

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Modelli dinamici di geodinamo

Relatore:
Prof. Giorgio Turchetti

Presentata da:
Marco Bosi

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

Abstract

Questa tesi introduce le basi del geomagnetismo partendo da un approccio ai modelli fluidi e alle equazioni MHS, accennando alle numerose difficoltà che portano in materia di simulazioni e calcoli. In seguito si introducono i modelli a disco con uno studio approfondito della dinamica che, pur partendo da equazioni molto più semplici e approssimate della trattazione fluida, trova riscontro con i punti fondamentali del geomagnetismo e con i comportamenti dei modelli fluidi.

Indice

Introduzione	6
1 Modelli fluidi	9
1.1 Geodinamo di Bullard	13
1.2 Campo medio	16
1.3 Geodinamo di Glatzmaiers	18
2 Dinamo a disco	20
2.1 Disco singolo	21
2.2 Doppio disco di Rikitake	26
2.3 Doppio disco di Rikitake (Plunian)	46
Conclusione	50
A Integratore di Lie	52
B Attrattore di Lorenz	54

Introduzione

L'esistenza e la variazione del campo magnetico terrestre è una cosa ben nota, la sua origine tuttavia è stata soggetta ad uno studio approfondito solo lungo l'ultimo secolo.

William Gilbert nel "de Magnete" (1600) riconosce per la prima volta il magnetismo terrestre e propone un'ipotesi sulla sua origine: un magnete permanente simile a quelli rinvenuti nei depositi rocciosi (magnetite ed altri composti ferrosi). Il primo a riconoscere che il campo potesse essere generato dall'azione di una dinamo fu Larmor(1919). In seguito altre ipotesi furono fatte, per esempio Einstein pensò ad un'asimmetria delle cariche interne che unite alla rotazione terrestre potessero generare un campo magnetico.

Con la pubblicazione di Gutenberg di "The internal Constitution of Earth" (1939), Elsasser, considerato uno dei padri del modello attuale, riprese l'ipotesi di dinamo vedendo la causa del campo magnetico nelle correnti elettriche indotte nel fluido del nucleo esterno della terra.

Per mantenere il campo e bilanciare il decadimento ohmico il nucleo esterno deve avere moti convettivi causati dall'energia termica e dall'effetto buoyancy.

Il mantello controlla il tasso al quale il calore viene rilasciato dal nucleo, le fonti di questo calore includono l'energia gravitazionale il calore latente per la cristallizzazione del contorno nel nucleo interno e i decadimenti del potassio, dell'uranio e del torio.

Dalle acquisizioni strumentali dirette e da metodi indiretti come il paleomagnetismo¹ riusciamo a identificare diverse proprietà che un modello del campo magnetico terrestre dovrebbe soddisfare:

- fluttuazioni stagionali,
- fluttuazioni annuali,
- reversibilità dei poli con periodo molto maggiore alle fluttuazioni,
- natura principalmente dipolare (circa il 70% secondo lo sviluppo in multipoli),

¹Il paleomagnetismo è lo studio degli orientamenti magnetici del magma basaltico solidificato nei fondali oceanici. I metalli ferrosi fusi, usciti dalle dorsali oceaniche si raffreddano, orientandosi lungo il campo magnetico presente, quindi i fondali oceanici ci forniscono dati per la reversibilità dei poli alternando fasce magnetizzate con polarità opposte. La velocità del moto delle placche oceaniche ci consente anche di stimare una scala temporale

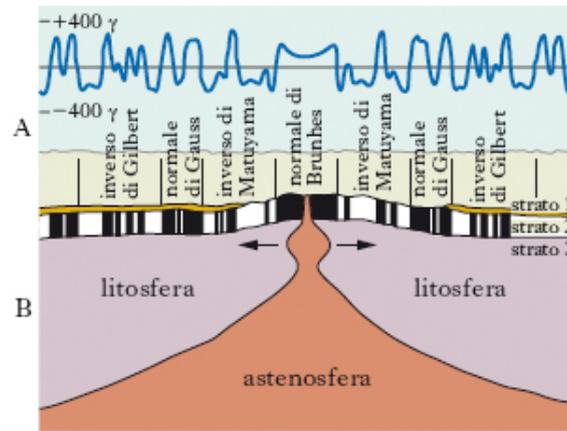


Figura 1: Profilo magnetico della terra rilevata dal paleomagnetismo nei fondali oceanici tramite lo studio delle fasce magnetiche in allontanamento dalla dorsale. γ è un'unità di misura non del SI che corrisponde a $10^{-9}T \equiv 10^{-5}G$. Il valore riportato indica il residuo di intensità rilevata ed è quindi inferiore all'intensità stimata.

- assenza di decadimento nell'intensità del campo (ordine di $0.6 G \equiv 6 \cdot 10^{-5}T$).

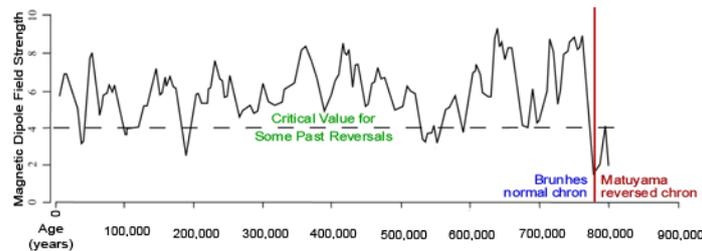


Figura 2: Variazioni secolari del campo magnetico dall'ultima inversione, circa 800000 anni fa

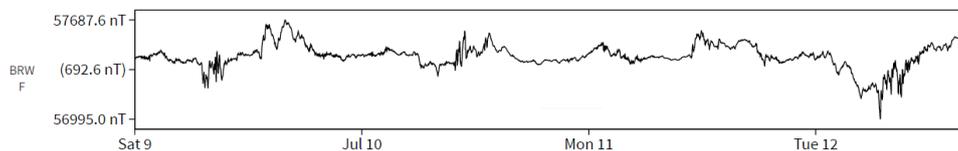


Figura 3: Variazioni giornaliere del flusso totale F 8-07-2016/12-07-2016 osservatorio di Barrow, Alaska. Nelle variazioni giornaliere bisogna ampiamente tener conto del fatto che la terra non sia un sistema isolato e quindi l'attività solare ha un grosso impatto nelle oscillazioni.

I modelli che sono stati costruiti su queste condizioni possono essere a disco, più semplici da replicare anche strumentalmente e consentono di riprodurre alcuni degli effetti, e fluidi, più realistici e interessanti ma fisicamente molto più complessi in quanto uniscono le armoniche sferiche alla magnetofluidodinamica ottenendo sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali non di facile soluzione.

Mentre le dinamo a disco sono estremamente facili da integrare e risolvere, le dinamo fluide più aggiornate richiedono una capacità di calcolo estremamente elevata e il loro studio si evolve di pari passo con la capacità computazionale dei calcolatori. La semplicità delle dinamo a disco ci consente tuttavia uno studio molto più approfondito con tanto di stabilità e studi delle orbite nello spazio delle fasi, mentre per i modelli fluidi ci si limita a simulare cercando di ottenere un andamento simile a quello terrestre una volta capita la dinamica del fenomeno.

Capitolo 1

Modelli fluidi

I modelli fluidi mescolano la fluidodinamica con l'elettromagnetismo e si basano sulla formula di Stokes, la trasmissione del calore e l'induzione elettromagnetica; prendendo le equazioni di Maxwell con corrente di spostamento trascurabile e dentro un campo magnetico $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \vec{J}$, $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H})$ (considerando le trasformazioni di Lorentz in un sistema non solidale con il flusso), facendo il rotore della seconda equazione, sostituendo e riscaldando le costanti otteniamo l'equazione di induzione:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

l'equazione di avvezione e diffusione del calore è

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \Theta = q \nabla^2 \Theta$$

dove vediamo a sinistra la variazione temporale e la componente convettiva, a destra quella diffusiva e Θ è una funzione della temperatura.

L'equazione di Navier-Stokes per i fluidi convettivi incomprimibili è

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \nu \nabla^2 \vec{v} = \sum \frac{f_i}{\rho}$$

dove f_i sono le densità delle forze agenti sul sistema. Nel nostro caso agiscono la forza di Coriolis ($-2\vec{\omega} \times \vec{v}$), la Forza di Lorentz ($\vec{J} \times \vec{B}$), il gradiente di pressione ($-\vec{\nabla} p$) e un contributo termico radiale.

L'equazione così diventa

$$Ro \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} + 2\vec{k} \times \vec{v} = -\vec{\nabla} p + E \nabla^2 \vec{v} + (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + q \tilde{R} a \Theta \vec{r}$$

dove il termine $q \tilde{R} a \Theta \vec{r}$ deriva dalla spinta idrostatica $\frac{f_i}{\rho} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho} g = \alpha g \Theta(T)$ in cui α è il coefficiente di dilatazione termica.

Questo sistema di equazioni, insieme alla condizione di non divergenza $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, esprime la dinamica.

Abbiamo indicato con \vec{B} il campo magnetico, con \vec{v} il flusso del materiale, con Θ il buoyancy che può avere termini termici o di composizione chimica che possono influire in egual misura al moto convettivo e danno vita a due serie di equazioni con condizioni separate.

$Ro = \frac{\eta}{\Omega L^2}$ indica la costante di Rossby ovvero il rapporto tra il tempo rotazionale Ω^{-1} e il tempo di diffusione e generalmente è un $O(10^{-8})$, $E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$ è il numero di Ekman ed è la scala della forza di Coriolis viscosa generalmente $O(10^{-12})$, le dimensioni estremamente ridotte di questi due contributi e la predominanza del termine rotazionale rendono difficile il problema della geodinamo in quanto entrambi sono essenziali nella caratteristica qualitativa del moto ma sono così piccoli da impedire grosse approssimazioni.

$q = \frac{k}{\eta}$ è il numero di Roberts ed indica il rapporto tra diffusività termica e magnetica. $\tilde{Ra} = \frac{g\alpha\beta L^2}{\Omega k}$ è il numero di Rayleigh corretto misurato sulla forza di Coriolis, mentre il numero di Rayleigh classico è misurato sulla forza viscosa.

Le equazioni sono rese adimensionali con opportune sostituzioni.

Un' approssimazione molto diffusa è considerare unicamente il contributo termico nel termine di buoyancy $\Theta(T)$, cosa che sembra giustificata dall'esperimento di Cardin e Olson (1992)¹.

Tuttavia un modello più completo e più recente è quello di Glazmaiers-Roberts, che tecnicamente risulta ovviamente molto più complesso.

Molti modelli si basano principalmente su una parte di queste equazioni, concentrandosi sul descrivere qualitativamente il fenomeno trascurando parti della formula per capire il contributo e l'importanza di ogni termine nel descrivere la realtà osservata.

La prima questione che sorge spontanea è chiedersi come mai $B = 0$ sia una soluzione instabile e come mai il flusso amplifichi il campo magnetico. Queste domande hanno due risposte, una cinematica, basata sull'equazione di induzione, una dinamica, basata sia sull'induzione che su Navier-Stokes.

Lo studio cinematico si basa sul termine $\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$ nell'equazione di induzione, quindi trascurando il termine $\nabla^2 \vec{B}$ troviamo una formula equivalente a quella che governa l'evoluzione di una linea materiale in un fluido. Quindi il fluido avrà un effetto di avvezione sulle linee di campo magnetico, fenomeno matematicamente riportato nel teorema di Alfvén. Un'altro modo di vederlo è mediante la similitudine con le equazioni dei vortici che portano anch'esse a delle linee materiali, questa analogia porterebbe al fatto che proprio come le linee di vortice anche il campo magnetico potrebbe essere amplificato.

¹Nonostante sia la componente termica sia la composizione chimica influenzino l'effetto buoyancy convettivo, nei loro esperimenti su strutture a convezione termochimica in sfere a rapida rotazione, Cardin e Olson rilevano che la convezione chimica ha una scala più piccola e quindi quando sono presenti entrambe si può semplificare notevolmente considerando solo la componente termica senza compromettere l'andamento.

Togliendo l'approssimazione iniziale vediamo che le linee di campo non possono avere esattamente questo andamento e la presenza di questo termine richiede anche che il flusso debba essere abbastanza ampio da amplificare il campo più velocemente di quanto il termine diffusivo lo indebolisca.

Il punto di vista dinamico si basa sugli effetti del termine $(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$, si può scomporre questa forza di Lorentz in un termine di pressione magnetica e uno di tensione magnetica. Considerando il fluido incomprimibile il termine di pressione non ha rilevanza ai fini del moto, la tensione invece si oppone allo stiramento cinematico e questa energia va a rafforzare il campo convertendo così energia meccanica in energia magnetica e quindi mantenendo il campo contro la dissipazione².

Nella ricerca delle condizioni per una dinamo bisogna riportare il teorema anti-dinamo di Cowling (1934) secondo cui nessun flusso fluido può mantenere un campo a simmetria assiale.

Una delle condizioni essenziali per ottenere l'effetto dinamo è una rotazione differenziale come suggerito da un semplice modello a disco singolo. Nel caso in cui nel nucleo terrestre prevalga un moto convettivo la meccanica coinvolge la forza di Coriolis che agisce su una sfera rotante creando quindi una rotazione differenziale. Facendo riferimento a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$, un gradiente di velocità quindi provoca una variazione nelle linee di campo, nello specifico supponendo la presenza di un campo magnetico poloidale di tipo dipolare presente in tutto lo spazio, questi genera campo toroidale senza componente radiale e quindi presente solo all'interno della sfera.

Suddetto campo si forma dalla deformazione del campo poloidale che interagisce con il flusso di velocità differenziale. Moffatt(1978) ricava analiticamente il fenomeno e riconduce il campo toroidale al termine diffusivo nell'equazione.

Per quanto questo campo toroidale possa essere intenso deve vanificarsi a meno che il campo iniziale non sia mantenuto. Per ottenere quindi una dinamo è necessario che ci sia trasferimento anche dal campo toroidale a quello poloidale.

Basandosi su semplici considerazioni Elsasser (1955) riporta che un campo poloidale non può essere amplificato da un moto a simmetria rotazionale ed è necessario un moto tridimensionale per ottenere l'azione di una dinamo. Elsasser suggerisce un

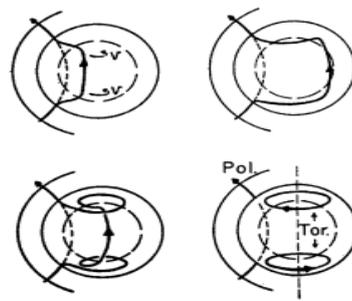


Figura 4: Creazione di un campo toroidale da uno poloidale in una sfera rotante con velocità differenziale.

²Childress(S. childress 1969 theorie magnetohydrodynamics de l'effet dynamo.) prova che l'interazione del flusso con la forza di Lorentz trasferisce energia senza intaccare l'energia totale del sistema.

moto convettivo radiale che verrà poi distorto dalla forza di Coriolis creando un moto a spirale. Quindi linee di forza magnetica a spirale saranno create allo stesso modo anche dal campo toroidale. Così le nuove linee di campo magnetico verranno a formarsi in una direzione perpendicolare al campo toroidale.

Potremmo vederlo in un punto di vista matematicamente più rigoroso prendendo l'equazione di induzione magnetica in coordinate polari:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = [\nabla^2 \vec{B}]_r, \quad \frac{\partial B_\theta}{\partial t} = [\nabla^2 \vec{B}]_\theta$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = \frac{i_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi B_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi B_\theta) \right] + [\nabla^2 \vec{B}]_\phi$$

dalla prima e dalla seconda equazione otteniamo un decadimento esponenziale. Inserendo nella terza B_ϕ decadrà anch'esso. Questo ci porta a pensare a un altro fenomeno che contribuisca a mantenere il campo magnetico. Il campo toroidale, \vec{B} reca una serie di problemi studiati accuratamente da Bullard per esempio il fatto che svanisca in un isolante o nel vuoto attorno al fluido convettivo e quindi la sua assenza nelle misurazioni in superficie.

Per ottenere la condizione di dinamo il campo poloidale iniziale deve mantenersi senza influenze esterne. Non essendo possibile che un campo a simmetria assiale mantenga il campo poloidale per il teorema anti-dinamo allora il processo deve essere per forza tridimensionale.

L'origine del campo magnetico poloidale va quindi a ricercarsi nel vortice delle velocità visibile in Figura 5 che, considerando la forza di Coriolis e la convezione, piega il campo toroidale creandone uno perpendicolare per via della sovracitata analogia con le linee di materia della teoria dei vortici. Ora possiamo supporre questo un vortice infinitesimale che va ad inserirsi in una dinamica molto più

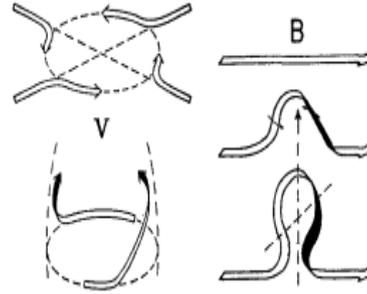


Figura 5: Moto del campo di velocità e formazione di un campo magnetico perpendicolare al campo toroidale per via del moto del fluido.

complessa di vortici provocati dal moto convettivo nella nostra sfera rotante. Il campo poloidale subirà un'amplificazione positiva per ogni vortice ascendente ed una negativa per ogni vortice discendente. È necessario introdurre il postulato che questi vortici siano asimmetrici per quanto enunciato dal teorema anti-dinamo ma i geologi hanno avanzato numerose ragioni per cui risulti plausibile. Se supponiamo che ci sia una tendenza nei moti dei vortici abbiamo un campo magnetico preponderante che quindi influenzerà il campo toroidale e i vortici stessi rafforzandosi. Per forti campi magnetici poloidali tuttavia cresce anche la resistenza del campo toroidale ad essere deformato in quanto viene esercitata una forza di resistenza alla deformazione proporzionale a B^2 visibile dall'equazione $\vec{F} = \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{\rho} = \frac{1}{\mu\rho} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}$, cosa che indebolisce il campo poloidale, questo

sistema resta comunque molto suscettibile agli andamenti ascendenti e discendenti influenzati anche da questa forza di tensione, cosa che può spiegare anche variazioni di segno e che rende il sistema stabile. Ne segue che un campo debole implichi una forte deformazione del campo toroidale cosa che, sempre supponendo che sia prevalente un andamento (ascendente o discendente che sia), porterà a un rafforzamento del campo poloidale otteniamo quindi un effetto dinamo stabile.

