

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**PROBLEMA DI CAUCHY-DIRICHLET  
PER L'EQUAZIONE DEL CALORE**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
ANNAMARIA  
MONTANARI

Presentata da:  
FEDERICO  
MATTIOLI

II Sessione  
Anno Accademico 2015/2016



# Introduzione

Il problema di cosa fosse il calore e come questo si propagasse fu, dalla fine del XVIII sec. alla seconda metà dell'Ottocento, oggetto di ricerca per gli studiosi del tempo. Il primo a formulare una teoria che spiegasse come questo si evolvesse al passare del tempo fu il matematico e fisico francese Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) che, nel 1807, iniziò la scrittura dell'opera che lo rese celebre: "Theorie analytique de la chaleur". Studiando la propagazione del calore, Fourier ipotizzò che una funzione, anche irregolare, possa essere rappresentata come somma di una serie trigonometrica. Lo scetticismo dei matematici del tempo, Lagrange ed Abel in primis, e lo scarso rigore della trattazione non permisero un'immediata pubblicazione dell'opera: fu solo nel 1822 che, dopo varie revisioni ed ampliamenti, l'opera vide finalmente la luce, aprendo nuovi orizzonti all'Analisi Matematica ed alla Fisica Matematica.

In questo elaborato intendiamo ripercorrere i risultati che hanno portato, partendo dalle serie trigonometriche, alla risoluzione dell'equazione del calore, prendendo come oggetto di studio una sbarra omogenea.

Il primo capitolo è incentrato sullo studio delle serie di Fourier reali. A partire dalle serie trigonometriche, vengono introdotti i polinomi di Fourier e definite le serie di Fourier. Si dimostrano i principali risultati di convergenza puntuale per le serie di Fourier quali il teorema di localizzazione di Riemann, il teorema di Dini, il criterio di Hölder ed il teorema di Jordan. Si mostra, poi, come una qualsiasi serie di Fourier possa esser integrata termine a termine, grazie al teorema di Lebesgue ed al concetto di assoluta continuità. Si studiano, infine, dei criteri di convergenza uniforme ed in  $L^2$ , come il teorema di Fisher-Riesz.

Nel secondo capitolo, dopo aver introdotto la convergenza secondo Cesàro, si mostra come, pur indebolendo le ipotesi di continuità sulla funzione, sia ancora possibile approssimare quest'ultima con delle serie trigonometriche, chiamate serie di Fejér. Segue una piccola sezione in cui, grazie ai polinomi di Fejér, si mostra che l'insieme dei polinomi è denso in quello delle funzioni continue su un generico intervallo chiuso.

L'ultimo capitolo, infine, è finalizzato alla risoluzione del cosiddetto problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Si introduce l'operatore differenziale del calore e si fissano opportune ipotesi sulla sbarra in esame. Studiamo, in prima battuta, il caso in cui il dato iniziale sia di classe  $C^1$ , vedendo come la soluzione cercata sia proprio una serie di Fourier. Si cerca, poi, di risolvere lo stesso problema indebolendo l'ipotesi di regolarità del dato iniziale; vengono proposte due differenti risoluzioni utilizzando dapprima le serie di Fejér e, successivamente, il nucleo di Green per l'equazione del calore.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Serie di Fourier</b>	<b>1</b>
1.1 Verso le serie di Fourier . . . . .	1
1.1.1 Polinomi Trigonometrici . . . . .	1
1.1.2 Polinomi di Fourier e disuguaglianza di Bessel . . . . .	3
1.1.3 Serie di Fourier . . . . .	5
1.1.4 Nucleo di Dirichlet . . . . .	6
1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier . . . . .	8
1.2.1 Il teorema di localizzazione di Riemann ed il teorema di Dini . . . . .	8
1.2.2 Il criterio di Hölder ed il teorema di Jordan . . . . .	9
1.3 Integrazione termine a termine . . . . .	11
1.3.1 Delle condizioni necessarie . . . . .	12
1.4 Convergenza uniforme . . . . .	14
1.5 Convergenza in $L^2$ . . . . .	16
1.5.1 Teorema di Fisher-Riesz e identità di Parseval . . . . .	16
<b>2 Serie di Fejér</b>	<b>17</b>
2.1 Convergenza secondo Cesàro . . . . .	17
2.2 Serie di Fejér . . . . .	19
2.2.1 Il teorema di Fejér . . . . .	19
2.2.2 Il teorema di Weirstrass . . . . .	22
<b>3 Problema del calore su una sbarra omogenea</b>	<b>23</b>
3.1 Dato iniziale $C^1$ . . . . .	27
3.2 Dato iniziale continuo . . . . .	31
3.2.1 Risoluzione con le serie di Fejér . . . . .	31
3.2.2 Risoluzione con il nucleo di Green . . . . .	32
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Capitolo 1

## Serie di Fourier

### 1.1 Verso le serie di Fourier

#### 1.1.1 Polinomi Trigonometrici

**Definizione 1.1.1** (Polinomio trigonometrico).

Chiamiamo polinomio trigonometrico di grado  $\leq n$  una funzione  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che può essere scritta nella forma:

$$p(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad (1.1)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$  e  $a_n, b_n$  non entrambi nulli.

**Proposizione 1.1.1.**

Se  $p$  è un polinomio trigonometrico di grado  $\leq n \Rightarrow p$  si scrive in modo unico nella forma (1.1) ed, inoltre, i coefficienti sono univocamente determinati da:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos(kt) dt \quad \forall k = 1, \dots, n \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin(kt) dt \quad \forall k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

**Osservazione 1.1.1.**

Indichiamo con  $T_n := \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ polinomi trigonometrici di grado } \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Notiamo che  $T_n \subset C([-\pi, \pi])$  e che, dotandolo dell'usuale somma tra polinomi e del prodotto per uno scalare, questo è uno spazio vettoriale di dimensione  $2n+1$ .

$\mathcal{B} = \{1, \cos(kt), \sin(kt), k = 1, \dots, n\}$  è una base di  $T_n$ .

**Osservazione 1.1.2.**

Osserviamo che  $T_n \subset L^2(-\pi, \pi) = \{f : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili e t.c. } \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < +\infty\}$  in quanto insieme di polinomi, e quindi funzioni continue su un intervallo limitato.  $T_n$  eredita quindi il prodotto interno di  $L^2$ .

**Definizione 1.1.2** (Prodotto interno di  $L^2(-\pi, \pi)$ ).

E' un'applicazione  $\langle, \rangle : L^2 \times L^2 \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.:

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \quad \forall f, g \in L^2$$

Proprietà del prodotto interno di  $L^2$ :

- i)  $\langle f, f \rangle \geq 0 \quad \forall f \in L^2 \quad \text{e} \quad \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ q.d.}$
- ii)  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad \forall f, g \in L^2$
- iii)  $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \quad \forall f, g, h \in L^2$   
 $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L^2$

**Definizione 1.1.3** (Norma indotta dal prodotto interno di  $L^2$ ).

Data  $f \in L^2$ , possiamo definire l'applicazione  $\|\cdot\|_2 : L^2 \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Per semplicità, da qui in avanti e salvo casi di disambiguità, scriveremo semplicemente  $\|\cdot\|$ , omettendo il pedice.

Proprietà della norma:

- i)  $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in L^2 \quad \text{e} \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ q.d.}$
- ii)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in L^2$
- iii) Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad \forall f, g \in L^2$
- iv) Disuguaglianza triangolare:  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in L^2$

**Proposizione 1.1.2.**

$\mathcal{B} = \{1, \cos(kt), \sin(kt), k = 1, \dots, n\}$  è una base ortogonale di  $T_n$  rispetto al prodotto interno.

$\mathcal{U} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}, k = 1, \dots, n \right\} := \{e_0, \dots, e_n, \dots, e_{2n}\}$  è una base ortonormale.

