

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**Il metodo COS
per la valutazione dei derivati**

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Serena Federico

**I Sessione
Anno Accademico 2009/2010**

A Caterina Agostinelli

Introduzione

La seguente tesi affronta il problema finanziario della valutazione dei derivati, illustrando un metodo di prezzaggio basato sullo sviluppo in serie di Fourier, il metodo COS.

Come per gli altri metodi di valutazione il problema fondamentale consiste nel ricavare la densità di probabilità, funzione che interviene nella formula di valutazione. Il metodo COS si fonda principalmente sul legame tra funzione caratteristica e funzione densità, in quanto la prima si ottiene come trasformata di Fourier della seconda. Tra i metodi numerici che si occupano della valutazione dei derivati, basati sugli strumenti dell'analisi di Fourier, la maggior parte ricavano la densità come trasformata inversa. Il metodo COS invece determina la densità di probabilità non attraverso un integrale, cioè come antitrasformata, ma mediante un particolare sviluppo in serie di Fourier, la serie coseno.

Il metodo COS utilizza lo sviluppo in serie coseno per ottenere un'approssimazione della densità e sostituirla nella formula di prezzo delle opzioni. Il vantaggio è che esso può essere applicato a diversi processi del sottostante consentendo, in alcuni casi particolari, di prezzare un'opzione per un vettore di strike simultaneamente.

Questa tesi illustra il metodo con riferimento alle applicazioni ad opzioni europee call e put, ma esso può essere applicato anche a molti altri tipi di contratti, come le opzioni americane o con barriera.

Nel Capitolo 1 vengono introdotte le definizioni di serie di Fourier e serie coseno, che sono gli strumenti analitici maggiormente utilizzati, nonché il

ruolo della funzione caratteristica. Viene inoltre giustificata la serie coseno come metodo di approssimazione di funzioni e, successivamente, ricavate le formule di approssimazione della densità mediante funzione caratteristica.

Nel Capitolo 2 viene spiegato il metodo COS e ricavata la formula di valutazione mediante gli strumenti introdotti nel Capitolo 1.

Nel Capitolo 3 sono mostrate alcune possibili applicazioni del metodo che, oltre a ricavare la formula di prezzo, è efficiente anche nel ricavare la volatilità implicita e le greche. Il seguente capitolo contiene inoltre la spiegazione dei limiti di applicabilità del metodo.

Infine nel Capitolo 4 si ricavano gli errori del metodo COS.

Indice

Introduzione	i
1 Approssimazione di funzioni mediante serie coseno	1
1.1 La serie di Fourier	1
1.2 La serie coseno	5
1.3 La serie coseno come metodo di approssimazione	6
1.4 La funzione caratteristica	9
1.5 Approssimazione della funzione densità	9
1.6 Densità	14
2 Il metodo COS	21
2.1 Differenze con gli altri metodi	21
2.2 La formula di valutazione attraverso il metodo COS	22
2.3 Opzioni Plain Vanilla: i coefficienti del payoff	25
3 Applicazioni e limiti del metodo	29
3.1 Applicazioni: la volatilità implicita	29
3.2 Le greche	32
3.3 Limiti di applicabilità del metodo COS	33
4 Gli errori del metodo	37
4.1 L'errore totale	37
Bibliografia	43

Elenco delle figure

1.1	Errore di approssimazione	13
1.2	Densità Merton a diverse scadenze	16
1.3	Densità Merton al variare di λ	17
1.4	Densità VG a diverse scadenze	17
1.5	Densità VG al variare di θ	18
1.6	Densità VG al variare di ν	18
1.7	Densità Heston a diverse scadenze	19
1.8	Densità Heston	19
2.1	Prezzo call Heston	25
3.1	Volatilità implicita Merton	30
3.2	Volatilità implicita VG	31
3.3	Volatilità implicita Heston	31
3.4	Argomento del log complesso	34
3.5	Funzione caratteristica del modello di Merton	35
3.6	Funzione caratteristica del modello VG	35
3.7	Funzione caratteristica del modello di Heston	35

Capitolo 1

Approssimazione di funzioni mediante serie coseno

Nel seguente capitolo illustreremo un metodo di approssimazione di funzioni basato su un particolare sviluppo in serie di Fourier, chiamato sviluppo coseno. Questa tecnica è alla base del metodo di valutazione che vogliamo presentare, pertanto forniamo gli strumenti di base per la comprensione dell'argomento.

1.1 La serie di Fourier

Innanzitutto definiamo lo sviluppo in serie di Fourier classico per poter poi definire la serie coseno. Definiamo il seguente sviluppo:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x) \quad (1.1)$$

in cui $A_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, con a_k e b_k per $k = 1, 2, \dots$ costanti reali. La precedente serie è detta serie trigonometrica e la sua somma parziale è il **polinomio trigonometrico di ordine n**, che è il seguente

$$p_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n A_k(x)$$

Per riesprimere la formula precedente in termini complessi basta definire

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad k > 0$$
$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad k = 0$$
$$c_k = \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), \quad k < 0$$

e così lo sviluppo in serie e il rispettivo polinomio trigonometrico si presentano nella seguente forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$
$$p_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

Se consideriamo una funzione periodica $f : R \rightarrow R$ di periodo 2π , sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, la serie di Fourier di $f(x)$ non è altro che una serie trigonometrica in cui i coefficienti a_k e b_k , che compaiono nelle precedenti formule, devono avere una particolare espressione.

Dunque lo sviluppo in serie di Fourier per la f è una serie del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.2)$$

con

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.3)$$

La prima e la seconda formula rappresentano rispettivamente l'espressione dello sviluppo in forma complessa e il relativo coefficiente della serie. Formulazione del tutto equivalente ma in forma reale è data da:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad (1.4)$$

$$A_k = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad (1.5)$$

pertanto

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad (1.6)$$

in cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (1.7)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Se $f(x)$ è una funzione pari l'espressione si semplifica, presentando $b_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots$ e a_k è della forma

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Per dimostrarlo basta osservare che, a partire dalla formula generale dei coefficienti a_k dello sviluppo in serie di Fourier, cioè dalla (1.8), vale:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

L'uguaglianza deriva dal fatto che se $f(x)$ è pari, allora $f(x) \cos(kx)$ è pari, mentre $f(x) \sin(kx)$ è dispari. Pertanto, poichè lo zero è un punto di simmetria e l'integrando è una funzione pari, è corretto riesprimere l'integrale tra $[-\pi, \pi]$ come il doppio dell'integrale tra $[0, \pi]$.

Analogamente se $f(x)$ è dispari viceversa $a_k = 0$ e b_k è

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

poichè

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Qui l'uguaglianza deriva dal fatto che se $f(x)$ è dispari, allora $f(x) \sin(kx)$ è pari, invece $f(x) \cos(kx)$ è dispari. Quindi la serie di Fourier non è che una serie trigonometrica in cui i coefficienti a_k e b_k sono dati dalle formule (1.8) e (1.9). La serie descritta converge uniformemente su $[-\pi, \pi]$, e i numeri reali a_k e b_k sono detti coefficienti di Fourier, rispettivamente del coseno e del seno.

Analogamente, data $f : R \rightarrow R$ di periodo 2π , sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$, si chiama **polinomio di Fourier di grado n** di f il seguente polinomio trigonometrico:

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

in cui a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier appena visti.

Dunque, in generale, la funzione f si dice sviluppabile in serie di Fourier in un punto t se, e solo se,

1. la successione $(S_n(f)(t))_{n \in N}$ è convergente
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(f)(t)) = f(t)$

Precisiamo che, poichè modificando f nei punti di un insieme di misura nulla non si hanno cambiamenti nei coefficienti della serie, può accadere che solo la prima di queste due condizioni venga soddisfatta. Questo significa che, non potendo essere verificate sempre simultaneamente queste due proprietà, un criterio di sviluppabilità in serie è da ricondursi ad argomenti di convergenza. Per questo motivo, quando si ha a che fare con le serie di Fourier, si determinano prima le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza di $(S_n(f)(t))$, e poi il suo limite. Se la funzione f nel punto t coincide con il suo limite, allora essa sarà sviluppabile in quel punto.

Teorema 1.1.1. *Sia $f : R \rightarrow R$ una funzione 2π -periodica, assolutamente continua in $[-\pi, \pi]$. Allora f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto di R . Inoltre la serie di Fourier di f' si ottiene derivando termine a termine quella di f .*

Il secondo risultato di questo teorema, che riguarda la serie derivata, verrà utilizzato nel Capitolo 3 per il calcolo delle greche, in quanto le formule sono ricavate derivando termine a termine la serie del prezzo.

Osserviamo inoltre che le successioni dei coefficienti (a_k) e (b_k) dello sviluppo sono infinitesime.

1.2 La serie coseno

Adesso che abbiamo definito lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione sommabile su un certo intervallo, è semplice definire la serie coseno.

Data una funzione $f \in \mathbf{L}^1(-\pi, \pi)$, il suo sviluppo in serie coseno è dato dalla seguente espressione

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad (1.12)$$

in cui i coefficienti a_k dello sviluppo in serie coseno sono espressi dalla formula (1.10), mentre l'apice che compare in alto a destra della sommatoria indica che il primo termine della somma è moltiplicato per $1/2$. Si nota subito che questa serie corrisponde allo sviluppo in serie di Fourier di una funzione pari, caratterizzata dall'annullamento dei coefficienti b_k e dalla formulazione (1.10) dei coefficienti a_k .