Ora che abbiamo delineato la dinamica abbiamo due approcci principali. Parker fa riferimento al potenziale vettore del campo poloidale ed ottiene le equazioni della dinamo

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nu_m \nabla^2 \vec{A} = \Gamma(r, \theta) \vec{B} \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nu_m \nabla^2 \vec{B} = (\nabla \vec{v}) \times (\nabla \vec{A})$$

dove Γ è un termine che indica il numero dei vortici e ν_m è il termine diffusivo. Le soluzioni sono dette onde dinamo $B = B_0 e^{i\omega t -iky}$, $A = A_0 e^{i\omega t -iky}$, è possibile dimostrare che non si possono avere sia ω che k reali quindi i termini cresceranno e caleranno esponenzialmente rispettivamente con t e y (termine che rappresenta il nord). Parker fa un'analogia con le macchie solari ed il moto convettivo nel sole.

Bullard e Gellman invece si basano su varie considerazioni per delineare l'andamento dei campi indipendentemente dal tempo utilizzando sviluppi in armoniche sferiche. Il punto debole dell'approccio di Bullard è che ignorando la dipendenza dal tempo si può ottenere unicamente una dinamo stazionaria e che non si ha un'indicazione a priori sul termine in cui effettuare il trocamento dello sviluppo in armoniche sferiche.

1.1 Geodinamo di Bullard

Il Modello di Bullard e Gellman è un modello cinematico, quindi il campo di velocità è noto anzichè essere una variabile dinamica. Per questo non riesce a fornire un'evoluzione temporale di una dinamo non lineare caotica ma è utile per studiare come variano i campi magnetici con la struttura del flusso e la velocità.

La soluzione alle equazioni fondamentali va ricercata in un campo \vec{B} . Questo campo viene scomposto in componente toroidale e poloidale, ognuna delle quali è un vettore in coordinate sferiche

$$\vec{B} = \sum_{\beta} (\vec{T}_{\beta} + \vec{S}_{\beta})$$

$$T_r = 0, T_{\theta} = \frac{T_{\beta}(r)}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial \phi}, T_{\phi} = -\frac{T_{\beta}(r)}{r} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial \theta}$$

$$S_r = \frac{n(n+1)}{r^2} S_{\beta}(r) Y_{\beta}, S_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\beta}(r)}{\partial r} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial \theta}, S_{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S_{\beta}(r)}{\partial r} \frac{\partial Y_{\beta}}{\partial \phi}$$

dove Y è l'armonica sferica corrispondente alla coppia (n, m) indicata con β . \vec{S} è la componente poloidale del campo, \vec{T} è la componente toroidale ed entrambi i vettori sono

scomposti nelle componenti sferiche r, θ, ϕ . $T(r)$ ed $S(r)$ sono gli andamenti radiali, ovvero funzioni scalari in r specifiche per ogni termine dell'armonica. A parità di 'n' le armoniche con diversi 'm' si ottengono con una rotazione di $\frac{2\pi}{\Delta m}$ attorno all'asse con $\theta = 0$.

Abbiamo parlato della velocità come costante nel moto, l'equazione di induzione magnetica, con opportune sostituzioni, diventa quindi $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{B} + V \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B})$ dove V è il parametro di ampiezza del campo di velocità al cui variare viene studiato il campo magnetico, e \vec{v} ne esprime la direzione.

Il problema diventa quindi un'equazione agli autovalori e il sistema di equazioni differenziali si ottiene sostituendo il nostro \vec{B} nell'equazione di induzione e troncando per un opportuno β la serie di armoniche sferiche. Difficoltà del modello è che la serie non è detto converga quindi il taglio viene effettuato in maniera totalmente arbitraria a priori per le limitazioni degli strumenti di calcolo. Effettuando i calcoli ed integrando si nota come le prime armoniche costituiscano la maggior parte del campo quindi è possibile giustificare il taglio a posteriori a seconda della precisione con cui si vuole determinare l'andamento. I calcoli diventano abbastanza complessi dal momento che anche il campo di velocità viene suddiviso nella sua componente poloidale e toroidale e sviluppato in armoniche. Le equazioni ottenute sostituendo campo toroidale e poloidale magnetico nell'equazione di induzione magnetica, moltiplicando scalarmente per dei vettori \vec{T}_γ e \vec{S}_γ opportuni (in cui $T(r)=S(r)=1$) e integrando sul volume sono:

$$\frac{\partial S_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial r^2} - \gamma(\gamma+1)r^{-2}S_\gamma + \frac{Vr^4}{\gamma(\gamma+1)N_\gamma} \sum_\beta \int \int \vec{S}_\gamma \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{S}_\beta + \vec{v} \times \vec{T}_\beta) \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\frac{\partial T_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\gamma}{\partial r^2} - \gamma(\gamma+1)r^{-2}T_\gamma + \frac{Vr^2}{N_\gamma} \sum_\beta \int \int \vec{T}_\gamma \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{S}_\beta + \vec{v} \times \vec{T}_\beta) \sin\theta d\theta d\phi$$

dove

$$N_\gamma = \frac{2\pi\gamma(\gamma+1)}{2\gamma+1} \frac{(\gamma+!)}{(\gamma-m)!} \quad \text{se } m \neq 0$$

$$N_\gamma = \frac{4\pi\gamma(\gamma+1)}{2\gamma+1} \quad \text{se } m = 0$$

espandendo anche il campo di velocità in armoniche sferiche toroidali e poloidali otteniamo $\vec{v} = \sum_\alpha (S_\alpha + \vec{T}_\alpha)$, tuttavia visto che il modello prevede una troncatura, gli unici campi di velocità ammessi saranno quelli esprimibili da un numero finito di armoniche sferiche, abbiamo inoltre la condizione a contorno $v_r = 0$ nel punto $r = 1 \Rightarrow S_r = 0$ a $r = 1$ e per la condizione di fluido viscoso $v_\theta = v_\phi = 0$ a $r = 1$.

Sostituendo e sviluppando i calcoli otteniamo la forma finale delle equazioni della dinamo di Bullard-Gellman:

$$\frac{\partial S_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial r^2} - \gamma(\gamma + 1)S_\gamma - V \sum_{\alpha\beta} [(S_\alpha, S_\beta, S_\gamma) + (T_\alpha, S_\beta, S_\gamma) + (S_\alpha, T_\beta, S_\gamma)]$$

$$\frac{\partial T_\gamma}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_\gamma}{\partial r^2} - \gamma(\gamma + 1)T_\gamma - V \sum_{\alpha\beta} [(S_\alpha, S_\beta, T_\gamma) + (T_\alpha, S_\beta, T_\gamma) + (T_\alpha, T_\beta, T_\gamma)]$$

dove abbiamo usato le seguenti sostituzioni

$$(S_\alpha, S_\beta, S_\gamma) = -\frac{K}{2N_\gamma} \{ \alpha(\alpha + 1)[\alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1)] S_\alpha \frac{\partial S_\beta}{\partial r} +$$

$$\beta(\beta + 1)[\alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)] \frac{\partial S_\alpha}{\partial r} S_\beta \}$$

$$(T_\alpha, S_\beta, S_\gamma) = -L\beta(\beta + 1) \frac{T_\alpha S_\beta}{N_\gamma}$$

$$(S_\alpha, T_\beta, S_\gamma) = -L\alpha(\alpha + 1) \frac{T_\beta S_\alpha}{N_\gamma}$$

$$(S_\alpha, S_\beta, T_\gamma) = \frac{L}{N_\gamma} \{ \alpha(\alpha + 1) S_\alpha \frac{\partial^2 S_\beta}{\partial r^2} + [\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1)] \frac{\partial S_\alpha}{\partial r} \frac{\partial S_\beta}{\partial r} -$$

$$\alpha(\alpha + 1) \frac{2S_\alpha}{\partial r} \frac{\partial S_\beta}{\partial r} + \beta(\beta + 1) \left(\frac{\partial^2 S_\beta}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial S_\alpha}{\partial r} \right) S_\beta \}$$

$$(T_\alpha, S_\beta, T_\gamma) = -\frac{K}{2N_\gamma} \{ \{ \beta(\beta + 1)[\alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)] + \gamma(\gamma + 1)[\alpha(\alpha + 1) +$$

$$\beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1) \} T_\alpha \frac{\partial S_\beta}{\partial r} + \beta(\beta + 1)[\alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)] \left(\frac{\partial T_\alpha}{\partial r} - \frac{2T_\alpha}{r} \right) S_\beta \}$$

$$(S_\alpha, T_\beta, T_\gamma) = \frac{K}{2N_\gamma} \{ \alpha(\alpha + 1)[-\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)] S_\alpha \frac{\partial T_\beta}{\partial r} + \{ \alpha(\alpha + 1)[-\alpha(\alpha + 1) +$$

$$\beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) \} \left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial r} - \frac{2S_\alpha}{r} \right) + \gamma(\gamma + 1)[\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) - \gamma(\gamma + 1)] \frac{\partial S_\alpha}{\partial r} \} T_\beta \}$$

$$(T_\alpha, T_\beta, T_\gamma) = -L\gamma(\gamma + 1) \frac{T_\alpha T_\beta}{N_\gamma}$$

dove $K_{\alpha\beta\gamma} = \int \int Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma \sin\theta d\theta d\phi$ e $L_{\alpha\beta\gamma} = \int \int Y_\alpha \left(\frac{\partial Y_\beta}{\partial \theta} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial \phi} - \frac{\partial Y_\beta}{\partial \phi} \frac{\partial Y_\gamma}{\partial \theta} \right) d\theta d\phi$.

Vediamo nelle prime due equazioni una semplice interpretazione fisica. Il tasso di incremento del campo derivato da una singola armonica sferica è uguale alla riduzione dovuta alla parte di diffusione che è indipendente dal moto (primi due termini a destra

dell'uguaglianza), i termini rimanenti esprimono il tasso a cui le componenti S_α o T_α del moto del flusso di materia, interagiscono con le componenti del campo S_β o T_β per produrre, attraverso l'induzione, un campo S_γ o T_γ .

In ogni equazione β rappresenta il campo che induce e γ il campo indotto.

Per produrre un campo stazionario il termine V che delinea la magnitudine del campo di velocità, deve bilanciare esattamente il termine diffusivo.

Bullard e Gellman quindi trascurano la dipendenza temporale per semplificare questa serie di equazioni. Inoltre ricavano le condizioni al contorno:

$$S_\beta = T_\beta = O(r^{\beta+1}) \quad a \ r = 0$$

$$\frac{dS_\beta}{dr} + \gamma S_\beta = T_\beta = 0 \quad a \ r = 1$$

dalla continuità dei campi nell'origine e dalle condizioni a contorno sul campo in superficie.

L'intero sistema è notevolmente semplificato da numerose regole di selezione di natura strettamente algebrica e che riguardano le differenti armoniche. L'importanza del modello è proprio questa, il riuscire a dimostrare che solo alcune armoniche interagiscono con altre e che quindi il sistema diventa un intricato intreccio di campi che si sostengono reciprocamente tra flusso di materia, campo inducente e campo indotto. Le relazioni non sono affatto banali ed è possibile ricavare anche influenze di un'armonica su se stessa per le diverse componenti del vettore del campo.

I punti deboli di questo modello sono l'arbitrarietà del taglio, soprattutto per gli intricati intrecci dei campi è impossibile valutare a priori l'entità o la validità di un'approssimazione, e la stazionarietà del modello, che non lo rende adatto ad essere predittivo quanto a studiare gli effetti dei campi tra di loro.

1.2 Campo medio

La teoria della dinamo a campo medio riguarda flussi e campi a simmetria assiale. Nello specifico la parte simmetrica viene considerata il valor medio del campo in un certo istante e la parte antisimmetrica viene considerata una piccola perturbazione.

Il teorema anti-dinamo è aggirato parametrizzando gli effetti dei flussi non a simmetria assiale nei così detti effetti- α . Con questa approssimazione si perde nel dettaglio la dinamica dei campi ma è possibile concentrarsi su altri elementi trascurati nel modello cinematico. In particolare si riesce ad esprimere la dinamica legata al momento in quanto non è più presente l'approssimazione di staticità del campo. Questo elemento ci consente di vedere come si evolve un campo anche se la dinamica è molto approssimata.

Nell'approssimazione di campo medio si separano \vec{v} e \vec{B} nelle loro componenti a simmetria assiale e senza simmetria, $\vec{v} = \vec{v}_s + \vec{v}_a$ e $\vec{B} = \vec{B}_s + \vec{B}_a$.

L'equazione azimutale, essendo prevalente secondo il modello il contributo simmetrico, diventa quindi:

$$\frac{\partial \vec{B}_s}{\partial t} = \nabla^2 \vec{B}_s + \vec{\nabla} \times (\vec{v}_s \times \vec{B}_s) + \vec{\nabla} \times (\vec{v}_a \times \vec{B}_a)_s$$

visto che il campo medio è simmetrico, la componente simmetrica di $\vec{\nabla} \times (\vec{v}_a \times \vec{B}_a)$ è la componente media, quindi questo contributo si può esprimere in funzione del campo medio della dinamo. Il così detto effetto- α è il parametro per cui $(\vec{v}_a \times \vec{B}_a)_s = \alpha \vec{B}_s$ e indica l'ampiezza dell'effetto del contributo antisimmetrico e per tanto deve rispettare la condizione di asimmetria dell'effetto Coriolis e del contributo convettivo di cui abbiamo parlato riguardo a Parker.

L'equazione diventa quindi

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{\nabla} \times (\alpha \vec{B})$$

visto che \vec{v} e \vec{B} sono puramente a simmetria assiale, possiamo usare le relazioni $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ per scomporli in

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_\phi) + v \vec{e}_\phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_\phi) + B \vec{e}_\phi$$

ovvero una componente assiale e un rotore ortogonale che si annulla nel calcolo della condizione a contorno.

Con quest'ulteriore sostituzione l'equazione di induzione per il modello a campo medio diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} A = D^2 A + \alpha B + \vec{e}_\phi \cdot [\vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_\phi) \times \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_\phi)]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B = D^2 B + \vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} \times [\alpha \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_\phi)] + \vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} \times [v \vec{e}_\phi \times \vec{\nabla} \times (A \vec{e}_\phi)] - \vec{e}_\phi \cdot \vec{\nabla} \times [B \vec{e}_\phi \times \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_\phi)]$$

dove le equazioni sono state divise raccogliendo un rotore ed entrambe sono moltiplicate per il versore \vec{e}_ϕ , D^2 rappresenta il laplaciano in coordinate cilindriche.

Si può quindi procedere alla soluzione del sistema di equazioni, prima ipotizzando un andamento per la funzione scalare α ed integrandole osserva per quali andamenti e valori si ottiene l'azione di una dinamo. Non è necessario esplicitare un flusso di velocità in quanto la dinamo è espressa dalle piccole variazioni racchiuse nel parametro α più che dalle grandi variazioni in \vec{v} .

Dinamo di questo tipo sono note come α^2 -dinamo in quanto dipendenti dai due α .

Un'altro modello a campo medio noto sono le $\alpha\omega$ -dinamo dove si ipotizza più nel dettaglio v scomponendolo nella moltiplicazione di una velocità angolare, una parte radiale e di un fattore di scala.

In questi modelli abbiamo tipici effetti dinamo come le interazioni tra campo poloidale e toroidale che mantengono il campo contro la dissipazione. Essenziale è l'assenza di

simmetria ed il fatto che la funzione scalare α vari di segno per rispecchiare l'effetto dei vortici visti nell'introduzione dei modelli fluidi.

Una nota importante è che nei modelli α^2 il campo toroidale risulta più debole che nei modelli $\alpha\omega$ per via delle costanti con cui si riscalda il sistema, quindi il primo viene definito campo debole ed il secondo campo forte. La mancanza di dati in superficie riguardo al campo toroidale impedisce di determinare quale sia più realistico. Il contributo primario del modello a campo medio è il regime non lineare delle soluzioni.

I primi modelli a campo medio sono capaci di sostenere un campo contro la dissipazione e quindi di avere un effetto dinamico, ma la frequenza del cambio di polarità è troppo elevata in quanto ogni oscillazione attiva un'inversione. Con l'evoluzione della conoscenza del nostro pianeta, tramite la tomografia sismica, si è giunti alla conclusione della presenza di un nucleo conduttivo. Generalmente per i modelli a campo medio questo nucleo stabilizza il sistema impedendo però inversioni (modello di Hollerbach e Jones³) avendo un andamento simile al modello a disco singolo e inseriscono l'idea, poi ripresa da Glatzmaiers, che solo fluttuazioni particolarmente grandi potessero provocare un'inversione del campo.

