\ \eta_{51}|_V \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v_{32}|_V \\ v_{42}|_V \\ \eta_{52}|_V \end{pmatrix} \right\}.$$

$\mathcal{F}_T^{ij}$ è un sottofascio libero di $\mathcal{O}_T^{4|1}|_{V_{ij}}$ di rango $2|0$, e gli $\mathcal{F}_T^{ij}$ si incollano insieme per formare un sottofascio localmente libero di $\mathcal{O}_T^{4|1}$.

Le due mappe $\mathcal{G}(T) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T)$ e $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) \to \mathcal{G}(T)$ che abbiamo definito sono funtoriali in T, e sono una l'opposta dell'altra. $\square$

4.6.3 $\mathbf{Gr^{ch}}$ come superspazio omogeneo

Vogliamo ora vedere che $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ è un superspazio omogeneo per il supergruppo $\mathrm{SL}(4|1)$. Richiamiamo il funtore dei punti per $\mathrm{SL}(4|1)$:

$$\begin{array}{ccc} (\text{smflds})^o & \xrightarrow{\mathrm{SL}(4|1)} & (\text{sets}) \\ T & \longrightarrow & \mathrm{SL}(4|1)(T), \end{array}$$

dove

$$\mathrm{SL}(4|1)(T) := \left\{ g = \begin{pmatrix} D & \tau \\ \gamma & d \end{pmatrix} \;\middle|\; D, d \text{ invertibili, } \mathrm{Ber}(g) = 1 \right\}, \qquad (4.7)$$

con D e d matrici 4×4 e 1×1, rispettivamente, di elementi in $\mathcal{O}(T)_0$ mentre α e β sono matrici 4×1 e 1×4, rispettivamente, di elementi in $\mathcal{O}(T)_1$.

Possiamo dare l'azione di $\mathrm{SL}(4|1)$ su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ nei termini del funtore dei punti. Per ogni supervarietà T definiamo un morfismo

$$\mathrm{SL}(4|1)(T) \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T)$$

che soddisfi le usuali proprietà di azione (si veda la sezione 4.4). Consideriamo $\mathcal{F}_T \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T)$. Vogliamo definire il fascio localmente libero $g \cdot \mathcal{F}_T \subset \mathcal{O}_T^{4|1}$. Ricopriamo T con sottoinsiemi aperti V_i, tali che $\mathcal{F}_T(V_i)$ sia libero. Allora

$$\mathcal{F}_T(V_i) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)}\{u, v\} \subset \mathcal{O}_T(V_i)^{4|1}.$$

Ora ha senso definire, per $g \in \mathrm{SL}(4|1)(V_i)$:

$$(g \cdot \mathcal{F}_T)(V_i) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)}\{g \cdot u, g \cdot v\}.$$

Questo è un $\mathcal{O}(V_i)$-modulo libero, ma poichè $\mathcal{O}(V_i) = \mathcal{O}_{V_i}$ possiamo pensare a $g \cdot \mathcal{F}_T$ come fascio su V_i. Possiamo quindi applicare la proposizione 4.1.7 e definire il fascio $g \cdot \mathcal{F}_T$ su T, dato dall'azione:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(4|1)(T) \times \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) \\ g, \mathcal{F}_T & \longrightarrow & g \cdot \mathcal{F}_T. \end{array}$$

Consideriamo ora il punto topologico di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$

$$\mathcal{F}_0 = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T} \{ (1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0) \} \in |\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}| \subset \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T).$$

$\mathcal{F}_0$ è un fascio libero. Calcoliamo lo stabilizzatore

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{F}_0)(T) = \{ g \in \mathrm{SL}(4|1)(T) \ | \ g \cdot \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 \} \subset \mathrm{SL}(4|1)(T).$$

Si verifica che

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{F}_0)(T) = \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \gamma_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \gamma_{25} \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} & \gamma_{35} \\ 0 & 0 & g_{43} & g_{44} & \gamma_{45} \\ 0 & 0 & \gamma_{53} & \gamma_{54} & g_{55} \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}(4|1)(T).$$

Il funtore $T \mapsto \mathrm{Stab}(\mathcal{F}_0)(T)$ è il funtore dei punti di un supergruppo, che chiamiamo F_u^{ch}.

Proposizione 4.6.2. *La supervarietà grassmanniana* $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ *è il quoziente* $\mathrm{SL}(4|1)/F_u^{\mathrm{ch}}$.

Dimostrazione. Consideriamo il morfismo definito prima

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(4|1)(T) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}} \\ g & \mapsto & g \cdot \mathcal{F}_0. \end{array}$$

Per ottenere il nostro risultato, è sufficiente mostrare che π è una summersione in ogni punto topologico (si veda [4], sezione 1.9, proposizione 1.9.7).

