

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Quantizzazione in gauge di cono-luce di particelle e stringhe

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Sunny Pradhan

Anno Accademico 2015/2016

Sommario

In questa tesi si discute la formulazione di una teoria quantistica della dinamica libera di particelle e stringhe relativistiche. La dinamica relativistica viene costruita in entrambi i casi a partire dalla formulazione classica con invarianza di gauge della parametrizzazione di, rispettivamente, linee e fogli di mondo. Si scelgono poi condizioni di gauge-fixing dette di cono-luce. La teoria quantistica viene poi formulata usando le prescrizioni di quantizzazione canonica di Dirac.

Introduzione

La teoria delle stringhe è la teoria che sostituisce le particelle elementari con degli oggetti unidimensionali, che chiameremo stringhe.

Questa teoria relativistica è stata formulata per la prima volta per descrivere gli adroni e fornire un modello per l'interazione forte. Sviluppi successivi mostrarono che la corretta descrizione delle interazioni forti è ottenuta usando la cosiddetta cromodinamica quantistica.

Oggi la teoria delle stringhe è reinterpretata come un modello unificato delle interazioni fondamentali, che riesce a unire sotto un'unica struttura sia il Modello Standard che la Relatività Generale, fornendo così anche un modello per la gravità quantistica.

Il Modello Standard è la teoria più accurata che abbiamo a disposizione, che fornisce una spiegazione di tre interazioni fondamentali su quattro, attraverso l'uso di teorie di gauge, verificato fino ad oggi con estrema precisione. Ma presenta alcuni problemi. Primo, risulta un po' troppo arbitrario: contiene un gran numero di parametri liberi e una configurazione di campi e multipletti di particelle che può risultare quasi innaturale e poco elegante. Secondo, l'unione del Modello Standard con la gravità porta a una teoria di campo quantizzato non rinormalizzabile. La teoria delle stringhe sembra risolvere questi problemi. I diversi multipletti di particelle vengono sostituite da un unico oggetto fondamentale, la stringa appunto; le diverse particelle diventano manifestazioni dei diversi modi di vibrazione della stringa e sono caratterizzate da un singolo parametro, la lunghezza della stringa. Inoltre, nella teoria compare naturalmente il gravitone, un bosone senza massa di spin 2, che si suppone essere l'intermediario dell'interazione gravitazionale. Per questi motivi, ed altri ancora, si suppone che la teoria delle stringhe sia una buona candidata a essere una teoria di unificazione.

In questa tesi discuteremo il modello più semplice: la stringa bosonica libera, con un approccio particolare alla quantizzazione di tale teoria, detta quantizzazione gauge cono di luce. A questo scopo riprenderemo una quantizzazione simile per le particelle relativistiche e descriveremo in particolare un famoso lavoro di Dirac [1] su come imporre le invarianze relativistiche in teorie dinamiche classiche e quantistiche.

Ovviamente questo modello della stringa bosonica non è l'unico esistente e ha anche sue problematiche associate a fluttuazioni tachioniche. In tempi odierni si preferisce lavorare con teorie delle superstringhe, ovvero di stringhe supersimmetriche. Ne esistono

diverse versioni, cinque per la precisione, tutte legate tra di loro da relazioni di dualità e quindi rappresentano facce diverse di un'unica teoria, la M-teoria, la cui formulazione esplicita rimane però ancora oscura.

Indice

1	Particelle Relativistiche	5
1.1	Richiami di meccanica	5
1.1.1	Formalismo lagrangiano	5
1.1.2	Formalismo hamiltoniano	8
1.1.3	Simmetrie e teorema di Noether	9
1.2	Forme di dinamica relativistica	11
1.3	Dinamica di una particella relativistica	14
1.4	Dinamica in forma frontale	18
1.4.1	Coordinate cono-luce	18
1.4.2	Impulso e energia cono-luce	20
1.4.3	Gauge di cono-luce	20
1.4.4	Algebra di Poincarè in forma frontale	21
1.5	Quantizzazione di una particella relativistica	22
1.5.1	Commutatori e prescrizione di quantizzazione	23
1.5.2	Rappresentazioni di Schroedinger e di Heisenberg	25
1.5.3	Quantizzazione in gauge di cono-luce	26
1.5.4	Operatori momento in cono-luce	28
1.5.5	Generatori di Lorentz in cono-luce	29
2	Stringhe Relativistiche	31
2.1	Azione di una stringa relativistica	31
2.2	Equazioni del moto e condizioni al contorno	34
2.3	Correnti conservate sul foglio di mondo	35
2.3.1	Quantità di moto	36
2.3.2	Simmetrie di Lorentz	37
2.4	Stringhe relativistiche in cono-luce	39
2.4.1	Scelta di una parametrizzazione	39
2.4.2	Equazione d'onda ed espansione in modi normali	40
2.4.3	Soluzione cono-luce delle equazioni del moto	42

3	Stringhe Relativistiche Quantizzate	46
3.1	Commutatori e hamiltoniana in cono-luce	46
3.2	Relazioni di commutazione per gli oscillatori	49
3.3	Modi trasversi di Virasoro	52
3.4	Generatori di Lorentz	58
	Riferimenti bibliografici	61

Capitolo 1

Particelle Relativistiche

Il Principio di Relatività impone delle condizioni che tutte le leggi fisiche devono soddisfare, nello specifico la Relatività Generale impone che le leggi fisiche, espresse in termini di coordinate curvilinee dello spazio-tempo, debbano essere invarianti per qualsiasi trasformazione di queste coordinate (vedi l'articolo di Dirac [1]). Per costruire una teoria atomica, una teoria che funzioni a scale di lunghezza molto piccole, si possono trascurare gli effetti gravitazionali e considerare solo la Relatività Ristretta che però va combinata con una formulazione hamiltoniana della dinamica, necessaria per fare una transizione alla teoria quantistica. Questi due requisiti, Principio di Relatività e formalismo hamiltoniano, non sono sufficienti di per sè per creare una teoria dinamica. È necessario anche specificare tutte le interazioni possibili.

In questo capitolo tratteremo il caso di una particella relativistica libera, quindi senza introdurre alcun tipo di interazione, costruendo la teoria dinamica e procedendo alla sua quantizzazione tracciando un percorso che riutilizzeremo quando tratteremo di stringhe.

1.1 Richiami di meccanica

1.1.1 Formalismo lagrangiano

Il formalismo lagrangiano è centrato sul *Principio di Minima Azione*, o di *Hamilton*. Consideriamo un sistema dinamico descritto da delle *coordinate generalizzate* q_i ($i = 1, 2, \dots$) che formano lo spazio delle configurazioni; le loro derivate temporali $\dot{q}_i \equiv dq_i/dt$ verranno chiamate *velocità generalizzate*. Esiste allora una funzione dinamica, ovvero una funzione di q_i , \dot{q}_i e non necessariamente del tempo t , detta *lagrangiana*, che denotiamo con L , che contiene tutte le informazioni dinamiche del sistema; l'integrale lungo una curva $q(t)$ di L è noto come funzionale d'*azione* $\mathcal{S}[q]$

$$\mathcal{S}[q] = \int_{t_0}^{t_f} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \quad (1.1)$$

dove t_0 e t_f sono rispettivamente il tempo iniziale e il tempo finale.