1.3 Geodinamo di Glatzmaiers

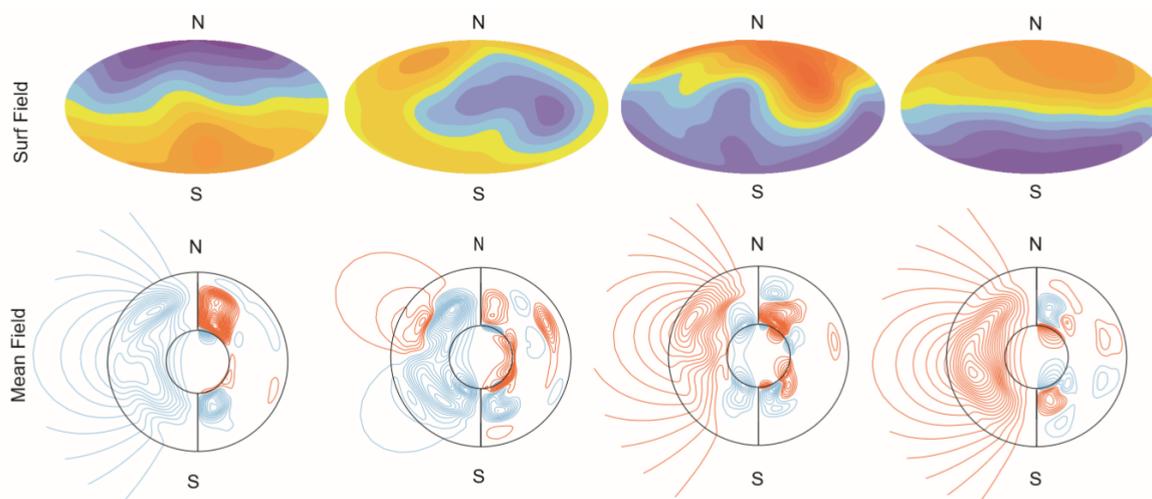


Figura 6: Risultato della simulazione del modello di Glatzmaiers in cui è visibile la dinamica del processo di inversione legata ai campi del nucleo interno ed esterno.

³Glatzmaiers e Roberts ipotizzano che il fenomeno di mancata inversione nel modello è probabilmente dovuto al fatto che α e ω siano stati considerati costanti, tuttavia è molto difficile stimare questi parametri o ipotizzarne un'andamento, inoltre sviluppano un proprio modello sfruttando la stabilizzazione ottenuta dal nucleo solido conduttivo.

Glatzmaiers e Roberts sviluppano un modello molto più completo dei precedenti. Non vi è solo la presenza del nucleo solido ma anche di variabili termodinamiche dipendenti dal tempo: densità, pressione, entropia e composizione. Questo modello è attualmente il privilegiato in quanto genera una dinamo tridimensionale che è comprensivo di tutti i punti del geomagnetismo e riesce ad essere abbastanza lungo anche su scala temporale, per le inversioni, considerando i vincoli posti al flusso di materia dalla struttura del pianeta. Inoltre è una rappresentazione anaelastica dell'equazione di Navier-Stokes che è più completa dell'equazione del modello di Bullard in quanto considera il tensore di sforzo.

Ovviamente tutti i parametri non sono noti precisamente. Si possono fare stime sui valori medi abbastanza varie e quelle più recenti sono estrapolate da simulazioni generate in modo da rispettare i dati reali degli ultimi 40 anni.

Il campo magnetico così simulato ha una intensità ed una struttura dominante dipolare che è molto simile a quella della Terra ed una deriva verso est della struttura non dipolare che è essenzialmente la stessa di 0,2 gradi/anno misurata sulla Terra. Questa soluzione dimostra che l'influenza della rotazione della Terra sulla convezione nel nucleo fluido esterno è responsabile di questa struttura di campo magnetico e della dipendenza dal tempo.

Il nucleo esterno genera un campo che oscilla con frequenza relativamente elevata mentre il nucleo interno, che può variare solo per termini diffusivi scambiati con il nucleo esterno, varia con tempi molto più lunghi, solo una volta su numerose oscillazioni l'inversione ha successo, il che è probabilmente il motivo per cui i tempi tra due inversioni del campo della Terra sono lunghi e distribuiti casualmente.

Una parte del modello numerico tiene conto della velocità di rotazione del nucleo solido interno relativamente alla superficie, che varia in accordo al momento applicato al nucleo interno dal campo magnetico generato. Il modello mostra che il campo unisce il nucleo interno al fluido che si muove intorno ad esso verso est, mantenendolo in co-rotazione.

Come riporta Hollerbach possiamo notare la presenza sia dell'effetto α^2 che $\alpha\omega$ in quanto abbiamo due dinamo, una con rapidità di inversione più elevata dell'altra e intensità ridotta anche se il riferimento a questi effetti perde di validità fisica in quanto sono fluidi mentre il nucleo interno è solido.

Capitolo 2

Dinamo a disco

Modellizzare queste caratteristiche senza poter accuratamente indagare l'origine del fenomeno, per via delle condizioni interne di pressione e temperatura del pianeta, non ha reso semplice questo tipo di problema. Lo studio si è principalmente basato su congetture che si plasmavano di pari passo con le conoscenze dell'interno del nostro pianeta.

I modelli a disco del campo magnetico terrestre sono stati studiati cercando di complicare il modello a disco più semplice (una dinamo che sostiene un campo) in modo da replicare gli altri comportamenti come fluttuazioni e inversioni.

Il punto di partenza è un meccanismo in grado di autosostenersi a quindi evitare il decadimento del campo. Questa semplificazione fu proposta da Bullard nella dinamo ad autoinduzioni e venne raffinata da Rikitake. Successivamente il modello fu complicato con l'inserimento di fluttuazioni, seguito dall'elaborazione di un modello capace di replicare l'inversione dei poli.

Il lato positivo di questi modelli è che ci consentono non solo di riprodurre alcune dinamiche essenziali ma anche di avere un riscontro di parametri come l'induttanza e la resistenza che altrimenti non sarebbero ricavabili nei modelli fluidi per ovvie difficoltà pratiche.

Le dinamo singole riescono ad esprimere l'andamento di un campo generato da una sfera fluida rotante, in cui è presente una convezione singola tra il centro e la superficie. Le dinamo doppie invece esprimono l'andamento applicabile al nostro pianeta di una calotta sferica rotante con un nucleo interno conduttivo.

L'ulteriore condizione a contorno sulla sfera solida interna per il campo di velocità implica la presenza di un campo che varia più lentamente e unicamente per diffusione, abbiamo quindi due contributi, uno nel nucleo esterno e uno nel nucleo interno. La soluzione di Glatzmaier- Roberts mostra come la convezione nel nucleo fluido esterno cerchi continuamente di invertire il campo ma il nucleo solido interno impedisca le inversioni magnetiche perché la scala di tempo per diffusione è molto più lunga.

Questo giustifica la presenza di due dinamo che esprimono questi due campi che interagiscono.

La semplicità di questi modelli ci consente di studiare nel dettaglio la dinamica e vedere in quale misura possano essere un riscontro, notevolmente più pratico, dei fenomeni osservati.

2.1 Disco singolo

Il campo magnetico terrestre è rimasto pressochè invariato come intensità nel corso di milioni di anni. Questa caratteristica sembra controintuitiva in quanto la dissipazione ohmica dovrebbe attenuare il campo per poi annullarlo in un tempo stimato intorno ai 20000 anni (per un campo dipolare).

Il modello della dinamo ad autoinduzione prevede la possibilità di un campo magnetico capace di autosostenersi.

Abbiamo già parlato dell'importanza di una rotazione differenziale per ottenere l'effetto dinamo in una sfera fluida rotante. Questo modello ne cattura l'aspetto fondamentale approssimando il complesso modello fluido con una dinamo a disco dove abbiamo una rotazione differenziale che interagisce con la corrente.

Un disco conduttore ruota attorno all'asse con un campo magnetico orientato parallelamente. La forza elettromotrice è quindi generata nel disco in direzione radiale. La differenza di potenziale tra l'asse e l'esterno del disco può essere scritta come

$$V = \omega \int_a^b H r dr$$

dove a e b sono rispettivamente i raggi dell'asse e del disco e ω è la velocità angolare. Se supponiamo che il campo magnetico H sia generato da una corrente elettrica I che scorre lungo una spira circolare, allora

$$\int_a^b H r dr = MI$$

dove $2\pi M$ è la mutua induttanza tra la spira e la periferia del disco. Allora otteniamo la seguente equazione:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = M\omega I$$

dove L è l'autoinduzione ed R è la resistenza della spira.

Considerando ω una costante troviamo come soluzione $I = I_0 e^{\frac{(M\omega - R)t}{L}}$, questa è di poco interesse e a seconda del valore di ω può esplodere, annullarsi o essere costante.

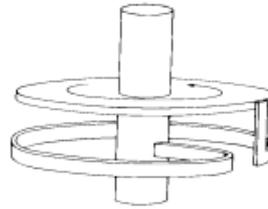


Figura 3: Disegno di una dinamo a disco.

É però più interessante ottenere un'espressione per la variazione di ω ritenendo costante il momento torcente; la corrente genererà una forza di Lorentz sul disco $F = I \int_a^b r H dr = MI^2$ quindi

$$C \frac{d\omega}{dt} = G - MI^2$$

dove C è il momento di inerzia del disco attorno all'asse e G è il momento torcente che consideriamo costante.

Mettendo insieme l'equazione differenziale in I e in ω otteniamo un'equazione differenziale del secondo ordine. Se $GM > 0$ riscaldando le variabili con $\tau = \sqrt{\frac{2GM}{CL}}t$ e $y = \ln\left(\frac{MI^2}{G}\right)$ otteniamo la forma semplificata $\frac{d^2y}{d\tau^2} = 1 - e^y$.

Ponendo $x = \frac{dy}{d\tau}$, le condizioni iniziali per questa equazioni, x_0 e y_0 possono essere espresse in funzione delle condizioni iniziali date per ω e I :

$$x_0 = \sqrt{\frac{2CM}{GL}} \left(\omega_0 - \frac{R}{M} \right) \quad y_0 = \ln\left(\frac{MI_0^2}{G}\right)$$

da questa espressione abbiamo un andamento oscillatorio se $\omega \neq \frac{R}{M}$, per $\omega = \frac{R}{M}$ e $I = \pm\sqrt{\frac{G}{M}}$ otteniamo una corrente e quindi un campo magnetico statici, dimostrando così che è possibile mantenere un campo magnetico stabile.

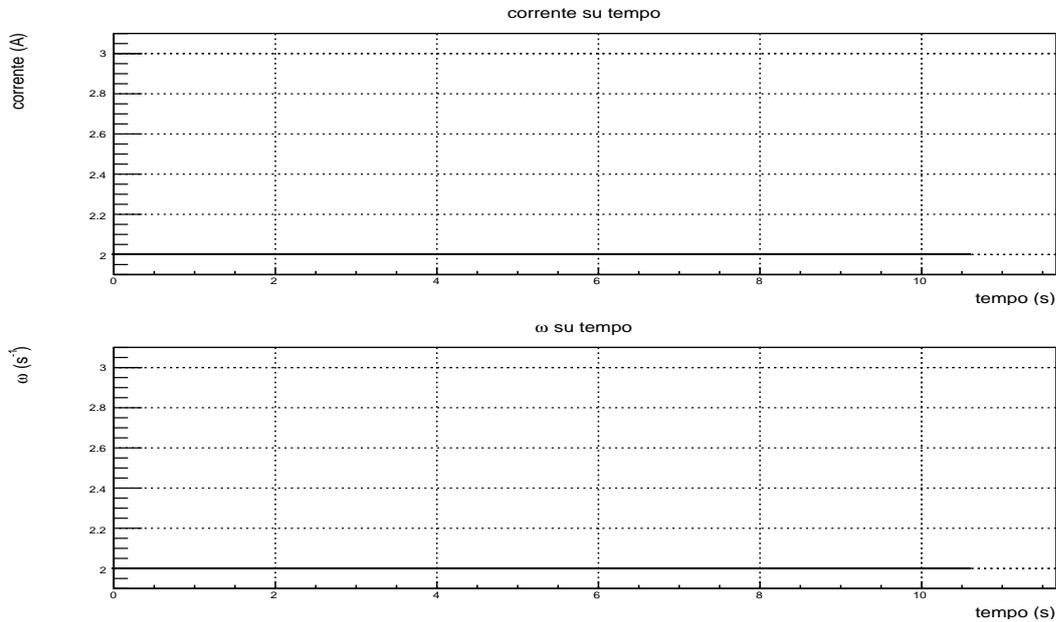


Figura 4: Dinamo singola con $\omega_0 = I_0 = 2$, $R=2, M=1, C=1, G=4$. I parametri sono stati scelti per rispettare la condizione stazionaria $\omega_0 = \frac{R}{M}$ e $I_0 = \sqrt{\frac{G}{M}}$.

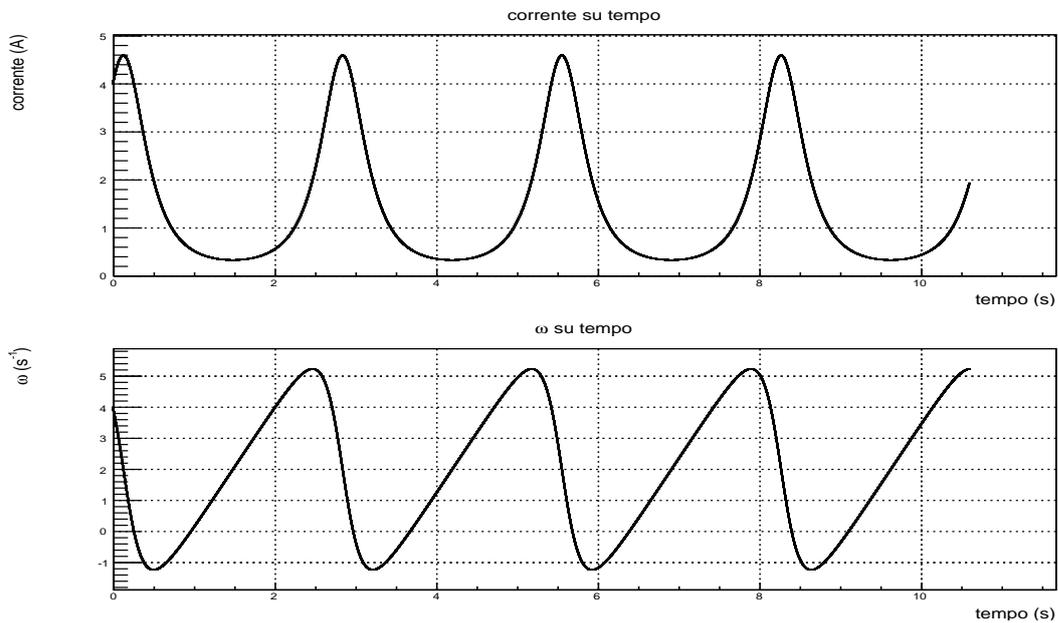


Figura 5: Dinamo singola con $\omega_0=I_0=4$, $R=2, M=1, C=1, G=4$. Dati scelti per essere fuori dal punto fisso.

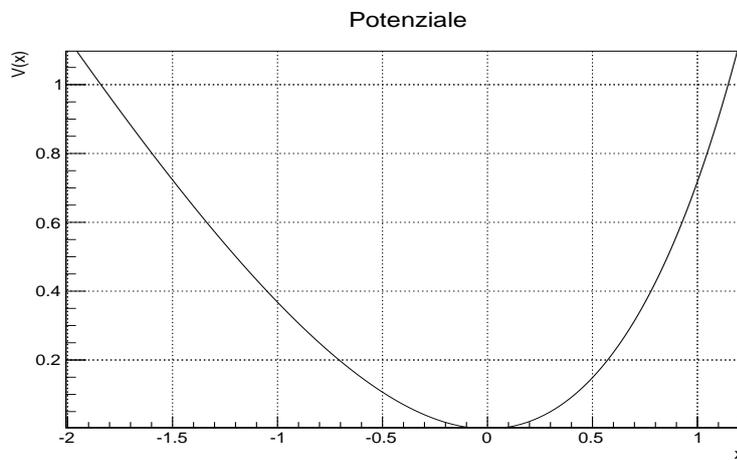


Figura 6: Potenziale per la dinamo a disco singolo.

Dall'equazione con la derivata seconda di y possiamo determinare un potenziale $\frac{d^2 y}{dt^2} = -V'(x)$ e fissare la costante in modo che il potenziale si annulli per $y = 0$ ovvero $V(x) = e^y - y - 1$. L'Hamiltoniana che ne deriva $H = \frac{p^2}{2m} + V(y)$ avrà una sola condizione di equilibrio $y = 0$, stabile. Tutte le altre soluzioni sono oscillatorie.

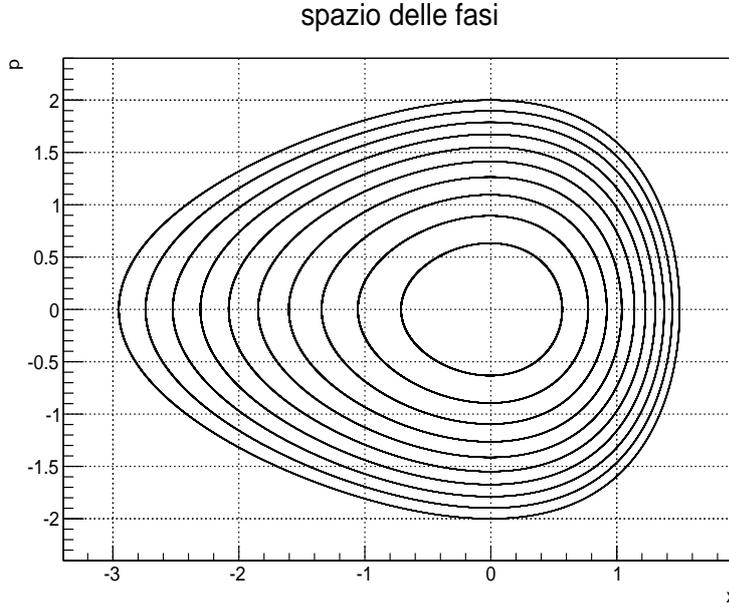


Figura 7: Spazio delle fasi corrispondente al potenziale in Figura 6.