Assumiamo $g \cdot \mathcal{F}_0 \in \mathcal{U}_{12}(T)$ (il ragionamento per $\mathcal{U}_{ij}$ è identico). Allora, localmente abbiamo

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & \gamma_{15} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & \gamma_{25} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & \gamma_{35} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & \gamma_{45} \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & g_{55} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ g_{31} \\ g_{41} \\ \gamma_{51} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{32} \\ g_{42} \\ \gamma_{52} \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \mathrm{span} \left\{ \begin{pmatrix} I \\ WZ^{-1} \\ \rho Z^{-1} \end{pmatrix} \right\},$$

dove

$$\rho = \begin{pmatrix} \gamma_{51} & \gamma_{52} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} g_{31} & g_{32} \\ g_{41} & g_{42} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Usando il teorema della carta, il morfismo di supervarietà π è dato da

$$g \longrightarrow (WZ^{-1},\ \rho_1 Z^{-1},\ (\tau_2 - WZ^{-1}\tau_1)d).$$

Calcolando lo jacobiano e verificando che nell'identità π è suriettiva, si ha che π è summersione. $\square$

4.7 La super immersione di Plücker di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$

In questa sezione vogliamo costruire la versione super della immersione di Plücker vista nella sezione 3.2 per la supervarietà complessa $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$, nel super spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)$ (si veda l'esempio 4.2.10), dove

$$E = \wedge^2 \mathbb{C}^{4|1},$$

in analogia con la costruzione fatta per il caso ordinario nel capitolo 3. In generale, le supervarietà grassmanniane non ammettono una immersione in un superspazio proiettivo, tuttavia la nostra $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ sì, e a breve mostreremo come.

Potremo allora identificare la supervarietà complessa $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ con una sottovarietà algebrica di $\mathbb{P}(E)$; quindi $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ acquisirà anche la struttura di supervarietà proiettiva.

Per costruire l'immersione di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ in $\mathbb{P}(E)$ in termini del funtore dei punti, dobbiamo dare una trasformazione naturale ϕ iniettiva tale che

$$\phi_T : \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) \to \mathbb{P}(E)(T), \quad T \in (\mathrm{smflds}).$$

Sia $\mathcal{F}_T \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T)$. Scegliamo un ricoprimento di T costituito da aperti V_i tali che $\mathcal{F}_T|_{V_i}$ sia libero e denotiamo con $\mathcal{F}_i$ la restrizione di $\mathcal{F}_T$ a V_i. Possiamo allora scrivere

$$\mathcal{F}_i(V_i) = \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)} \{ a, b \}, \qquad a = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \\ t_{41} \\ \theta_{51} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \\ t_{42} \\ \theta_{52} \end{pmatrix}.$$

Definiamo il morfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(V_i) & \xrightarrow{\phi_{V_i}} & \mathbb{P}(E)(V_i) \\ \mathrm{span}_{\mathcal{O}_T(V_i)}\{a, b\} & \longrightarrow & [a \wedge b], \end{array}$$

dove $[a \wedge b]$ è la classe di equivalenza della retta generata dal vettore $a \wedge b$ in $E(V_i)$, quindi un elemento di $\mathbb{P}(E)(V_i)$.

ϕ_{V_i} è ben definito, dal momento che la scelta di elementi di base differenti per $\mathcal{F}_i$ comporta la moltiplicazione di $a \wedge b$ per un elemento invertibile di $\mathcal{O}_T(V_i)$, ovvero si ottiene lo stesso elemento di $\mathbb{P}(E)(V_i)$. Quando le $\mathcal{F}_i$ si incollano insieme per dare $\mathcal{F}$, le immagini corrispondenti si incollano in accordo coi cambi di carta di $\mathbb{P}(E)$, e si ottiene un elemento ben definito $\phi_T(\mathcal{F}) \in \mathbb{P}(E)(T)$. L'intera costruzione è funtoriale, cioè la famiglia dei ϕ_T definisce una trasformazione naturale tra il funtore dei punti della grassmanniana $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ e il superspazio proiettivo.

Per il lemma di Yoneda 4.3.3, tale trasformazione naturale corrisponde ad un morfismo di supervarietà $\phi : \mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}} \to \mathbb{P}(E)$, che chiamiamo la *super immersione di Plücker* dal momento che la sua parte ridotta è a tutti gli effetti l'immersione di Plücker vista nella sezione 3.2.

Vogliamo ora determinare l'immagine di ϕ. Per fare questo, introduciamo delle coordinate. Scegliamo la base (omogenea) $(e_1, \dots, e_4, \epsilon_5)$ per $\mathbb{C}^{4|1}$ e consideriamo la base in $E = \wedge^2\mathbb{C}^{4|1}$:

$$e_i \wedge e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4, \qquad \epsilon_5 \wedge \epsilon_5, \qquad e_k \wedge \epsilon_5, \quad k = 1, \dots, 4,$$

che ci permette di identificare i superspazi vettoriali $\wedge^2\mathbb{C}^{4|1} \cong \mathbb{C}^{7|4}$ e, di conseguenza, di identificare anche $\mathbb{P}(E)$ con $\mathbb{P}^{6|4}$.