Analogamente la serie seno coincide con lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione dispari, in cui sono invece i coefficienti a_k ad annullarsi. Di conseguenza lo sviluppo in serie seno della f sarà:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (1.13)$$

in cui i coefficienti b_k sono espressi dalla formula (1.11).

Ovviamente la condizione di sommabilità di f è necessaria per ottenere anche

questi sviluppi, proprio perchè i rispettivi coefficienti sono dati da integrali della f . La nostra attenzione si concentrerà in particolare sullo sviluppo in serie coseno in quanto rappresenta un metodo di approssimazione per determinate funzioni.

1.3 La serie coseno come metodo di approssimazione

L'approssimazione di funzioni è uno dei principali problemi della matematica applicata. L'obiettivo è quello di ottenere una espressione semplice per una funzione che si presenta invece in una forma complessa.

Poichè la funzione densità di probabilità non è sempre conosciuta, vogliamo ricavarne un'espressione da applicare nella formula di valutazione. Pertanto, poichè dobbiamo utilizzare una funzione di cui non è nota un'espressione in forma analitica, è necessaria una sua approssimazione numerica.

Il criterio di approssimazione che utilizzeremo è quello delle *serie di Fourier troncate*, che consiste nell'approssimare la funzione f mediante la somma di un numero finito di funzioni ortogonali.

Sia $f : R \rightarrow R$, essa verrà approssimata attraverso una combinazione lineare di funzioni più semplici scelte come funzioni di base:

$$f(x) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n + E_n(x)$$

L'insieme delle funzioni ϕ_k si suppone denso in uno spazio opportuno X , spazio in cui si approssima la f , mentre il termine E_n deve essere tale che $\|E_n\|_X \rightarrow 0$. In questo caso le funzioni ϕ_i sono ortogonali rispetto al prodotto scalare nello spazio $\mathbf{L}_w^2([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, cioè quello delle funzioni di quadrato sommabile rispetto ad un peso $w(x)$, pertanto si avrà:

$$(\phi_k, \phi_j) = \int_a^b \phi_k(x)\phi_j(x)w(x)dx = \begin{cases} > 0 & \text{se } k = j \\ = 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

mentre i coefficienti c_k , dati dal prodotto scalare $c_k = (f, \phi_k)$, saranno:

$$c_k = \int_a^b \phi_k(x) f(x) w(x) dx$$

Tra le serie di Fourier troncate quella che utilizzeremo sarà la *serie di Fourier-Chebyshev* o semplicemente *serie di Chebyshev*.

In questo caso le funzioni ϕ_i saranno i polinomi di Chebyshev, definiti $\forall x \in [-1, 1]$ come segue

$$\phi_k(x) = \arccos(kx)$$

mentre $w(x) = (\sqrt{1-x^2})^{-1}$. Effettuando il cambiamento di variabile

$$x = \cos(\theta) \quad \text{con} \quad \theta \in [0, \pi]$$

ne viene

$$\phi_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$$

I polinomi di Chebyshev sono effettivamente ortogonali, nell'intervallo $[-1, 1]$, rispetto alla funzione peso introdotta, infatti

$$\begin{aligned} (\phi_j, \phi_k) &= \int_{-1}^1 \frac{\phi_j(x)\phi_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi \phi_j(\cos \theta)\phi_k(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos j\theta \cos k\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(j+k)\theta + \cos(j-k)\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq k \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } j = k \neq 0 \\ \pi & \text{per } j = k = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x)$$

è pari a

$$f(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\theta)$$

in cui

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(k\theta) d\theta$$

questo mostra che i coefficienti di $f(x)$ come serie di Fourier-Chebyshev coincidono con i coefficienti della serie coseno definita in $\cos(\theta)$. Per ottenere l'approssimazione della f in θ basta sviluppare la serie precedente in $\cos^{-1} x = \cos^{-1} \cos \theta = \theta$:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^n c_k \cos(k\theta)$$

in cui

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$

che corrisponde esattamente allo sviluppo in serie coseno della f in θ . Al contrario quindi ogni sviluppo di funzione in serie coseno, ad esempio in $\theta \in [0, \pi]$, coincide con lo sviluppo in serie di Chebyshev in $\cos^{-1}(x)$ in x . Dunque l'equivalente in termini di serie di Fourier, della serie di Chebyshev, è la serie coseno. Ogni intervallo del tipo $[a, b]$ può essere trasformato nell'intervallo $[-1, 1]$ attraverso un cambiamento di variabili, pertanto per ogni funzione a supporto finito del tipo $[a, b]$, l'approssimazione mediante serie coseno risulterà una buona approssimazione.

Questa similitudine spiega perchè possiamo utilizzare la serie coseno come metodo di approssimazione.

1.4 La funzione caratteristica

La necessità di ricavare la funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria, conduce a ricercare questa quantità attraverso il suo legame con la funzione caratteristica, almeno nei casi in cui essa non si presenta in forma analitica.

Sia x una variabile aleatoria in \mathbb{R} , sia $f(x)$ la funzione densità di x . La funzione caratteristica di x è la trasformata di Fourier della densità, cioè

$$\phi(\omega) = E[e^{i\omega x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx \quad (1.14)$$

in cui la funzione f deve essere assolutamente continua.

Questa formula mostra subito la possibilità di esprimere la densità come trasformata inversa:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \phi(\omega) d\omega \quad (1.15)$$

che rappresenta effettivamente il valore della funzione ricercata, cioè della densità. Sfruttando le proprietà della funzione caratteristica, in quanto trasformata di Fourier, riusciremo ad ottenere un'approssimazione della funzione densità. Finora, il metodo più utilizzato per ricavare la f tramite la funzione caratteristica, è stato proprio quello di calcolarla come integrale inverso, metodo che a livello computazionale utilizza l'algoritmo FFT (**Fast Fourier Transform**). Ci sono metodi alternativi a questo che sfruttano invece gli sviluppi polinomiali di Chebyshev o di Legendre. Noi utilizzeremo lo sviluppo in serie coseno, che come mostrato, corrisponde ad uno sviluppo in serie di Chebyshev.

1.5 Approssimazione della funzione densità

La parte fondamentale, che costituisce il cuore del metodo, è proprio l'approssimazione della densità mediante sviluppo in serie coseno. Questo è assolutamente necessario per esprimere una formula di valutazione.

Ricapitolando, tale sviluppo per una funzione supportata in un intervallo finito, ad esempio $[0, \pi]$, è

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta)$$

con

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta,$$

che sono proprio i coefficienti di Fourier del coseno per funzioni pari. Questo sviluppo vale in generale per ogni funzione supportata in un intervallo finito $[a, b] \in \mathbb{R}$, basta semplicemente effettuare il seguente cambiamento di variabili

$$\theta = \frac{x-a}{b-a}\pi; \quad x = \frac{b-a}{\pi}\theta + a$$

Sostituendo nelle precedenti espressioni ne viene

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$A_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\theta) \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) dx \quad (1.17)$$

Sfruttando la proprietà della funzione caratteristica, poichè la trasformata tende a zero all'infinito, possiamo troncare opportunamente il range d'integrazione, passando ad un range del tipo $[a, b]$. La scelta di questo range non è casuale ma segue una regola ben precisa, che è la seguente:

$$[a, b] = \left[c_1 - L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, \quad c_1 + L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \right] \quad (1.18)$$

in cui $L = 10$. I c_n rappresentano i cumulanti n-esimi della funzione che descrive la dinamica dei prezzi, mentre L è una parametro. Quindi, determinato il range, la funzione caratteristica subirà la seguente approssimazione:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx \approx \int_a^b e^{i\omega x} f(x) dx = \phi_1(\omega) \quad (1.19)$$

Osservando le formule (1.17) e la (1.19) possiamo verificare che

$$A_k = \frac{2}{b-a} \mathbf{Re} \left\{ \phi_1 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\} \quad (1.20)$$

Per vederlo basta fare dei semplici calcoli:

$$A_k = \frac{2}{b-a} \mathbf{Re} \left\{ \phi_1 \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\} =$$

sostituendo nella formula (1.19) $\omega = \frac{k\pi}{b-a}$ e portando l'esponenziale sotto il segno di integrazione

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} \mathbf{Re} \left\{ \int_a^b \exp \left(i \frac{k\pi}{b-a} x - i \frac{ka\pi}{b-a} \right) f(x) dx \right\} = \\ \frac{2}{b-a} \mathbf{Re} \left\{ \int_a^b \exp \left(k\pi i \frac{x-a}{b-a} \right) f(x) dx \right\} = \end{aligned}$$

applicando le formule di Eulero

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \left(k\pi \frac{x-a}{b-a} \right) dx$$

abbiamo esattamente ottenuto l'espressione di A_k . Fatto ciò, andiamo a sostituire nello sviluppo della f i coefficienti A_k con i coefficienti F_k , che sono l'analogo dei primi ottenuti però come parte reale della ϕ e non della sua approssimazione ϕ_1 :

$$F_k = \frac{2}{b-a} \mathbf{Re} \left\{ \phi \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) \cdot \exp \left(-i \frac{ka\pi}{b-a} \right) \right\} \quad (1.21)$$

Ovviamente dalla formula (1.19) segue anche che $A_k \approx F_k$, e sostituendo nello sviluppo di f gli F_k al posto degli A_k , otteniamo una prima approssimazione della funzione che chiameremo f_1 , pari a

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (1.22)$$

L'ultimo passaggio di questa approssimazione consiste nel troncamento della sommatoria ad un numero finito di termini, che chiamiamo f_2

$$f_2(x) = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \cos\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \quad (1.23)$$

Questa è la formula di approssimazione cercata.