Per piccole oscillazioni il potenziale assume la forma quadratica di un'oscillatore armonico con $\omega = 1$ e periodo $T = \sqrt{\frac{CL}{2MG}}$ portando a un orbite circolari attorno al punto stabile. Crescendo la variabile y vediamo che il potenziale viene deformato dal contributo esponenziale.

Il tempo di inversione si possono ricavare dall'hamiltoniana in quanto l'energia associata è $E = \frac{p^2}{2m} + V(y) = \frac{my^2}{2} + V(y)$ da cui possiamo ricavare

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(y))} \Rightarrow T = 2 \int_0^{t_{inv}} dt = \sqrt{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{m(E - e^y + y + 1)}}$$

considerando una massa unitaria ed esplicitando il potenziale possiamo risolvere l'integrale al variare dell'energia. Nello specifico abbiamo usato il metodo di Newton per trovare i punti di inversione ed applicato la regola dei trapezi per ottenere il periodo.

Dato che i punti di inversione y_1 e y_2 sono i punti in cui l'energia $E = V(y_1) = V(y_2)$, l'integrale in questa forma risulta difficile da stimare.

Sostituendo $y = y_1 + (y_2 - y_1)\sin^2(\frac{\phi}{2})$ e quindi $dy = \frac{y_2 - y_1}{2}\sin(\phi)d\phi$ troviamo l'espressione

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{(y_2 - y_1)\sin\phi d\phi}{\sqrt{E - e^{y_1 + (y_2 - y_1)\sin^2(\frac{\phi}{2})} + y_1 + (y_2 - y_1)\sin^2(\frac{\phi}{2}) + 1}}$$

anche se può non sembrare, in questa forma è più gestibile e possiamo ottenere il valore della funzione agli estremi e in tutto lo spazio senza difficoltà. Utilizzando il metodo di

de l'Hopital possiamo stimare il valore agli estremi:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(y_2 - y_1)^2 \sin^2 \phi}{E - e^{y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2})} + y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2}) + 1} =$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{2 \cos \phi \sin \phi (y_2 - y_1)^2}{\frac{y_2 - y_1}{2} \sin \phi (1 - e^{y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2})})} = \frac{4(y_2 - y_1)}{1 - e^{y_1}}$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{(y_2 - y_1)^2 \sin^2 \phi}{E - e^{y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2})} + y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2}) + 1} =$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{2 \cos \phi \sin \phi (y_2 - y_1)^2}{\frac{y_2 - y_1}{2} \sin \phi (1 - e^{y_1 + (y_2 - y_1) \sin^2(\frac{\phi}{2})})} = \frac{-4(y_2 - y_1)}{1 - e^{y_2}}$$

in questo modo possiamo valutare l'integrale e stimarlo con il metodo dei trapezi poichè è limitato agli estremi e non presenta ulteriori punti di singolarità nell'intervallo di dominio $[0, \pi]$.

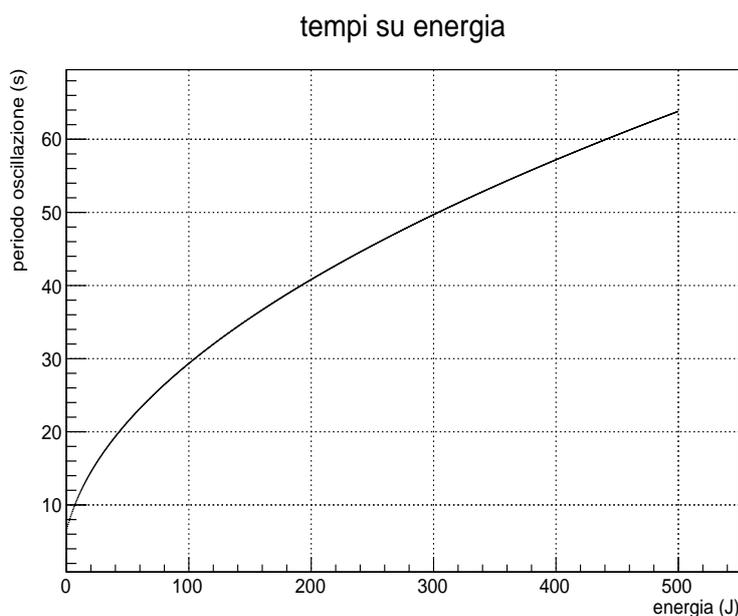


Figura 8: Grafico dei periodi di oscillazione in funzione dell'energia.

Per $GM < 0$ dobbiamo usare le sostituzioni $\tau = \sqrt{-\frac{2GM}{CL}} t$ e $y = \ln(-\frac{MI^2}{G})$. Ciò ci porta all'equazione differenziale $\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -(1 + e^y)$ che ha soluzioni oscillatorie ma nessuna condizione statica e risulta quindi di scarso interesse in riferimento ai modelli fluidi.

2.2 Doppio disco di Rikitake

La dinamo a disco singolo presenta un'oscillazione ma manca di reversibilità esattamente come i modelli fluidi meno avanzati. Per descrivere la dinamica interna di una calotta sferica rotante con un nucleo conduttivo (modello di Glatzmaiers) è necessario descrivere i due campi che vengono a formarsi, uno nel nucleo interno e uno nel nucleo esterno.

L'interazione tra questi due campi, con correnti debolmente interagenti, è stata resa da Rikitake con la presenza di due dinamo, una per campo. La mutua interazione di una dinamo con periodo breve (corrispondente al campo del nucleo esterno) e con periodo lungo (corrispondente al campo interno), rappresenta in maniera semplice la dinamica riportata da Glatzmaiers. Le variazioni del campo esterno riescono a forzare l'andamento del campo interno solo quando raggiungono un'intensità abbastanza elevata e riescono quindi a creare un campo opposto ma in maniera imprevedibile. Allo stesso modo le due dinamo interagiscono con campi oscillanti creando variazioni di segno.

La dinamica è imprevedibile (ricorrenza infinita) cosa che consente la classificazione del sistema come caotico insieme alla dinamica di limitatezza e di forte dipendenza dalle condizioni iniziali, a seconda dei parametri esistono anche intervalli periodici, tuttavia la dinamica del pianeta suggerita dal paleomagnetismo sembra privilegiare l'ipotesi caotica che è compresa in questo modello.

Le equazioni originali del modello di Rikitake considerano due dinamo dinamo a disco singolo, aggiungendo quindi il termine del contributo di mutua induzione:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 = \Omega_1 M I_2,$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = \Omega_2 N I_1$$

$$C_1 \frac{d\Omega_1}{dt} = G_1 - M I_1 I_2$$

$$C_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = G_2 - N I_1 I_2$$

dove L e R sono le auto-induttanze e le resistenze delle spire, $I_{1,2}$ sono le correnti, $\Omega_{1,2}$ le velocità angolari, $C_{1,2}$ sono i momenti di inerzia e $G_{1,2}$ sono i momenti torcenti che corrispondono alle forze esercitate sui vortici del modello fluido. M ed N sono i coefficienti

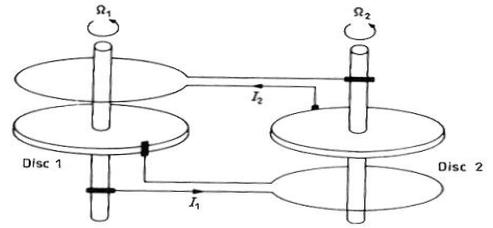


Figura 9: Doppia dinamo di Rikitake.

di mutua induttanza.

Per semplicità poniamo $L_1 = L_2$, $R_1 = R_2$, $M = N$, $C_1 = C_2$, $G_1 = G_2$ e sostituendo

$$I_1 = \sqrt{\frac{G}{M}}x, \quad I_2 = \sqrt{\frac{G}{M}}y, \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{GL}{CM}}z, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{GL}{CM}}(z - a),$$

$$t = \sqrt{\frac{CL}{GM}}t', \quad \nu = R\sqrt{\frac{C}{LMG}}$$

con le costanti $a, \nu > 0$. L'espressione di Ω_2 si ottiene facendo la differenza tra le due derivate della velocità angolare, con il sistema di uguaglianze sovraccitato, le derivate saranno uguali e quindi le velocità angolari differiranno di una costante arbitrariamente fissata a .

La scala temporale è misurata dalla media geometrica tra le scale di tempo meccanico, il tempo che il disco impiegherebbe per fermarsi in assenza di campo magnetico, ed elettromagnetico, che indica il tempo caratteristico di decadimento del campo se il disco smettesse di girare. Ovvero $\tau = \sqrt{\tau_m \tau_e}$ dove $\tau_e = \frac{L}{R}$ e $\tau_m = \frac{CR}{GM}$.

Inoltre ν è un parametro adimensionale equivalente alla radice del rapporto tra la scala di tempo meccanico ed elettrico ma può essere anche calcolato come il rapporto tra le densità di energia.

Riguardo al suo valore ci sono stime imprecise: seguendo la prima definizione Alfèn lo stima partendo dal tempo di propagazione delle omonime onde e considerando un campo magnetico di 5 gauss trovando un $\tau_m = 10^5$ e supponendo un $\tau_e = 10^4$ trova $\nu = 10$. Bullard e Gellman seguendo la seconda definizione trovano $\nu = 10^{-3}$. Naturalmente sono stime grossolane in quanto il valore dei parametri di riferimento è impossibile da stimare con precisione ma danno l'idea di quanto sia difficile lavorare con questi modelli in quanto sono estremamente sensibili a variazioni dei parametri e di come mai non siano usati per delle stime fisiche quanto per capire le dinamiche.

Con le precedenti sostituzioni otteniamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\nu x + zy, \\ \dot{y} &= -\nu y + (z - a)x, \\ \dot{z} &= 1 - xy \end{aligned}$$

ricerchiamo i punti fissi uguagliando a 0 le derivate e risolvendo il sistema nel punto (x^*, y^*, z^*) :

$$\nu x^* = z^* y^*, \quad \nu y^* = (z^* - a)x^*, \quad x^* y^* = 1$$

per semplificare sostituiamo $x^* = k$ da cui otteniamo

$$x^* = \frac{1}{y^*} = k \Rightarrow y^* = k^{-1} \Rightarrow \nu = (z^* - a)k^2, \quad z^* = k^2 \nu \Rightarrow a = \nu(k^2 - k^{-2})$$

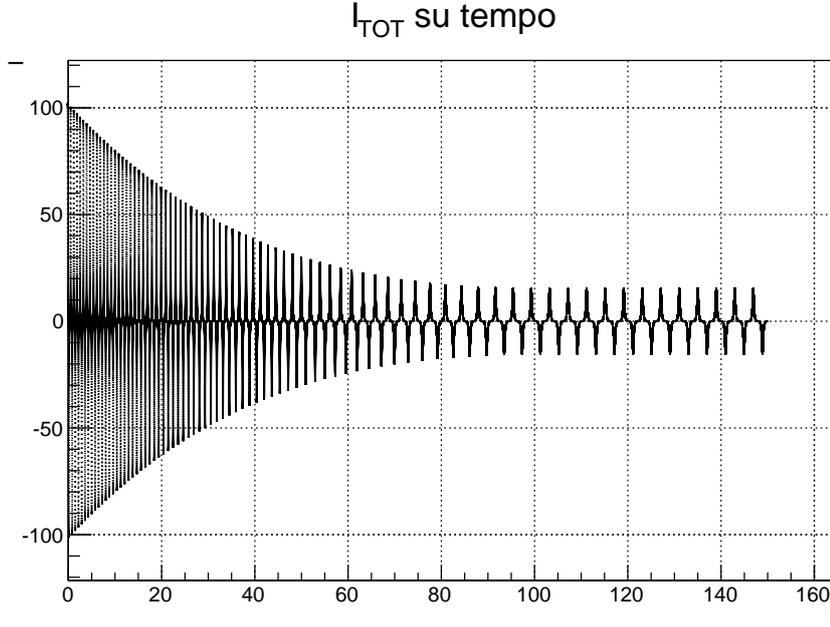


Figura 10: Dinamica della doppia dinamo di Rikitake, campo totale con inversione dei poli. Le condizioni iniziali di questo sistema sono $I_1 = 50$, $I_2 = 50$, $\Omega = 10$, $\nu = 0.1$, $a = 0.1$. È visibile come l'intensità si stabilizzi nel tempo entrando nella dinamica di attrattore stabile.

se consideriamo $k > 1 \Rightarrow a > 0$, condizione che non altera la generalità del sistema in quanto a differenti valori si avrebbe semplicemente uno scambio tra le due dinamo, le soluzioni diventano $x^* = \pm k$, $y^* = \pm k^{-1}$, $z^* = \nu k^2$.

I segni vanno presi insieme e corrispondono rispettivamente alle condizioni normale e invertita del campo magnetico.

La matrice Jacobiana del campo vettoriale è

$$\begin{bmatrix} -\nu & z & y \\ z - a & -\nu & x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix}$$

dall'analisi matematica sappiamo che la divergenza di un campo vettoriale coincide con la traccia della matrice Jacobiana del campo, quindi $\dot{V} = \int \nabla \cdot f dV = \int Tr(J) dV$; ovvero la variazione del volume è l'integrale della divergenza del campo in tutto il volume e corrisponde all'integrale della traccia dello Jacobiano del sistema.

La traccia dello Jacobiano risulta $Tr(J) = -2\nu$ quindi $\dot{V} = -2\nu V \Rightarrow V(t) = V_0 e^{-2\nu t}$ otteniamo così che il volume diminuisce esponenzialmente.

Questo ci porta ad affermare che il sistema evolverà verso un attrattore strano di dimensione prossima a $D = 2$.

Possiamo linearizzare le equazioni trovando gli autovalori dello Jacobiano, questo ci porta a calcolare il polinomio caratteristico del sistema $P(\lambda) = \det(J - \lambda I) = 0$ le cui soluzioni sono gli autovalori.

La matrice risultante $J - \lambda I$ è:

$$\begin{bmatrix} -\nu - \lambda & z & y \\ z - a & -\nu - \lambda & x \\ -y & -x & -\lambda \end{bmatrix}$$

rifacendoci alle sostituzioni precedenti di x^* , y^* , z^* e a e supponendo x e $y > 0$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} -\nu - \lambda & \nu k^2 & k^{-1} \\ \nu k^2 - \nu(k^2 - k^{-2}) & -\nu - \lambda & k \\ -k^{-1} & -k & -\lambda \end{bmatrix}$$

il polinomio caratteristico risulta quindi

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -\lambda(\nu + \lambda)^2 - \nu k^2 - \nu k^2 + \nu(k^2 - k^{-2}) - k^{-2}(\nu + \lambda) - k^2(\nu + \lambda) + \lambda \nu k^2 (\nu k^2 - \nu(k^2 - k^{-2})) = \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2\nu - \lambda\nu^2 - 2\nu k^2 - 2\nu k^{-2} - \lambda k^2 - \lambda k^{-2} + \lambda\nu^2 = \\ &= -(\lambda + 2\nu)(\lambda^2 + k^2 + k^{-2}) = 0 \end{aligned}$$

quindi otteniamo come autovalori $\lambda = -2\nu, \pm i\sqrt{k^2 + k^{-2}}$, cosa che ci porta a un'autofunzione reale e due complesse, rispettivamente una il complesso coniugato dell'altra. Questi autovalori rivelano la tendenza a un certo tipo di stabilità (autovalore negativo) e all'oscillazione del sistema (autovalori immaginari).

L'equazione agli autovalori $J\vec{v} = \lambda\vec{v}$ diventa

$$\begin{bmatrix} -\nu & \nu k^2 & k^{-1} \\ \nu k^2 - \nu(k^2 - k^{-2}) & -\nu & k \\ -k^{-1} & -k & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \lambda_i \vec{v}$$

da cui possiamo ottenere i tre autovettori corrispondenti ai tre autovalori risolvendo per ognuno il sistema di tre equazioni

$$\begin{aligned} -\nu v_1 + \nu k^2 v_2 + k^{-1} v_3 &= \lambda v_1 \\ \nu k^{-2} v_1 - \nu v_2 + k v_3 &= \lambda v_2 \\ -k^{-1} v_1 - k v_2 &= \lambda v_3 \end{aligned}$$

Possiamo cercare di semplificare il sistema in modo da ricondurlo ad una forma nota sia tramite cambi di sistema di riferimento, che si traducono poi in cambi di base per la matrice della trasformazione, sia fissando dei valori nelle equazioni degli autovettori per

fissare la matrice di trasformazione.

Normalizziamo a 1 l'ultima componente degli autovettori complessi, in questo modo la matrice degli autovettori diventa

$$U = (\vec{u}, \vec{u}^*, \vec{v}) = \begin{bmatrix} u_1 & u_1^* & v_1 \\ u_2 & u_2^* & v_2 \\ 1 & 1 & v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$U^{-1} = \frac{1}{2i\text{Im}(u_1 u_2^* + u_1^* v_2 + v_1 u_2^*)} \begin{bmatrix} u_2^* - v_1 & -u_1^* + v_1 & v_2 u_1^* - v_1 u_2^* \\ -u_2 + v_1 & u_1 - v_1 & -u_1 v_2 + v_1 u_2 \\ u_2 - u_2^* & u_1^* - u_1 & u_1 u_2^* - u_1^* u_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{a}^{*T} \\ \vec{b}^T \end{bmatrix}$$

dove \vec{a} è un vettore complesso e \vec{b} è reale.