Secondo il Principio di Minima Azione, fissati i due punti $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$ ai tempi t_i e t_f , la traiettoria fisica del sistema tra i due punti è quella che minimizza l'azione

$$\delta\mathcal{S}[q] = 0 \quad (1.2)$$

È noto che da questa condizione si trova che le equazioni del moto sono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.3)$$

note anche come equazioni di Eulero-Lagrange, con s gradi di libertà sono un sistema di s equazioni del secondo ordine che richiedono quindi $2s$ costanti di integrazione. Per dimostrare come si ottiene (1.3) da (1.2) consideriamo una variazione della curva di minimo $q(t)$, mantenendo gli estremi fissi

$$q_i(t) \mapsto q_i(t) + \delta q_i(t), \quad \delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_f) = 0 \quad (1.4)$$

la variazione della lagrangiana

$$\delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \quad (1.5)$$

da cui consegue che la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[q] &= \mathcal{S}[q + \delta q] - \mathcal{S}[q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \delta L(q_i, \dot{q}_i) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t=t_i}^{t=t_f} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove abbiamo sfruttato

$$\delta \dot{q}_i(t) = \dot{q}'_i(t) - \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}(q'_i - q_i)(t) = \frac{d}{dt}(\delta q_i)(t) \quad (1.7)$$

e integrato per parti e gli estremi fissi. Ricordiamo al lettore che stiamo usando la convenzione di Einstein sulle somme, per indici latini non faremo distinzione tra indici in alto e indici in basso, al contrario degli indici greci. Dato che la variazione dell'azione $\delta\mathcal{S}[q]$ deve essere nullo per qualsiasi variazione δq , l'espressione tra parentesi dell'ultima riga di (1.6) deve essere necessariamente uguale a zero e otteniamo così le equazioni (1.3).

Classicamente la lagrangiana di un sistema meccanico è nella forma

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{q}^i \dot{q}_i - V \quad (1.8)$$

dove T è il termine di energia cinetica e V il potenziale. Ricordiamo che ad ogni coordinata q_i è associato un momento coniugato

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.9)$$

che saranno di fondamentale importanza nel formalismo hamiltoniano

Il formalismo lagrangiano di un sistema meccanico con finiti gradi di libertà può essere esteso, con alcune accortezze, a sistemi che possiamo dire che hanno infiniti gradi di libertà, come per esempio un campo (i.e. un campo scalare).

Consideriamo dei campi ϕ^a che dipendono da k variabili ξ^α . L'azione $\mathcal{S}[\phi^a]$ sarà nella forma

$$\mathcal{S}[\phi^a] = \int d^k \xi \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a) \quad (1.10)$$

dove $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$ indica la *densità di lagrangiana*. Per trovare le equazioni del moto consideriamo una trasformazione $\phi^a(\xi^\alpha) \mapsto \phi'^a(\xi'^\alpha)$ la cui variazione è $\delta\phi^a(\xi^\alpha) = \phi'^a(\xi^\alpha) - \phi^a(\xi^\alpha)$ con opportune condizioni al contorno. Di conseguenza la variazione della lagrangiana sarà

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(\phi^a, \partial\phi^a) &= \mathcal{L}(\phi^a + \delta\phi^a, \partial_\alpha \phi^a + \delta(\partial_\alpha \phi^a)) - \mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \delta(\partial_\alpha \phi^a) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Andando a valutare la variazione dell'azione $\mathcal{S}[\phi^a + \delta\phi^a] - \mathcal{S}[\phi^a]$ otteniamo

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S}[\phi^a] &= \int d^k \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \delta(\partial_\alpha \phi^a) \right) \\ &= \int d^k \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \right) \delta\phi^a = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove abbiamo sfruttato $\delta(\partial_\alpha \phi^a) = \partial_\alpha(\delta\phi^a)$, le condizioni al contorno, analogamente al caso precedente. Abbiamo ottenuto le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ^a

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} = 0 \quad (1.13)$$

che sono le equazioni del moto. Notiamo che tutto ciò è consistente con il caso meccanico se consideriamo le coordinate generalizzate $q_i = q_i(t)$ come dei campi unidimensionali, che dipendono solo da una coordinata, il tempo Galileiano t . Il problema di come costruire la lagrangiana o la densità di lagrangiana verrà affrontato successivamente.

1.1.2 Formalismo hamiltoniano

Fino ad adesso abbiamo formulato le leggi della meccanica attraverso l'assegnazione di coordinate e velocità generalizzate ottenendo delle equazioni del moto del secondo ordine. Un altro tipo di formulazione, quella hamiltoniana, usa come variabili dinamiche le coordinate e gli impulsi generalizzati. Questo approccio presenta diversi vantaggi tra qui delle equazioni del moto del primo ordine.

Le nostre variabili dinamiche sono ora le coordinate generalizzate q^i e i momenti coniugati

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (1.14)$$

che insieme formano lo spazio delle fasi. Si definisce *hamiltoniana*, o *funzione di Hamilton*, la trasformata di Legendre della lagrangiana L

$$H(q, p) = p_i \dot{q}^i - L \quad (1.15)$$

l'hamiltoniana contiene tutte le informazioni dinamiche del sistema. Le equazioni del moto sono date dalle *Equazioni Canoniche*

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (1.16)$$

notiamo che sono delle equazioni del primo ordine.

Nel formalismo hamiltoniano viene introdotta un'ulteriore struttura formale: le *parentesi di Poisson*. Siano f e g due funzioni dello spazio delle fasi, la loro parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è definita come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (1.17)$$

È dotata di diverse proprietà

- è antisimmetrica

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (1.18)$$

- è lineare e vale la regola di Leibniz

$$\begin{aligned} \{f, g + h\} &= \{f, g\} + \{f, h\} \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

- vale l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad (1.20)$$

Sono di fondamentale importanza le parentesi di Poisson delle coordinate e i momenti

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i \quad (1.21)$$

Le equazioni canoniche possono essere riscritte nella forma

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\} \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (1.22)$$

Possiamo riformulare l'azione sullo spazio delle fasi

$$\mathcal{S}[q, p] = \int (p_i dq^i - H(p, q) dt) = \int_{t_0}^{t_f} dt (p_i \dot{q}^i - H(q, p)) \quad (1.23)$$

Sfruttando il Principio di Minima Azione possiamo ottenere le equazioni canoniche

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{S}[q, p] &= \delta \int_{t_0}^{t_f} dt (p_i \dot{q}^i - H(q, p)) \\ &= \int_{t_0}^{t_f} dt \left(p_i \delta \dot{q}^i + \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) \\ &= p_i \delta q^i \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Il termine valutato tra t_0 e t_f svanisce e dato che $\delta \mathcal{S}[q, p] = 0$ per qualsiasi variazione δq_i e δp_i i termini tra parentesi devono necessariamente annullarsi ottenendo così (1.16).

1.1.3 Simmetrie e teorema di Noether

Il teorema di Noether mette in luce il legame tra simmetrie, intese come invarianze per trasformazioni, e quantità conservate. Quando parliamo di trasformazioni continue stiamo parlando in realtà di *gruppi di Lie*, ovvero di un gruppo in cui i suoi elementi dipendono in maniera continua da uno o più parametri.

Innanzitutto, un insieme G di elementi g è chiamato *gruppo* se per i suoi elementi è definito un'operazione binaria interna al gruppo, ovvero ad ogni coppia di elementi (g_1, g_2) di G viene associato un terzo elemento g_3 che è dato dal prodotto di g_1 e g_2 , ossia $g_3 = g_1 \cdot g_2$. Per formare un gruppo il prodotto deve essere associativo, quindi $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$, dotato di una identità 1_G , tale per cui $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$, e ciascuno elemento g ha un'inversa g^{-1} , ovvero $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1_G$. Se questi elementi possono essere parametrizzati in maniera continua allora siamo di fronte a un gruppo di Lie.