Quindi, utilizzando la notazione compatta per  $\mathcal{U}$ , possiamo scrivere un  $p \in T_n$  in funzione delle componenti della base ortonormale:  $p = \sum_{k=0}^{2n} \langle p, e_k \rangle e_k$ .



### 1.1.2 Polinomi di Fourier e disuguaglianza di Bessel

**Definizione 1.1.4** (Polinomio di Fourier).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica (cioè  $f(t + 2\pi) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ),  $f \in L^1$ .  
Definiamo polinomio di Fourier di  $f$  di grado  $n$  il seguente polinomio trigonometrico:

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad (1.2)$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad (1.3)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \forall k = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Gli  $a_0, a_k, b_k$  sono detti coefficienti di Fourier di  $f$ .

**Osservazione 1.1.3.**

$S_n$  è lineare, cioè:

- $S_n(f + g) = S_n(f) + S_n(g)$
- $S_n(\lambda f) = \lambda S_n(f)$

**Proposizione 1.1.3.**

Se  $f = p \in T_n \Rightarrow S_n(p) = p$ , cioè il polinomio di Fourier di un polinomio trigonometrico è il polinomio trigonometrico stesso.

**Proposizione 1.1.4** (Disuguaglianza di Bessel).

Sia  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^2(-\pi, \pi)$

Sia  $S_n(f)$  il polinomio di Fourier di  $f$  allora

$$\|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.*

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle e_k \quad \text{con} \quad e_k \in \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|S_n(f) - f\|^2 &= \langle S_n(f) - f, S_n(f) - f \rangle = \langle S_n(f), S_n(f) \rangle - \langle S_n(f), f \rangle - \langle f, S_n(f) \rangle + \langle f, f \rangle = \\ &= \|S_n(f)\|^2 - 2\langle S_n(f), f \rangle + \|f\|^2 \end{aligned}$$

Calcolando il secondo termine:

$$\langle S_n(f), f \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle e_k, f \right\rangle = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, f \rangle = \sum_{k=0}^{2n} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

Mentre il primo:

$$\|S_n(f)\|^2 = \langle S_n(f), S_n(f) \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle e_k, \sum_{m=0}^{2n} \langle f, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle \langle f, e_m \rangle \langle e_k, e_m \rangle$$

ma

$$\langle e_k, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \\ 1 & \text{se } k = m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|S_n(f)\|^2 &= \sum_{k=0}^{2n} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=0}^{2n} |\hat{f}_k|^2 = \langle S_n(f), f \rangle \quad \text{con la notazione } \hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle \\ &\Rightarrow 0 \leq \|S_n(f)\|^2 - 2\|S_n(f)\|^2 + \|f\|^2 \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Da questo risultato segue direttamente il seguente

**Corollario 1.1.5.**

Data  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione dei coefficienti di Fourier di  $f$ . Si ha che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad \text{cioè } (\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2.$$

**Teorema 1.1.6.**

Sia  $f$  un funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ , allora:

$$\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|p - f\|_2 \quad \forall p \in T_n \tag{1.7}$$

cioè il polinomio di Fourier è il polinomio che meglio approssima la funzione in norma  $L^2$ , rispetto a qualunque altro polinomio trigonometrico.

*Dimostrazione.*

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k e_k, \quad \|S_n(f)\|^2 = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \quad \text{e} \quad \|S_n(f) - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2$$

Consideriamo ora  $p \in T_n$

$$\Rightarrow p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k \quad \text{con } c_k \in \mathbb{R}$$

$$\|p - f\|^2 = \langle p - f, p - f \rangle = \|p\|^2 - 2\langle p, f \rangle + \|f\|^2$$

In modo analogo alla dimostrazione del teorema precedente, si ottiene che:

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 & \text{e} & \quad \langle p, f \rangle = \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle e_k, f \rangle = \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k \\ \Rightarrow \|p - f\|^2 &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k + \|f\|^2 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\|p - f\|^2 \geq \|S_n(f) - f\|^2 \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=0}^{2n} (c_k^2 - 2c_k \hat{f}_k + \hat{f}_k^2) = \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2$$

che è sempre verificato. Il teorema è quindi dimostrato.  $\square$

### Proposizione 1.1.7.

Data  $f$  una funzione  $2\pi$ -periodica t.c.  $f \in L^1(-\pi, \pi)$

$\Rightarrow f \in L^1(a - \pi, a + \pi) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

e inoltre:

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

### 1.1.3 Serie di Fourier

Ci chiediamo ora, cosa accade al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , e cioè se:

i)  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t)$

ii)  $S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$

**Definizione 1.1.5** (Serie di Fourier).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodica e sommabile sull'intervallo  $[-\pi, \pi[$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

Se valgono i) e ii), diciamo che  $f$  è sviluppabile in  $t$  in serie di Fourier e che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}_k e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \quad (1.8)$$

è la Serie di Fourier di  $f$ .

Qui

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \forall k \geq 0 \quad (1.9)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \forall k \geq 1 \quad (1.10)$$

sono i coefficienti di Fourier di  $f$ .

### 1.1.4 Nucleo di Dirichlet

Introduciamo ora i nuclei di Dirichlet, grazie ai quali potremo scrivere la Serie di Fourier in forma integrale e studiarne la convergenza in modo più semplice.

**Definizione 1.1.6** (Nucleo di Dirichlet).

Chiamiamo Nucleo di Dirichlet di grado  $n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , il seguente polinomio trigonometrico:

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Principali proprietà del nucleo di Dirichlet:

- i)  $D_n(t)$  è una funzione  $2\pi$ -periodica;
- ii)  $D_n(t)$  è una funzione pari;
- iii)  $\frac{2}{n} \int_0^\pi D_n(t) dt = 1$ ;
- iv)  $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} \quad \forall t \in ]0, \pi[$  detta forma chiusa.

**Proposizione 1.1.8.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ . Allora

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad (1.12)$$

*Dimostrazione.*

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

Sostituiamo ora ad  $a_0, a_k, b_k$  le loro espressioni in forma integrale, come in (1.9), (1.10).

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) ds + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) \cos(ks) ds \right) \cos(kt) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) \sin(ks) ds \right) \sin(kt) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos(ks)\cos(kt) + \sin(ks)\sin(kt)) \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) D_n(s-t) ds \end{aligned}$$

Effettuiamo ora il cambio di variabile  $s - t = \sigma \Rightarrow s = \sigma + t$ .

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(\sigma + t) D_n(\sigma) d\sigma$$

$f$  e  $D_n$  sono funzioni  $2\pi$ -periodiche, quindi per la Proposizione 1.1.7 possiamo integrare sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e spezzare l'integrale nell'origine, ottenendo:

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\sigma + t) D_n(\sigma) d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\sigma + t) D_n(\sigma) d\sigma$$

Effettuando il cambio di variabile  $\sigma = -s$  nel secondo integrale otteniamo la tesi:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t+s) D_n(s) + f(t-s) D_n(s)) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} D_n(s) ds$$

□

#### Osservazione 1.1.4.

Il teorema appena dimostrato, e la proprietà iii) del Nucleo di Dirichlet, ci permettono di scrivere:

$$S_n(f)(t) - \lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) D_n(s) ds$$

Questo risulta molto comodo nello studio della convergenza delle serie di Fourier.

#### Lemma 1.1.9 (Riemann-Lebesgue).

Sia  $f \in L^1(]a, b[)$ , allora:

$$\lim_{|M| \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(t) \cos(Mt) dt \right) = 0$$

$$\lim_{|M| \rightarrow +\infty} \left( \int_a^b f(t) \sin(Mt) dt \right) = 0$$

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $\overline{C_0^\infty} = L^1$ , cioè che  $\forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty$  t.c.  $\|\varphi - f\|_1 < \epsilon$ .