La matrice originaria J sarà quindi espressa tramite questo cambio di base come $J = U^{-1}\Lambda U \Rightarrow \Lambda = UJU^{-1}$ dove con Λ indichiamo la matrice degli autovalori. Il vettore del sistema di partenza si può esprimere come $\vec{z} = U^{-1}\vec{x}$ dove con \vec{z} consideriamo il vettore \vec{x} nella nuova base che trasforma la matrice J in Λ . È possibile semplificare ulteriormente esprimendo i vettori come vettori reali. In questa nuova base le componenti di \vec{z} saranno $z_1 = \vec{a} \cdot \vec{x} = X + iY$, $z_2 = \vec{a}^* \cdot \vec{x} = X - iY$, $z_3 = \vec{b} \cdot \vec{x} = Z$ e la matrice del cambio sarà

$$K = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

chiamando \vec{X} il nuovo vettore espresso in questa base, la relazione con \vec{x} sarà $\vec{x} = U\vec{z} = UK\vec{X}$. E la nuova matrice sarà $B = K^{-1}U^{-1}AK$.

Adesso esprimiamo l'evoluzione del sistema attraverso l'operatore di evoluzione, ovvero l'esponenziale della matrice del sistema e^{At} .

Nel sistema di riferimento originale sarà

$$\vec{x}(t) = e^A \vec{x} \Rightarrow \vec{X}(t) = (UK)^{-1} \vec{x}(t) = (UK)^{-1} e^{At} \vec{x} = (UK)^{-1} e^{At} UK \vec{X}$$

dato che $e^A = \sum_n \frac{A^n}{n!}$ allora

$$(UK)^{-1} e^A UK = (UK)^{-1} \left(\sum_n \frac{A^n}{n!} \right) UK = K^{-1} \left(\sum_n \frac{\Lambda^n}{n!} \right) K = K^{-1} e^\Lambda K = e^\Gamma$$

visto che Λ è una matrice diagonale, Γ sarà il risultato del blocco 2x2 di K e di un termine diagonale.

Ricavando il pezzo 2x2 della matrice risultante otteniamo

$$K_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad \eta_{2x2} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$K_{2x2}^{-1}\eta_{2x2}K_{2x2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta_1}{2} & \frac{\eta_1^*}{2} \\ \frac{\eta_1}{2i} & -\frac{\eta_1^*}{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\eta_1\} & -\operatorname{Im}\{\eta_1^*\} \\ \operatorname{Im}\{\eta_1\} & \operatorname{Re}\{\eta_1^*\} \end{bmatrix}$$

e considerando λ un numero complesso si può scrivere come $\eta_1 = e^{\lambda_1 t} = \cos(\frac{\lambda_1}{i}t) + i\sin(\frac{\lambda_1}{i}t)$ e $\eta_2 = \eta_1^* = \cos(\frac{\lambda_1}{i}t) - i\sin(\frac{\lambda_1}{i}t)$.

La matrice finale è quindi una rotazione con velocità angolare ω pari a $\sqrt{k^2 - k^{-2}}$.

Ne consegue che le espressioni dell'evoluzione temporale si riducono a:

$$X(t) = \cos(\omega t)X - \sin(\omega t)Y$$

$$Y(t) = \sin(\omega t)X + \cos(\omega t)Y$$

$$Z(t) = e^{-2\nu t}Z$$

nel nuovo sistema di riferimento.

Il moto asintoticamente si sviluppa su un piano con coordinata $Z = 0$ che nelle coordinate iniziali si traduce in

$$Z = (UK\vec{x})_3 = \vec{b} \cdot \vec{x} = 2x\operatorname{Im}\{u_2\} - 2y\operatorname{Im}\{u_1\} + 2z\operatorname{Im}\{u_1u_2^*\} = 0$$

dove abbiamo usato la sostituzione ricavata precedentemente $Z = \vec{b} \cdot \vec{x}$.

A questo punto l'equazione esatta nel piano originale può essere ricavato risolvendo il sistema degli autovettori per un autovalore immaginario trovando così u_1 e u_2 .

Considerando $\lambda = i\sqrt{k^2 + k^{-2}}$ otteniamo:

$$-u_1(i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu) + \nu k^2 u_2 + k^{-1} u_3 = 0$$

$$\nu k^{-2} u_1 - (i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu) u_2 + k u_3 = 0$$

$$-k^{-1} u_1 - k u_2 - i\sqrt{k^2 + k^{-2}} u_3 = 0$$

essendo nullo il determinante risolvo il sistema considerandone solo 2 e normalizzo $u_3 = 1$ come anticipato nella discussione di $U(\vec{u}, \vec{u}^*, \vec{v})$.

Ricavando u_1 dalla seconda equazione e inserendolo nella terza otteniamo:

$$u_1 = \frac{-k^3 u_3 + k^2(i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu) u_2}{\nu} \Rightarrow -u_2(2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}) + u_3(k^2 - i\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}}) = 0$$

quindi

$$u_2 = u_3 \frac{k^2 - i\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}}}{2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}} \quad u_1 = u_3 \frac{-k^3 + k^2(i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu)}{\nu} \Rightarrow$$

$$u_1 = u_3 \frac{-k^3(2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}) + k^2(i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu)(k^2 - i\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}})}{\nu(2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}})} =$$

$$u_3 \frac{\nu - ik^2\nu^2\sqrt{k^2 + k^{-2}}}{\nu(2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}})}$$

a questo punto, a conferma dei risultati, sostituendo nella prima equazione si dovrebbe ottenere $0 = 0$. La prima equazione diventa

$$-k(i\sqrt{k^2 + k^{-2}} + \nu)(\nu - ik^2\nu^2\sqrt{k^2 + k^{-2}}) + \nu^2 k^3(k^2 - i\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}}) + 2\nu^2 k + i\nu k\sqrt{k^2 + k^{-2}} =$$

$$-k\nu^2 - ik\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}} + ik^3\nu^3\sqrt{k^2 + k^{-2}} - k^5\nu^2(k^2 + k^{-2}) + \nu^2 k^5 - i\nu^3 k^3\sqrt{k^2 + k^{-2}} + 2\nu^2 k +$$

$$i\nu k\sqrt{k^2 + k^{-2}} = 0$$

confermando l'identità.

L'autovettore in questione sarà dunque

$$u_1 = \frac{1 - ik^2\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}}}{2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}}, \quad u_2 = \frac{k^2 - i\nu\sqrt{k^2 + k^{-2}}}{2\nu k + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}}, \quad u_3 = 1$$

a questo punto è sufficiente razionalizzare per poi trovare le componenti che ci servono per il piano.

$$u_1 = \frac{3\nu k + \nu k^5 + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}(1 - 2\nu^2 k^2)}{4\nu^2 k^2 + k^4 + 1}$$

$$u_2 = \frac{3\nu k^4 + \nu + ik\sqrt{k^2 + k^{-2}}(k^3 - 2\nu^2 k)}{k(4\nu^2 k^2 + k^4 + 1)}$$

$$u_3 = 1$$

$$Im\{u_1 u_2^*\} = \frac{-k\sqrt{k^2 + k^{-2}}((1 - 2\nu^2 k^2)(3\nu k^4 + \nu) - (k^3 - 2\nu^2 k)(3\nu k + \nu k^5))}{k(4\nu^2 k^2 + k^4 + 1)^2} =$$

$$\frac{-k\sqrt{k^2 + k^{-2}}(\nu + 4\nu^3 k^2 - 4\nu^3 k^6 - \nu k^8)}{k(4\nu^2 k^2 + k^4 + 1)^2}$$

l'equazione del piano diventa quindi

$$2x \frac{k\sqrt{k^2 + k^{-2}}(k^3 - 2\nu^2 k)}{k(4\nu^2 k^2 + k^4 + 1)} - 2y \frac{k\sqrt{k^2 + k^{-2}}(1 - 2\nu^2 k^2)}{4\nu^2 k^2 + k^4 + 1} +$$

$$2z \frac{-k\sqrt{k^2 + k^{-2}}(\nu + 4\nu^3 k^2 - 4\nu^3 k^6 - \nu k^8)}{k(4\nu^2 k^2 + k^4 + 1)^2} = 0$$

l'orbita circolare del nuovo sistema di riferimento è molto semplice $X^2(t) + Y^2(t) = X^2 + Y^2$, in maniera analoga a come si sono svolti i calcoli per trovare il piano su cui evolve la figura si possono trovare X e Y ricavandosi la nuova equazione delle orbite che

risulta ellittica in quanto cambiando sistema di riferimento una circonferenza diventa un'ellissi.

L'analisi della stabilità non lineare della soluzione non linearizzata può essere fatta con il metodo di Lyapunov.

Non riprenderemo la trattazione ma facciamo riferimento al documento di Cook e Roberts.

Il risultato è che la soluzione è non linearmente instabile, inoltre la dimensione di Lyapunov non è intera. L'orbita cade asintoticamente su un attrattore strano e il tempo di transizione verso l'attrattore diminuisce con la distanza dai punti di equilibrio.

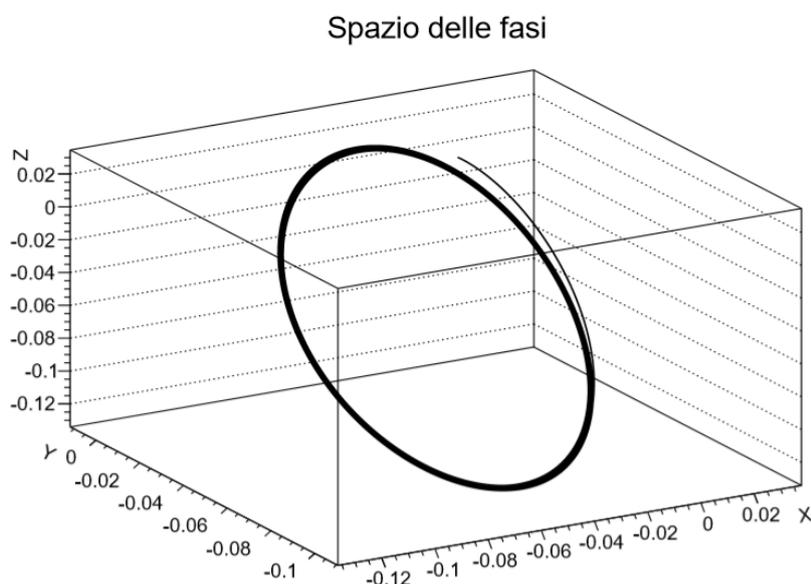


Figura 11: Spazio delle fasi con $\epsilon = 0.05$ sviluppo fino a $t = 300$

Come è visibile dalle figure 11-12-13 se la perturbazione dal punto di equilibrio (ϵ) è piccola, l'avvicinamento all'attrattore è molto più lento cosa che numericamente giustifica le precedenti affermazioni.

Il sistema può essere reso in forma hamiltoniana. Per esempio consideriamo il caso più semplice per i calcoli, in cui $\nu = 1$, $k = 1 \Rightarrow a = 0$.

Il sistema diventa:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x + yz$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -y + xz$$

$$\frac{dz}{d\tau} = 1 - xy$$

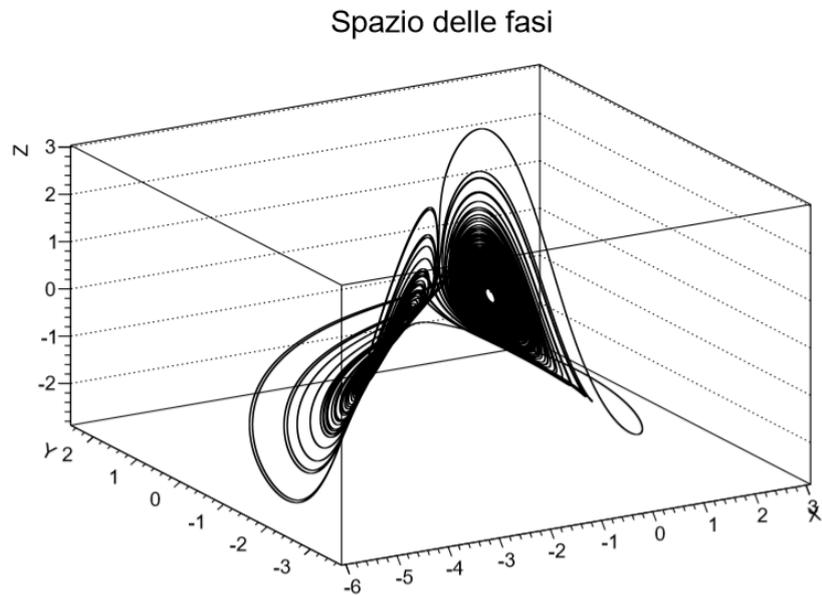


Figura 12: Spazio delle fasi con $\epsilon = 0.05$ sviluppo fino a $t = 5000$

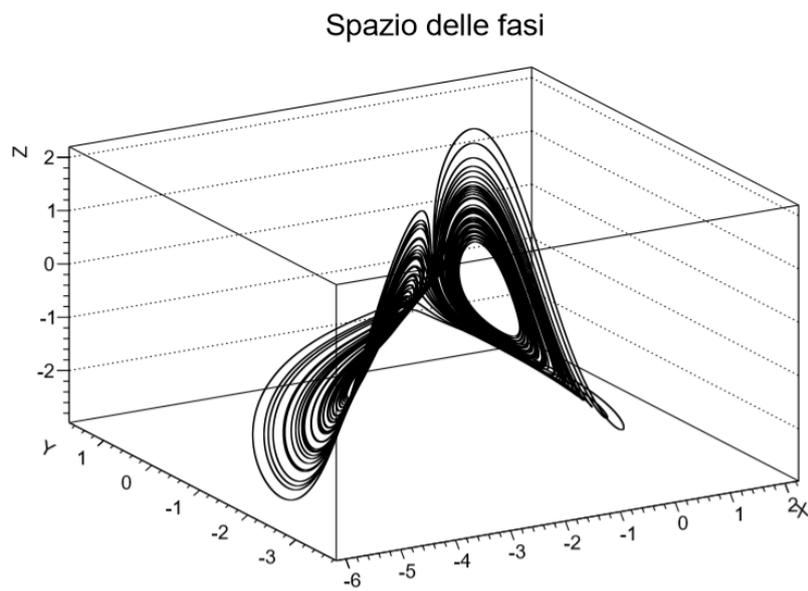


Figura 13: Spazio delle fasi con $\epsilon = 0.5$ sviluppo fino a $t = 300$

e può essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned}\frac{d(e^\tau x)}{d\tau} &= (e^\tau y)z \\ \frac{d(e^\tau y)}{d\tau} &= (e^\tau x)z \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 - e^{-2\tau}(e^\tau x)(e^\tau y)\end{aligned}$$

possiamo fare il cambio di variabile $e^\tau x = X$ e $e^\tau y = Y$ ottenendo il sistema

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= Yz \\ \frac{dY}{d\tau} &= Xz \\ \frac{dz}{d\tau} &= 1 - e^{-2\tau}XY\end{aligned}$$

e l'ulteriore sostituzione $\zeta(\tau) = \int_0^\tau z(\tau')d\tau' \Rightarrow \frac{d\zeta}{d\tau} = z$. Se il sistema è sufficientemente vicino all'equilibrio e $z > 0$, $z(\tau)$ risulta invertibile per ogni τ e possiamo cambiare la variabile da τ a ζ come variabili indipendenti.

Il sistema diventa quindi:

$$\frac{dX}{d\zeta} = Y, \quad \frac{dY}{d\zeta} = X, \quad \frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = 1 - e^{-2\tau}X(\zeta)Y(\zeta)$$

possiamo subito notare come le prime due equazioni rimandino ad un oscillatore iperbolico la cui soluzione è $X = x_0 \cosh(\zeta) + y_0 \sinh(\zeta)$, $Y = x_0 \sinh(\zeta) + y_0 \cosh(\zeta)$ dove con \sinh e \cosh abbiamo indicato seno e coseno iperbolico.

Dalla precedente definizione di ζ abbiamo $\zeta(\tau = 0) = 0 \Rightarrow X(\zeta = 0) = x(\tau = 0) = x_0$ e $Y(\zeta = 0) = y(\tau = 0) = y_0$.

Sostituendo la terza equazione diventa

$$\begin{aligned}\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= 1 - e^{-2\tau}(x_0 \cosh(\zeta) + y_0 \sinh(\zeta))(x_0 \sinh(\zeta) + y_0 \cosh(\zeta)) = \\ &= 1 - e^{-2\tau}(x_0 y_0 (\cosh^2(\zeta) + \sinh^2(\zeta)) + (x_0^2 + y_0^2) \sinh(\zeta) \cosh(\zeta)) = \\ &= 1 - e^{-2\tau} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right)\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare il potenziale integrando in ζ dalla relazione $\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} = -\frac{dV}{d\zeta}$

$$V(\zeta, \tau) = - \int 1 - e^{-2\tau} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right) d\zeta =$$

$$-\zeta + e^{-2\tau} \int \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right) d\zeta =$$

$$-\zeta + e^{-2\tau} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{4} \cosh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{4} \sinh(2\zeta) \right)$$

otteniamo infine l'hamiltoniana dipendente dal tempo $H = \frac{p^2}{2m} + V(\tau, \zeta)$ e possiamo scrivere anche un'hamiltoniana indipendente dal tempo tramite l'inserimento della variabile ϕ e del momento associato p_ϕ e tenendo in considerazione le relazioni di hamilton. In questo modo al tempo viene associata un'altra coppia nello spazio delle fasi. Chiamata $\hat{H}(\zeta, p, \phi, p_\phi)$ l'hamiltoniana indipendente dal tempo, avremo le relazioni $\dot{\phi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_\phi}$, $\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \phi}$.