Un gruppo di Lie G è caratterizzato da dei *generatori* h_i , che insieme alle loro relazioni di commutazione formano un *algebra di Lie*, e ciascun elemento g di G è individuato da dei parametri θ_i per cui

$$g = \exp(\theta_i h_i) = 1 + \theta_i h_i + \frac{(\theta_i h_i)^2}{2} + \frac{(\theta_i h_i)^3}{3!} + \dots \quad (1.25)$$

Una trasformazione infinitesima vicino all'identità può essere scritta nella forma

$$g = 1 + \theta_i h_i \quad (1.26)$$

dove con 1 indichiamo l'identità del gruppo G , i θ_i sono infinitesimi e stiamo trascurando termini di ordine $\mathcal{O}(\theta^2)$.

Se i parametri del gruppo sono delle funzioni arbitrarie del tempo o dello spazio si parla allora di *simmetrie locali*, o di *di gauge*, altrimenti si parla di *simmetrie rigide*.

Il Teorema di Noether, nella sua forma più semplificata, afferma che se un sistema dinamico è caratterizzato da una lagrangiana invariante per un gruppo di trasformazioni continue allora a questa invarianza è associata un integrale primo del moto. Consideriamo una lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ e applichiamo una trasformazione infinitesima delle coordinate

$$q_i(t) \mapsto q'_i(t') \quad (1.27)$$

con associato eventualmente una trasformazione del tempo $t' = t'(t)$. La variazione delle coordinate che ne risulta

$$\delta_\epsilon q_i(t) = q'_i(t) - q_i(t) = \epsilon h_i(q, t) \quad (1.28)$$

dove ϵ è un parametro infinitesimo (siamo nel caso di simmetrie rigide) e $h_i(q, t)$ sono i generatori della trasformazione. Ipotizziamo che la lagrangiana sia invariante, ovvero $\delta_\epsilon L = 0$. Esplicitando la variazione della lagrangiana troviamo che

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon L &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta_\epsilon q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_\epsilon \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta_\epsilon q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_\epsilon q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta_\epsilon q_i \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta_\epsilon q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_\epsilon q_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_\epsilon q_i \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

dove abbiamo sfruttato $\delta \dot{q}_i = d\delta q_i/dt$ e le equazioni di Eulero-Lagrange (1.3).

Quindi se abbiamo $L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i + \delta_\epsilon q_i, \dot{q}_i + \delta_\epsilon \dot{q}_i, t')$, ossia che è invariante per le trasformazioni generate da $h_i(q, t)$ allora la quantità

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i(q, t) \quad (1.30)$$

è un integrale primo del moto. Più in generale si richiede l'invarianza dell'azione, non della lagrangiana. Questo succede se la lagrangiana varia al più di una derivata totale $\delta L = \frac{d}{dt} \Omega$ e ripetendo il ragionamento precedente si ottiene che $I = (\partial L / \partial \dot{q}^i) h^i - \Omega$ è costante.

Consideriamo ora una densità di lagrangiana \mathcal{L} dei campi ϕ^a , funzioni di k coordinate ξ^α . Applichiamo una trasformazione infinitesima dei campi $\phi^a(\xi^\alpha) \mapsto \phi'^a(\xi'^\alpha)$ tale che

$$\delta \phi^a(\xi^\alpha) = \phi'^a(\xi^\alpha) - \phi^a(\xi^\alpha) = \epsilon^i h_i^a(\phi, \xi) \quad (1.31)$$

per cui la lagrangiana risulti invariante, $\delta\mathcal{L} = 0$. Seguendo gli stessi passaggi di prima, esplicitando la variazione $\delta\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\delta(\partial_\alpha\phi^a) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a + \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\delta\phi^a\right) - \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\right)\delta\phi^a \\
&= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} - \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\right)\right]\delta\phi^a + \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\delta\phi^a\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\delta\phi^a\right) = 0
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Le quantità J_i^α definite come

$$J_i^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}h_i^a(\phi, \xi) \tag{1.33}$$

sono chiamate *correnti di Noether* e dall'ultima riga di (1.32) otteniamo l'equazione di continuità per queste correnti

$$\partial_\alpha J_i^\alpha = 0 \tag{1.34}$$

che sono associate alla conservazione di una carica corrispondente Q_i

$$Q_i = \int d\xi^1 \dots d\xi^k J_i^0 \tag{1.35}$$

Precisiamo che J_i^α è α -esima componente, rispetto alle coordinate ξ , della corrente conservata dalla i -esima trasformazione h_i^a .

La trattazione può essere fatta più generale, possiamo andare a considerare trasformazioni che conservano le equazioni del moto, quindi non modificano la fisica del sistema, e che lasciano l'azione, non la lagrangiana, invariata a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali)

$$\mathcal{S}[q] \rightarrow \mathcal{S}[q'] = \mathcal{S}[q] + \text{termini di bordo} \tag{1.36}$$

1.2 Forme di dinamica relativistica

Come è stato scritto a inizio capitolo, il Principio di Relatività impone delle condizioni su tutte le leggi fisiche. Nella nostra trattazione ignoreremo gli effetti gravitazionali e considereremo solo la Relatività Ristretta la quale impone che le leggi fisiche siano invarianti per cambio di sistema di riferimento inerziale. Questo deriva dal fatto che le leggi fisiche devono essere indipendenti dalle posizioni e dalle velocità degli osservatori.

Un sistema di riferimento inerziale è rappresentato da un insieme di coordinate x^μ la cui metrica è nella forma costante

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

per tre dimensioni spaziali (che hanno segnatura $+$ nella nostra convenzione) e una dimensione temporale (che hanno segnatura $-$).

L'insieme delle trasformazioni che conservano la metrica (1.37) che possono essere combinate tra di loro in maniera associativa è nota come gruppo di Poincarè. Sono delle trasformazioni lineari nella forma

$$x^\mu \mapsto x^{\mu'} = a^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (1.38)$$

dove a^μ rappresenta una traslazione del sistema di riferimento e Λ una rotazione o un boost e soddisfa

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad \longleftrightarrow \quad \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.39)$$

Il gruppo di Poincarè è un gruppo di Lie quindi possiamo considerare un trasformazione infinitesima vicino all'identità, perciò consideriamo a^μ come una costante infinitesima e sviluppiamo $\Lambda^\mu{}_\nu$ intorno all'identità

$$\Lambda^\mu{}_\nu = 1 + \omega^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (1.40)$$

dove i $\omega^\mu{}_\nu$ sono infinitesimi, $\delta^\mu{}_\nu$ la delta di Kronecker e stiamo trascurando termini di ordine $\mathcal{O}(\omega^2)$. La condizione (1.39) deve continuare a valere, perciò

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \\ &= \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha) (\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) \\ &= \eta_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\nu} \omega^\nu{}_\beta + \eta_{\mu\beta} \omega^\mu{}_\alpha + \mathcal{O}(\omega^2) \end{aligned} \quad (1.41)$$

e troviamo che $\omega_{\alpha\beta}$ deve essere antisimmetrico

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (1.42)$$

Una trasformazione infinitesima $x^\mu \mapsto x^\mu + \delta x^\mu$ si dice *generata* da una funzione scalare F se

$$\delta x^\mu = \{x^\mu, F\} \quad (1.43)$$

Nel caso di un trasformazione di Poincarè

$$F = P_\mu a^\mu - \frac{1}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \quad (1.44)$$

dove P_μ e $M_{\mu\nu}$ sono i generatori del gruppo di Poincarè e sono caratterizzate dalle loro parentesi di Poisson

$$\{P_\mu, P_\nu\} = 0 \quad (1.45a)$$

$$\{M_{\mu\nu}, P_\rho\} = g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu \quad (1.45b)$$

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\} = g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\rho\nu} + g_{\nu\sigma}M_{\rho\mu} \quad (1.45c)$$

e $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$.