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(Mt) dt \right| \leq \int_a^b |(f(t) - \varphi(t)) \cos(Mt)| dt + \left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| = I_1 + I_2$$

$$I_1 \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt < \epsilon$$

$$I_2 = \left| \int_a^b \varphi(t) \cos(Mt) dt \right| \quad \text{e, integrando parti,}$$

$$= \left| \frac{1}{M} [\varphi(t) \sin(Mt)]_a^b - \frac{1}{M} \int_a^b \varphi'(t) \sin(Mt) dt \right|$$

Notiamo ora che il primo termine dà contributo nullo in quanto  $\varphi \in C_0^\infty$  e, inoltre,  $\sin(Mt) \leq 1$ .

$$\Rightarrow I_2 \leq \frac{1}{|M|} \int_a^b |\varphi'(t)| dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

La dimostrazione del secondo limite è analoga. □

## 1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

### 1.2.1 Il teorema di localizzazione di Riemann ed il teorema di Dini

**Teorema 1.2.1** (Teorema di localizzazione di Riemann).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , e siano  $t, \lambda \in \mathbb{R}$ . Allora sono equivalenti:

i)

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(t) = \lambda$$

ii)

$$\exists c \in ]0, \pi[ \text{ t.c. } \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) - \lambda &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{2\sin(\frac{s}{2})} ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) D_n(s) ds + \int_c^\pi \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) D_n(s) ds \right] \forall c \in ]0, \pi[ \end{aligned}$$

Il secondo termine tende a 0 per il Lemma di Riemann-Lebesgue in quanto

$$s \mapsto \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{1}{2\sin(\frac{s}{2})} \in L^1(c, \pi)$$

Notiamo ora che

$$\frac{1}{2\sin(\frac{s}{2})} = \frac{1}{s} + \left( \frac{1}{2\sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} \right)$$

Sviluppiamo il secondo addendo di quest'espressione con Taylor:

$$\frac{1}{2\sin(\frac{s}{2})} - \frac{1}{s} = \frac{s - 2\sin(\frac{s}{2})}{2s\sin(\frac{s}{2})} = \frac{s - 2(\frac{s}{2} - \frac{(s/2)^3}{3!} + o(s^5))}{2s(\frac{s}{2} + o(s^3))} \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0$$

cioè è limitato in  $]0, c[$ . Otteniamo, quindi:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (S_n(f) - \lambda) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{s} ds + \right.$$

$$+ \int_0^c \underbrace{\left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right)}_{\in L^1} \underbrace{\left( \frac{1}{2\sin(s/2)} - \frac{1}{s} \right)}_{\leq k \in \mathbb{R}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds$$

Il secondo termine tende a 0 per il Lemma di Riemann-Lebesgue, quindi ci resta

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^c \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right)}{s} ds$$

che è proprio quello che cercavamo.  $\square$

Una diretta conseguenza del teorema di localizzazione è il seguente

**Teorema 1.2.2** (Teorema di Dini).

Nelle ipotesi del teorema precedente, se la funzione  $s \mapsto \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \frac{1}{s} \in L^1(0, c)$  per un qualche  $c > 0$ .

$$\Rightarrow S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$$

*Dimostrazione.*

Segue direttamente dal lemma di Riemann-Lebesgue e dal teorema di localizzazione.  $\square$

## 1.2.2 Il criterio di Hölder ed il teorema di Jordan

Prima di proseguire, definiamo

**Definizione 1.2.1.**

*Definiamo*

$$f^*(t) := \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

dove

$$f(t^+) := \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t+s) \quad e \quad f(t^-) := \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t-s)$$

Notiamo che, ovviamente, se  $f$  è continua in  $t$ , si ha che  $f^*(t) = f(t)$ .

**Definizione 1.2.2** (Condizione di hölderianità).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , e siano  $t \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \in ]0, 1]$ .

Diciamo che  $f$  è  $\alpha$ -hölderiana a destra di  $t$  se

$$\exists M > 0, \delta > 0 \quad t.c. \quad |f(t+s) - f(t)| \leq Ms^\alpha \quad \forall s \in ]0, \delta[ \quad (1.13)$$

$f$  è  $\alpha$ -hölderiana a sinistra di  $t$  se

$$\exists M > 0, \delta > 0 \quad t.c. \quad |f(t-s) - f(t)| \leq Ms^\alpha \quad \forall s \in ]0, \delta[ \quad (1.14)$$

Se  $f$  è  $\alpha$ -hölderiana sia a destra che a sinistra di  $t$  diciamo, semplicemente, che  $f$  è  $\alpha$ -hölderiana.

**Osservazione 1.2.1.**

Osserviamo che se  $f$  è  $\alpha$ -hölderiana a destra (risp. sinistra) di  $t$  con  $\alpha = 1$ , allora  $f$  soddisfa la condizione di lipshitzianità a destra (risp. sinistra) di  $t$ .

Analogamente se  $f$  è lipshitziana sia a destra che a sinistra di  $t \Rightarrow f$  si dice lipshitziana, cioè

$$|f(t+s) - f(t+h)| \leq L|s-h| \quad \forall s, h \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}, L > 0$$

**Teorema 1.2.3** (Criterio di Hölder).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ . Se valgono (1.13) e (1.14), cioè  $f$  è  $\alpha$ -hölderiana,  $\Rightarrow \exists f^*(t)$  e

$$S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^*(t)$$

*Dimostrazione.*

L'esistenza di  $f(t^+)$  è garantita dal criterio di Cauchy, che può anche essere espresso come:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$  t.c.  $|f(t+s) - f(t)| < \epsilon \forall s \in ]0, \delta_\epsilon[$ .

Nel nostro caso abbiamo, per ipotesi, che  $|f(t+s) - f(t)| \leq Ms^\alpha \Rightarrow$  ci basta prendere  $s^\alpha < \frac{\epsilon}{M}$  e di conseguenza  $\delta_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{M}\right)^{1/\alpha}$ ; abbiamo garantita, in questo modo, l'esistenza dei limiti destro e sinistro, e quindi quella di  $f^*(t)$ .

Verifichiamo ora che la funzione  $s \mapsto \left(\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - f^*(t)\right) \frac{1}{s}$  è sommabile.

$$\left| \left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \right| \leq M \frac{|s|^\alpha}{2s} + M \frac{|s|^\alpha}{2s} = M|s|^{\alpha-1}$$

$M|s|^{\alpha-1}$  è sommabile su  $]0, c[$  in quanto  $\alpha > 0$ .

Siamo nelle ipotesi del teorema di Dini, e quindi  $S_n(f)(t)$  converge puntualmente a  $f^*(t)$ .  $\square$

**Definizione 1.2.3** (Funzione  $C^1$  a tratti).

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice  $C^1$  a tratti se  $\exists t_0, \dots, t_k$  t.c.  $f \in C^1([t_j, t_{j+1}])$  e  $\bigcup_{j=0}^k [t_j, t_{j+1}] = \Omega$ .

**Corollario 1.2.4.**

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

Se  $f \in C^1$  a tratti su  $[-\pi, \pi]$  allora

$$S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

**Teorema 1.2.5** (Teorema di Jordan).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  a variazione limitata su  $[-\pi, \pi]$ .

$$\Rightarrow S_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$



## 1.3 Integrazione termine a termine

Mostriamo, in questa sezione, che è sempre possibile integrare termine a termine una serie di Fourier su qualsiasi intervallo compatto della retta reale.

### Proposizione 1.3.1.

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

Sia

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad \text{per } x \in [-\pi, \pi]$$

$\Rightarrow F$  è continua su  $[-\pi, \pi]$ .