Possiamo vedere che con l'inserimento di una coordinata e momento associati che racchiudano la dipendenza temporale, l'hamiltoniana diventa indipendente dal tempo

$$\frac{d\hat{H}}{d\tau} = \frac{p}{2m} \dot{p} + \frac{p_\phi}{2m} \dot{p}_\phi + \frac{\partial V(\zeta, \phi)}{\zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial V(\zeta, \phi)}{\phi} \dot{\phi} = \dot{\zeta} \dot{p} + \dot{\phi} \dot{p}_\phi - \dot{p} \dot{\zeta} - \dot{p}_\phi \dot{\phi} = 0$$

Scegliendo quindi $\phi = \tau$ otteniamo

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \phi} = -\frac{\partial H}{\partial \tau} = 2e^{-2\phi} ((x_0^2 + y_0^2) \cosh(2\zeta) + (x_0 y_0) \sinh(2\zeta)) \Rightarrow$$

$$p_\phi = -e^{-2\phi} ((x_0^2 + y_0^2) \cosh(2\zeta) + (x_0 y_0) \sinh(2\zeta)) + c$$

in aggiunta $p(\tau) = \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = z(\tau)$ quindi quando $\tau = 0$ abbiamo $\phi = 0$, $\zeta = 0$, $p = z_0$ e $p_\phi = 0$.

Con queste condizioni iniziali possiamo ricavarci anche p dalla relazione $\dot{p} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta}$ che risulta $p = 1$

Tornando alle coordinate iniziali abbiamo:

$$x(\tau) = e^{-\tau} X(\zeta(\tau)) = e^{-\tau} (x_0 \cosh(\zeta(\tau)) + y_0 \sinh(\zeta(\tau)))$$

$$y(\tau) = e^{-\tau} Y(\zeta(\tau)) = e^{-\tau} (x_0 \sinh(\zeta(\tau)) + y_0 \cosh(\zeta(\tau)))$$

$$z(\tau) = \frac{d\zeta}{d\tau} = p = \int -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \zeta} d\tau = \int 1 - e^{-2\tau} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right) d\tau =$$

$$\tau + \frac{e^{-2\tau}}{2} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right) + c$$

$$p(\tau = 0) = z_0 \Rightarrow c = z_0 - \frac{x_0 y_0}{4} \Rightarrow$$

$$z(\tau) = \tau + \frac{e^{-2\tau}}{2} \left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} \sinh(2\zeta) + \frac{x_0 y_0}{2} \cosh(2\zeta) \right) + z_0 - \frac{x_0 y_0}{4}$$

Per integrare il sistema ci rifacciamo all'integratore di Lie e alla separazione delle equazioni, trattate in Appendice B. Questa tecnica è più precisa della classica integrazione di Runge Kutta in quanto l'andamento caotico che porta all'attrattore ed implica traiettorie molto curve in cui la geometria differenziale garantisce una maggiore precisione ai vincoli geometrici e quindi l'evoluzione vicino al punto di equilibrio risulta più preciso per Lie a parità di ordine che per Runge Kutta rendendolo un algoritmo molto più efficiente.

Per utilizzare la mappa di second'ordine $M_2(\vec{x}, \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} e^{\Delta t D_{\phi_2}} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} \vec{x}$, possiamo dividere la Φ , ovvero la matrice del campo vettoriale del nostro sistema, in due sistemi di equazioni per facilitarne l'integrazione.

La divisione delle equazioni è totalmente arbitraria e possiamo scegliere le divisioni che semplificano di più l'integrazione della soluzione.

Un esempio è

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\nu x + yz \\ -\nu y + (z - a)x \\ 1 - xy \end{bmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2 = \begin{bmatrix} yz \\ -y \\ -xy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\nu x \\ (1 - \nu)y + (z - a)x \\ 1 \end{bmatrix}$$

l'evoluzione temporale della mappa esponenziale può essere scritta tramite l'integrazione analitica del campo.

La soluzione di Φ_1 , che ha palesemente la forma di una rotazione, è:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = Ro(y_0(1 - e^{-t})) \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad y = y_0 e^{-t}$$

più complessa è l'integrazione di Φ_2 che ci porta a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 e^{-\nu t} \\ y_0 e^{(1-\nu)t} + \frac{x_0(z_0-a)(1-e^{-\nu t})}{\nu} + \frac{x_0}{\nu^2} - \frac{e^{-\nu t}}{\nu} x_0 \left(t + \frac{1}{\nu}\right) \\ z_0 + t \end{bmatrix}$$

dove le soluzioni della prima e della terza variabile sono banali, la seconda ha una parte banale e un'altra che richiede una semplice integrazione per parti.

Il sistema si integra applicando n volte

$$M_2(\vec{x}, \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} e^{\Delta t D_{\phi_2}} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} \vec{x}$$

da $t = 0$ a $t = n\Delta t$.

Questo è un esempio di sistema ma la scelta della divisione è totalmente arbitraria e richiede solo la capacità analitica di svolgere i calcoli.

Nel caso in cui si fallisca nell'ottenere la separazione ottimale, oppure nel ricavare la soluzione analitica, vediamo subito che sarebbe possibile dividere a sua volta Φ_2 in altri due campi vettoriali: Φ_3 e Φ_4 . Componendo tra di loro le soluzioni facendo dei passaggi in più nell'integratore, ovvero ricavare la mappa $e^{D\Phi_2}$ da $e^{D\Phi_3}$ ed $e^{D\Phi_4}$ in modo analogo a quello con cui ricaviamo $e^{D\Phi}$ da $e^{D\Phi_1}$ ed $e^{D\Phi_2}$.

Si può dividere quanto si vuole danneggiando però l'efficienza dell'algoritmo ed il tempo di esecuzione in quanto ogni ulteriore divisione aggiunge 2^n operazioni dove con n indichiamo l'ordine della separazione.

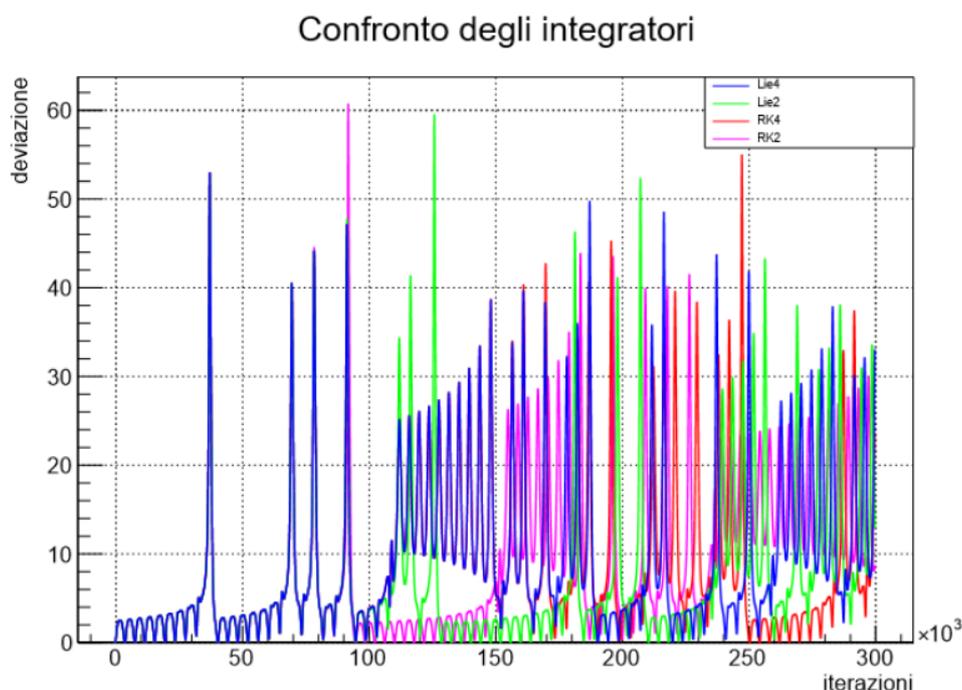


Figura 14: Confronto della distanza dal punto di equilibrio con diversi integratori. Separazione iniziale $\epsilon = 0.5$, sistema considerato con $\nu = 1$, $a = 2$. Si nota come il primo a deviare sia Runge-Kutta 2 seguito da Lie 2, questo ci induce a pensare che l'integratore di Lie sia più preciso di Runge-Kutta.

Inizialmente abbiamo discusso la dinamica caotica del modello di Rikitake. Attraverso l'integrazione numerica delle equazioni, vediamo come il sistema ($\nu = 1$, $a = 2$) evolva, intorno al punto di equilibrio, verso un attrattore strano. Un attrattore è una sottovarietà dello spazio delle fasi verso cui un sistema dinamico evolve asintoticamente. Gli attrattori possono essere semplici oggetti geometrici come punti, orbite, figure geometriche, ma possono anche essere oggetti più complessi come un'unione di questi elementi e in questo caso otteniamo un attrattore strano. Questi oggetti riguardano lo studio della dinamica di un sistema, rappresentano punti

stabili, orbite limite o intervalli di evoluzione e sono spesso presenti studiando la dinamica nel limite $t \rightarrow \infty$.

L'andamento caotico delle equazioni del nostro sistema trova conferma analitica nel calcolo della dimensione di Lyapunov, che risulta non intera, cosa che ci permette di classificarlo come un attrattore strano. In altre parole il sistema rimane confinato in una regione dello spazio delle fasi da cui non riesce a uscire ma inizia a muoversi in maniera caotica verso una sottovarietà limitata.

La peculiarità dell'andamento caotico consiste nell'assenza di orbite chiuse, quindi il sistema è confinato in un intervallo di valori con una periodicità infinita.

La dinamica del sistema e questa caratteristica è già stata mostrata nelle figure 11-12-13 e trova ulteriore riscontro analizzando le relative proiezioni sui piani.

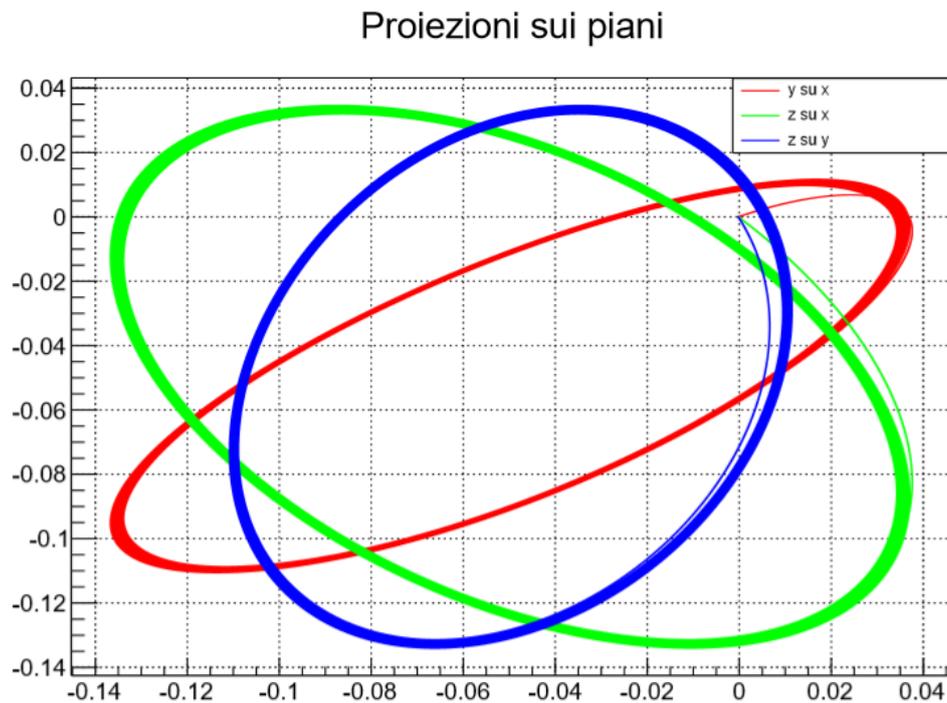


Figura 15: Proiezioni nei piani dell'oggetto in Figura 11.

Proiezioni sui piani

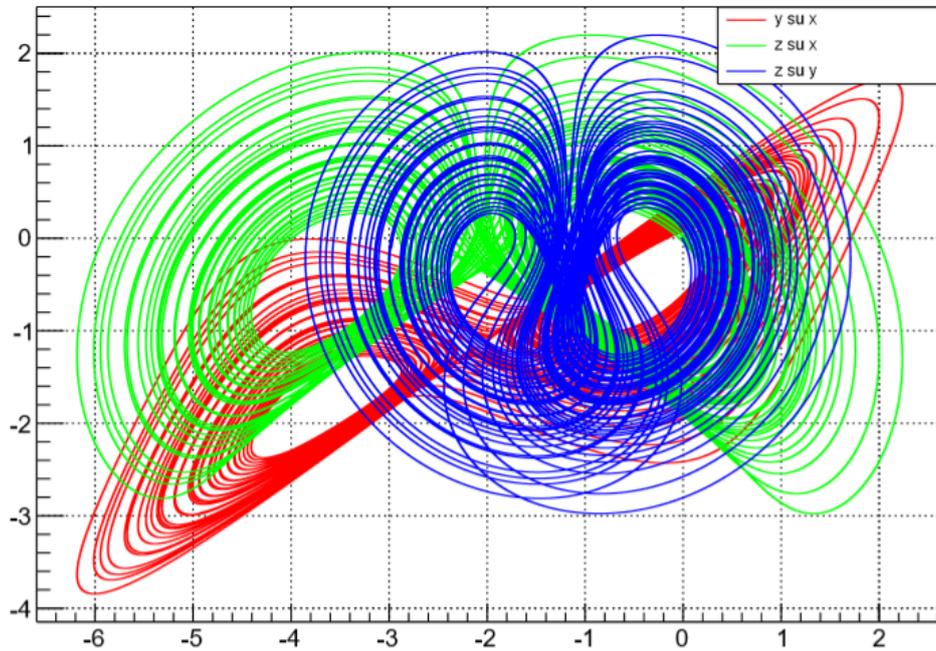


Figura 16: Proiezioni nei piani dell'oggetto in Figura 13.

Spazio delle fasi

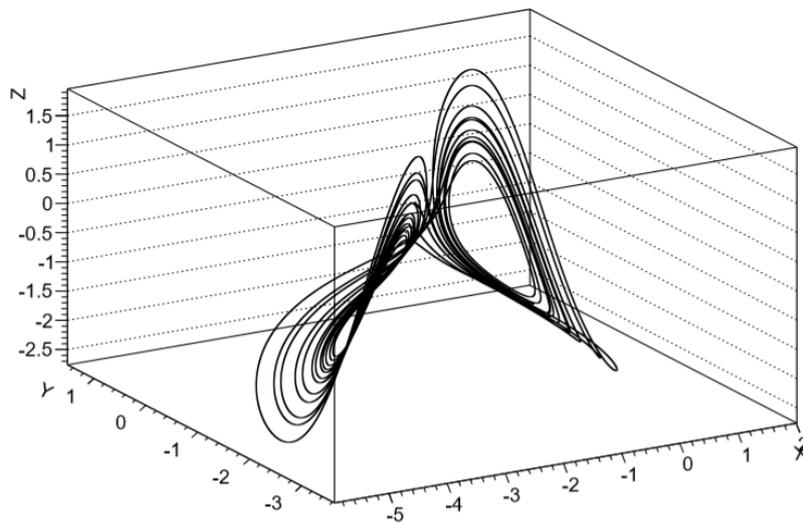


Figura 17: Attrattore riferito al sistema in Figura 13, ripulito dalla transizione iniziale.

Proiezioni sui piani

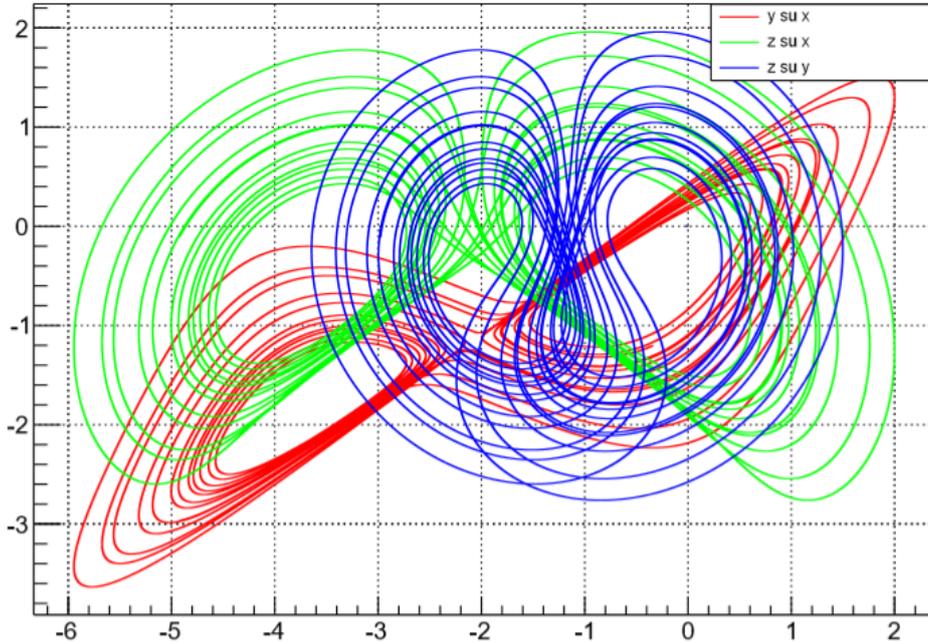


Figura 18: Proiezioni nei piani dell'oggetto in Figura 13.