I P_μ generano traslazioni e i $M_{\mu\nu}$ rotazioni e boost. In particolare

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} && \text{rotazione intorno a } x^i \\ K_i &= M_{0i} && \text{boost nella direzione } x^i \end{aligned}$$

($i, j = 1, 2, 3$). I P_μ e i $M_{\mu\nu}$ attraverso le loro relazioni (1.45) formano l'algebra di Poincarè.

Una qualsiasi teoria dinamica invariante per Poincarè deve fornire una realizzazione dell'algebra di Poincarè attraverso le sue variabili dinamiche.

Una realizzazione banale la si ottiene se consideriamo le coordinate e i momenti canonici q^μ e p^μ come variabili dinamiche. Soddisfano quindi

$$\{q^\mu, q^\nu\} = 0 \quad \{p_\mu, p_\nu\} = 0 \quad \{q^\mu, p_\nu\} = \delta_\nu^\mu \quad (1.46)$$

e la realizzazione è data da

$$P_\mu = p_\mu \quad M_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu - q_\nu p_\mu \quad (1.47)$$

questa realizzazione, anche se covariante, non suggerisce alcuna hamiltoniana ma notiamo che i generatori sono dati dagli impulsi e dai momenti angolari. Le simmetrie rispetto al gruppo di Poincarè sono un esempio di simmetrie rigide, i parametri a^μ e $\omega^{\mu\nu}$ non dipendono nè dallo spazio nè dal tempo.

Il nostro obiettivo è quello di descrivere l'evoluzione di un sistema relativistico. Consideriamo il caso di una particella puntiforme che descrive nello spazio-tempo una traiettoria, chiamata linea di mondo. Vedremo che l'azione di una particella è proporzionale alla lunghezza d'arco della linea di mondo ed è indipendente dalla parametrizzazione di essa. Questa invarianza può essere vista come una simmetria di *gauge* considerata una "ridondanza" nella nostra descrizione. Chiamiamo τ il parametro con cui parametrizziamo le nostre linee di mondo, i.e. $q^\mu = q^\mu(\tau)$ e $p^\mu = p^\mu(\tau)$. Una scelta corretta di τ non va a modificare le proprietà del nostro sistema.

Con la scelta di τ otteniamo una foliazione dello spazio-tempo, ovvero lo suddividiamo in tante ipersuperfici Σ ognuno descritta da $\tau = \text{const}$. Facendo evolvere τ otteniamo l'evoluzione da $\Sigma_0 = \{\tau = \tau_0\}$ a $\Sigma_1 = \{\tau = \tau_1 > \tau_0\}$. È chiaro che τ gioca il ruolo di variabile "tempo" nella nostra descrizione.

In pratica, si introducono delle coordinate dello spazio-tempo $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)$ dove le coordinate $\xi^1 \dots \xi^3$ descrivono l'ipersuperficie Σ e ξ^0 fa da parametro "temporale" (i.e. $\tau = \xi^0$), possiamo dire che indicizza la nostra foliazione, ovvero per ciascun valore ξ^0 corrisponde un'unica superficie $\Sigma(\xi^0)$. Fissando τ fissiamo il gauge. La scelta di τ deve essere una scelta intelligente; nello specifico dobbiamo ottenere una foliazione per cui ogni superficie Σ si interseca una e una sola volta con tutte le linee di mondo. Se N^μ rappresenta il versore della superficie Σ allora questo può essere di tipo tempo e di tipo luce. Se è di tipo spazio allora Σ conterrà delle linee di mondo e perdiamo la proprietà di unicità.

La scelta della foliazione può sembrare abbastanza arbitraria ma consideriamo ora l'azione del gruppo di Poincarè su una ipersuperficie Σ della nostra foliazione. In particolare, consideriamo i generatori che lasciano Σ invariato, questi formeranno un sottogruppo G_Σ denominato *gruppo di stabilità* di Σ e i suoi generatori sono detti *cinetici*, invece gli altri sono detti *dinamici* e, per definizione, mappano Σ in una nuova ipersuperficie Σ' ottenendo così un'evoluzione di Σ .

Se vogliamo costruire una teoria in qualche modo utile la nostra foliazione deve essere tale che il gruppo di stabilità non risulti vuoto quindi le ipersuperfici devono mostrare un alto grado di simmetria. Richiediamo quindi che G_Σ agisca in maniera transitiva su Σ , ovvero: due punti qualsiasi di Σ possono essere connessi da una trasformazione di G_Σ . Con questo requisito ci sono esattamente cinque classi di ipersuperfici, che chiameremo *forme*, non equivalenti tra di loro [3].

Noi ne andremo a considerare solo due, la forma istantanea (*instant form*) e la forma frontale (*front form*). Nella forma istantanea prendiamo come parametro il tempo dell'osservatore, ciò equivale a prendere come ipersuperfici gli iperpiani $t = \text{costante}$. Nella forma istantanea, come superficie si prende quella data da

$$x^0 + x^1 = \text{cost.} \quad (1.48)$$

che sono degli iperpiani tangenti al cono di luce e il parametro lungo il quale lo si fa evolvere è $\tau = x^0 + x^1$

1.3 Dinamica di una particella relativistica

Trattiamo ora in dettaglio il caso di una particella libera di massa $m > 0$. L'azione classica non relativistica per una particella libera è

$$\mathcal{S}_{\text{nr}} = \int dt \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i \quad (1.49)$$

dove $\dot{x}^i \equiv dx^i/dt$ ($i = 1, 2, \dots$) sono le velocità lungo le diverse direzioni. Le equazioni del moto che seguono dal Principio di Minima Azione sono

$$\frac{dp^i}{dt} = 0 \quad (1.50)$$

dove $p^i \equiv m\dot{x}^i$ è il momento lungo x^i . In meccanica classica il parametro temporale t è un parametro assoluto che scorre allo stesso modo per tutti i sistemi di riferimento, ovvero tutti gli osservatori misurano lo stesso intervallo temporale tra due dati eventi. Ciò è in netto contrasto con la teoria della relatività ristretta che afferma che la distanza temporale tra due eventi dipende dal sistema di riferimento inerziale. È noto che le trasformazioni di Lorentz per le ordinarie velocità spaziali $v^i \equiv dx/dt$ sono delle trasformazioni per niente lineari, per cui con un cambio di sistema di riferimento l'integrando in (1.49) assumerà una forma complicata che non darà più luogo a un'equazione del moto nella forma di (1.50).

Sappiamo le equazioni del moto devono essere invarianti per Lorentz, nel senso che sono le stesse per tutti gli osservatori inerziali, e queste equazioni possono essere ottenute con il Principio di Minima Azione. Ipotizzeremo quindi che l'azione sia Lorentz-invariante. Questa ipotesi è molto restrittiva, un boost in una qualsiasi direzione modifica l'azione (1.49) ma non le equazioni (1.50).