*Dimostrazione.*

Considero  $F(x+h)$ ; per mostrare la continuità, basta far vedere che  $F(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x)$ :

$$F(x+h) = \int_{-\pi}^{x+h} f(t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^x f(t) dt = F(x)$$

in quanto  $f \in L^1$ , e quindi vale il teorema di convergenza dominata, in quanto

$$\int_{-\pi}^{x+h} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \chi_{[-\pi, x+h]}(t) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < +\infty$$

□

### Teorema 1.3.2 (Teorema di Lebesgue).

$F$  è derivabile in senso debole q.d. con derivata debole sommabile sull'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

### Definizione 1.3.1 (Funzione assolutamente continua).

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile q.d. e con  $f' \in L^1([a, b])$  si dice assolutamente continua se

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

### Osservazione 1.3.1.

Segue del teorema fondamentale del calcolo integrale che se  $f \in C^1([a, b]) \Rightarrow f$  è assolutamente continua.

### Osservazione 1.3.2.

La funzione  $F$  della proposizione 1.3.1

- è assolutamente continua, ed è t.c  $\exists F'$  q.d. e  $F' = f$  q.d.

- decomponendo  $f$  come  $f = f^+ - f^-$ , dove  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ ,  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$  abbiamo che:

$$F(x) = \int_{-\pi}^x (f^+ - f^-)(t)dt = \int_{-\pi}^x f^+(t)dt - \int_{-\pi}^x f^-(t)dt = \varphi(x) - \psi(x)$$

dove  $\varphi, \psi$  sono monotone crescenti.

Perchè questa verifichi le ipotesi del teorema di Jordan, è però necessario che sia anche  $2\pi$ -periodica, ma non lo è.

Definiamo a tal proposito la seguente funzione:

$$G(x) = \int_{-\pi}^x \left( f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \int_{-\pi}^x f(t)dt - \frac{a_0}{2}(x + \pi) = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi)$$

Questa  $G$ , oltre che verificare le due proprietà precedenti, è anche  $2\pi$ -periodica e soddisfa, quindi, le ipotesi del teorema di Jordan  $\Rightarrow$  è sviluppabile in serie di Fourier.

### Proposizione 1.3.3.

La funzione  $G$ , definita come sopra, è sviluppabile in serie di Fourier e

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt) \quad (1.15)$$

dove  $A_k$  e  $B_k$  sono i coefficienti di Fourier di  $G$ , i quali sono t.c.

$$A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k}, \quad \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} \quad (1.16)$$

con  $a_k, b_k$  coefficienti di Fourier di  $f$ .

### Corollario 1.3.4.

$$f \text{ } 2\pi\text{-periodica e } f \in L^1(-\pi, \pi) \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} b_k < +\infty$$

## 1.3.1 Delle condizioni necessarie

Raccogliamo qui alcune condizioni affinché una serie trigonometrica possa essere la serie di Fourier di una funzione sommabile nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

1. Dal lemma di Riemann-Lebesgue

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

2. Dal risultato appena ottenuto

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k} < +\infty$$

3. Se  $f \in L^2(-\pi, \pi)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{f}_k)^2 < +\infty$$

dalla disuguaglianza di Bessel, in quanto  $\sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{f}_k)^2 \leq \|f\|^2 < +\infty$ .

## 1.4 Convergenza uniforme

**Definizione 1.4.1** (Convergenza uniforme e totale).

*Diamo, qui, le definizioni di convergenza uniforme e totale, enunciate direttamente nel caso di una serie di Fourier:*

- Diciamo che  $S_n(f)$  converge uniformemente ad  $f$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  t.c.  
 $|S_n(f) - f| < \epsilon \forall n > n_\epsilon$ .
- Diciamo, invece, che  $S_n(f)$  converge totalmente ad  $f$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  t.c.  
 $\sup_{[-\pi, \pi]} |S_n(f) - f| < \epsilon \forall n > n_\epsilon$ .

**Osservazione 1.4.1.**

Ricordiamo che convergenza totale  $\Rightarrow$  convergenza uniforme  $\Rightarrow$  convergenza puntuale.

**Teorema 1.4.1.**

*Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica ed assolutamente continua su  $[-\pi, \pi]$ , con  $f' \in L^2(-\pi, \pi)$ .  $\Rightarrow S_n(f) \rightrightarrows f$  per  $n \rightarrow +\infty$ , cioè la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente alla funzione stessa.*

*Dimostrazione.*

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

con  $A_k, B_k$  coefficienti di Fourier di  $f$ ; l'assoluta continuità ci garantisce che c'è almeno convergenza puntuale.

$f$  è assolutamente continua  $\Rightarrow f(x) - f(-\pi) = \int_{-\pi}^x f'(t) dt = F(x)$ . (\*)

$F$  è differenza di due funzioni monotone crescenti, quindi per il teorema di Jordan vale la convergenza puntuale; mostriamo che in realtà vale la convergenza totale.

Sappiamo che  $f' \in L^2(-\pi, \pi)$  quindi in particolare  $f' \in L^1(-\pi, \pi)$ ;

chiamo  $a_0, a_k, b_k$  i coefficienti di Fourier di  $f'$

$$\Rightarrow S_n(f') = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Per la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) < +\infty$$

ed inoltre  $A_k, B_k$  sono legati ad  $a_k, b_k$  dalla relazione (\*), quindi dalle relazioni (1.16):

$$\begin{cases} a_k = kB_k \\ b_k = -kA_k \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2 A_k^2 + k^2 B_k^2) < +\infty \\ \sup_{[-\pi, \pi]} \left| \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \right| &\leq \sup_{[-\pi, \pi]} \left( \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|A_k \cos(kt)| + |B_k \sin(kt)|) \right) \leq \\ &\leq \frac{A_0}{2} + \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} (|A_k| + |B_k|) \right] \leq \quad (*) \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $|ab|^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{k|A_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k^2} + k^2|A_k|^2 \right)$

$$\Rightarrow (*) \leq \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2|A_k|^2 + k^2|B_k|^2) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

in quanto il secondo termine è limitato, come visto pocanzi, e l'ultimo è la serie armonica generalizzata con esponente  $p > 1$ , che è convergente.

$\Rightarrow$  la convergenza è totale e quindi anche uniforme. □

**Corollario 1.4.2.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in C([-\pi, \pi])$  e  $C^1$  a tratti su  $[-\pi, \pi]$ .  
 $\Rightarrow S_n(f) \rightrightarrows f$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

## 1.5 Convergenza in $L^2$

### 1.5.1 Teorema di Fisher-Riesz e identità di Parseval

**Teorema 1.5.1** (Teorema di Fisher-Riesz).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ .

$$\Rightarrow \|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $C_0^\infty$  è denso in  $L^2$ , cioè che  $\forall \epsilon > 0 \exists \varphi \in C_0^\infty([-\pi, \pi])$  t.c.

$$\|f - \varphi\|_2 < \epsilon. \quad (\star)$$

$$\|S_n(f) - f\|_2 = \|S_n(f) - S_n(\varphi) + S_n(\varphi) - \varphi + \varphi - f\|_2 \leq \|S_n(f) - S_n(\varphi)\|_2 + \|S_n(\varphi) - \varphi\|_2 + \|\varphi - f\|_2$$

Sappiamo che  $\|\varphi - f\|_2 < \epsilon$  per  $(\star)$ .