Dobbiamo trovare una condizione necessaria e sufficiente affinchè un elemento $Q \in \mathbb{P}^{6|4}(V_i)$ sia *scomponibile*, cioè tale che possiamo scrivere $Q = a \wedge b$ per degli adeguati $a, b \in \mathcal{O}_T(V_i)^{4|1}$. Scriviamo un generico Q come:

$$\begin{aligned} &Q = q + \lambda \wedge \epsilon_5 + a_{55}\epsilon_5 \wedge \epsilon_5, \quad \text{con} \\ &q = q_{12}e_1 \wedge e_2 + \cdots + q_{34}e_3 \wedge e_4, \quad q_{ij} \in \mathcal{O}_T(V_i)_0, \\ &\lambda = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_4 e_4, \quad \lambda_i \in \mathcal{O}_T(V_i)_1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Q è scomponibile se e solo se

$$\begin{aligned} &Q = (r + \xi\epsilon_5) \wedge (s + \theta\epsilon_5), \quad \text{con} \\ &r = r_1 e_1 + \cdots + r_4 e_4, \quad s = s_1 e_1 + \cdots + s_4 e_4, \end{aligned}$$

con $r_i, s_i \in \mathcal{O}_T(V_i)_0$, $\xi, \theta \in \mathcal{O}_T(V_i)_1$. In questo caso,

$$Q = r \wedge s + (\theta r - \xi s) \wedge \epsilon_5 + \xi\theta\epsilon_5 \wedge \epsilon_5,$$

dalla quale otteniamo

$$q = r \wedge s, \quad \lambda = \theta r - \xi s, \quad a_{55} = \xi\theta.$$

Queste sono equivalenti alle seguenti:

$$q \wedge q = 0, \quad q \wedge \lambda = 0, \quad \lambda \wedge \lambda = 2a_{55}q, \quad \lambda a_{55} = 0.$$

Sostituendo le (5.1) otteniamo

$$\begin{array}{lr} q_{12}q_{34} - q_{13}q_{24} + q_{14}q_{23} = 0 & \text{(relazione di Plücker classica)} \\ q_{ij}\lambda_k - q_{ik}\lambda_j + q_{jk}\lambda_i = 0, & 1 \leq i < j < k \leq 4 \\ \lambda_i\lambda_j = a_{55}q_{ij} & 1 \leq i < j \leq 4 \\ \lambda_i a_{55} = 0 & \end{array} \tag{4.9}$$

Queste sono le *super relazioni di Plücker*. Come si può verificare, i differenziali di ognuna di queste relazioni è linearmente indipendente in ogni punto, perciò esse definiscono una supervarietà analitica chiusa di $\mathbb{P}^{6|4}$ (si veda [9], sezione 4.7) che chiamiamo *super quadrica di Klein*. Notare che la quadrica di Klein può essere vista anche come una supervarietà proiettiva, dal momento che le super relazioni di Plücker sono algebriche.

A questo punto, per mostrare che l'immersione di Plücker realizza un isomorfismo tra $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ e la super quadrica di Klein, dobbiamo mostrare che le relazioni di Plücker soddisfano tutte le relazioni tra le nostre coordinate.

Per prima cosa esaminiamo la struttura di supervarietà algebrica di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$. Abbiamo definito la struttura di supervarietà di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ usando il ricoprimento aperto $\mathcal{U}_{ij}$, dove $\mathcal{U}_{ij} \cong \mathbb{C}^{4|2}$ come supervarietà analitiche. Allo stesso modo, possiamo definire una struttura di supervarietà su $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ prendendo lo stesso ricoprimento di aperti U_{ij} dello spazio topologico $G(2,4)$, e definendo

$$\mathcal{U}_{ij}^{\mathrm{alg}} = (U_{ij}, \mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{alg}}), \quad \text{dove } \ \mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{alg}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{4|2}},$$

cosicchè $\mathcal{U}_{ij}^{\mathrm{alg}}$ sia isomorfo al superspazio complesso affine $\mathbb{A}^{4|2}$. I fasci $\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{alg}}$ si incollano insieme per dare la struttura di supervarietà affine su $G(2,4)$.

Il funtore dei punti di $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ come supervarietà algebrica è caratterizzato esattamente nello stesso modo che per la categoria analitica, ovvero

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_T^{4|1} \mid \mathcal{F} \text{ sottofascio localmente libero di rango } 2|0\},$$

dove $T \in (\mathrm{svar})$, $\mathcal{O}_T^{4|1} := (\mathbb{C}^{4|1} \otimes \mathcal{O}_T)_0$ e $\mathcal{O}_T$, come al solito, denota il fascio strutturale delle supervarietà algebriche $T = (|T|, \mathcal{O}_T)$.

La supervarietà $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ si immerge nel superspazio proiettivo $\mathbb{P}^{6|4}$, tramite l'immersione di Plücker, che acquista senso anche nella categoria algebrica. Abbiamo la seguente proposizione:

Proposizione 4.7.1. *L'immersione di Plücker:*

$$\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}(T) \xrightarrow{\phi_T} \mathbb{P}(E)(T), \quad T \in (\mathrm{svar}),$$

definita su un appropriato ricoprimento aperto $\{V_i\}$ *di* T *come*

$$\phi_{V_i}(\mathrm{span}\{a, b\}) = [a \wedge b]$$

realizza un isomorfismo tra la supervarietà algebrica affine $\mathrm{Gr}^{\mathrm{ch}}$ *e la super quadrica di Klein, che è la supervarietà algebrica proiettiva di* $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}^{6|4}$ *definita dall'ideale omogeneo* I_P *delle relazioni di Plücker (4.9).* $\square$

Per dettagli e approfondimenti, si faccia riferimento a [4], sezione 4.8.