Esempio 1.1. Consideriamo in questo esempio il caso in cui la nostra variabile aleatoria abbia distribuzione normale standard. Sappiamo che in questo caso la funzione densità di probabilità è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

e vogliamo valutare l'errore massimo che si commette ricavando la densità attraverso il metodo appena descritto, ossia a partire dalla funzione caratteristica, che deve essere nota. La funzione caratteristica di una variabile aleatoria con tale distribuzione è:

$$\phi(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}\omega^2}$$

sostituendo questa quantità calcolata in $\omega = \frac{2k\pi}{b-a}$ nelle formule (1.21) e (1.23), e scegliendo $[a, b] = [-10, 10]$, otterremo in corrispondenza di diverse scelte di N un certo errore massimo.

Riportiamo i risultati ottenuti per le seguenti scelte di N :

La tabella contiene i risultati dell'approssimazione della gaussiana che, come mostrano i dati, risulta ottima. Riportiamo di seguito il grafico dell'errore:

Il grafico mostra esattamente che il massimo errore, approssimando f ad una

N	4	8	16	32	64
errore	0.25	0.11	0.072	4.04 e-07	3.33e-16

Tabella 1.1: Tabella degli errori massimi ottenuti dall'approssimazione di $f(x)$ mediante $\phi(\omega)$ attraverso lo sviluppo in serie coseno.

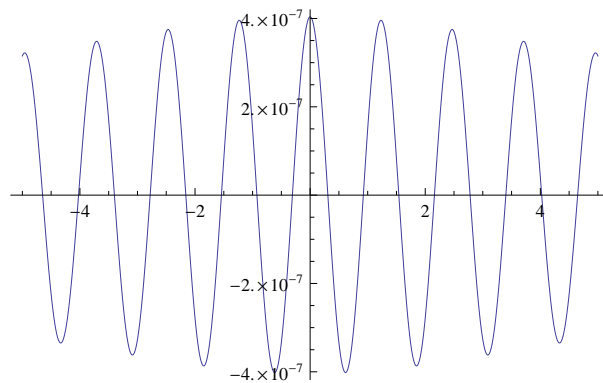


Figura 1.1: Grafico dell'errore di approssimazione per $N=32$

somma finita di termini dello sviluppo, in questo caso $N=32$, si ha in corrispondenza di $x \in \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$, in particolare il massimo si ha in $x = 0$. Ovviamente la scelta dell'intervallo è molto importante. Abbiamo precedentemente illustrato un criterio di scelta per l'intervallo $[a, b]$. Tuttavia tale scelta non è obbligata. Utilizzando un intervallo diverso, ad esempio più grande, sarà necessario per ottenere una buona approssimazione aumentare il numero di termini dello sviluppo.

Nell'esempio 1, se avessimo scelto $[a, b] = [-20, 20]$, per avere un errore vicino a quello precedentemente ottenuto per $N=32$, avremmo dovuto invece sviluppare la somma fino ad $N=63$. Questo dimostra che la scelta deve essere accurata, altrimenti per una stessa scelta di N e una diversa scelta di $[a, b]$ il metodo riporterebbe degli errori consistenti in uno dei due casi.

1.6 Densità

In questa sezione vogliamo illustrare i grafici delle densità di alcuni modelli ottenuti mediante serie coseno.

Alcuni processi, come quelli di Lèvy, ma anche il modello di Heston, hanno funzione caratteristica nota, pertanto è possibile ricavare, come visto prima, la loro densità.

Di seguito illustreremo i grafici della densità dei seguenti modelli:

- Modello di Merton.
- Modello VG.
- Modello di Heston.

Per ricavare la densità di questi modelli attraverso la serie coseno, utilizziamo le rispettive funzioni caratteristiche.

Alcuni modelli, come ad esempio quello di Heston, presentano più formulazioni della funzione caratteristica, e questo a volte può generare delle complicazioni. Tali formulazioni sono del tutto equivalenti ma, nelle applicazioni, un'opportuna scelta dell'espressione da utilizzare può semplificare notevolmente il lavoro. In questa sezione riportiamo i grafici delle densità utilizzando direttamente le formule più appropriate per la ϕ . L'argomento verrà ripreso successivamente nel Capitolo 3.

Illustriamo per primo il modello di Merton, la cui funzione caratteristica è:

$$\phi(\omega) = e^{-T\psi(\omega)} \quad (1.24)$$

in cui $\psi(\omega)$, che è l'esponente caratteristico, ha la seguente espressione:

$$\psi(\omega) = -i\omega b + \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2 + \lambda\left(1 - e^{im\omega - \frac{\delta^2\omega^2}{2}}\right) \quad (1.25)$$

I parametri presenti in queste formule sono: la scadenza T , la volatilità nei salti δ , la misura dei salti m , il tasso d'interesse privo di rischio r , mentre b è il drift del titolo nella misura martingala, cioè:

$$b = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\left(e^{m + \frac{\delta^2}{2}} - 1\right)$$

Alla fine di questa sezione sono riportati i grafici dei vari modelli. Le figure 1.2 e 1.3 rappresentano rispettivamente la densità del modello a diverse scadenze e la densità al variare di λ . Tutti i grafici sono stati ottenuti mediante applicazione della serie di Fourier del coseno, più precisamente mediante applicazione della formula (1.23).

Per quanto riguarda il modello VG, la funzione caratteristica è:

$$\phi(\omega) = \exp(i\omega\mu T + i\omega\varpi T) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\nu\omega^2\sigma^2 - i\omega\theta\nu} \right)^{\frac{T}{\nu}} \quad (1.26)$$

in cui: $\mu = r - q$ mentre $\varpi = \ln(1 - \theta\nu - \frac{1}{2}\sigma^2\nu)$.

Il grafico della densità VG a diverse scadenze è rappresentato in figura 1.4, mentre in figura 1.5 e 1.6 sono riprodotti i grafici al variare dei parametri θ e ν .

Il modello di Heston è un modello a volatilità stocastica, ed è rappresentato del seguente insieme di equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}u_t\right)dt - \sqrt{u_t}dW_{1t}, \\ du_t &= \lambda(\bar{u} - u_t)dt + \eta\sqrt{u_t}dW_{2t} \end{aligned} \quad (1.27)$$

in cui x_t indica il logaritmo del prezzo del sottostante all'istante t , mentre u_t è la varianza del processo del prezzo del bene finanziario. Gli altri parametri $\lambda \geq 0, \bar{u} \geq 0, \eta \geq 0$, sono rispettivamente la velocità di ritorno verso la media, la media di lungo periodo della varianza, e la volatilità della varianza. Il parametro ρ rappresenta la correlazione tra i due moti browniani W_{1t} e W_{2t} . La funzione caratteristica è:

$$\begin{aligned} \phi(\omega, u_0) &= \exp \left(i\omega\mu\Delta t + \frac{u_0}{\eta^2} \left(\frac{1 - e^{-D\Delta t}}{1 - Ge^{-D\Delta t}} \right) (\lambda - i\rho\eta\omega - D) \right) \\ &\cdot \exp \left(\frac{\lambda\bar{u}}{\eta^2} \left(\Delta t(\lambda - i\rho\eta\omega - D) - 2 \ln \left(\frac{1 - Ge^{-D\Delta t}}{1 - G} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

in cui le quantità D e G sono:

$$D = \sqrt{(\lambda - i\rho\eta\omega)^2 + (\omega^2 + i\omega)\eta^2} \quad G = \frac{\lambda - i\rho\eta\omega - D}{\lambda - i\rho\eta\omega + D}$$

I grafici della densità di questo modello sono rappresentati in figura 1.7 e 1.8, e raffigurano rispettivamente la densità a diverse scadenze e la densità al variare del parametro ρ .

Ecco di seguito i vari grafici.

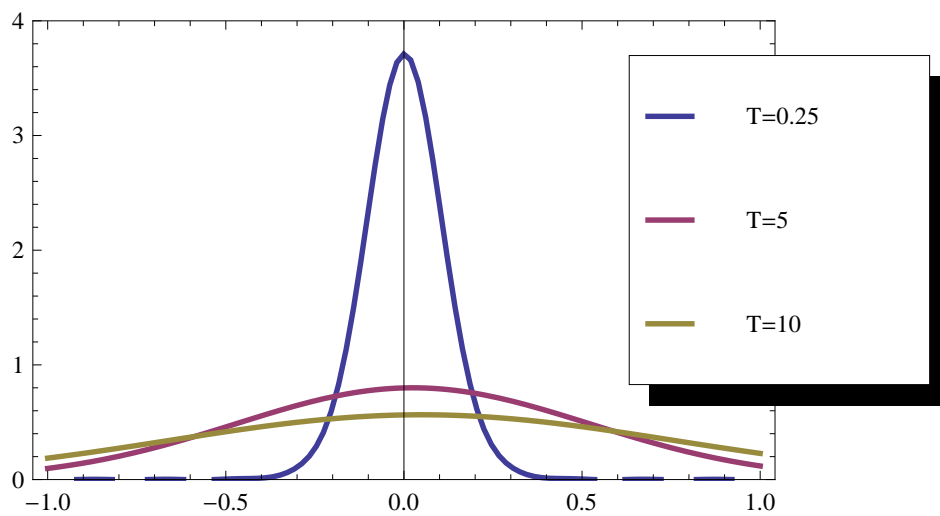


Figura 1.2: Densità del modello di Merton a diverse scadenze. Parametri: $m = 0, \sigma = 0.2, \delta = 0.1, r = 0.03, \lambda = 1$.