$\varphi \in C_0^\infty \Rightarrow S_n(\varphi) \rightrightarrows \varphi$ , e quindi posso passare al limite sotto al segno di integrale.

$$\Rightarrow \|S_n(\varphi) - \varphi\|_2 < \epsilon$$

Inoltre, per la linearità di  $S_n$  e la disuguaglianza di Bessel, abbiamo che

$$\|S_n(f) - S_n(\varphi)\|_2 = \|S_n(f - \varphi)\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2 < \epsilon$$

$$\Rightarrow \|S_n(f) - f\|_2 < \epsilon \Rightarrow S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \text{in } L^2$$

□

**Proposizione 1.5.2** (Identità di Parseval).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ .

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad (1.18)$$

*Dimostrazione.*

$$\|S_n(f) - f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2$$

ma  $\|S_n(f) - f\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  per il teorema di Fisher-Riesz, e quindi, portando a sinistra  $\|S_n(f)\|_2^2$  otteniamo la tesi. □

Questa proposizione ci dice che, al limite, nella disuguaglianza di Bessel vale l'uguaglianza.

**Osservazione 1.5.1.**

Osserviamo che l'identità appena trovata può anche essere espressa come:

$$\pi \left( \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right) = \|f\|^2$$

# Capitolo 2

## Serie di Fejér

### 2.1 Convergenza secondo Cesàro

#### Osservazione 2.1.1.

Ricordiamo, qui, la definizione di convergenza secondo Cauchy.

Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathbb{R}$ . Sia poi  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  la successione delle somme parziali. Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  converge secondo Cauchy se  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$ .

Definiamo, ora, la media aritmetica delle somme parziali:

$$\sigma_n := \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$$

**Definizione 2.1.1.** Diciamo che la serie  $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$  converge secondo Cesàro se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = s \in \mathbb{R} \quad \text{e scriviamo che} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \underset{c}{=} s$$

.

#### Proposizione 2.1.1.

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c}{=} s$ .

Cioè la convergenza secondo Cauchy implica quella secondo Cesàro.

*Dimostrazione.*

Se vale la convergenza secondo Cauchy, allora

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s \Rightarrow S_n - s \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |S_n - s| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon$$

$$\left| \sigma_n - \frac{S_n}{n} \right| = \left| \sum_{k=1}^n (S_k - s) \right| \frac{1}{n} \leq \left[ \sum_{k=1}^n |S_k - s| \right] \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=1}^{n_\epsilon} |S_k - s| + \sum_{k=n_\epsilon+1}^n |S_k - s| \right] \leq \frac{c}{n} + \frac{\epsilon}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□



## 2.2 Serie di Fejér

### 2.2.1 Il teorema di Fejér

**Definizione 2.2.1** (Polinomio di Fejér).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

Sappiamo che il polinomio di Fourier di  $f$  è

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Poniamo inoltre  $S_0(f)(t) = \frac{a_0}{2}$ .

$$\sigma_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \dots + S_{n-1}(f)}{n}$$

è il polinomio di Fejér di  $f$  di grado  $n$ .

Analogamente alle serie di Fourier, è possibile esprimere le serie di Fejér in forma integrale:

**Definizione 2.2.2** (Nucleo di Fejér).

$$F_n(s) := \frac{1}{\pi n} \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)} \quad \text{per } s \in ]0, \pi[$$

Proprietà del nucleo di Fejér:

- i)  $F_n(s) \geq 0$ ;
- ii)  $F_n(s)$  è  $2\pi$ -periodico;
- iii)  $F_n(s)$  è unitario, cioè  $\int_0^\pi F_n(s) ds = 1$ .

**Proposizione 2.2.1.**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

$$\Rightarrow \sigma_n(f)(t) = \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

*Dimostrazione.*

$$\text{So che } S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})s)}{2\sin(s/2)} ds$$

Per dimostrare la proposizione, ci basta far vedere che

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})s}{\sin(s/2)} = \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)} \quad s \in ]0, \pi[$$

Moltiplichiamo e dividiamo il primo membro per  $\sin(\frac{s}{2})$ , ottenendo

$$\sin(\frac{s}{2}) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin((k + \frac{1}{2})s)}{\sin^2(s/2)} = \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)}$$

Ci resta da mostrare che

$$\sin(\frac{s}{2}) \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})s) = \sin^2(\frac{ns}{2})$$

Utilizzando le formule di Prostaferesi per il seno al primo membro

$$\sin(\frac{s}{2}) \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k + \frac{1}{2})s) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(ks) - \cos((k+1)s)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(ns)) = \sin^2(\frac{ns}{2})$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato le formule di duplicazione per il coseno, vedendo  $ns = \frac{ns}{2} + \frac{ns}{2}$ .  $\square$

**Teorema 2.2.2** (Teorema di Fejér).

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

$$\Rightarrow \sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

inoltre, se  $f \in C([-\pi, \pi]) \Rightarrow \sigma_n(f) \rightrightarrows f$  per  $n \rightarrow +\infty$

*Dimostrazione.*

$$\sigma_n(f)(t) - f^*(t) = \int_0^\pi \underbrace{\left( \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right)}_{\xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0} \left( \frac{1}{\pi n} \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)} \right) ds$$

$$\text{Sappiamo che } \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_{\epsilon, t} \quad \text{t.c.} \quad \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| < \epsilon \quad \forall s \in ]0, \delta[$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| \left( \frac{1}{\pi n} \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)} \right) ds = \\ &= \int_0^\delta \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| F_n(s) ds + \int_\delta^\pi \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| F_n(s) ds = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^\delta \epsilon F_n(s) ds \leq \epsilon \int_0^\pi F_n(s) ds = \epsilon \\
I_2 &= \int_\delta^\pi \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| \left( \frac{1}{\pi n} \frac{\sin^2(\frac{ns}{2})}{\sin^2(s/2)} \right) ds \leq \\
&\leq \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \underbrace{\int_\delta^\pi \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| ds}_{\leq M_\delta} \frac{1}{\pi n} = \\
&= \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} M_\delta \frac{1}{\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato la convergenza puntuale.

Supponiamo ora che  $f \in C([-\pi, \pi]) \Rightarrow$  il  $\delta$  fissato va bene per qualsiasi valore di  $t$ ; inoltre  $f$  è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor, in quanto funzione continua definita su un compatto e  $f^* = f$ .

Ripercorriamo la dimostrazione allo stesso modo, stimando più precisamente  $I_2$  grazie alle nuove ipotesi.

$$\left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f(t) \right| \leq 2 \sup_{[-\pi, \pi]} |f| = 2 \max_{[-\pi, \pi]} |f| = 2M \in \mathbb{R}$$

dove ora  $M$  non dipende nè da  $\delta$ , nè da  $t$ .

$$\Rightarrow I_2 \leq \frac{2M}{\pi n \sin^2(\delta/2)} \int_\delta^\pi ds \leq \frac{\tilde{M}}{n} \Rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

□

### Proposizione 2.2.3.

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $2\pi$ -periodica,  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ .

$$\Rightarrow \|\sigma_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Dimostrazione.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema di Fisher-Riesz, in quanto

$$\|\sigma_n(f)\|_2 = \frac{1}{n} \|S_0(f) + \dots + S_n(f)\|_2 \leq \frac{1}{n} (\|S_0\|_2 + \dots + \|S_n\|_2) \leq \|f\|_2$$

Dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Bessel, mostrando che questa vale anche per  $\sigma_n$ . □

### 2.2.2 Il teorema di Weirstrass

Una diretta conseguenza del Teorema di Fejér, è la seguente

**Proposizione 2.2.4.**

*L'insieme dei polinomio trigonometrici è denso in  $C([-\pi, \pi])$ .*

**Teorema 2.2.5** (Teorema di Weirstrass).

*L'insieme dei polinomi è denso in  $C([a, b])$  rispetto alla norma della convergenza uniforme.*

*Cioè se  $f \in C([a, b]) \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists p$  polinomio t.c.  $\max_{[a,b]} |f(t) - p(t)| < \epsilon$ .*

*Dimostrazione.*

$$\text{Sia } g(t) = \begin{cases} f(a + \frac{t}{\pi}(b-a)) & t \in [0, \pi] \\ f(a + \frac{2\pi-t}{\pi}(b-a)) & t \in ]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

La funzione  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  appena costruita è una funzione continua ed assume lo stesso valore nel punto iniziale e nel punto finale, è quindi una funzione  $2\pi$ -periodica e possiamo costruirne il polinomio di Fejér.