Capitolo 5

Lo spaziotempo di Minkowski

In questo capitolo finale vogliamo trattare alcuni argomenti di fisica che sono strettamente correlati con le costruzioni puramente matematiche che abbiamo fatto nei capitoli precedenti.

Nello specifico, vedremo come la grande cella U_{12} dentro la grassmanniana $G(2,4)$ risulta essere un ottimo modello geometrico per quello che in fisica prende il nome di spaziotempo di Minkowski. Questo modello è molto importante, in quanto risulta essere lo spazio ridotto del modello supergeometrico corrispondente all'estensione supersimmetrica dello spazio di Minkowski.

5.1 Relatività

In questa prima sezione vogliamo studiare da un punto di vista matematico gli spazi e le trasformazioni che descrivono la *relatività* fisica.

Partiamo col descrivere la relatività secondo Galileo.

Siano A e B due osservatori inerziali e $\vec{v}$ la velocità di A rispetto a B. Nella relatività galileiana, le misurazioni dei due osservatori della posizione di una particella e del tempo sono legate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} t_B &= t_A + \tau \\ \vec{x}_B &= \vec{v}t_B + \vec{x}_A + \vec{T}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove la costante τ indica la differenza rispetto alle due misurazioni del tempo, mentre il vettore costante $\vec{T}$ indica la posizione di A rispetto a B all'istante $t_B = 0$.

Collochiamo ora ogni osservatore nell'origine di un sistema di riferimento formato da tre assi coordinati. Sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base per il sistema di riferimento di A, e $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3\}$ una base analoga per B. Allora la posizione di una particella rispetto ad A e B avrà coordinate

$$\vec{x}_A = x_A^1 \vec{e}_1 + x_A^2 \vec{e}_2 + x_A^3 \vec{e}_3$$
$$\vec{x}_B = {x'}_B^1 \vec{e'}_1 + {x'}_B^2 \vec{e'}_2 + {x'}_B^3 \vec{e'}_3.$$

Quindi abbiamo

$$\begin{pmatrix} {x'}_B^1 \\ {x'}_B^2 \\ {x'}_B^3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_B^1 \\ x_B^2 \\ x_B^3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} {x'}_A^1 \\ {x'}_A^2 \\ {x'}_A^3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_A^1 \\ x_A^2 \\ x_A^3 \end{pmatrix},$$

dove R è la matrice di rotazione di SO(3) che lega i due sistemi coordinati come segue:

$$\vec{e}_i = {R^T}^j_i \vec{e'}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Ricordiamo che una matrice R appartiene a SO(3) se e solo se:

- $\det R = 1$;
- $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ \|R\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$, cioè la rotazione preserva la norma euclidea.

Le *trasformazioni galileiane* (5.1) possono essere quindi scritte

$$\begin{pmatrix} t_B \\ {x'}_B^1 \\ {x'}_B^2 \\ {x'}_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ {v'}^1 & \\ {v'}^2 & R \\ {v'}^3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x_A^1 \\ x_A^2 \\ x_A^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau \\ {T'}^1 \\ {T'}^2 \\ {T'}^3 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Il *gruppo di Galileo* è il gruppo delle trasformazioni (5.2), ed ha la seguente struttura di prodotto semidiretto:

$$G = \tilde{G} \ltimes \mathbb{R}^4,$$

dove $\tilde{G}$ è l'insieme delle matrici della forma

$$\tilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0\ 0\ 0 \\ {v'}^1 & \\ {v'}^2 & R \\ {v'}^3 & \end{pmatrix} \;\middle|\; R \in \mathrm{SO}(3),\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

a $\mathbb{R}^4$ è il sottogruppo abeliano delle traslazioni. Possiamo anche scrivere

$$G = (\mathrm{SO}(3) \ltimes \mathbb{R}^3) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

Queste trasformazioni, che non dipendono dalla velocità dell'osservatore e non trasformano il tempo, non mantengono però invariate le equazioni di Maxwell, e quindi non sono adeguate per la discussione di campi dove sono presenti onde che viaggiano alla velocità della luce. In accordo col principio di relatività, anche queste equazioni devono essere le stesse per ogni osservatore inerziale; quindi il gruppo di Galileo deve essere modificato.

Quello che ci aspettiamo è di avere un gruppo di trasformazioni $\mathcal{P}$, detto gruppo di Poincarè, che agisca come un prodotto semidiretto:

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \ltimes \mathbb{R}^4. \tag{5.3}$$

$\mathcal{L}$, detto gruppo di Lorentz, prende il posto del gruppo di Galileo, mentre $\mathbb{R}^4$ rappresenta le traslazioni.

$\mathcal{P}$ mantiene invariate le equazioni di Maxwell. Vediamo più in dettaglio come. Questa volta, le trasformazioni agiscono anche sul tempo, come sulle altre variabili. In base alle equazioni

$$|\vec{x}^p_A - \vec{x}^q_A| = c(t^p_A - t^q_A), \quad |\vec{x}^p_B - \vec{x}^q_B| = c(t^p_B - t^q_B).$$

che descrivono il moto di una particella che viaggia alla velocità della luce c, rispetto ai due osservatori A e B, abbiamo che le trasformazioni cercate preservano l'insieme degli zeri della forma quadratica non degenere

$$Q(\vec{x}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

che rappresenta un cono in $\mathbb{R}^4$, detto *cono luce*.