Una particella relativistica traccia una curva nello spazio-tempo, detta *linea di mondo*, e tutti gli osservatori concorderanno sulla lunghezza d'arco di questa curva che non è lunghezza "puramente spaziale" o "puramente temporale", che invece dipendono dall'osservatore. In Relatività, dati due eventi $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ (con $\Delta x = x^{(2)} - x^{(1)}$), due osservatori inerziali distinti non saranno d'accordo sulla distanza spaziale Δx^i , che è soggetto al fenomeno della contrazione delle lunghezze, o sulla distanza temporale Δx^0 , che invece è soggetto al fenomeno della dilatazione dei tempi, ma concorderanno sulla distanza spazio-temporale che è definita come:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \quad (1.51)$$

Questo perché le trasformazioni che corrispondono a un cambio di sistema di riferimento sono delle trasformazioni che conservano il tensore metrico dello spazio-tempo (in questo caso $\eta_{\mu\nu}$) che definisce appunto le distanze. Di conseguenza tutti gli osservatori inerziali misurano la stessa lunghezza d'arco della linea di mondo.

Ipotizziamo quindi che l'azione \mathcal{S} della particella sia proporzionale alla lunghezza della linea di mondo \mathcal{P}

$$\mathcal{S} \propto \int_{\mathcal{P}} ds \quad (1.52)$$

dove ds è un elemento di linea infinitesimo

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv -dx^\mu dx_\mu \quad (1.53)$$

dove abbiamo utilizzato $dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu$ e il segno meno è stato introdotto per far sì che le distanze di tipo tempo (ovvero quelle percorribili da particelle fisiche) risultino positive. Nella (1.52) i due membri non hanno le stesse dimensioni

$$[\mathcal{S}] = \text{ML}^2\text{T}^{-1} \quad [ds] = \text{L} \quad (1.54)$$

manca quindi una costante moltiplicativa con le dimensioni di una massa per un velocità che deve essere Lorentz-invariante. Una buon candidato è mc dove m è la massa a riposo della particella e c la velocità della luce. La massa è un invariante relativistico e la velocità della luce una costante universale.

Supponiamo che la linea di mondo possa essere parametrizzata in maniera continua da un parametro τ tale che la mappa $\tau \mapsto x^\mu = x^\mu(\tau)$ risulti monotono crescente strettamente. Possiamo ora esplicitare (1.53)

$$ds^2 = -\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} d\tau^2 \quad (1.55)$$

così che l'azione finale assume la forma

$$\mathcal{S}[x^\mu] = -mc \int_{\mathcal{P}} ds = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} \equiv -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \quad (1.56)$$

dove è stata utilizzata la notazione $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ ed è stato inserito un meno per poter ottenere le equazioni del moto corrette, come vedremo più avanti. Introduciamo la notazione $\dot{x} \cdot \dot{x} \equiv \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$ per alleggerire le equazioni.

Applicando ora il principio di Hamilton possiamo ricavarci le equazioni del moto. Variando l'azione (1.56) tenendo gli estremi fissi $\delta x^\mu(t_i) = \delta x^\mu(t_f) = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{S}[x^\mu] &= -mc \delta \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}} \\ &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \delta \left(\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}} \right) \\ &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \delta \dot{x}_\mu \\ &= -mc \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \delta x_\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \right) \delta x_\mu \\ &= mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \right) \delta x_\mu \end{aligned} \quad (1.57)$$

di conseguenza le equazioni del moto sono

$$mc \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \right) = 0 \quad (1.58)$$

L'azione in (1.56) è invariante per riparametrizzazione di τ . Consideriamo una trasformazione del tipo $\tau \mapsto \tau' = \tau'(\tau)$ per cui

$$d\tau = d\tau' \frac{d\tau}{d\tau'} \quad \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx_\mu}{d\tau'} \left(\frac{d\tau'}{d\tau} \right)^2 \quad (1.59)$$

e si nota che questa riparametrizzazione non modifica la forma dell'azione

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} = \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} d\tau' \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau} \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx_\mu}{d\tau'}} = \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} d\tau' \sqrt{-\frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx_\mu}{d\tau'}} \quad (1.60)$$

questo ci collega al discorso fatto in Sezione 1.2. L'invarianza per riparametrizzazione lo possiamo considerare come una simmetria locale, o di gauge, per trasformazioni di tipo

$$\delta x^\mu = \dot{x}^\mu \delta\tau \quad (1.61)$$

dove $\delta\tau$ può essere una qualsiasi funzione arbitraria dello spazio-tempo $\xi(\tau)$.

Sfruttiamo ora questa invarianza e poniamo

$$x^0 = t = \tau \quad (c = 1) \quad (1.62)$$

questa scelta corrisponde alla forma istantanea e le nostre variabili dinamiche diventano $x^i(t)$. Riscriviamo l'elemento di linea ds^2 come

$$ds = \sqrt{dt^2 - dx_i dx_i} = dt \sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}_i} \quad (1.63)$$

Di conseguenza l'azione diventa

$$\mathcal{S}[x_i] = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}_i} \quad (1.64)$$

e le equazioni del moto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{x}_i \dot{x}_i}} \right) = 0 \quad (1.65)$$

L'azione (1.64) non è più *manifestamente* Lorentz-invariante (ma rimane comunque Lorentz-invariante) ma d'altro canto fa uso di $D - 1$ variabili dinamiche $x^i(t)$ invece che di D variabili dinamiche $x^\mu(\tau)$ (dove D è la dimensione dello spazio-tempo) perché è stato fissato x^0 .

Dalla lagrangiana di (1.56), $L = -m\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$, ci possiamo calcolare i momenti coniugati

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \quad (1.66)$$

e ottenere l'importante relazione, nota come relazione *mass-shell*

$$p^\mu p_\mu = m^2 \frac{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}{(-\dot{x} \cdot \dot{x})} \quad \rightarrow \quad p^\mu p_\mu = -m^2 \quad (1.67)$$

e con (1.66) possiamo calcolarci l'hamiltoniana

$$H = p_\mu \dot{x}^\mu - L = m \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} + m \sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}} = 0 \quad (1.68)$$

che però risulta nulla. Ne ricaviamo che le coordinate e i momenti canonici x^μ e p_μ non sono adatti per descrivere la dinamica in forma hamiltoniana perché non tengono conto del vincolo sui momenti (1.67). La quantità p_μ è anche noto come quadrimpulso.

Consideriamo ora la forma istantanea, in cui le nostre variabili dinamiche sono $x^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots$). Da (1.64) ricaviamo i momenti p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1 - \dot{x}_j\dot{x}_j}} \quad (1.69)$$

che sono vincolati da (1.67) che ci permette di ricavare p^0

$$-(p^0)^2 + p_i p_i + m^2 = 0 \quad \rightarrow \quad p^0 = \sqrt{p_i p_i + m^2} \quad (1.70)$$

Usando (1.47) otteniamo

$$P_i = p_i \quad M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i \quad (1.71)$$

$$P_0 = \sqrt{p_i p_i + m^2} \quad M_{i0} = x_i \sqrt{p_i p_i + m^2} \quad (1.72)$$

I nostri generatori cinematici in questo caso sono P_i e M_{ij} , le traslazioni e le rotazioni, per un totale di *sei* generatori cinematici. I generatori dinamici sono P_0 e M_{i0} . Sappiamo dalla meccanica classica che l'hamiltoniana genera l'evoluzione temporale quindi possiamo interpretare $P_0 \equiv H_t$ come la nostra hamiltoniana perché genera le traslazioni lungo la direzione x^0 , ovvero quella del tempo.