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \sigma_n(g) \text{ t.c. } \max_{[0, 2\pi]} |\sigma_n(g) - g| < \epsilon$$

Sia ora  $P_m$  il polinomio di Taylor di  $\sigma_n(g)$  di grado  $m$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \max_{[0, 2\pi]} |P_m(t) - \sigma_n(g)(t)| < \epsilon$$

Se in  $g$  poniamo  $x = a + \frac{t}{\pi}(b-a) \Rightarrow t = \pi \frac{x-a}{b-a}$  riotteniamo  $f(x)$ .

Prendiamo quindi  $q_m = P_m\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$  che è proprio il polinomio che cercavamo, il quale soddisfa la definizione.  $\square$

# Capitolo 3

## Problema del calore su una sbarra omogenea

Vogliamo studiare, ora, come evolve, punto per punto, la temperatura di una sbarra omogenea di lunghezza fissata  $\pi$ .

Indichiamo con  $u(x, t) : ]0, \pi[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione che rappresenta la temperatura nel punto  $x$ , al tempo  $t$ , che sarà la nostra incognita.

**Definizione 3.0.3** (Operatore del calore).

*Chiamiamo operatore del calore il seguente operatore:*

$$H := \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} - \frac{\partial}{\partial t}$$

**Osservazione 3.0.1.**

Osserviamo che:

- L'operatore del calore è lineare:  $H(\lambda u + \mu v) = \lambda H(u) + \mu H(v)$ ;
- L'operatore del calore è un prototipo delle equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico.

Sappiamo che il calore, se il mezzo è omogeneo, soddisfa la seguente equazione, detta appunto equazione del calore:

$$Hu(x, t) = ku_{xx}(x, t) - u_t(x, t) = 0 \tag{3.1}$$

Dove

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \quad \text{e} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$$

e  $k \in \mathbb{R}$  è detto coefficiente di diffusione che poniamo, senza perdere di generalità, uguale a 1.

Supponiamo inoltre che la sbarra sia isolata dall'esterno e che la temperatura agli estremi, cioè in  $x = 0$  e  $x = \pi$ , sia costantemente nulla.

Infine, supponiamo che la temperatura iniziale, cioè al tempo  $t = 0$ , sia descritta da una funzione nota  $g \in C^1([0, \pi])$  che chiamiamo dato iniziale. Per compatibilità, quindi, dovrà valere che  $g(0) = g(\pi) = 0$ .

Queste condizioni ci forniscono il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore:

$$(PCD) \quad \begin{cases} Hu(x, t) = 0 & \text{in } R := ]0, \pi[ \times ]0, T[ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \in ]0, T[ \\ u(x, 0) = g(x) & \forall x \in [0, \pi] \end{cases}$$

**Definizione 3.0.4** (Bordo parabolico di  $R$ ).

Chiamiamo *bordo parabolico del rettangolo*  $R := ]0, \pi[ \times ]0, T[$  l'insieme

$$\partial_p R := \partial R \setminus \{(x, T), x \in [0, \pi]\}$$

**Definizione 3.0.5** (Soluzione classica di (PCD)).

Diciamo che  $u : ]0, \pi[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  è *soluzione classica di (PCD)* se:

i)  $\exists \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\mathbb{R})$

ii)  $u \in C(R \cup \partial_p R)$

iii)  $u$  soddisfa il sistema (PCD)

Dimostriamo, preliminarmente, il seguente

**Lemma 3.0.6.**

Consideriamo la funzione  $v(x, t) : ]0, \pi[ \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $v$  è soluzione classica di

$$\begin{cases} Hv(x, t) = 0 & \text{in } R \\ v(x, t) = 0 & \text{su } \partial_p R \end{cases}$$

$\Rightarrow v \equiv 0$  su tutto  $R$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $v \not\equiv 0 \Rightarrow Hvv = 0$  in quanto  $Hv = 0$

$$\text{Sia ora } v_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial x} \quad \text{e} \quad v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\Rightarrow v_{xx}v - v_tv = 0 \quad \text{in } R$$

Integriamo quest'uguaglianza nella variabile  $x$ , tra  $0$  e  $\pi$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi (v_{xx}(x,t)v(x,t) - v_t(x,t)v(x,t)) dx = \\ &= [v_x(x,t)v(x,t)]_0^\pi - \int_0^\pi v_x^2(x,t) dx - \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^\pi \frac{v^2(x,t)}{2} dx \right) \end{aligned}$$

integrando per parti e portando la derivata in  $t$  fuori dall'integrale, il che ci è permesso in quanto  $t$  non è la variabile d'integrazione.

$$\text{Sia ora } E(t) := \int_0^\pi \frac{v^2(x,t)}{2} dx \quad \text{detta Energia}$$

Osserviamo che:

1.  $E(t) \geq 0 \forall t \in [0, T]$ ;
2.  $E(0) = 0$ ;
3.  $E'(t) = - \int_0^\pi v_x^2(x,t) dx \leq 0, t \in ]0, T[$ .

$\Rightarrow E(t)$  è monotona decrescente e sempre positiva in  $]0, T[$

$$\begin{cases} E(t) \leq E(0) = 0 \\ E(t) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow E(t) \equiv 0 \forall t \in ]0, T[$$

Quindi  $E(t) = \int_0^\pi \frac{v^2(x,t)}{2} dx \equiv 0$ ;  
 $\Rightarrow v^2(x,t) = 0$  q.d. ed inoltre  $v \in C$ ;  
 $\Rightarrow v \equiv 0$  in  $\mathbb{R}$ , e questo è assurdo. □

Possiamo finalmente dimostrare la seguente

**Proposizione 3.0.7.**

$\exists!$   $u$  soluzione classica del problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore.

*Dimostrazione.*

L'unicità segue direttamente dal lemma precedente, in quanto se  $u$  e  $w$  sono soluzioni classiche di (PCD)  $\Rightarrow v = u - w$  verifica le ipotesi del lemma  $\Rightarrow 0 \equiv v = u - w \Rightarrow u = w$ . Proviamo ora l'esistenza della soluzione, cercandola con il metodo di separazione delle variabili.

Formalmente cerchiamo una soluzione non banale del tipo  $u(x,t) = X(x)\varphi(t)$ .

Imponiamo che sia verificata l'equazione (3.1):

$$0 = u_{xx} - u_t = X''(x)\varphi(t) - X(x)\varphi'(t)$$

Quindi, supponendo  $X$  e  $\varphi$  non nulle otteniamo che

$$\frac{X''(x)\varphi(t)}{X(x)\varphi(t)} = \frac{X(x)\varphi'(t)}{X(x)\varphi(t)} \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \quad \forall (x, t) \in R$$

Siccome il termine a sinistra dipende solo da  $x$  e quello a destra solo dalla variabile  $t$ , allora ciascuno di questi termini deve necessariamente essere costante, cioè

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \quad (\star)$$

Dalla prima equazione otteniamo il sistema

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & \text{per } x \in ]0, \pi[ \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

dove la seconda equazione deriva dall'ipotesi di sbarra isolata  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ . Otteniamo così un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Poniamo  $X(x) = e^{sx} \Rightarrow X'(x) = se^{sx} \Rightarrow X''(x) = s^2 e^{sx}$ .

Imponendo che sia soluzione otteniamo quindi che  $(s^2 - \lambda)e^{sx} = 0 \Rightarrow s^2 = \lambda$ .