Lo spazio affine $\mathbb{R}^4$ insieme alla forma quadratica Q, o alla sua forma bilineare simmetrica corrispondente

$$a \cdot b = (a^0, a^1, a^2, a^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix},$$

è detto *spaziotempo di Minkowski* e si denota con $\mathbf{M}_0$ o $\mathbb{R}^{1,3}$. Le nostre nuove trasformazioni dovranno quindi preservare la norma associata alla forma Q, detta *norma di Minkowski*, cioè dovremo ottenere delle nuove matrici $\Lambda \in M_4(\mathbb{R})$ tali che

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^4,\ |\Lambda\vec{u}|_M = |\vec{u}|_M, \quad \text{dove } |(t,x,y,z)|_M^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Imponiamo quindi

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \text{dove } \eta = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1). \tag{5.4}$$

Quello che otteniamo è il gruppo ortogonale $\mathrm{O}(1,3)$, detto *gruppo delle trasformazioni di Lorentz*, che ha le rotazioni $\mathrm{O}(3)$ come sottogruppo.

Il gruppo di Lorentz è proprio il fattore che cercavamo in (5.3). Il prodotto semidiretto di quest'ultimo con le traslazioni è detto *gruppo di Poincarè*:

$$\mathcal{P} = \mathrm{O}(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

Esempio 5.1.1 (Boost nella direzione x^1)**.** Consideriamo due osservatori A e B come prima. Assumiamo $x^\mu = 0$ se e solo se $x'^\mu = 0$, così da escludere traslazioni, e assumiamo che gli assi dei due sistemi siano paralleli, così da escludere rotazioni. A sta viaggiando con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a B. Se definiamo

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

allora la matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soddisfa (5.4) e

$$x'^i = 0, \ i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad x^1 = vt, \ x^2 = x^3 = 0,$$

cioè B si muove con velocità costante v in direzione x^1 rispetto al sistema di riferimento di A.
La matrice Λ è una trasformazione di Lorentz, ed è detta *boost* nella direzione x^1 con velocità v.

5.2 La grande cella U_{12} e lo spazio di Minkowski complesso

In questa sezione vogliamo mostrare come l'aperto $U_{12} \subset G(2,4)$ può essere interpretato come lo spazio di Minkowski complesso.

U_{12} è detta la *grande cella* di $G(2,4)$ e corrisponde alla condizione $y_{12} \neq 0$ nella identificazione con la quadrica di Klein $K \cong G(2,4)$ descritta nel capitolo 3.2. Un piano $\pi \in U_{12}$ è univocamente rappresentato come

$$\pi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ A \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

e le coordinate di Plücker di π sono

$$[y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}, y_{34}] = [1, \beta, \delta, -\alpha, -\gamma, \alpha\delta - \beta\gamma]. \tag{5.5}$$

Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base standard di $\mathbb{C}^4$. Definiamo

$$\pi_0 = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}, \quad \pi_\infty = \operatorname{span}\{e_3, e_4\},$$

così da avere $\mathbb{C}^4 = \pi_0 \oplus \pi_\infty$.

Descriviamo ora il complementare di U_{12} in $G(2,4)$. Un piano arbitrario $\pi \in G(2,4)$ appartiene a U_{12} se e solo se $\pi \cap \pi_\infty = \emptyset$. Infatti, se un piano ha intersezione non nulla con π_∞ può essere sempre rappresentato da due vettori indipendenti $a \in \pi_\infty$ e b della forma

$$a = a_3e_3 + a_4e_4, \quad b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4,$$

quindi $y_{12} = 0$. Sostituendo nella relazione di Plücker otteniamo

$$y_{23}y_{14} - y_{13}y_{24} = 0.$$

Questa equazione corrisponde a un cono (nullo) in $\mathbb{C}^4$ se $y_{34} \neq 0$, oppure un cono in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ se $y_{34} = 0$.

Analizziamo ora l'azione di gruppo su U_{12}. Vedremo che il gruppo di Poincarè complesso con dilatazioni, denotate con F_0^c, formano un sottogruppo di $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ che lascia invariata U_{12}.

Calcoliamo F_0^c, il gruppo che lascia invariato π_∞. Nelle coordinate scelte,

$$\pi_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

e si ottiene

$$F_0^c = \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ N & R \end{pmatrix}, \ L, R \text{ invertibili} \right\}.$$

Proposizione 5.2.1. *F_0^c è il sottogruppo di $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ che lascia invariata U_{12}.*

Dimostrazione. Si veda [4], capitolo 2, proposizione 2.7.1. □

Procediamo definendo formalmente il gruppo di Poincarè complesso.

Definizione 5.2.2. Definiamo le *il gruppo di Poincarè complesso con dilatazioni* come il sottogruppo di $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ che lascia invariata la grande cella. Dalla discussione precedente, scriviamo

$$F_0^c = \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ NL & R \end{pmatrix}, \ L, R \text{ invertibili} \right\}.$$

Il *gruppo di Poincarè complesso*, denotato con P_0^c, è il sottogruppo di F_0^c con $\det L = \det R = 1$. P_0^c è la componente connessa dell'identità di $\mathcal{P}$ (vedi sezione 5.1).