1.4 Dinamica in forma frontale

1.4.1 Coordinate cono-luce

Per trattare la forma frontale introduciamo le coordinate cono-luce

$$\begin{aligned} x^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \\ x^- &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1) \end{aligned} \quad (1.73)$$

sostituiamo (x^0, x^1) con (x^+, x^-) e manteniamo (x^2, x^3) , che costituiscono la parte trasversale. Questo cambio di coordinate non equivale a un cambio di sistema di riferimento perché non esiste alcuna trasformazione delle coordinate che permette di passare da (x^0, x^1, x^2, x^3) a (x^+, x^-, x^2, x^3) , non conserva la forma della metrica come vedremo.

Gli assi coordinati (x^+, x^-) corrispondono alle linee di mondo di fotoni emessi dall'origine nella direzione x^1 , i.e. la linea di mondo di un fotone emesso nella direzione x^1 positiva

è descritto da $x^- = 0$. Possiamo pensare a x^+ , o anche x^- , come a una “coordinata tempo” nel senso che nell’evoluzione di una qualsiasi traiettoria fisica, a parte alcuni scenari, la coordinata x^+ incrementa. D’ora in poi considereremo x^+ come il nostro tempo cono-luce. Così facendo, nel caso speciale di un fotone che viaggia nella direzione x^1 negativa il tempo cono-luce risulta fermo; trascureremo d’ora in poi questo caso particolarissimo.

Differenziando e manipolando (1.73) troviamo

$$2dx^+dx^- = (dx^0 + dx^1)(dx^0 - dx^1) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \quad (1.74)$$

per cui

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.75)$$

e osserviamo immediatamente che per ricavare dx^\pm rispetto alla metrica non è necessaria alcuna radice quadrata. Per scrivere quest’equazione in forma tensoriale useremo indici greci che non scorrono più su $(0, 1, 2, 3)$ ma su $(+, -, 2, 3)$; introduciamo un nuovo tipo di indice, quello latino maiuscolo (i.e. I, J), che scorre sugli indici “trasversali” $(2, 3)$. Tenendo conto di ciò possiamo riscrivere l’espressione della metrica come

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (1.76)$$

dove abbiamo introdotto la metrica cono-luce $\hat{\eta}$, analogo alla metrica di Minkowski (1.37) ma non conserva più una forma diagonale rimanendo comunque simmetrica

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

Dato un qualsiasi quadrivettore a^μ possiamo definire le sue componenti cono-luce

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1), \quad a^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1) \quad (1.78)$$

Possiamo inoltre definire il prodotto scalare di due quadrivettori a^μ e b^μ in coordinate cono-luce

$$a \cdot b \equiv \hat{\eta}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3 \quad (1.79)$$

e si nota immediatamente che $-a^-b^+ - a^+b^- = -a^0b^0 + a^1b^1$. Dalla regola di abbassamento dell’indice, $a_\mu = \eta_{\mu\nu}a^\nu$, troviamo che

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+ \quad (1.80)$$

1.4.2 Impulso e energia cono-luce

Prendiamo in considerazione il quadrimpulso, che in coordinate lorentziane è

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z), \quad (1.81)$$

le sue componenti cono-luce saranno ovviamente

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1), \quad p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1). \quad (1.82)$$

In coordinate lorentziane x^0 è il tempo e p^0 l'energia E perché l'energia è il momento coniugato del tempo. Quindi è naturale presupporre che se x^+ il tempo cono-luce allora p^+ sarà l'energia cono-luce E_{cl} ma questo non è corretto. Le coordinate cono-luce non si comportano come le coordinate lorentziane. Entrambi p^\pm sono di tipo energia, nel senso che sono positive per particelle fisiche, quindi entrambi sono validi candidati per l'energia cono-luce ma la scelta corretta è $-p_+ \equiv p^-$. Questa scelta è giustificata dal fatto che l'energia e il tempo sono variabili coniugate. Nel prodotto $p_\mu x^\mu$, in coordinate lorentziane

$$p_\mu x^\mu = p_0 x^0 + p_1 x^1 + p_2 x^2 + p_3 x^3 \quad (1.83)$$

$p_0 = -E$ è accoppiato con $x^0 \equiv t$. In coordinate cono-luce

$$p_\mu x^\mu = p_+ x^+ + p_- x^- + p_2 x^2 + p_3 x^3 \quad (1.84)$$

p_+ è accoppiato con x^+ , il tempo cono-luce, quindi possiamo identificare $p_+ = -E_{\text{cl}}$, ossia $p^- = E_{\text{cl}}$.

Le parentesi di Poisson tra x^μ e p^μ in coordinate cono-luce sono

$$\{x^I, p^J\} = \delta^{IJ} \quad \{x^\pm, p^\mp\} = -1 \quad (1.85)$$

e tutti gli altri nulli, ma la dinamica dovrà essere vincolata da (1.67) per una particella relativistica.

1.4.3 Gauge di cono-luce

Nella forma frontale la foliazione dello spazio-tempo è data dalle superfici $\Sigma = \{x^\mu : x^0 + x^1 = \text{cost.}\}$, ciò corrisponde a prendere le superfici $\{x^\mu : x^+ = \text{cost.}\}$. Fissiamo il gauge, che significa fissare la parametrizzazione di τ , con la condizione

$$x^+ = \frac{p^+}{m^2} \tau \quad (1.86)$$

chiamata *gauge di cono-luce*, in cui τ è proporzionale a x^+ . Sia m che p^+ sono delle costanti del moto della particella. Inserendo (1.86) in (1.66) otteniamo

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x} \cdot \dot{x}}} \frac{p^+}{m} \dot{x}^+ \rightarrow \dot{x} \cdot \dot{x} = -\frac{1}{m^2} \quad (1.87)$$

da cui otteniamo $p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu$ che riduce le nostre equazioni del moto a

$$\ddot{x}_\mu = 0 \quad (1.88)$$

La comparsa di un fattore m^2 invece che di un fattore m consistente col fatto che abbiamo scelto un parametro τ adimensionale.

Riprendiamo la relazione mass-shell $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$, espandendola in coordinate cono-luce

$$-2p^+ p^- + p^I p^I + m^2 = 0 \quad (1.89)$$

($I = 2, 3$) otteniamo immediatamente

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad (1.90)$$

questo significa che la componente p^- è determinata dalle componenti p^+ e p^I .

Sappiamo che $dx^-/d\tau = p^-/m^2$ e che p^- è costante per un particella libera, quindi

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad (1.91)$$

dove x_0^- è una costante d'integrazione. Lo stesso vale anche per le direzioni trasversali

$$\frac{dx^I}{d\tau} = \frac{p^I}{m^2} \quad \rightarrow \quad x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau \quad (1.92)$$

con la differenza che i p^I sono indipendenti tra loro mentre p^- è vincolato. Gli x_0^I sono costanti d'integrazione.

1.4.4 Algebra di Poincarè in forma frontale

Analizziamo ora la realizzazione dell'algebra di Poincarè nel gauge di cono-luce. Utilizzando le espressioni (1.45) e (1.90) troviamo

$$P^I = p^I \quad M^{23} = x^2 p^3 - x^3 p^2 \quad (1.93a)$$

$$P^+ = p^+ \quad M^{+I} = -x^I p^+, \quad M^{+-} = -x^- p^+ \quad (1.93b)$$

$$P^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad M^{-I} = x^- p^I - \frac{x^I}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad (1.93c)$$

Ricordandoci di (1.43) e di (1.85) vediamo che P^I e P^+ generano le traslazioni nelle direzioni x^I e x^+ rispettivamente mentre M^{+I} e M^{+-} sono i boost nelle rispettive direzioni. Invece M^{23} è una rotazione intorno all'asse x^1 . Abbiamo così un totale di *sette generatori cinematici*. La forma frontale è quella con il numero più grande di generatori cinematici.