Gli attrattori strani sono stati soggetto di molti studi dal 1960, soprattutto nella meteorologia, dove il primo esempio fu l'attrattore di Lorenz. La dinamica esatta del sistema non è prevedibile con questi andamenti caotici e passare da due punti vicini nello spazio delle fasi può richiedere un tempo infinito di percorrenza. Si riesce tuttavia a determinare l'intervallo dei valori delle variabili.

Vediamo come questo si inserisca perfettamente con i dati sperimentali del geomagnetismo, in cui l'intensità del campo magnetico è limitato nelle inversioni e queste avvengono senza periodicità, richiamando appunto la dinamica di un attrattore strano.

Nello specifico del nostro sistema vediamo che dall'evoluzione temporale non sono visibili periodicità nell'andamento del sistema nè nel segno. Non solo il sistema quindi non è periodico negli andamenti ma sono anche assenti periodicità nelle inversioni.

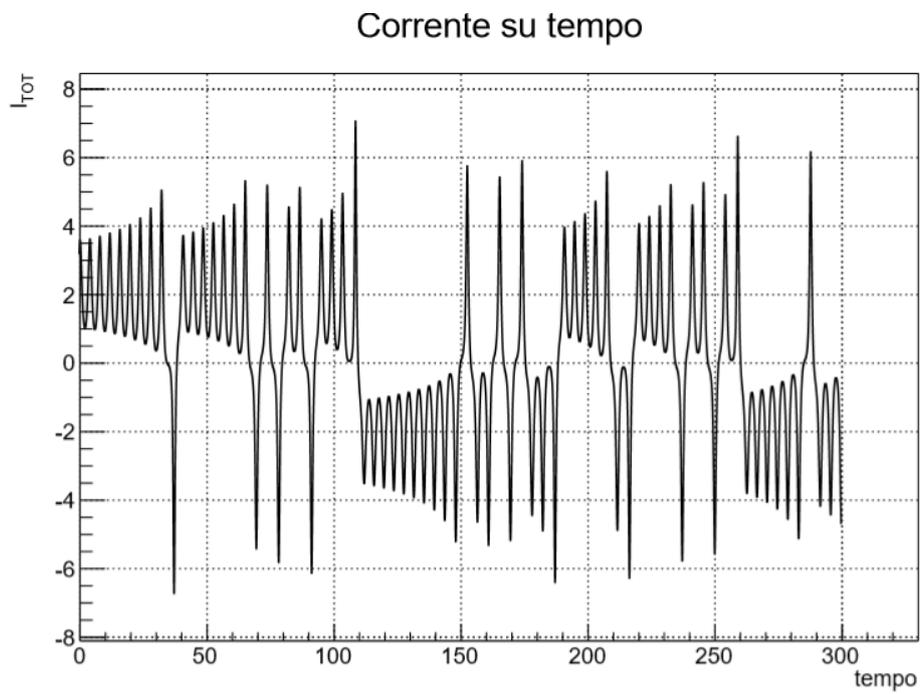


Figura 19: Dinamica del sistema riferito all'oggetto in Figura 13.

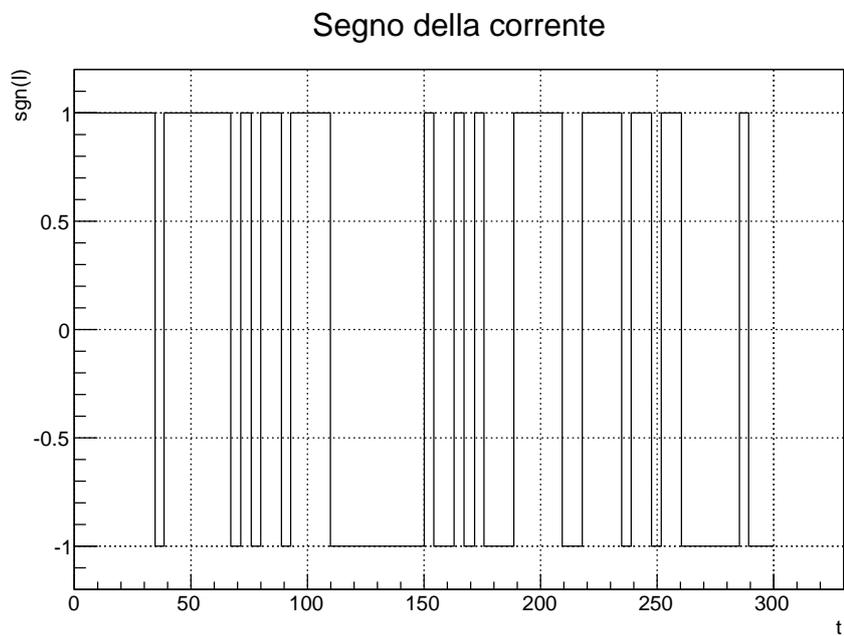


Figura 20: Grafico relativo alle inversioni del sistema.

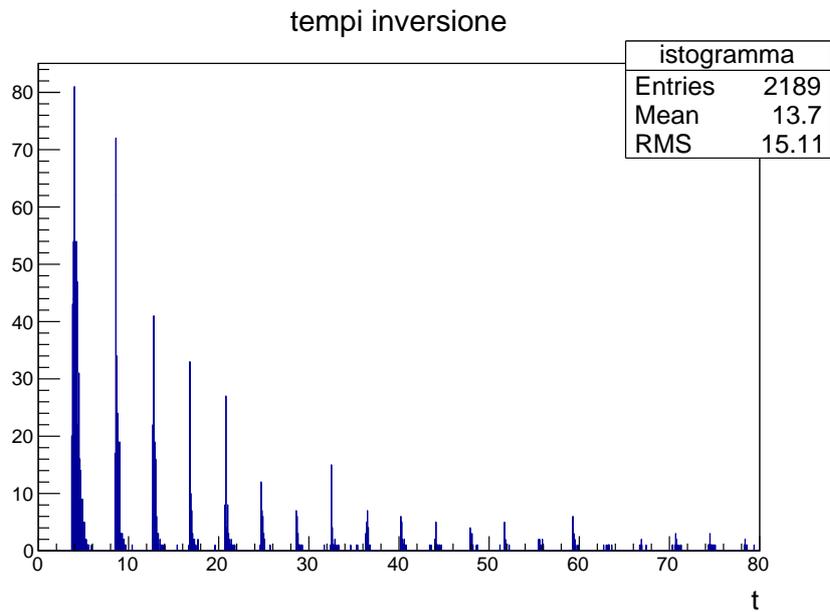


Figura 21: Istogramma degli intervalli temporali delle inversioni relative al sistema in Figura 13 lasciato evolvere fino a ottenere circa 2000 inversioni. La larghezza delle celle dell'istogramma è 0.001.

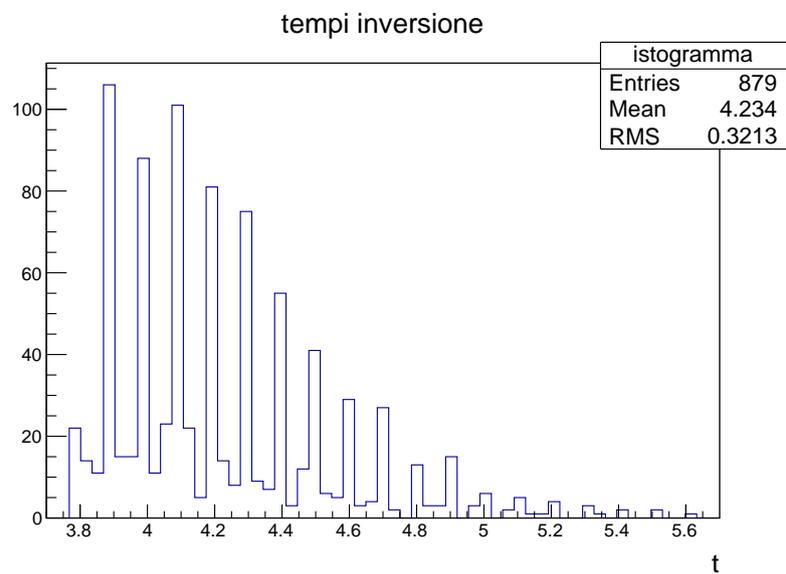


Figura 22: Ingrandimento della prima colonna del precedente istogramma. Risalta la natura caotica irregolare del cluster di dati. La larghezza delle celle dell'istogramma è $\sqrt{\text{Entries}}$.

Un'altra caratteristica dei sistemi caotici è la forte dipendenza dalle condizioni iniziali. Questo non si traduce solo nella distanza dal punto di equilibrio ma anche nei parametri utilizzati nel sistema.

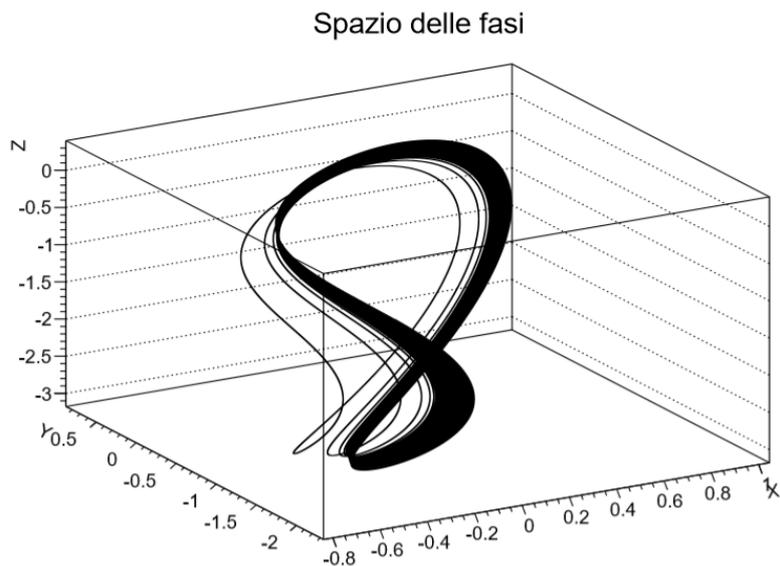


Figura 23: Evoluzione del sistema con $\nu = 0.1$, $a = 0.1$ ed $\epsilon = 0.5$ fino a $t=300$.

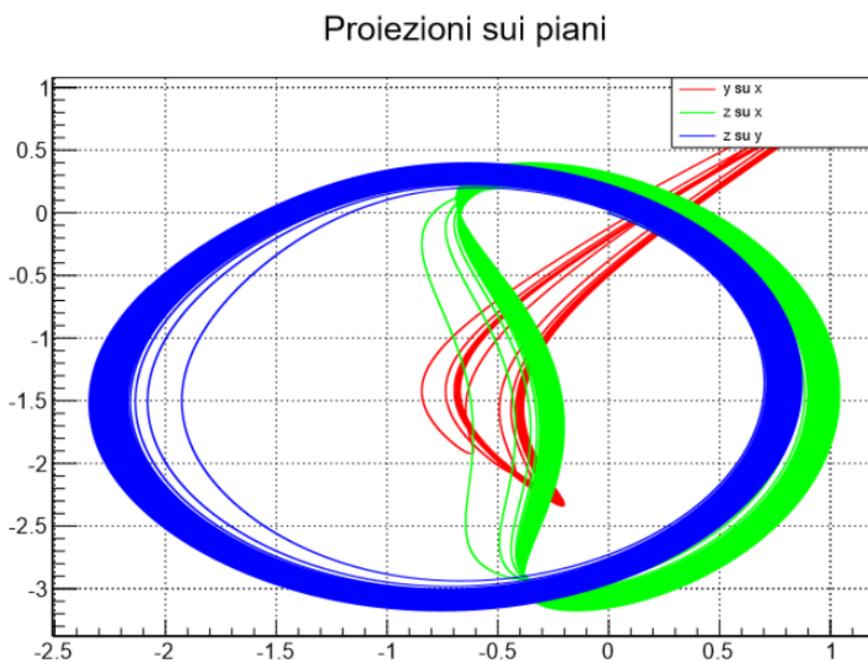


Figura 24: Proiezioni del sistema in Figura 23.

Spazio delle fasi

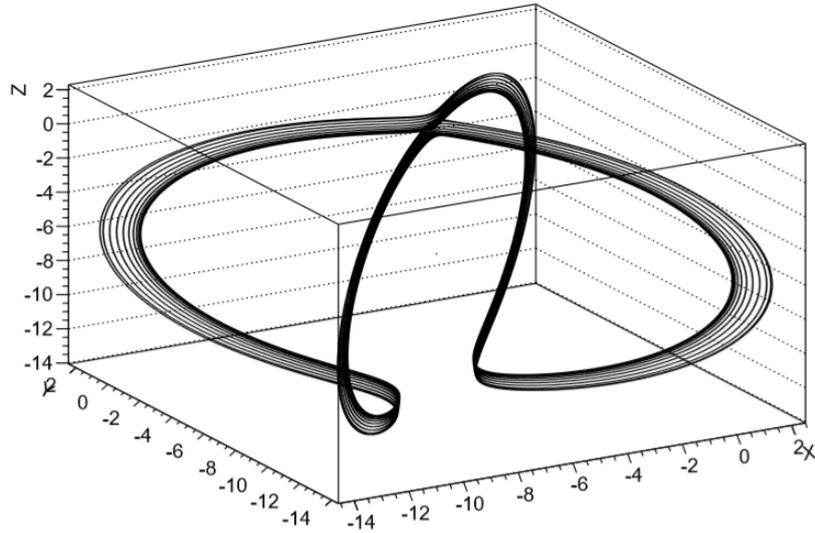


Figura 25: Attrattore del sistema in Figura 23. Ottenuto dall'evoluzione del sistema con $\nu = 0.1$, $a = 0.1$ ed $\epsilon = 5$ fino a $t=3000$.

Proiezioni sui piani

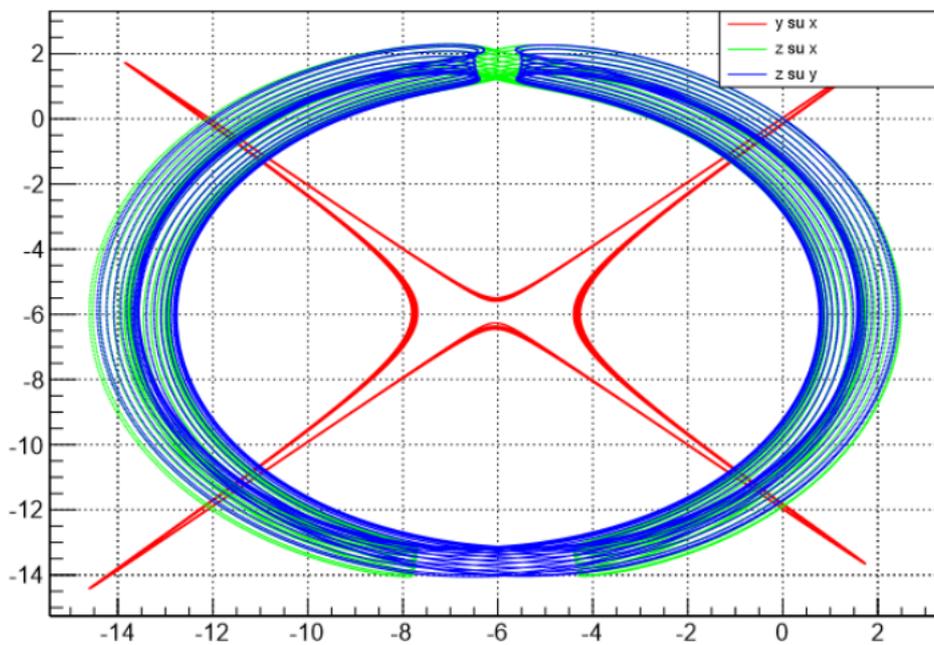


Figura 26: Proiezioni dell'attrattore in Figura 25.

Questi grafici verificano numericamente la forte dipendenza del sistema e della forma dell'attrattore dalle condizioni iniziali.

2.3 Doppio disco di Rikitake (Plunian)

Un modello più avanzato e completo della doppia dinamo di Rikitake, che prende ulteriori variabili in considerazione come l'attrito meccanico e le correnti azimuthali, fu proposto da F. Plunian(1997).

Entrambe le cose sono state ignorate nel semplice modello di Rikitake, tuttavia ciò rende il sistema fisicamente non realistico in quanto presuppone che la corrente scorra solo in direzione radiale e che non ci sia attrito meccanico.

Plunian si è occupato di studiare questo modello comprensivo di questi ulteriori fenomeni per verificare se anche in un sistema fisicamente più realistico, e replicabile in laboratorio, sia possibile ottenere gli andamenti caotici e gli effetti della dinamo di Rikitake che si trovano in accordo con i dati.