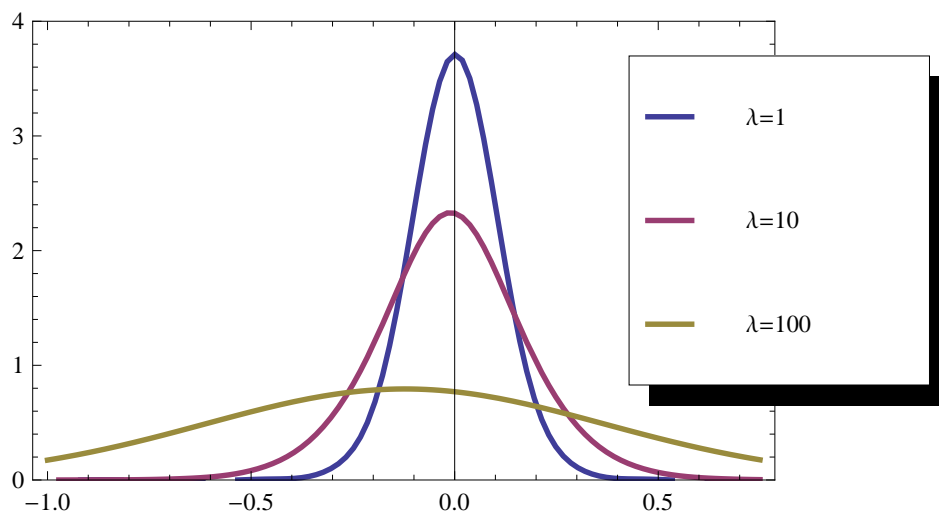


Figura 1.3: Densità del modello di Merton al variare di λ . Parametri: $m = 0, \sigma = 0.2, \delta = 0.1, r = 0.03, T = 0.25$.

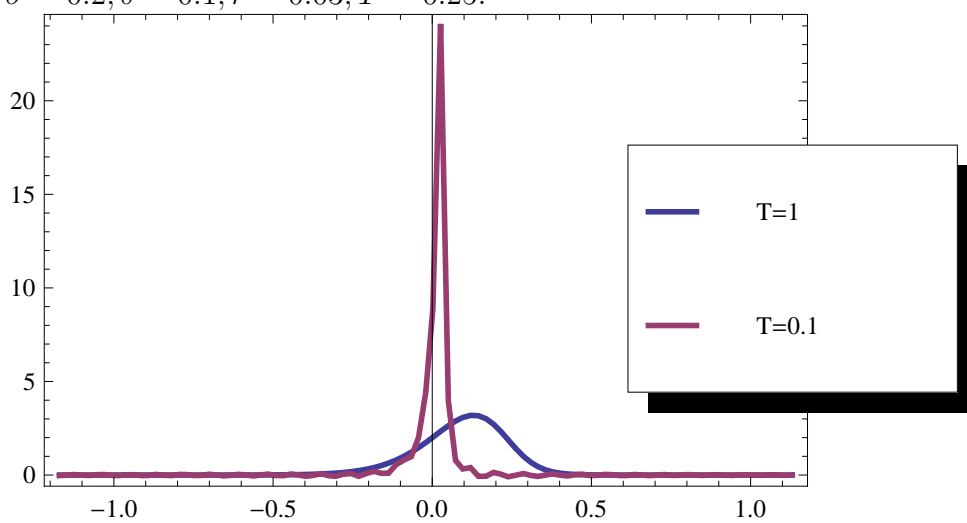


Figura 1.4: Densità del modello VG a diverse scadenze. Parametri: $r = 0.1, q = 0, \sigma = 0.12, \theta = -0.14, \nu = 0.2$.

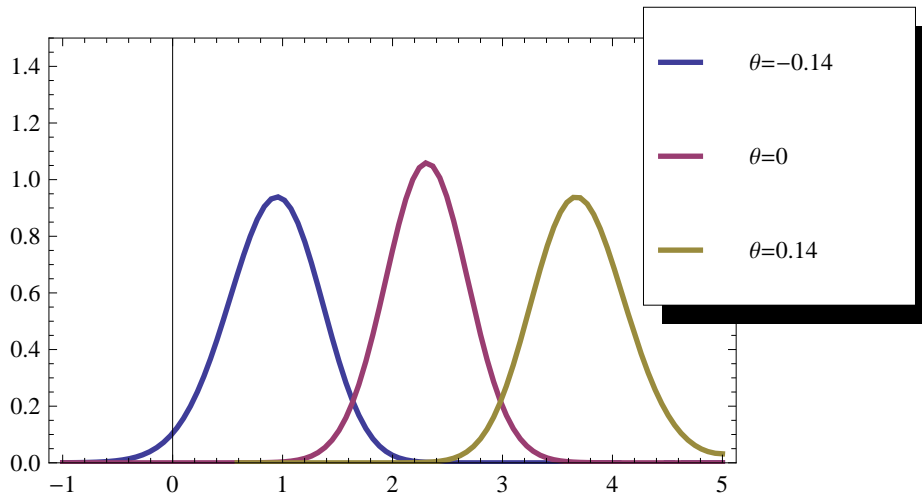


Figura 1.5: Densità del modello VG al variare di θ . Parametri: $r = 0.1, q = 0, \sigma = 0.12, \nu = 0.2, \mu = 0.1, T = 10$.

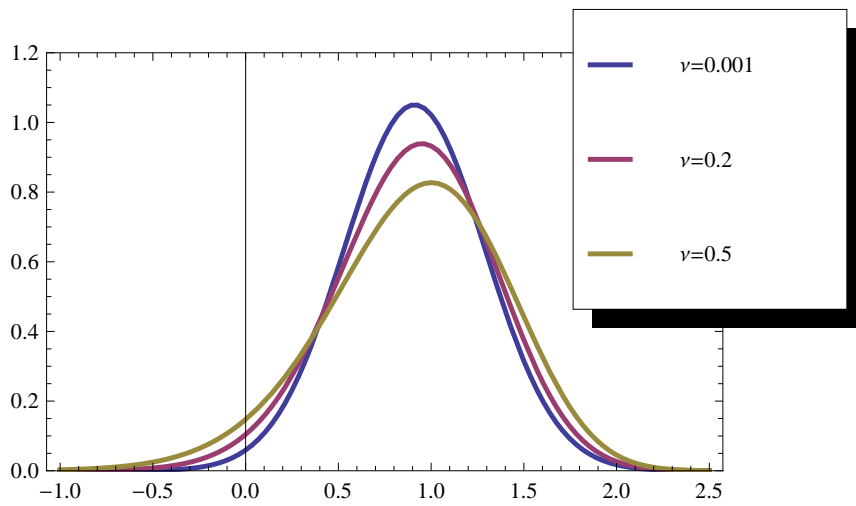


Figura 1.6: Densità del modello VG al variare di ν . Parametri: $r = 0.1, q = 0, \sigma = 0.12, \theta = -0.14, \mu = 0.1, T = 10$.

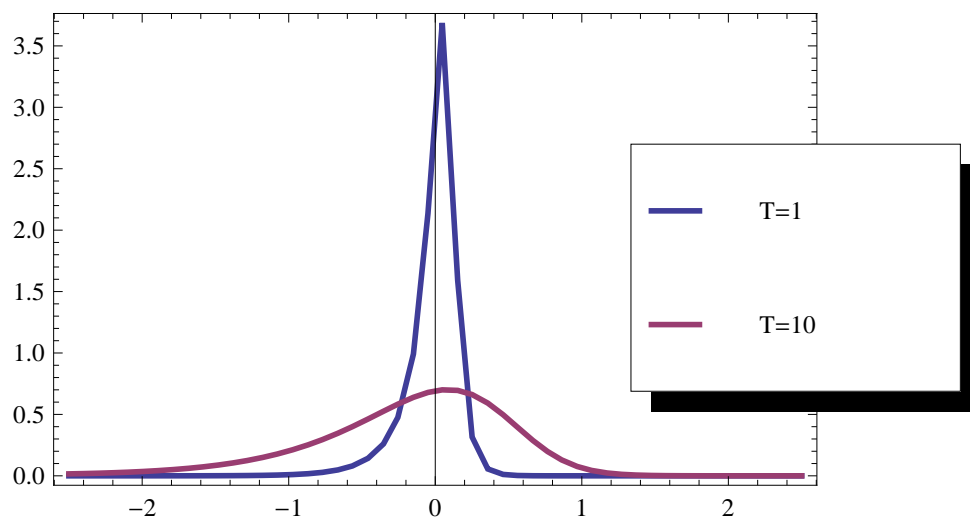


Figura 1.7: Densità del modello di Heston a diverse scadenze. Parametri: $r = 0, q = 0, \lambda = 1.5768, \eta = 0.5751, \bar{u} = 0.0398, u_0 = 0.0175, \rho = -0.5711$.

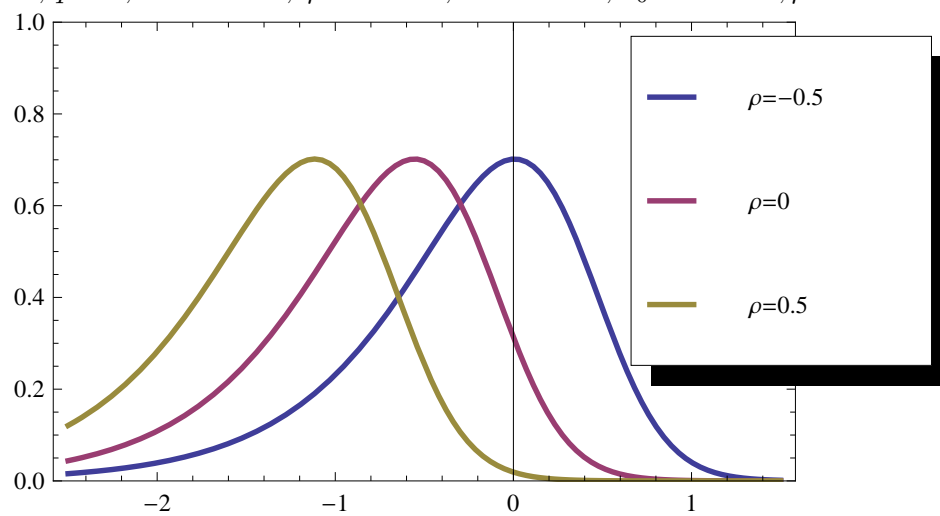


Figura 1.8: Densità del modello di Heston al variare di ρ . Parametri: $r = 0, q = 0, \lambda = 1.5768, \eta = 0.5751, \bar{u} = 0.0398, u_0 = 0.0175, T = 10$.