Distinguiamo i casi:

- $\lambda > 0$  : Otteniamo due radici reali e distinte,  $s = \pm\sqrt{\lambda}$ , e quindi le due soluzioni indipendenti sono  $e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}$ . Allora la soluzione generale è:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

ma, imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases} X(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X(\pi) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

otteniamo  $c_1 = c_2 = 0$ . Troviamo la sola soluzione nulla, quindi escludiamo questo caso.

- $\lambda = 0$  :  $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x$ . Imponiamo le condizioni al bordo:

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(\pi) = c_2 \pi = 0 \end{cases}$$

Otteniamo ancora  $c_1 = c_2 = 0$ , cioè la soluzione banale; escludiamo anche questo caso.



- $\lambda < 0$ : Sia  $\lambda = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{R} \Rightarrow s^2 = -n^2$ .

Abbiamo, dunque, la base complessa  $\{e^{in}, e^{-in}\}$ , che corrisponde alla base reale  $\{\cos(nx), \sin(nx)\}$ . La soluzione generale reale è quindi  $X(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$  e, imponendo le condizioni al bordo:

$$\begin{cases} X(0) = c_1 = 0 \\ X(\pi) = c_1 \cos(n\pi) + c_2 \sin(n\pi) = c_2 \sin(n\pi) = 0 \end{cases}$$

Cerco delle soluzioni non banali e osservo che se  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow X(x) = c_2 \sin(nx)$ , mentre se  $n \notin \mathbb{N} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ . Quindi, per avere soluzioni non banali, deve valere che  $\lambda = -n^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow X(x) = c \sin(nx).$$

Dall'uguaglianza  $(\star)$  troviamo che  $\varphi'(t) = -n^2 \varphi(t) \Rightarrow \varphi(t) = \tilde{c} e^{-n^2 t}$ .

Abbiamo trovato, quindi, le infinite soluzioni

$$u_n(x, t) = B_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

che soddisfano le condizioni al bordo  $u_n(x, t) = u_n(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in ]0, \pi[$

Distinguiamo ora i casi in base alla regolarità del dato iniziale.

### 3.1 Dato iniziale $C^1$

Dal momento che le  $u_n$  sono tutte soluzioni, allora una loro combinazione lineare è ancora soluzione. Possiamo quindi considerare

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

ed imporre la condizione iniziale

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx) = g(x).$$

Osserviamo che  $u$  è una serie di Fourier di soli seni i cui coefficienti dipendono dal dato iniziale  $g$ .

Dal momento che  $g$  è una funzione di classe  $C^1([0, \pi])$  che si annulla agli estremi, possiamo considerare il suo prolungamento dispari  $\tilde{g}$ , definito nel modo seguente:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [0, \pi] \\ -g(-x) & x \in [-\pi, 0[ \end{cases} \quad (3.2)$$

Questa funzione, definita in  $[-\pi, \pi]$ , si annulla agli estremi e nel punto 0; inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{g}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{g}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-g(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$$

quindi è regolare nell'origine, in quanto di classe  $C^1$ ; inoltre è una funzione dispari per definizione.

I  $B_n$ , dunque, sono i coefficienti di Fourier di  $\tilde{g}$  e cioè sono

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin(nt) dt$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato la parità della funzione integranda, dal momento che sia  $\tilde{g}$  che  $\sin$  sono funzioni dispari.

Dimostriamo ora che la nostra candidata soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-n^2 t} \sin(nt) \quad (3.3)$$

è effettivamente la soluzione classica del nostro problema (PCD).

### Osservazione 3.1.1.

Osserviamo innanzitutto che:

1. La successione dei coefficienti  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è limitata per il lemma di Riemann-Lebesgue, in quanto formata dai coefficienti di Fourier di una funzione  $C^1$ .
2. La serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} B_n$  converge assolutamente.  
Infatti, dal momento che  $g \in C^1([0, \pi])$ , integrando per parti e sfruttando il fatto che  $g(0) = g(\pi) = 0$  troviamo che

$$\int_0^{\pi} g(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{n} \int_0^{\pi} g'(t) \cos(nt) dt$$

$$\text{Ponendo } \bar{B}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g'(t) \cos(nt) dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{B}_n^2 \leq \int_0^{\pi} \pi g'(t)^2 dt \quad \text{per la disuguaglianza di Bessel}$$

quindi, per la relazione (1.17) ( $\bar{B}_n = nB_n$ ) e per la disuguaglianza di Schwartz per le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |B_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} \bar{B}_n^2} < +\infty$$

cioè la serie converge assolutamente.

Mostriamo ora che la serie (3.3) è uniformemente convergente in  $[0, \pi] \times [\tau, T[ \forall \tau > 0$  e che la funzione a cui converge, di classe  $C^\infty([0, \pi] \times ]0, T[)$ , risolve effettivamente il problema (PCD).

Sappiamo, per il punto 1. dell'osservazione precedente che  $\exists M \in \mathbb{R}$  t.c.  $|B_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ . Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{[0, \pi] \times [\tau, T[} |B_n \sin(nx) e^{-n^2 t}| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \tau} < +\infty$$

in quanto la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \tau}$  è convergente. Allora la serie (3.3) risulta totalmente convergente in  $[0, \pi] \times [\tau, T[$  e quindi anche uniformemente, e puntualmente, convergente.

Mostriamo ora che anche la serie delle derivate in  $x$  converge uniformemente su  $[0, \pi] \times [\tau, T[ \forall \tau > 0$ ; in questo modo, dal momento che la serie (3.3) converge puntualmente, avremo che

$$u_x(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-n^2 t} n \cos(nx)$$

e che questa è continua in  $[0, \pi] \times [\tau, T[$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{[0, \pi] \times [\tau, T[} |B_n e^{-n^2 t} n \cos(nx)| \leq B \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2 \tau} < +\infty.$$

In modo analogo si dimostra che  $u_{xx}(x, t)$  e  $u_t(x, t)$  sono continue, e

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-B_n e^{-n^2 t} n^2 \sin(nx)), \quad u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n e^{-n^2 t} (-n^2) \sin(nx).$$

Iterando questo ragionamento si prova che  $u(x, t)$  è derivabile termine a termine infinite volte rispetto ad entrambe le variabili in  $[0, \pi] \times ]0, T[$  e quindi che  $u \in C^\infty([0, \pi] \times ]0, T[)$ . Per verifica immediata si vede che questa  $u$  soddisfa  $Hu = 0$  in  $\mathbb{R}$  ed è compatibile con la condizione al bordo.

Ci resta da verificare che la soluzione soddisfa il dato iniziale, cioè che (3.3) converge uniformemente in  $[0, \pi] \times [0, T[$ ; in questo modo avremmo, in particolare, che  $u$  è continua su tutto  $[0, \pi] \times [0, T[$ . Osserviamo che

$$\sup_{[0, \pi] \times [0, T[} |B_n e^{-n^2 t} \sin(nx)| = |B_n|,$$

ma, per il punto 2. dell'osservazione precedente,  $\sum_{n=1}^{+\infty} |B_n| < +\infty$ , e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{[0,\pi] \times [0,T[} \left| B_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \right| < +\infty$$

cioè la serie (3.3) converge totalmente, e quindi uniformemente, su tutto  $[0, \pi] \times [0, T[$  e quindi verifica anche il dato iniziale.

In definitiva, quindi, la funzione  $u$  è l'unica soluzione classica del problema (PCD) per l'equazione del calore.  $\square$

## 3.2 Dato iniziale continuo

Vogliamo analizzare, ora, il caso più generale in cui il dato iniziale sia solo continuo. In questo caso, però, non ci è possibile utilizzare le serie di Fourier per ricercare una soluzione, dal momento che non abbiamo risultati che ci garantiscano la sviluppabilità del dato iniziale in serie di Fourier per funzioni che non siano almeno  $C^1$ . Proponiamo, a tal proposito, due diverse risoluzioni del problema: la prima utilizza le serie di Fejér che, come visto nel cap. 2, richiedono che la funzione sia solo continua e non necessariamente  $C^1$ , mentre la seconda sfrutta il cosiddetto nucleo di Green per l'equazione del calore.