I generatori dinamici sono invece P^- , M^{-1} e M^{-2} , in particolare P^- agisce da hamiltoniana H_{x^+} .

È possibile dimostrare che la sottoalgebra di Poincarè data da P^μ , M^{23} e M^{+I} è isomorfo all'algebra del gruppo di Galileo bidimensionale [3]. I generatori di Galileo per una particella libera in uno spazio bidimensionale sono i momenti k^i , il momento angolare $L = \epsilon^{ij}x^i k^j$, i boost galileiani $G^i = \mu x^i$, l'hamiltoniana $H = k^i k^i / 2\mu$ e la massa μ . Se identifichiamo

$$\begin{aligned} P^I &\leftrightarrow k^i, & M^{23} &\leftrightarrow L, & M^{+I} &\leftrightarrow -2G^i, \\ P^+ &\leftrightarrow 2\mu, & P^- &\leftrightarrow H \end{aligned} \quad (1.94)$$

realizziamo questo isomorfismo.

1.5 Quantizzazione di una particella relativistica

In meccanica classica lo stato fisico di un sistema viene completamente determinato dal valore dei suoi osservabili, per esempio nel formalismo hamiltoniano lo stato del sistema viene completamente individuato dalle coordinate nello spazio delle fasi, ovvero dai valori delle coordinate q_i e dei momenti p_i .

Questa corrispondenza viene persa in meccanica quantistica. Se un sistema quantistico è preparato sempre nello stato $|\Psi\rangle$ e andiamo a misurare un osservabile A , non otterremo necessariamente sempre lo stesso valore numerico a di A .

Se da un lato perdiamo la corrispondenza tra stati e osservabili dall'altro guadagniamo il *Principio di Sovrapposizione*. L'insieme di tutti gli stati $\{|\Psi\rangle\}$ di un sistema quantistico ha la struttura di uno spazio di Hilbert complesso, ovvero di uno spazio vettoriale complesso, spesso infinito-dimensionale, dotato di prodotto scalare. Questo vuol dire che è sempre possibile esprimere uno stato $|\Psi\rangle$ come una combinazione lineare di stati $|\phi_i\rangle$.

Inoltre, sempre grazie alla struttura di spazio vettoriale, è possibile costruire una *base* $\{|a\rangle\}$, per cui un *qualsiasi* stato $|\Psi\rangle$ può essere espresso come una combinazione lineare degli $|a\rangle$. I vettori $|\Psi\rangle$ di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} vengono spesso chiamati anche *ket*, mentre i vettori duali $\langle\Psi|$ *bra*.

Il prodotto scalare, o interno, o *bra-ket*, di \mathcal{H} è una funzione bilineare che ad ogni coppia di ket ($|\phi'\rangle, |\phi''\rangle$) associa un numero complesso $\langle\phi'|\phi''\rangle$ con le proprietà di

$$\langle\phi'|\phi''\rangle = \overline{\langle\phi''|\phi'\rangle} \quad \text{hermiticità} \quad (1.95a)$$

$$\langle\phi'|\phi'\rangle \geq 0, \quad \langle\phi'|\phi'\rangle = 0 \Leftrightarrow \phi' = 0 \quad \text{definita positività} \quad (1.95b)$$

Abbiamo realizzato, o meglio ipotizzato, una identificazione tra stati e vettori di uno spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} .

Nella teoria quantistica gli osservabili vengono identificati con *operatori hermitiani* che agiscono su \mathcal{H} . Un'operatore su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è una funzione lineare $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, ossia:

$$\hat{A}(|\phi'\rangle c' + |\phi''\rangle c'') = \hat{A}|\phi'\rangle c' + \hat{A}|\phi''\rangle c'' \quad \forall |\phi'\rangle, |\phi''\rangle \in \mathcal{H}, \forall c', c'' \in \mathbb{C} \quad (1.96)$$

Dato un operatore \hat{A} si definisce il suo aggiunto \hat{A}^\dagger come

$$\langle \phi' | \cdot (\hat{A} |\phi''\rangle) = (\langle \phi' | \hat{A}^\dagger) \cdot |\phi''\rangle \quad (1.97)$$

dove \hat{A}^\dagger agisce su $\langle \phi' |$, ovvero il vettore duale di $|\phi'\rangle$. \hat{A} si dice autoaggiunto se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Dato un operatore \hat{A} , un vettore $|a\rangle$ si dice autovettore di \hat{A} di autovalore a' se

$$\hat{A} |a\rangle = |a\rangle a' \quad (1.98)$$

Se ad uno stesso autovalore a' di \hat{A} corrispondono più autovettori linearmente indipendenti allora a' si dice autovalore degenero e l'insieme $\{a'\}$ di tutti gli autovalori di \hat{A} è chiamato *spettro* di \hat{A} . Un operatore \hat{A} autoaggiunto si dice *hermitiano* se \hat{A} ammette una base di autovettori, questa base risulterà ortonormale. Gli autovalori di un operatore hermitiano sono sempre reali.

Nella teoria quantistica gli osservabili vengono identificati con operatori hermitiani e gli autovettori vengono chiamati *autostati*. Un autostato ha la seguente proprietà: se un sistema quantistico viene sempre preparato nell'autostato $|a\rangle$ di \hat{A} di autovalore a' allora di tale osservabile restituisce sempre lo stesso valore numerico a' .

1.5.1 Commutatori e prescrizione di quantizzazione

Una delle proprietà principali della teoria quantistica risiede nel fatto che gli osservabili e le variabili dinamiche si comportano come quantità la cui moltiplicazione non è commutativa. Se rappresentiamo i nostri osservabili attraverso operatori è necessario conoscere le loro *relazioni di commutazione*, o *condizioni quantistiche*. Un metodo per ottenere queste condizioni quantistiche, che è applicabile ad un gran numero di casi, è quello dell'*analogia classica* [2]. Questo approccio è motivato dal fatto che la teoria classica fornisce una valida descrizione di sistemi dinamici sotto alcune condizioni, quando il disturbo creato dalla misura è trascurabile. Quindi la meccanica classica deve essere un caso limite della meccanica quantistica. Ci aspettiamo di conseguenza che a importanti relazioni dinamiche classiche corrispondano delle importanti relazioni quantistiche e sperare che le leggi e i teoremi della meccanica quantistica siano generalizzazioni di risultati noti della meccanica classica. Per formalizzare le condizioni quantistiche introduciamo ora una struttura formale sugli operatori di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , fondamentale per le sue implicazioni fisiche.

Siano \hat{A} e \hat{B} due operatori dello stesso spazio \mathcal{H} . Definiamo il *commutatore* $[\hat{A}, \hat{B}]$ di \hat{A} e \hat{B} come

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1.99)$$

Se il commutatore è nullo allora gli osservabili corrispondenti si dicono *compatibili*. Il motivo lo si intuisce dall'azione del commutatore su uno stato $|\Psi\rangle$

$$[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{A}\hat{B}|\Psi\rangle = \hat{B}\hat{A}|\Psi\rangle \quad (1.100)$$

Se \hat{A} e \hat{B} sono due osservabili compatibili, misurare prima \hat{A} e poi \hat{B} non è differente dal misurare prima \hat{B} e poi \hat{A} . Ovvero la misura di \hat{A} non interferisce con la misura di \hat{B} e viceversa.