Capitolo 2

Il metodo COS

Uno dei principali argomenti di studio della finanza matematica è la determinazione del prezzo di un'opzione, il cosiddetto problema della valutazione. Esistono diversi approcci per affrontare questo problema, e quello che vogliamo presentare è un metodo del tutto nuovo e soprattutto molto vantaggioso, il metodo COS. Il metodo COS consiste nel ricavare la formula di valutazione delle opzioni attraverso l'uso della serie coseno. Infatti esso viene presentato come un'alternativa ai metodi di integrazione numerica, i quali si basano anch'essi sull'analisi di Fourier.

2.1 Differenze con gli altri metodi

Il problema fondamentale dei metodi di valutazione è quello di ricavare la funzione densità di probabilità, indispensabile per esprimere la formula di prezzo. Il problema nasce dal fatto che questa funzione non è disponibile per la maggior parte dei modelli, pertanto le varie tecniche numeriche per ricavarla si basano sul suo legame con la funzione caratteristica. Tutti i metodi di valutazione basati sull'integrazione numerica ricavano il valore della densità dalla (1.13). La differenza sostanziale con il metodo COS consiste proprio nel fatto, che quest'ultimo, ricava la f come approssimazione mediante serie coseno, e non attraverso l'antitrasformata di Fourier. Cioè

tale metodo ricava l'integrale di Fourier inverso (che è proprio f) mediante uno sviluppo in serie coseno. Questo fatto risulta molto vantaggioso sia in termini di precisione che di tempo computazionale. Gli altri metodi, basati sull'integrazione, utilizzano invece l'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) per ricostruire la funzione densità, poco efficiente però in presenza di integrandi oscillanti.

Anche il metodo che stiamo presentando si basa ovviamente sul legame tra funzione caratteristica e funzione densità, ed ha come limite di applicabilità proprio la necessità di disporre della funzione caratteristica. Questa è una condizione necessaria.

2.2 La formula di valutazione attraverso il metodo COS

La formula di valutazione neutrale al rischio che definisce il prezzo di un'opzione europea è:

$$v(x, t_0) = e^{-r\Delta t} E^Q[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int_R v(y, T) f(y|x) dy \quad (2.1)$$

in cui v è il valore dell'opzione, $\Delta t = T - t_0$ è la differenza tra la scadenza T e l'istante iniziale t_0 , $E^Q[\cdot]$ è il valore atteso sotto la misura neutrale al rischio Q , x e y rappresentano il prezzo del sottostante rispettivamente all'istante iniziale e alla scadenza, e r è il tasso di rendimento del bene privo di rischio. Il parametro fondamentale è $f(y|x)$, cioè la densità di y subordinata a x . Il metodo COS consiste esattamente nell'esprimere questa formula sostituendo alla funzione densità la sua approssimazione mediante serie coseno, e nell'effettuare degli altri piccoli passaggi.

Nel Capitolo 1 abbiamo visto come si esprime la densità di probabilità attraverso la funzione caratteristica. Quello che faremo sarà esattamente andare a sostituire, nella formula (2.1) appena introdotta, la formula trovata per approssimare f mediante serie coseno.

Il fatto di poter ricavare f avendo come dato solo la funzione caratteristica è molto vantaggioso poichè, per la maggior parte dei modelli, la funzione densità non è nota mentre la funzione caratteristica si. Ricaviamo esplicitamente l'espressione della formula di valutazione conseguente all'applicazione del metodo.

Innanzitutto, poichè la densità è una trasformata di Fourier, essa decade a zero per $y \rightarrow \pm\infty$. Questa proprietà ci permette di poter operare sull'integrale nella (2.1) e troncare il range di integrazione da $[-\infty, \infty]$ ad $[a, b] \subset R$, senza perdere accuratezza. Applicando questa semplice operazione otteniamo una prima approssimazione della (2.1), che chiameremo v_1

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} E^Q[v(y, T)|x] = e^{-r\Delta t} \int_a^b v(y, T) f(y|x) dy \quad (2.2)$$

Assumendo che la funzione caratteristica sia nota, esprimiamo la densità in termini di ϕ e andiamo poi a sostituirla nella (2.2)

$$f(y|x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) \quad (2.3)$$

in cui

$$A_k(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(y|x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.4)$$

Sostituendo la (2.3) e la (2.4) nella (2.2) ne viene:

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \int_a^b v(y, T) \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.5)$$

poichè la sommatoria degli A_k dipende solo da x possiamo scambiarla con l'integrale:

$$v_1(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.6)$$

così facendo possiamo notare che dividendo e moltiplicando il secondo membro per $\frac{2}{b-a}$:

$$v_1(x, t_0) = \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) V_k \quad (2.7)$$

dove i V_k non sono altro che i coefficienti dello sviluppo coseno della funzione payoff:

$$V_k := \frac{2}{b-a} \int_a^b v(y, T) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.8)$$

Una seconda approssimazione della (2.1) si ottiene troncando la somma ad un numero finito di termini, truncamento consentito dalla proprietà di decadenza a zero dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier:

$$v_2(x, t_0) = \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(x) V_k \quad (2.9)$$

L'ultimo passaggio consiste nel sostituire gli A_k con gli F_k

$$v_3(x, t_0) = \frac{b-a}{2} e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(x) V_k = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re}\left\{ \phi\left(\frac{k\pi}{b-a}; x\right) e^{-ik\pi \frac{a}{b-a}} \right\} V_k \quad (2.10)$$

$$v(x, t_0) \approx v_3(x, t_0)$$

L'espressione $v_3(x, t_0)$ è proprio la formula di valutazione mediante il metodo COS, ed è esattamente l'espressione da adottare per ricavare il valore dell'opzione all'istante t_0 .

Vedremo che questa formula è molto comoda, sia perchè va bene per qualsiasi processo del sottostante, sia perchè in alcuni casi, come il modello di Heston e i processi di Lèvy, essa viene ulteriormente semplificata, consentendone l'utilizzo in applicazioni avanzate.

Riportiamo, come esempio di applicazione, il grafico del prezzo call nel modello di Heston ottenuto mediante metodo COS.

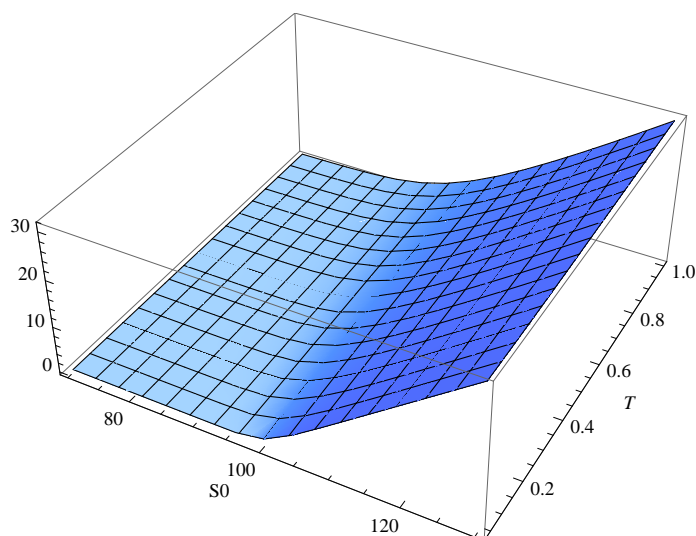


Figura 2.1: Prezzo call nel modello di Heston

2.3 Opzioni Plain Vanilla: i coefficienti del payoff

Abbiamo appena ricavato la formula (2.10) che permette di ricavare il prezzo di un'opzione europea facendo uso della serie coseno. Per poter applicare la formula, come mostra la sua espressione, le quantità che devono essere ricavate sono i coefficienti del payoff dell'opzione. Per molti contratti è possibile ottenere delle soluzioni in forma analitica per questi coefficienti, ma in questo paragrafo ci limiteremo a ricavare i coefficienti dello sviluppo in serie coseno del payoff delle opzioni europee call e put.

Indichiamo con x e y i seguenti logaritmi del prezzo del sottostante:

$$x := \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \quad y := \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)$$

- S_t prezzo del sottostante al tempo t
- K prezzo strike.

Indichiamo invece con $v(y, T)$ il payoff, valore dell'opzione a scadenza:

$$v(y, T) = [\alpha \cdot K(e^y - 1)]^+$$

con

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{call} \\ -1 & \text{put} \end{cases}$$

Consideriamo il termine $(e^y - 1)$, e valutiamo i coefficienti per questa funzione separatamente, ovvero li ricaviamo in maniera distinta per le funzioni:

- $g(y) = e^y$
- $g(y) = 1$

e poi uniamo i risultati.