Tra poco sarà chiara la sostituzione che abbiamo fatto nella definizione F_0^c, mettendo NL al posto di N arbitrario. Notare che $F_0^c \cong I_0$, il gruppo di isotropia di π_0 visto in (3.1).

L'azione di F_0^c sulla grande cella

$$U_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} I_0 \right\} \subset G(2,4) \cong \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/I_0$$

sarà

$$\begin{pmatrix} L & 0 \\ NL & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} L \\ NL + RA \end{pmatrix} I_0 = \begin{pmatrix} I \\ N + RAL^{-1} \end{pmatrix} I_0.$$

Brevemente,

$$A \longrightarrow N + RAL^{-1}. \tag{5.6}$$

Consideriamo ora la seguente base per le matrici 2×2 complesse:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riscrivendo A nei termini della nuova base

$$A = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

notiamo che

$$\det A = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{5.7}$$

Quindi la grande cella U_{12} può essere effettivamente identificata con lo spazio di Minkowski complessificato $\mathbf{M}^c$, e la trasformazione (5.6) preserva la forma quadratica (5.7).

Quello che si ottiene sono le due seguenti identificazioni:

$$F_0^c = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times) \ltimes \mathbb{C}^4,$$
$$P_0^c = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \ltimes \mathbb{C}^4.$$

Per maggiori dettagli si veda [4], sezione 2.7.

Abbiamo quindi immerso lo spazio di Minkowski complesso $\mathbf{M}^c \cong U_{12}$ in una delle sue compattificazioni, $G(2,4)$, e abbiamo trattato il gruppo di Poincarè complesso con dilatazioni come l'azione del sottogruppo F_0^c di $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ che lascia invariata U_{12}.

5.3 Lo spazio di Minkowski reale

In questa sezione vogliamo ottenere la forma reale corrispondente allo spazio di Minkowski complesso appena studiato, in modo da ricongiungerci alla discussione iniziata nella sezione 5.1.

Per comodità, d'ora in avanti useremo le notazioni $T \cong \mathbb{C}^4$ e $E \cong \wedge^2\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^6$.

Nei paragrafi precedenti abbiamo identificato $\mathbf{M}^c$ con la grande cella U_{12} della quadrica di Klein K nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$. Inoltre, abbiamo scritto un elemento generico di U_{12} come una matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

dove è evidente la metrica di Minkowski

$$\det A = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{5.8}$$

Confrontando questi risultati con (5.1), abbiamo che la forma reale dello spazio di Minkowski sarà quella in cui (x_0, x_1, x_2, x_3) sono tutte reali, ovvero il caso in cui la matrice A sia hermitiana. In altre parole, data la mappa di coniugazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{s} & \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \\ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} & \mapsto & A^s := \begin{pmatrix} \bar\alpha & \bar\gamma \\ \bar\beta & \bar\delta \end{pmatrix}, \end{array}$$

l'insieme dei punti fissi di s è l'insieme delle matrici hermitiane

$$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^s := \{\, A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \ \mid \ A^s = A \,\}.$$

$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})^s$ è uno spazio vettoriale reale, e lo identifichiamo con lo spazio di Minkowski reale: $\mathbf{M}_0 \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})^s$. La forma quadratica (5.8) ha segnatura $(1,3)$.

L'obiettivo ora è capire che cos'è la forma reale di E che, ristretta ad U_{12}, dà questa forma reale dello spazio di Minkowski.

La restrizione della mappa di Plücker (5.5) alla grande cella suggerisce che la coniugazione in E debba essere

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta} & E \\ \\ \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{23} \\ y_{24} \\ y_{34} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \bar{y}_{12} \\ -\bar{y}_{24} \\ \bar{y}_{14} \\ \bar{y}_{23} \\ -\bar{y}_{13} \\ \bar{y}_{34} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ora rimpiazziamo le coordinate y_{13} con $y_{31} := -y_{13}$, per evitare un ingombrante segno meno, e riordiniamo le coordinate, in modo da ottenere la seguente scrittura di θ:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\theta} & E \\ \\ \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{23} \\ y_{14} \\ y_{34} \\ y_{31} \\ y_{24} \end{pmatrix} & \mapsto & \Theta \begin{pmatrix} \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{23} \\ \bar{y}_{14} \\ \bar{y}_{34} \\ \bar{y}_{31} \\ \bar{y}_{24} \end{pmatrix} \end{array},$$

dove Θ è la matrice

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_4 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma quadratica Q che definisce la quadrica di Klein diventa

$$Q(y) = y_{12}y_{34} + y_{31}y_{24} + y_{14}y_{23},$$

e questa soddisfa

$$\overline{Q(y)} = Q(\theta(y)), \tag{5.9}$$

quindi il suo insieme zero viene preservato dalla coniugazione:

$$Q(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(\theta(y)) = 0.$$

Sullo spazio vettoriale

$$\begin{aligned} E^\theta &= \{\, y = (y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{23}, y_{24}, y_{34}) \in E \;\mid\; \theta(y) = y \,\} \\ &= \{\, y \in E \;\mid\; y_{12}, y_{14}, y_{23}, y_{34} \text{ sono reali e } y_{31} = \bar{y}_{24} \,\}, \end{aligned}$$

la forma quadratica Q si restringe a

$$Q_{\mathbb{R}}(y) = y_{12}y_{34} + y_{31}\bar{y}_{31} + y_{14}y_{23}.$$

Possiamo ora applicare il seguente cambio di variabili lineare:

$$\begin{array}{lll} y_{12} = (x^1 + x^0), & y_{34} = (x^1 - x^0), & y_{31} = x^2 + ix^3, \\ y_{14} = a + b, & y_{23} = a - b, & \end{array}$$

nel quale E^θ è

$$E^\theta = \{\, (b, x^0, x^1, x^2, x^3, a) \in \mathbb{R}^6 \,\} \cong \mathbb{R}^6,$$

e otteniamo

$$Q_{\mathbb{R}}(y) = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + a^2 - b^2. \tag{5.10}$$