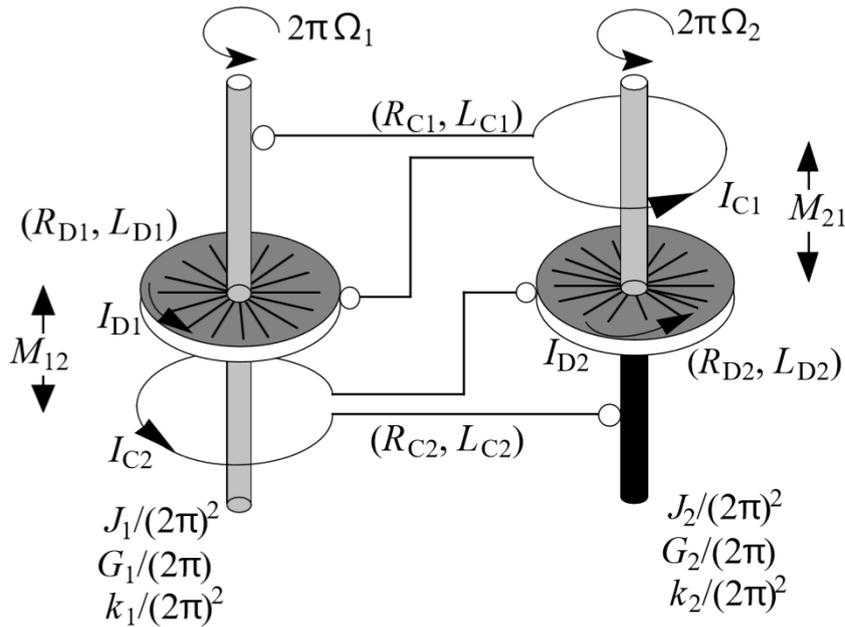


Figura 27: Doppia dinamo di Rikitake

Il sistema in questione è composto da due dinamo a disco accoppiate. Ogni dinamo è composta da un asse di rotazione, un disco e un filo, questi tre elementi costituiscono un circuito chiuso. Il filo di una dinamo gira attorno all'altra in modo da accoppiare i campi magnetici. Il sistema dipende da 16 parametri. Per ogni dinamo abbiamo momento torcente G_i , inerzia J_i , attrito k_i . A questi si vanno ad aggiungere le resistenze

e induttanze dei dischi e delle spire. Il sistema presenta in totale 10 incognite, ovvero 4 correnti, 4 flussi e le due velocità angolari. Prendiamo il campo magnetico \vec{B}_i , questi (se considerato parallelo all'asse) genererà un campo elettrico lungo il disco pari a $\vec{E}_i = 2\pi\Omega_i\vec{B}_i \cdot \vec{r}$ quindi avremo un voltaggio generato dalla spira $\Delta V = \int_{D_i} E dl = \Omega_i\Phi_{D_i} = 2\pi\Omega_i \int_0^R B_i r dr$ che unita all'equazione alla legge di Faraday sulla spira e $\Delta V = R_{C_i}I_{C_i} + \Phi_{C_i}$ ci da una prima coppia di equazioni:

$$-\Phi_{C_i} = R_{C_i}I_{C_i} - \Phi_{D_i}\Omega_i$$

Altre quattro dai flussi:

$$\Phi_{C_i} = L_{C_i}I_{C_i} - M_{ij}I_{D_j}$$

$$\Phi_{D_i} = L_{D_i}I_{D_i} - M_{ji}I_{C_j}$$

due dalla legge di Faraday sul disco

$$-\dot{\Phi}_{D_i} = R_{D_i}I_{D_i}$$

e le ultime due dalla somma dei momenti

$$J_i\dot{\Omega}_i = G_i - k_i\Omega_i - \Phi_{D_i}I_{D_i}$$

ricavando le correnti in funzione dei flussi è possibile ridurre il sistema da dieci equazioni in dieci variabili a sei.

Con le seguenti sostituzioni

$$\tau = \frac{R_C}{L_C}t, \quad X_i = \frac{\Phi_{D_i}}{\sqrt{GM}}, \quad Y_i = \frac{\sqrt{M}\Phi_{C_i}}{L_C\sqrt{G}}, \quad Z_i = \frac{M}{R_C}\Omega_i$$

possiamo esprimere il sistema nella seguente forma facilmente trattabile:

$$\dot{X}_i = r(Y_j - X_i)$$

$$\dot{Y}_i = X_i Z_i + m X_j - (1 + m) Y_i$$

$$\dot{Z}_i = g[1 - (1 + m) X_i Y_i + m X_i X_j] - f Z_i$$

dove

$$m = \frac{M^2}{L_C L_D - M^2}, \quad g = \frac{G M R_C}{J L_C^2}, \quad r = \frac{R_D}{L_C} \frac{L_C^2}{L_C L_D - M^2}, \quad f = \frac{k L_C}{J R_C}$$

da notare che $m > 0$ in quanto $M^2 < L_C, L_D$. Le soluzioni stazionarie sono date quindi da:

$$X_1 = Y_2, \quad X_2 = Y_1$$

$$\begin{aligned} X_1 Z_1 &= Y_1, & X_2 Z_2 &= Y_2 \\ g(1 - X_1 Y_1) &= f Z_1 & g(1 - X_2 Y_2) &= f Z_2 \end{aligned}$$

se supponiamo $f \neq 0$, ovvero la presenza di attrito in accordo al modello, otteniamo:

$$Z_1 = Z_2 \quad X_1(Z_1^2 - 1) = X_2(Z_1^2 - 1) = 0$$

quindi le soluzioni stazionarie sono

$$X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = 0, \quad Z_1 = Z_2 = \frac{g}{f}$$

e

$$X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = \pm \sqrt{1 - \frac{f}{g}}, \quad Z_1 = Z_2 = 1$$

dove la soluzione $Z_1 = Z_2 = -1$ non è accettabile in quanto porta a $g(1 + X_i^2) + f = 0$ che non ha soluzioni se $f \neq 0, g \neq 0$.

Per studiare la stabilità lineare ci rifacciamo al primo criterio di Lyapunov. Trovato il punto di equilibrio, la linearizzazione si ottiene considerando la teoria perturbata trascurando gli ordini superiori al primo.

Applicando questo procedimento, Plunian ricava che il primo stato è stazionario solo se $\frac{g}{f} < 1$ delle equazioni per i parametri che portano all'instabilità del sistema.

Per la seconda soluzione

$$r > \frac{(m+1)(m+f+1)}{1-m}, \quad \frac{g}{f} > \frac{2r+r(r+f+m+1)}{2r-(m+1)(r+f+m+1)}$$

abbiamo quindi una forte dipendenza dai parametri ed entrambe le condizioni devono essere verificate per avere un sistema dinamico linearmente instabile.

Quindi anche in questo modello possono essere presenti, a seconda dei valori dei parametri, le caratteristiche di geodinamo.

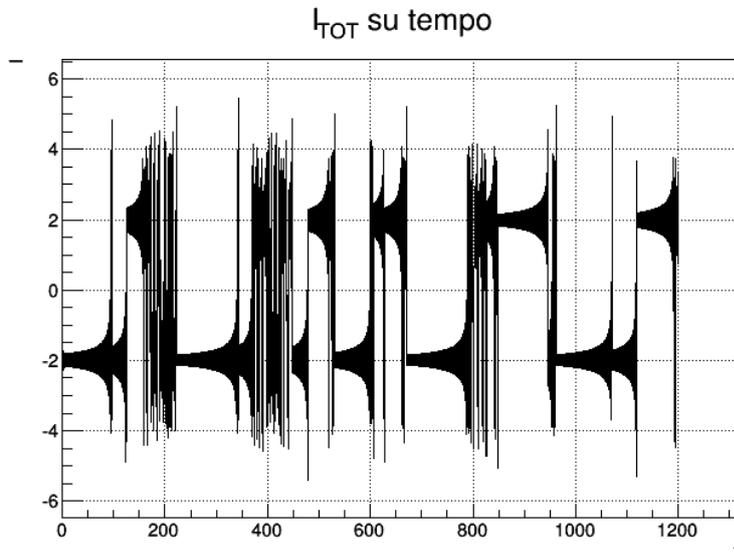


Figura 28: Andamento della corrente totale nel sistema. I parametri della simulazione sono $(m; g; r; f) = (0.5; 50; 8; 0.5)$, $(X_1; X_2; Y_1; Y_2; Z_1; Z_2)_{t=0} = (-1.4; -1; -1; -1.4; 2.2; -1.5)$.

In Figura 28 è riportato l'andamento della corrente nel regime instabile. Vediamo che in accordo con il modello di Rikitake abbiamo un andamento caotico, in più possiamo vedere come le inversioni accadano solo dopo un picco della fluttuazione come ipotizzato nei modelli fluidi da Hollerbach e confermato da Glatzmaiers.

Questo elemento non solo lo rende quindi una stima migliore del modello di Rikitake dal punto di vista della riproducibilità sperimentale essendo fisicamente più realistico. Ma presenta anche dei dettagli tipici dei modelli più avanzati di geodinamo.

Conclusione

Con questa trattazione abbiamo sviluppato un discorso sull'evoluzione dei modelli di geodinamo.

Abbiamo prima accennato ai modelli fluidi e alle caratteristiche fisiche essenziali della dinamica del campo magnetico terrestre, trovando delle spiegazioni plausibili sia matematiche che fisiche. Affrontando l'evoluzione dei modelli fluidi, anche quelli più recenti, abbiamo visto come certamente i modelli più complessi riescano a catturare tutti i punti essenziali del problema senza tuttavia poter essere esatti e predittivi per la mancanza di dati precisi, cosa che spesso causa la stima dei dati necessari attraverso i modelli stessi. Tuttavia questi modelli risultano oltremodo complessi da simulare cosa che li rende poco pratici per uno studio approfondito a causa del grande numero di variabili e parametri.

La dinamica del sistema è riscontrabile anche nei modelli a disco che sono decisamente più semplici ed è quindi possibile effettuare uno studio accurato sulle dinamiche.

La dinamo a disco singolo si è confermata un modello incompleto e troppo semplificato per replicare l'andamento dei dati ottenuti tramite il paleomagnetismo. Il sistema è oscillatorio ed ha quindi periodicità e questa aumenta con il livello energetico del sistema. Il risultato importante è la possibilità, almeno teorica, di un campo che si autoalimenti in maniera semplice anche se fisicamente non accurata per la mancanza di attrito dinamico e altre approssimazioni.

Il modello di Rikitake riesce a catturare più nel dettaglio i punti espressi tra le caratteristiche di un modello completo di geodinamo.

Dal punto di vista dinamico i punti fissi risultano linearmente stabili in orbite ellittiche e non linearmente instabili.

La dinamica del sistema è di caos deterministico, cosa perfettamente in accordo con l'andamento dei dati empirici a disposizione. Il sistema vicino all'equilibrio entra nella dinamica di un attrattore strano, cosa che conferma i punti fondamentali che deve soddisfare un modello di geodinamo quali la limitatezza, la periodicità infinita e l'autosostenersi del campo. Tuttavia questo modello non risulta accurato per replicare sperimentalmente i risultati in un laboratorio in quanto sono stati trascurati anche qui attrito dinamico ed altri contributi del moto.

Un modello più accurato di quello di Rikitake è quindi quello di Plunian.

Questo è un modello un po' più realistico ma presenta anch'esso delle approssimazioni sperimentali. Anche da questo modello otteniamo la possibilità di un andamento caotico come per Rikitake e questo sistema risulta molto più sensibile ai valori dei parametri in quanto non cambiano solo la dinamica ma anche il tipo di dinamica passando da stabilità a instabilità e viceversa. La stessa possibilità di un moto caotico giustifica quindi il modello anche contro la dissipazione dell'attrito meccanico, in più troviamo la similitudine con il modello di Glatzmaiers di un'oscillazione più ampia prima di un'inversione.

Appendice A

Integratore di Lie

Basandoci sulla geometria differenziale possiamo definire un sistema normale gaussiano in un intorno di un punto generico, fissando opportunamente le coordinate della carta che fa riferimento alla varietà in modo da annullare la derivata prima della metrica in quel punto.

Il privilegio di un sistema normale gaussiano è l'equivalenza tra derivata di Lie, trasporto parallelo e derivata parziale rispetto alla coordinata della carta. Così facendo è possibile descrivere l'evoluzione di un sistema che si muove su una forma geometrica esprimibile dalla varietà con una mappa esponenziale.

Utilizzando il tempo come parametro affine della curva è possibile descrivere lo spostamento del punto P lungo una traiettoria fino a Q con una mappa esponenziale:

$$\vec{x}(Q) = e^{dtD_\Phi} \vec{x}(P)$$

dove Φ è il campo vettoriale del nostro sistema e nel nostro caso corrisponde al vettore

$$\begin{bmatrix} -\nu x + yz \\ -\nu y + (z - a)x \\ 1 - xy \end{bmatrix}$$

Uno spostamento di dt lungo la direzione dello sviluppo temporale è mappabile da questa operazione, iterando il procedimento possiamo esprimere l'intera evoluzione del sistema

$$\vec{x}(t) = e^{tD_A} \vec{x}_0$$

ciò è possibile nel punto di equilibrio del sistema in quanto il campo è nullo per definizione. In un suo intorno sufficientemente piccolo possiamo quindi mantenere la stessa mappa esponenziale e per la sua struttura tale mappa coinciderà con la soluzione analitica del sistema.

É inoltre possibile separare l'equazione del campo vettoriale del sistema in diversi contributi considerando quindi diversi campi:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

lo scopo del metodo di separazione è scomporre un problema difficile in diversi problemi più semplici, risolverli separatamente per poi unirli e trovare la soluzione al sistema. Nel nostro esempio avremo le due evoluzioni $e^{D_{\Phi_1}}$ e $e^{D_{\Phi_2}}$ e nell'applicarle bisognerà tener conto della regola di Hausdorff. La mappa esponenziale risultante sarà quindi

$$e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} e^{\Delta t D_{\phi_2}} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}}$$

e per Campbell-Baker-Haudorff abbiamo

$$\begin{aligned} e^Z = e^A e^B &\Leftrightarrow Z = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots \Rightarrow \\ e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} e^{\Delta t D_{\phi_2}} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} &= e^{\Delta t (\frac{D_{\Phi_1}}{2} + D_{\Phi_2}) + \frac{\Delta t^2}{2} [\frac{D_{\Phi_1}}{2}, D_{\Phi_2}]} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} = \\ e^{\Delta t D_{\Phi} + \frac{\Delta t^3}{4} [[\frac{D_{\Phi_1}}{2}, D_{\Phi_2}], \frac{D_{\Phi_1}}{2}]} &= e^{\Delta t D_{\Phi}} + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

quindi applicando questa trasformazione possiamo aspettarci un errore di Δt^3 .

Forti di queste considerazioni possiamo definire la mappa di second'ordine come

$$M_2(\vec{x}, \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} e^{\Delta t D_{\phi_2}} e^{\frac{\Delta t}{2} D_{\phi_1}} \vec{x}$$

e componendo questa mappa n volte troviamo l'evoluzione temporale da $t = 0$ a $t = n\Delta t$.

Componendo mappe di ordine M_2 possiamo di aumentare la precisione. Un integratore di Lie di quart'ordine sarà quindi della forma

$$M_4(\vec{x}, \Delta t) = M_2(\vec{x}, \alpha \Delta t) \circ M_2(\vec{x}, -\beta \Delta t) \circ M_2(\vec{x}, \alpha \Delta t)$$

dove $2\alpha - \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2-2^{\frac{1}{3}}}$ e $\beta = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2-2^{\frac{1}{3}}}$.

Appendice B

Attrattore di Lorenz

Il modello di Lorenz fu il primo esempio di attrattore strano e fu studiato nel 1963 dal meteorologo E. N. Lorenz.

Da un modello semplificato delle equazioni meteorologiche Lorentz ottenne un sistema di tre equazioni differenziali non lineari:

$$\dot{x} = a(y - x)$$

$$\dot{y} = x(b - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - cz$$

e dal loro studio trova che il sistema non si evolve verso un cerchio limite nè raggiunge un punto stazionario costituendo quindi un esempio di caos deterministico.

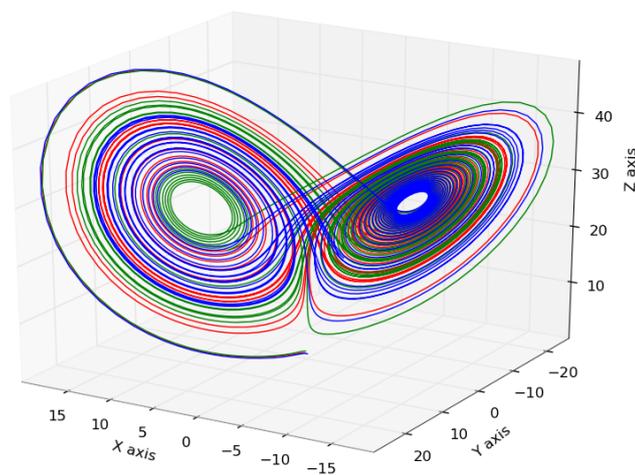


Figura 29: Esempio di attrattore strano di Lorenz.

Questi sono modelli la cui evoluzione deterministica, e dunque perfettamente prevedibile date le condizioni iniziali, è però molto sensibile a variazioni, anche minime, delle stesse, notiamo inoltre come siano presenti tutte le implicazioni degli andamenti caotici discussi con la dinamo di Rikitake.

Bibliografia

- [1] Bullard, E.C. and Gellman, H., 1954. *Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 247: 213-278.*
- [2] Cavin, J., 2013, *Examining Parameter Dependent Chaos Properties of Rikitake's Simplified Geodynamo, UTRIP university of Tokyo.*
- [3] Cook, A. E. and Roberts, P.H., (1970). *The Rikitake two-disc dynamo system. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 68, pp 547-569*
- [4] Elsasser, W.M., 1946. *Induction effects in terrestrial magnetism. Phys. Rev., 69:106-116.*
- [5] Elsasser, W.M., 1955. *Hydromagnetism I. A. Review., 590-609.*
- [6] Glatzmaiers, G.A. and Clune, T., 2000. *Computational Aspects of geodynamo simulations, Earth system science.*
- [7] Hollerbach, R., 1996. *On the theory of geodynamo. Physics of the earth and planetary interiors, 98:163-185.*
- [8] Plunian, F. and Marty, Ph. and Alemany A., *Chaotic behaviour of the Rikitake dynamo with symmetric mechanical friction and azimuthal currents, Proc. R. Soc. Lond. A (1998) 454, 1835-1842.*
- [9] Rikitake, T. and Honkum, Y., *Solid Earth Geomagnetism 05, Ed. Terra Scientific.*