1. **Caso** $g(y) = e^y$. I coefficienti dello sviluppo coseno di g su un intervallo $[c, d] \subset [a, b]$ sono:

$$\chi_k(c, d) \int_c^d e^y \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.11)$$

2. **Caso** $g(y) = 1$. I coefficienti dello sviluppo coseno di g su un intervallo $[c, d] \subset [a, b]$ sono:

$$\psi_k(c, d) \int_c^d \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \quad (2.12)$$

Il calcolo dei seguenti integrali mostra che tali coefficienti sono conosciuti analiticamente. Consideriamo i due casi:

1. Integrando per parti due volte ne viene:

$$\chi_k(c, d) := \frac{1}{1 + \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2} \left[\cos\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \cos\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c + \frac{k\pi}{b-a} \sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) e^d - \frac{k\pi}{b-a} \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) e^c \right]$$

2. Integrando viene immediatamente:

$$\psi_k(c, d) := \begin{cases} \frac{b-a}{k\pi} \left[\sin\left(k\pi \frac{d-a}{b-a}\right) - \sin\left(k\pi \frac{c-a}{b-a}\right) \right] & k \neq 0, \\ (d-c) & k = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Mettendo assieme i due risultati, ricaviamo i coefficienti coseno dello sviluppo della funzione payoff call e put:

$$V_k^{call} = \frac{2}{b-a} \int_0^b K(e^y - 1) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \frac{2}{b-a} K(\chi_k(0, b) - \psi_k(0, b)) \quad (2.14)$$

$$V_k^{put} = \frac{2}{b-a} \int_a^0 K(1 - e^y) \cos\left(k\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy = \frac{2}{b-a} K(-\chi_k(a, 0) + \psi_k(a, 0)) \quad (2.15)$$

Facendo uso di queste quantità nei modelli di Lévy e di Heston è possibile calcolare il valore dell'opzione in corrispondenza di un vettore di strike, cioè per più strike simultaneamente.

Nei processi di Lévy la funzione caratteristica è:

$$\phi(\omega; x) = \varphi_{levy}(\omega) e^{i\omega x} \quad \text{con} \quad \varphi_{levy}(\omega) = \phi(\omega; 0) \quad (2.16)$$

dove la funzione φ_{levy} è la funzione caratteristica dei log-rendimenti.

La formula di prezzo in questo caso è semplificata e ha la seguente espressione:

$$e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ \varphi \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right\} V_k \quad (2.17)$$

Riesprimendo i coefficienti V_k della funzione payoff come moltiplicazione di un vettore per uno scalare, e sostituendo nella formula, otteniamo:

$$V_k = U_k K \quad \text{con} \quad U_k = \frac{V_k}{K} = \begin{cases} \frac{2}{b-a}(\chi_k(0, b) - \psi_k(0, b)) & \text{per la call} \\ \frac{2}{b-a}(-\chi_k(a, 0) + \psi_k(a, 0)) & \text{per la put} \end{cases}$$

$$v(x, t_0) \approx K e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ \varphi_{levy} \left(\frac{k\pi}{b-a} \right) U_k e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right\} \quad (2.18)$$

Poichè in questa formula la x è una variabile indipendente, sostituendo a K un vettore di strike, è possibile determinare le formule di prezzo per tale vettore simultaneamente.

Nello stesso modo si può effettuare tale calcolo nel caso del modello di Heston, basta sostituire nella (2.18) la $\varphi_{hes}(\omega)$ al posto della $\varphi_{levy}(\omega)$, la cui espressione è data dalla (1.29) del Capitolo 1.

Capitolo 3

Applicazioni e limiti del metodo

3.1 Applicazioni: la volatilità implicita

La volatilità implicita è una variabile molto importante poichè mostra la differenza tra i prezzi delle opzioni definiti attraverso il modello di Black-Scholes e i prezzi di mercato.

Nel modello di Black-Scholes il prezzo di un'opzione è funzione dei seguenti parametri:

$$C_{BS} = C_{BS}(\sigma, S, K, T, r)$$

che sono rispettivamente la volatilità σ , il prezzo attuale del sottostante S , la scadenza T , e il tasso a breve r . Di queste quantità però la volatilità non è direttamente osservabile. O meglio, fissati gli altri parametri, sostituendo nella funzione prezzo un certo valore di σ , ad esso corrisponderà un certo valore dell'opzione:

$$\sigma \longrightarrow C_{BS}(\sigma, S, K, T, r)$$

Per l'invertibilità di questa funzione è possibile ricavare, per ogni valore di $C^* \in]0, S[$ (prezzo di mercato), un unico valore della volatilità:

$$\sigma^* =: VI(C^*, S, K, T, r)$$

dove C^* è data dalla precedente funzione di prezzo applicata a σ^*

$$\sigma^* \longrightarrow C_{BS}(\sigma^*, S, K, T, r) = C^*$$

Dunque la volatilità implicita è la funzione che associa a ciascun C^* la σ^* corrispondente:

$$C^* \longrightarrow VI(C^*, S, K, T, r)$$

Tale volatilità riflette le situazioni di mercato variando al variare di strike e scadenza, e dunque soddisfa la seguente uguaglianza:

$$C^* = C_{BS}(\sigma^*, S, K, T, r)$$

con C^* prezzo di mercato.

Chiarito il concetto di volatilità implicita, riportiamo adesso i grafici di questa quantità rispettivamente per i modelli di Merton, VG ed Heston, in cui al valore C^* è stato sostituito il prezzo dell'opzione call europea definito mediante metodo COS. I grafici descrivono le volatilità implicite dei tre modelli a tre diverse scadenze. I parametri utilizzati nei tre modelli sono uguali a quelli utilizzati nel Capitolo 1 per determinare i grafici delle rispettive densità.

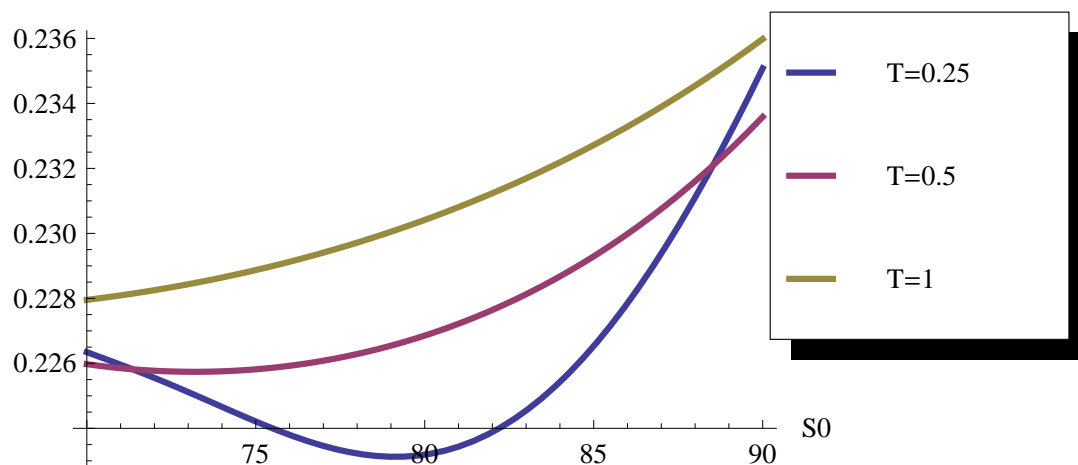


Figura 3.1: Volatilità implicita del modello di Merton a diverse scadenze.

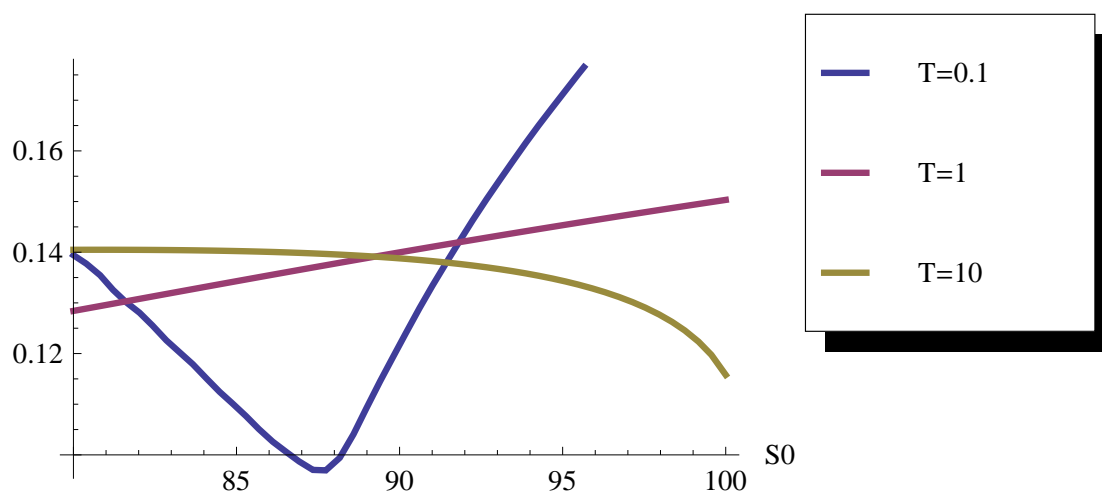


Figura 3.2: Volatilità implicita del modello VG a diverse scadenze.