### 3.2.1 Risoluzione con le serie di Fejér

Cerchiamo, innanzitutto, una soluzione di

$$\begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & \text{in } \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) & \text{per } t \in ]0, T[ \end{cases} \quad (3.4)$$

che sia della forma

$$u_n(x, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k \sin(kx) e^{-k^2 t}.$$

#### Osservazione 3.2.1.

Ricordiamo che il polinomio di Fejér di una funzione dispari è della forma

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k \sin(kx)$$

e che, per il teorema di Fejèr (teorema 2.2.2), una funzione continua è sempre sviluppabile in serie di Fejèr.

Per il dato iniziale, avremo quindi che

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k \sin(kx)$$

Verifichiamo che  $u_n$  è soluzione di (3.4) considerando  $(x, t) \in [0, \pi] \times [\tau, T[$  con  $\tau > 0$ : la serie in (3.3) converge secondo Cauchy, quindi converge secondo Cesàro come provato nella proposizione 2.1.1. Analogamente

$$\partial_x u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k k \cos(kx) e^{-k^2 t}$$

$$\begin{aligned}\partial_{xx}u_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k k^2 (-\sin(kx)) e^{-k^2 t} \\ \partial_t u_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i b_k (-k^2) \sin(kx) e^{-k^2 t}\end{aligned}$$

convergono.

Queste soddisfano

$$\begin{aligned}\partial_{xx}u_n - \partial_t u_n &= 0, \\ u_n(x, t) &= u_n(\pi, t) = 0;\end{aligned}$$

Prendiamo poi, come dato iniziale,  $u_n(x, 0) = \sigma_n$ .

Consideriamo ora

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t)$$

Questo limite esiste, dal momento che  $u_n$  converge nell'insieme preso in considerazione; inoltre, per costruzione, abbiamo che  $u(x, t)$  verifica (3.4) e soddisfa il dato iniziale  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = g(x)$ .

Non possiamo concludere, però, che  $u$  è soluzione classica perchè non sappiamo se  $u$  assume il dato iniziale con continuità.

### 3.2.2 Risoluzione con il nucleo di Green

Anche in questo caso consideriamo  $\tilde{g}$ , il prolungamento dispari e  $2\pi$ -periodico del dato iniziale, che qui sarà solo continuo, essendo  $g$  continua (e non  $C^1$ , come nel caso precedente). Possiamo inoltre pensare che  $\tilde{g}$  sia definita su tutto  $\mathbb{R}$ , essendo questa  $2\pi$ -periodica.

Notiamo che la funzione  $\tilde{g}$ , che d'ora in avanti indicheremo con  $g$  per semplicità, rimane limitata.

Risolviamo ora il seguente problema di Cauchy:

$$(PC) \quad \begin{cases} u_{xx} - u_t = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Definizione 3.2.1** (Nucleo di Green per l'equazione del calore).

$$K(x, y, t) := (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\} \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$$

Valgono i seguenti teoremi, che risolvono il problema di Cauchy anche in questo caso. Ne omettiamo le dimostrazioni, in quanto esulerebbero dagli argomenti trattati in questo elaborato (si rimanda a Sauvigny Friedrich, *Partial Differential Equations 1*, Springer, Berlin 2006 [4]).

**Teorema 3.2.1.**

Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e limitata, allora la funzione

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y, t) g(y) dy \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

è tale che

1.  $u$  è soluzione di (PC): cioè soddisfa l'equazione del calore in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ,  $u \in C^2(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ , e soddisfa la condizione iniziale  $u(x, 0) = g(x)$ ;
2.  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times ]0, +\infty[)$ ;
3.  $u$  è una funzione limitata.

**Teorema 3.2.2.**

Data  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , funzione continua e limitata, esiste una ed una sola soluzione limitata del problema ai valori iniziali per l'equazione del calore associato alla funzione  $g$ .

Quindi, grazie alla proprietà 3. del Teorema 3.2.1, dal Teorema precedente ricaviamo che la soluzione di (PC) trovata è unica.

Ora, entrambe le funzioni  $u(x, t) + u(-x, t)$  e  $u(x, t) + u(2\pi - x, t)$  sono soluzione dell'equazione del calore in  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  con condizioni iniziali omogenee.

Infatti, dal momento che  $g$  è dispari e  $2\pi$ -periodica, abbiamo che

$$u(x, 0) + u(-x, 0) = g(x) + g(-x) = g(x) - g(x) = 0,$$

$$u(x, 0) + u(2\pi - x, 0) = g(x) + g(2\pi - x) = g(x) + g(-x) = g(x) - g(x) = 0.$$

Quindi, per il teorema 3.2.2, devono essere uguali alla soluzione nulla:

$$u(x, t) + u(-x, t) \equiv 0, \quad (3.5)$$

$$u(x, t) + u(2\pi - x, t) \equiv 0, \quad (3.6)$$

entrambe  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ .

Sostituendo  $x = 0$  in (3.5) e  $x = \pi$  in (3.6) otteniamo

$$u(0, t) + u(0, t) = 0 \Rightarrow u(0, t) = 0$$

$$u(\pi, t) + u(\pi, t) = 0 \Rightarrow u(\pi, t) = 0$$

quindi  $v(x, t) := u(x, t)$ ,  $x \in [0, \pi]$ ,  $t \in [0, +\infty[$  risolve il (PC) e, come già visto, è unica e di classe  $C^\infty([0, \pi] \times ]0, +\infty[)$ .





# Bibliografia

- [1] [Gilbarg, Trudinger, 1977] D.Gilbarg, N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [2] [Lanconelli, 1997] E.Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Volume 2*, Pitagora Editrice Bologna, 1997.
- [3] [Pagani, Salsa, 1998] C.D.Pagani, S.Salsa, *Analisi Matematica, Volume 2*, Masson, 1998.
- [4] [Sauvigny, 2006] F.Sauvigny, *Partial Differential Equations 1, Volume 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [5] [Montanari, 2016] A.Montanari, *Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore*, note del corso di Complementi di Analisi Matematica, Università di Bologna, A.A. 2015/2016.



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare, in primis, la Professoressa Annamaria Montanari per l'aiuto fornitomi e la grande disponibilità e pazienza dimostratemi durante il periodo di stesura.

Un grosso ringraziamento va ai miei genitori, per avermi aiutato e sostenuto in tutte le mie scelte, per aver sempre creduto in me e per avermi dato la forza necessaria a superare ostacoli che a me sembravano insormontabili.

Ringrazio, poi, i miei coinquilini Andrea, Roberto, Franco e Christian per tutti i bei momenti passati insieme e per avermi fatto sentire a casa sin dal nostro primo giorno di convivenza.

Questo percorso universitario mi ha regalato tanti forti legami; ringrazio in particolare modo, ed in ordine temporale, Angelina, Luigi e Giulia per aver contato assieme a me gli ultimi, a volte interminabili, minuti alla fine della giornata di lezioni; ringrazio Paolo e Michele, nei quali ho trovato gli amici che tutti vorrebbero; un particolare ringraziamento va, infine, a Chiara per aver reso quest'ultimo periodo decisamente più sopportabile, per avermi spronato quando era il momento di darsi da fare e per aver gioito con me dopo i traguardi raggiunti insieme.

Ringrazio, infine, il mio gruppo di amici: Cristina, Matteo, Mattia, Giovanni, Milena e Gianluca; è bello aver qualcuno su cui poter sempre contare e con cui passare in allegria anche i momenti che sarebbero, altrimenti, noiosi e tristi.