La forma quadratica $Q_{\mathbb{R}}$ ha così segnatura $(4, 2)$.

Concentriamoci ora sull'azione di gruppo. Consideriamo il gruppo delle trasformazioni lineari che preservano Q:

$$\mathrm{SO}(Q) := \{\, g \in \mathrm{SL}_6(\mathbb{C}) \;\mid\; Q(gy) = Q(y) \,\} \cong \mathrm{SO}(6, \mathbb{C}).$$

In linea con la proprietà (5.9), abbiamo una involuzione in $\mathrm{SO}(Q)$ definita come

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}(Q) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(Q) \\ g & \mapsto & g^\Theta = \Theta\bar{g}\Theta. \end{array}$$

L'insieme dei punti fissi di questa involuzione è l'insieme dei $g \in \mathrm{SO}(Q)$ tali che

$$g = \Theta g \Theta, \quad \text{o, equivalentemente,} \quad g^{-1}\Theta g = \Theta,$$

e coincide con l'insieme dei $g \in \mathrm{SO}(Q)$ che lasciano invariato lo spazio vettoriale E^Θ. Indichiamo questo gruppo con $\mathrm{SO}(Q_{\mathbb{R}})$; è la forma reale di $\mathrm{SO}(Q)$, e dalla (5.10) abbiamo $\mathrm{SO}(Q_{\mathbb{R}}) \cong \mathrm{SO}(4, 2)$.

Vogliamo ora introdurre la quadrica di Klein reale. Per fare ciò abbiamo bisogno della seguente proposizione.

Proposizione 5.3.1. *Definiamo gli insiemi*

$$K^\theta = \{\, [y] \in \mathbb{P}(E) \ \mid \ y \in E_\mathbb{R},\ Q_\mathbb{R}(y) = 0 \,\}$$
$$K^{\theta\prime} = \{\, [y] \in K \ \mid \ \theta([y]) = [y] \,\} .$$

Allora $K^\theta = K^{\theta\prime}$*. Inoltre, la componente connessa dell'identità del gruppo* $\mathrm{SO}(Q_\mathbb{R})$ *agisce transitivamente su* K^θ*.*

Dimostrazione. Si veda [4], capitolo 2, proposizione 2.11.1. □

Definiamo *quadrica di Klein reale* l'insieme $K^\theta = K^{\theta\prime}$.

Quello che ci aspettiamo è che lo spazio di Minkowski reale possa essere identificato con i punti finiti di K^θ. Per fare questo, introduciamo prima il gruppo $\mathrm{SU}(2,2)$ degli elementi $U \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ che lasciano invariata la seguente forma quadratica hermitiana in $\mathbb{C}^4$:

$$H(z) = +\bar{z}^1 z^1 + \bar{z}^2 z^2 - \bar{z}^3 z^3 - \bar{z}^4 z^4, \qquad z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4,$$

ovvero $U \in \mathrm{SU}(2,2)$ se e solo se

$$H(Uz) = H(z);$$

che è equivalente a

$$U^\dagger I_{2,2} U = I_{2,2}, \qquad \text{con} \ \ I_{2,2} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{id}_2 \end{pmatrix},$$

dove $U^\dagger$ indica la trasposta coniugata di U. Questo gruppo coincide con il *gruppo conforme reale* G (si veda [4], capitolo 2, proposizione 2.11.2).

Siamo ora pronti per dare la seguente proposizione.

Proposizione 5.3.2.

1. *Lo spazio di Minkowski reale* $\mathbf{M}_0$ *è un insieme aperto denso in* K^θ*.*

2. *Il gruppo* $G \cong \mathrm{SU}(2,2)$ *agisce transitivamente su* K^θ*, e il sottogruppo che lascia invariato lo spazio di Minkowski reale è*

$$F_0' = \left\{ \begin{pmatrix} L & 0 \\ NL & L^{\dagger -1} \end{pmatrix},\ N \textit{ hermitiana e } \det(L) \in \mathbb{R}^\times \right\} \subset G.$$

La sua azione su $\mathbf{M}_0$ *è*

$$A \to N + {L^{\dagger}}^{-1} A L^{-1}.$$

Allora

$$F_0' \cong (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\times}) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

$\square$

Questo completa l'interpretazione dei punti finiti di K^{θ} come lo spazio di Minkowski reale. Per maggiori dettagli si faccia riferimento a [4].

Appendice A

Cenni di teoria delle categorie

In questa appendice vogliamo dare cenni di teoria delle categorie, un potente linguaggio utile per esprimere alcuni concetti della geometria algebrica.