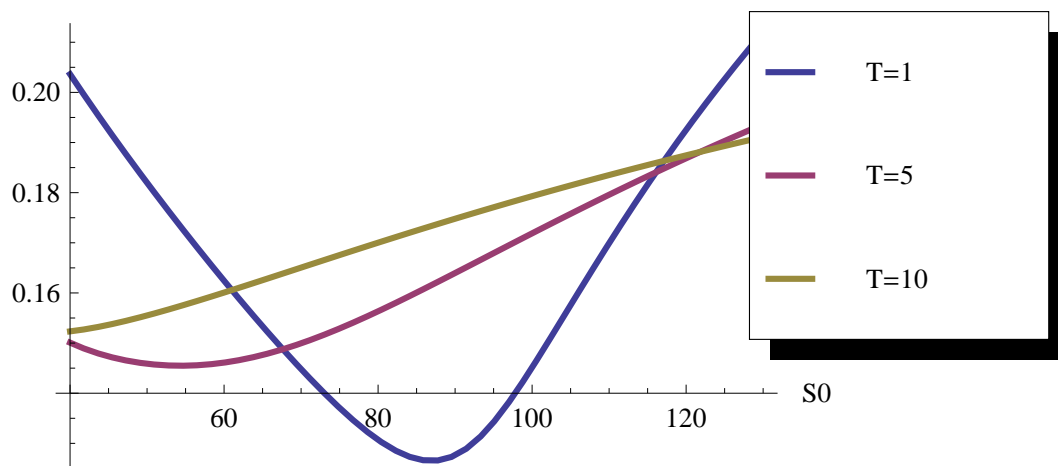


Figura 3.3: Volatilità implicita del modello di Heston a diverse scadenze.

3.2 Le greche

Il calcolo delle greche mediante metodo COS rappresenta un'altra possibile applicazione.

Illustriamo le formule per il calcolo di Delta, Gamma e Vega per il modello di Heston, ma generalizzabili anche agli altri modelli.

L'espressione di Δ è:

$$\Delta = \frac{\partial v}{\partial S_0} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S_0} = \frac{1}{S_0} \frac{\partial v}{\partial x}$$

pertanto derivando ciascun termine della serie

$$\Delta \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \varphi \left(\frac{k\pi}{b-a}; u_0 \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \frac{ik\pi}{b-a} \right\} \frac{V_k}{S_0} \quad (3.1)$$

L'espressione di Γ è:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 v}{\partial S_0^2} = \frac{1}{S_0^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial S_0} + \frac{\partial^2 v}{\partial S_0^2} \right)$$

pertanto

$$\Gamma \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \varphi \left(\frac{k\pi}{b-a}; u_0 \right) e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \left[-\frac{ik\pi}{b-a} + \left(\frac{ik\pi}{b-a} \right)^2 \right] \right\} \frac{V_k}{S_0} \quad (3.2)$$

L'espressione di Vega per il modello di Heston si presenta semplificata poichè il termine u_0 appare solo nei coefficienti:

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial u_0}$$

pertanto

$$\frac{\partial v(x, t_0, u_0)}{\partial u_0} \approx e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \varphi \left(\frac{k\pi}{b-a}; u_0 \right)}{\partial u_0} e^{ik\pi \frac{x-a}{b-a}} \right\} V_k \quad (3.3)$$

Similmente, derivando ciascun termine della serie del prezzo, possono ricavarsi Rho e Theta.

3.3 Limiti di applicabilità del metodo COS

Il metodo COS per la valutazione dei derivati è in generale applicabile a qualsiasi processo del sottostante e, abbiamo più volte sottolineato, che una condizione necessaria affinché tale metodo sia applicabile è la disponibilità della funzione caratteristica del modello in questione. Tuttavia, la sola conoscenza di questa quantità non assicura il corretto funzionamento del metodo, dunque, affinché questo accada, è necessario verificare la continuità della funzione caratteristica.

Per verificarne la continuità basta osservare i rispettivi grafici. Alla fine della sezione sono riportati i grafici delle funzioni caratteristiche dei tre modelli che abbiamo esaminato, cioè Merton, VG, ed Heston, proprio per dimostrare che l'applicazione del metodo su tali modelli ha riprodotto risultati corretti e non alterati da eventuali discontinuità delle ϕ . Consideriamo separatamente il modello di Heston.

Nel Capitolo 1 abbiamo accennato al fatto che alcuni modelli dispongono di più formulazioni equivalenti della funzione caratteristica, e che una scelta appropriata di quella da utilizzare risulta spesso determinante. Questo è proprio il caso del modello di Heston che possiede le seguenti due formulazioni per la ϕ :

Formulazione 2

$$\phi(\omega, u_0) = \exp \left(i\omega\mu\Delta t + \frac{u_0}{\eta^2} \left(\frac{1-e^{-D\Delta t}}{1-Ge^{-D\Delta t}} \right) (\lambda - i\rho\eta\omega - D) \right) \\ \cdot \exp \left(\frac{\lambda\bar{u}}{\eta^2} \left(\Delta t(\lambda - i\rho\eta\omega - D) - 2 \ln \left(\frac{1-Ge^{-D\Delta t}}{1-G} \right) \right) \right)$$

Formulazione 1

$$\phi(\omega, u_0) = \exp \left(i\omega\mu\Delta t + \frac{u_0}{\eta^2} \left(\frac{1-e^{-D\Delta t}}{1-Ge^{-D\Delta t}} \right) (\lambda - i\rho\eta\omega - D) \right) \\ \cdot \exp \left(\frac{\lambda\bar{u}}{\eta^2} \left(\Delta t(\lambda - i\rho\eta\omega + D) - 2 \ln \left(\frac{1-\frac{1}{G}e^{-D\Delta t}}{1-\frac{1}{G}} \right) \right) \right)$$

La differenza sostanziale, tra le due formulazioni, è l'argomento del logaritmo complesso.

I programmi utilizzati per l'implementazione delle formule viste finora, come matlab e mathematica, nel calcolo di un logaritmo complesso utilizzano sempre come argomento quello principale. Questa convenzione funziona correttamente nella Formulazione 2, che è quella utilizzata nei nostri esperimenti, ma causa discontinuità nella Formulazione 1.

Questo fatto può essere immediatamente mostrato graficamente. Se chiamiamo $\psi_1(u, t)$ e $\psi_2(u, t)$ rispettivamente gli argomenti del logaritmo complesso nelle Formulazioni 1 e 2, i grafici determinati prendendo come argomento quello principale sono i seguenti:

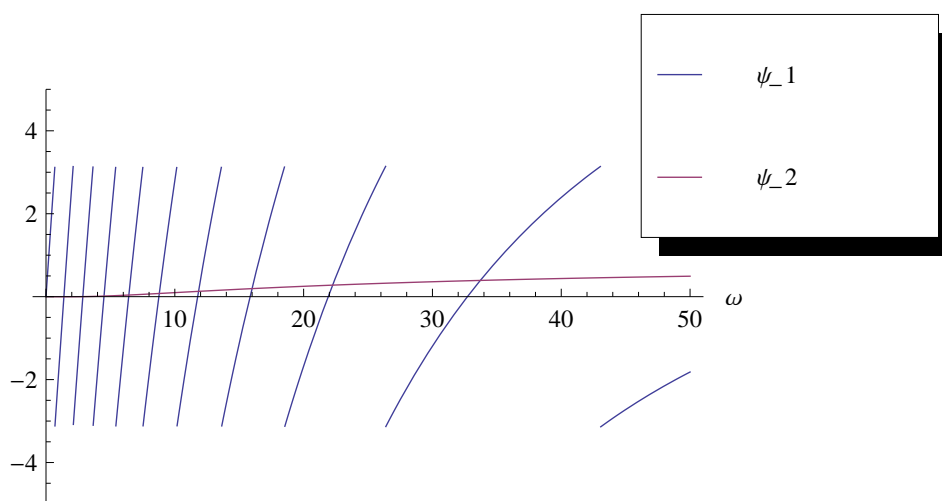


Figura 3.4: Grafici dei logaritmi complessi delle formulazioni uno e due.

Il grafico mostra benissimo che l'utilizzo dell'argomento principale nei due logaritmi produce risultati totalmente diversi, causando discontinuità nel logaritmo della Formulazione 1.

Esistono diversi algoritmi che forniscono un criterio di scelta dell'argomento adatto a ciascun logaritmo complesso, tra questi vi sono l'algoritmo di approssimazione, basato sullo sviluppo in serie di Taylor, l'algoritmo iterativo e l'algoritmo rotation count di Kahl e Jackel. I primi due algoritmi lavorano bene su tutti i logaritmi complessi, mentre l'algoritmo rotation count

funziona solo sul modello di Heston. Risolvendo il problema del logaritmo, e quindi della discontinuità, mediante uno di questi metodi, si può poi procedere anche all'applicazione del metodo COS.

Grafici delle funzioni caratteristiche:

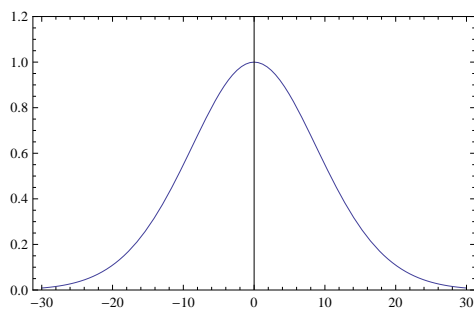


Figura 3.5: Funzione caratteristica del modello di Merton

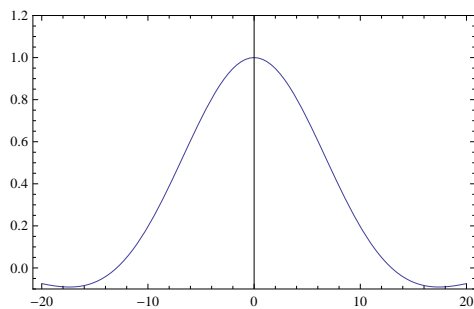


Figura 3.6: Funzione caratteristica del modello VG

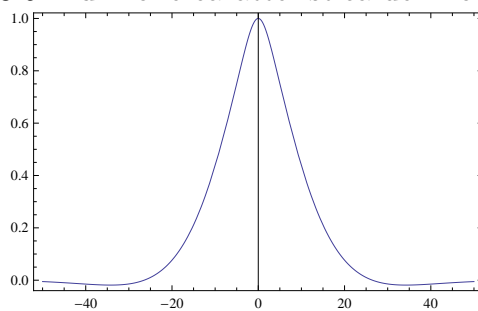


Figura 3.7: Funzione caratteristica del modello di Heston

Capitolo 4

Gli errori del metodo

Nel Capitolo 2 abbiamo ricavato, passo per passo, l'espressione della formula di prezzo mediante metodo COS, ovvero mediante uso della serie di Fourier del coseno.