Definizione A.0.3. Una *categoria* $\mathcal{C}$ consiste dei seguenti dati:

1. una classe $ob(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti *oggetti* della categoria;

2. per ogni coppia $A, B \in ob(\mathcal{C})$ di oggetti, un insieme indicato con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ o con $\mathcal{C}(A, B)$, detto insieme dei *morfismi* da A a B; normalmente, invece di scrivere $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ si scrive $f : A \to B$;

3. per ogni terna di oggetti A, B, C una composizione
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C);$$

4. per ogni oggetto A un elemento speciale $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ detto *identità*.

Si suppone inoltre che valgano i seguenti assiomi:

(a) la composizione è associativa;

(b) l'identità agisce come elemento neutro per la composizione (quando è definita).

Le categorie più note sono quelle in cui possiamo interpretare i morfismi come particolari funzioni tra insiemi, la loro composizione come l'usuale composizione di funzioni, e l'identità come l'usuale funzione identità. Vediamo alcuni esempi di categorie:

1. la categoria degli insiemi (sets) i cui morfismi sono le funzioni arbitrarie tra insiemi;

2. i gruppi e gli omomorfismi tra gruppi, gli anelli o i moduli su un anello e i relativi omomorfismi;

3. gli spazi vettoriali e le funzioni lineari;

4. gli spazi topologici e le funzioni continue;

5. gli spazi misurabili e le funzioni misurabili;

6. le varietà differenziabili e le funzioni differenziabili.

Se ora consideriamo tutte le categorie, esse posso essere a loro volta raggruppate in una categoria, dotata di particolari morfismi detti funtori.

Definizione A.0.4. Un *funtore (covariante)* $F : \mathcal{A}, \mathcal{B}$ dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$ è una legge che associa ad ogni oggetto X di $\mathcal{A}$ un oggetto $F(X)$ di $\mathcal{B}$ e ad ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ in $\mathcal{B}$ in modo tale che:

(a) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ per ogni $g : Y \to Z$ in $\mathcal{A}$;

(b) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Si possono definire anche i funtori *contravarianti* che ad ogni morfismo $f : X \to Y$ associano un morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$ in modo che si abbia $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Definiamo poi la *categoria opposta* $\mathcal{C}^o$ di una categoria data $\mathcal{C}$ come la categoria che ha gli stessi oggetti di $\mathcal{C}$, mentre $\mathrm{Hom}^o_{\mathcal{C}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Si verifica che un funtore contravariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ è covariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}^o$ (o da $\mathcal{A}^o$ a $\mathcal{B}$).

Per completare l'approccio categorico, introduciamo le trasformazioni naturali, che, assumendo l'aspetto formale di *morfismi tra funtori*, permettono di trattare questi ultimi come oggetti di un'ulteriore categoria.

Definizione A.0.5. Dati due funtori $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra due categorie, una *trasformazione naturale* $\varphi : F \to G$ tra i due funtori associa ad ogni oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$ un morfismo $\varphi_A : F(A) \to G(A)$ (in $\mathcal{B}$) tale che, per ogni coppia di oggetti $A, B \in ob(\mathcal{A})$ e per ogni morfismo $F : A \to B$ il seguente diagramma commuti in $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Da questa definizione segue quella di *isomorfismo naturale*, ovvero una trasformazione naturale che ammette un'inversa, e quella di *equivalenza di categorie.*

Definizione A.0.6. Due categorie $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ si dicono *equivalenti* se esiste una coppia di funtori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ (detta *equivalenza tra* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$) tale che $G \circ F$ sia naturalmente isomorfo all'identità di $\mathcal{A}$, e $F \circ G$ sia naturalmente isomorfo all'identità di $\mathcal{B}$.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah, I. G. McDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer (2007).

[3] C. Carmeli, L. Caston, R. Fioresi, *Mathematical Foundations of Supersymmetry*, European Mathematical Society (2011).

[4] R. Fioresi, M. A. Lledò, *The Minkowski and Conformal Superspaces*, World Scientific (2015).

[5] D. Eisenbud, J. Harris, *The Geometry of Schemes*, Springer (2000).

[6] D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Springer-Verlag (1995).

[7] Y. I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag (1997).

[8] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer (2011).

[9] V. S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, AMS (2004).

[10] P. Deligne, J. W. Morgan, *Notes on supersymmetry*, AMS, Providence (1999).

[11] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer (1977).

[12] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer (1983).

Ringraziamenti

Al termine di questo viaggio, un enorme grazie va alla mia famiglia, per la vicinanza e per l'incondizionato sostegno che mi hanno dimostrato durante tutta la mia esperienza scolastica.

Ringrazio la prof.sa Rita Fioresi, per il cammino percorso insieme, per la sua professionalità, la sua disponibilità e la sua pazienza.

Ringrazio poi i miei amici più stretti, per esserci stati sempre, in ogni situazione. Ringrazio i compagni di corso, di Modena e Bologna, che hanno reso questi cinque anni accademici straordinari, e tutti i professori che hanno contribuito alla mia crescita personale.

E infine ringrazio te, che hai letto questa tesi, sperando di aver contribuito al tuo sapere e di aver alimentato in te il desiderio, che ho anch'io, di voler sempre imparare qualcosa di nuovo.