Abbiamo mostrato, che per arrivare alla versione definitiva della formula di valutazione, sono state effettuate diverse approssimazioni e di conseguenza degli errori.

4.1 L'errore totale

L'errore totale del metodo è il risultato della somma di tre errori, dovuti alle approssimazioni effettuate per passare dalla formula $v(x, t_0)$ alla $v_1(x, t_0)$, dalla $v_1(x, t_0)$ alla $v_2(x, t_0)$, e infine dalla $v_2(x, t_0)$ alla $v_3(x, t_0)$. Possiamo dunque esprimere l'errore totale nel seguente modo:

$$e_{tot} = e_1 + e_2 + e_3 \quad (4.1)$$

Analizziamo gli errori $e_i, i = 1, 2, 3$.

L'errore e_1 è dovuto al troncamento del range d'integrazione effettuato nel passaggio dalla formula (2.1) alla (2.2), o meglio:

$$e_1 := v(x, t_0) - v_1(x, t_0) = \int_{R \setminus [a, b]} v(y, T) f(y|x) dy \quad (4.2)$$

L'errore e_2 deriva invece dal troncamento della serie ad un numero finito di termini, determinato dal passaggio dalla (2.2) alla (2.9):

$$e_2 := v_1(x, t_0) - v_2(x, t_0) = \frac{1}{2}(b-a)e^{-r\Delta t} \sum_{k=N}^{+\infty} A_k(x) \cdot V_k \quad (4.3)$$

Infine e_3 è conseguenza dell'approssimazione dei coefficienti A_k mediante gli F_k :

$$e_3 := v_2(x, t_0) - v_3(x, t_0) = e^{-r\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ \int_{R \setminus [a,b]} e^{ik\pi \frac{y-a}{b-a}} f(y|x) dy \right\} V_k \quad (4.4)$$

Poichè i coefficienti del coseno sono infinitesimi, gli errori dipenderanno dal loro tasso di decadenza a zero. Questa quantità dipende a sua volta dalla funzione di cui effettuiamo lo sviluppo, o meglio dalle sue proprietà nell'intervallo di sviluppo.

Innanzitutto diamo la definizione di indice di convergenza algebrico e geometrico.

Definizione 4.1. Se gli A_k , coefficienti della serie, decadono asintoticamente a zero come

$$A_k \sim O(1/k^n), \quad k \gg 1$$

allora n è l'indice di convergenza algebrica.

Definizione 4.2. Se i coefficienti A_k decrescono più velocemente di $1/k^n$ per ogni n finito, allora si dice che la serie ha tasso di convergenza esponenziale. Equivalentemente se

$$A_k \sim O(\exp(-\gamma k^r)), \quad k \gg 1$$

per ogni $r > 0$, allora la serie ha convergenza esponenziale, con γ tasso di convergenza asintotico costante. L'esponente r è l'indice di convergenza e :

- se $r < 1$, la convergenza è detta supergeometrica.

- se $r=1$, la convergenza è ancora detta supergeometrica con

$$A_k \sim O(k^{-n} \exp(-(k/j) \ln(k))) \quad \forall j > 0$$

oppure geometrica con

$$A_k \sim O(k^{-n} \exp(-\gamma k)) \quad \forall j > 0$$

Proposizione 4.1.1. *Se $g(x) \in C^\infty([a, b] \subset \mathbb{R})$, allora lo sviluppo in serie di Fourier del coseno su $[a, b]$ ha convergenza geometrica. La costante γ è determinata dalla posizione nel piano complesso delle singolarità vicino all'intervallo di sviluppo. L'esponente n è determinato dal tipo di singolarità.*

Se $g(x)$, o qualche sua derivata, è discontinua, i coefficienti della serie coseno mostreranno convergenza algebrica. L'integrazione per parti mostra che l'indice di convergenza algebrica n è almeno grande quanto n' , con la derivata di ordine n' della g integrabile.

Proposizione 4.1.2. *Se la serie ha convergenza algebrica allora la serie degli errori di troncamento è:*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \sim \frac{1}{(n-1)N^{n-1}}$$

Proposizione 4.1.3. *Se la serie ha convergenza geometrica, l'errore dovuto al troncamento dello sviluppo a $(N+1)$ termini, $E_T(N)$, sarà*

$$E_T(N) \sim P^* \exp(-N\nu)$$

La costante $\nu > 0$ è detta tasso di convergenza asintotica della serie, la quale soddisfa la seguente uguaglianza

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\log |E_T(n)|/n)$$

Lemma 4.1.4. *L'errore e_3 consiste negli errori dovuti al troncamento del range d'integrazione, pertanto può essere limitato da:*

$$|e_3| < |e_1| + Q|e_4|$$

dove Q è una costante indipendente da N e

$$|e_4| := \int_{R \setminus [a,b]} f(y|x) dy$$

Sia l'errore e_3 che l'errore e_2 rappresentano errori dovuti al troncamento dei range, ma il più significativo è sicuramente e_2 , il quale dipende dai coefficienti della densità A_k , e dai coefficienti del payoff V_k . Poichè solitamente si assume che la densità sia più regolare della funzione payoff, i coefficienti A_k decadono più velocemente dei V_k , pertanto possiamo limitare il prodotto di tali coefficienti in questo modo:

$$\left| \sum_{k=N}^{+\infty} A_k(x) \cdot V_k \right| \leq \sum_{k=N}^{+\infty} |A_k(x)|$$

L'errore e_2 è dominato dall'errore di troncamento della densità, e il seguente lemma ne fornisce una caratterizzazione in base alle proprietà di questa funzione.

Lemma 4.1.5. *L'errore e_2 converge esponenzialmente quando la densità $g(x) \in C^\infty([a, b])$, pertanto*

$$|e_2| < P \exp(-(N-1)\nu) \quad (4.5)$$

dove $\nu > 0$ è una costante mentre P è un termine che varia almeno esponenzialmente con N .

Si noti che $\beta \geq n$ perchè la densità è solitamente più regolare della funzione payoff.

Inoltre la quantità a destra della disuguaglianza deriva dalla Proposizione 4.13.

Lemma 4.1.6. *L'errore e_2 , per densità con derivate discontinue, può essere limitato nel seguente modo:*

$$|e_2| < \frac{\bar{P}}{(N-1)^{\beta-1}} \quad (4.6)$$

dove \bar{P} è una costante mentre la quantità β nell'esponente è $\beta \geq n \geq 1$, con n indice di convergenza algebrica dei V_k .

Si noti che la parte a destra della disuguaglianza deriva dalla Proposizione 4.1.2. Poichè l'errore totale è $e = e_1 + e_2 + e_3$, per i risultati appena menzionati (Lemma 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6) ne viene:

$$e < 2|e_1| + |e_3|$$

pertanto se la densità è $g(x) \in C^\infty([a, b])$, allora

$$e < 2|e_1| + Q|e_4| + Pe^{-(N-1)\nu} \quad (4.7)$$

in cui l'ultimo termine deriva dalla (4.5).

Se invece la densità presenta derivate discontinue l'errore totale sarà limitato da

$$e < 2|e_1| + Q|e_4| + \frac{\bar{P}}{(N-1)^{\beta-1}} \quad (4.8)$$

in cui l'ultimo termine deriva dalla (4.6).

Pertanto se la densità ammette derivate discontinue, allora l'errore avrà convergenza algebrica, viceversa se la densità è di classe C^∞ sull'intervallo di sviluppo, allora la convergenza dell'errore sarà esponenziale. Dunque, a seconda delle proprietà della densità nell'intervallo di sviluppo, l'errore totale del metodo può essere stimato mediante le disuguaglianze (4.7) e (4.8).

Precisiamo infine, che il metodo COS per la valutazione dei derivati, è applicabile non solo a opzioni europee, ma anche a opzioni americane e con barriera.

Bibliografia

- [1] Lanconelli E.,(2000) *Lezioni di Analisi Matematica 2 Pitagora*.
- [2] Oosterlee C.W and Fang F., (2008) A novel pricing method for european options based on Fourier-cosine series expansions SIAM SISC.
- [3] Pascucci A., (2007) *Calcolo Stocastico per la finanza Springer*.
- [4] Lord R. and Kahl C., (2008) Complex logarithms in Heston-like models. Working paper *Rabobank International* and ABN-AMRO. Vedi: http://ssrn.com/abstract_id=1105998.
- [5] Jainwei Zhu, (2010) *Applications of Fourier Transform to Smile Modeling Theory and Implementation Springer*.
- [6] Comincioli V., (2004) *Metodi Numerici e Statistici per le Scienze Applicate Università degli Studi di Pavia*.
- [7] Boyde J.P., (1987) *Chebyshev and Fourier spectral methods Springer*.