Il commutatore ha le seguenti proprietà:

- antisimmetria

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}] \quad (1.101)$$

- linearità e regola di Leibniz

$$\begin{aligned} [\hat{A}, c'\hat{B} + c''\hat{C}] &= c'[\hat{A}, \hat{B}] + c''[\hat{A}, \hat{C}] \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \end{aligned} \quad (1.102)$$

- identità di Jacobi

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \quad (1.103)$$

che sono le stesse proprietà delle parentesi di Poisson. In base al principio di analogia classica ipotizziamo quindi che il commutatore sia il corrispondente quantistico delle parentesi di Poisson.

Più precisamente, date delle funzioni dello spazio delle fasi u e v questi vengono elevati a operatori hermitiani

$$u, v \quad \rightarrow \quad \hat{u}, \hat{v} \quad (1.104)$$

e le loro relazioni di commutazioni sono $i\hbar$ volte le parentesi di Poisson

$$[\hat{u}, \hat{v}] = i\hbar\{u, v\} \quad (1.105)$$

Come esempio prendiamo le coordinate e i momenti canonici q_μ e p_μ . Le loro parentesi di Poisson sono

$$\{q_\mu, q_\nu\} = 0 \quad \{p_\mu, p_\nu\} = 0 \quad \{q_\mu, p_\nu\} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.106)$$

quindi elevandole a operatori hermitiani otteniamo le note relazioni di commutazioni

$$[q_\mu, q_\nu] = 0 \quad [p_\mu, p_\nu] = 0 \quad [q_\mu, p_\nu] = i\hbar\eta_{\mu\nu} \quad (1.107)$$

1.5.2 Rappresentazioni di Schroedinger e di Heisenberg

Ci sono due approcci per descrivere la dinamica di un sistema quantistico. Il primo è noto come *rappresentazione di Schroedinger* in cui gli stati si evolvono nel tempo e gli operatori (gli osservabili) sono stazionari, indipendenti dal tempo. L'equazione che descrive la dinamica è l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle \quad (1.108)$$

dove $\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ è l'operatore hamiltoniano, il corrispondente quantistico della hamiltoniana $H(q, p)$; ricordiamo che \hat{H} deve essere hermitiano. Da (1.108) possiamo calcolarci la soluzione formale del problema. Sia $|\Psi(0)\rangle$ il ket di stato del sistema a $t = 0$, quindi lo stato iniziale del sistema, lo stato $|\Psi(t)\rangle$ del sistema per $t > 0$ è dato da

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) |\Psi(0)\rangle \quad (1.109)$$

Il secondo approccio è noto come *rappresentazione di Heisenberg* in cui sono invece gli operatori ad evolvere nel tempo mentre gli stati sono stazionari. Questo approccio è quello più vicino alla meccanica classica in cui consideriamo l'evoluzione di osservabili come la posizione o il momento. Se \hat{A} è un operatore nella rappresentazione di Schroedinger, possiamo passare all'operatore nella rappresentazione di Heisenberg $\hat{A}^{(H)}$ con una trasformazione unitaria, che conserva il prodotto scalare

$$\hat{A}^{(H)} = \exp\left(i\hat{H}t/\hbar\right) \hat{A} \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) \quad (1.110)$$

e la dinamica in questa rappresentazione è dominata dall'equazione del moto di Heisenberg

$$\frac{d\hat{A}^{(H)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{A}^{(H)}, \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \right] \quad (1.111)$$

nel caso di un operatore di Schroedinger $\hat{A}(t)$ dipendente esplicitamente dal tempo, allora l'equazione del moto di Heisenberg per il corrispondente operatore di Heisenberg $\hat{A}^{(H)}(t)$

$$\frac{d\hat{A}^{(H)}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{A}^{(H)}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{A}^{(H)}(t), \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) \right] \quad (1.112)$$

Notiamo che (1.111) è il corrispondente quantistico delle equazioni del moto per una funzione $A(q, p)$ dello spazio delle fasi

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H(q, p)\} \quad (1.113)$$

1.5.3 Quantizzazione in gauge di cono-luce

Nella Sezione 1.4 abbiamo ottenuto che possiamo descrivere completamente il moto di una particella libera con usando come variabili dinamiche

$$x_0^-, \quad x^I, \quad p^+, \quad p^I \quad (1.114)$$

mentre x^+ è fissato dalla parametrizzazione (1.86) e p^- è determinato da p^+ e p^I e m , come si può vedere in (1.90). Eleviamo le variabili dinamiche in (1.114) a operatori hermitiani (tralasciamo per il momento la notazione con il cappello $\hat{}$) in rappresentazione di Schroedinger. Ci poniamo inoltre in unità naturali per cui $\hbar = 1$.

Possiamo postulare le relazioni di commutazione usando la prescrizione di quantizzazione di Dirac

$$[x^I, p^J] = i\eta^{IJ} = i\delta^{IJ}, \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i \quad (1.115)$$

con tutte gli altri commutatori nulli.

Le nostre traiettorie sono parametrizzate con τ ; gli operatori in rappresentazione di Heisenberg avranno quindi una dipendenza dal parametro di τ e di conseguenza li indicheremo come

$$x_0^-(\tau), \quad x^I(\tau), \quad p_0^-(\tau), \quad p^I(\tau) \quad (1.116)$$

e le relazioni di commutazione sono

$$[x^I(\tau), p^J(\tau)] = i\eta^{IJ} = i\delta^{IJ}, \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i \quad (1.117)$$

Abbiamo inoltre altri osservabili da considerare — x^+ , x^- e p^- — definiti a partire dagli operatori (1.114)

$$\begin{aligned} x^+(\tau) &= \frac{p^+}{m^2}\tau \\ x^-(\tau) &= x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau \\ p^- &= \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2) \end{aligned} \quad (1.118)$$

dove x^+ e x^- sono operatori di Schroedinger con dipendenza esplicita dal tempo, mentre p^- è indipendente dal tempo. I commutatori di $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ e p^- possono essere calcolati dalle relazioni di commutazioni postulate in (1.114).

Rimane da calcolare l'hamiltonia H . Sappiamo che p^- corrisponde all'energia cono-luce e ci aspettiamo che questa generi l'evoluzione rispetto alla sua coordinata coniugata x^+

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \leftrightarrow p^- \quad (1.119)$$

Sappiamo che l'hamiltoniana genera l'evoluzione rispetto al parametro τ che è legato alla coordinata x^+ a causa del gauge di cono-luce (1.86). Quindi

$$x^+ = \frac{p^+}{m^2}\tau \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+} \leftrightarrow \frac{p^+}{m^2} p^- \quad (1.120)$$

In base a questo ragionamento ipotizziamo che l'hamiltoniana $H(\tau)$ in rappresentazione di Heisenberg

$$H(\tau) = \frac{1}{m^2} p^+(\tau) p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2) \quad (1.121)$$

Osserviamo che $H(\tau)$ non ha dipendenze esplicite dal tempo e dipende solo dai momenti trasversali $p^I(\tau)$.

Per verificare se la nostra ipotesi (1.121) è corretta dobbiamo verificare se $H(\tau)$ genera le giuste equazioni del moto, che devono essere confrontabili con i loro analoghi classici. Consideriamo innanzitutto i momenti p^+ e p^- e utilizziamo le equazioni del moto di Heisenberg (1.111). Troviamo

$$i \frac{dp^\pm(\tau)}{d\tau} = [p^\pm(\tau), H(\tau)] = 0 \quad (1.122)$$

perché $H(\tau)$ è funzione solo di p^I e m che commutano con p^\pm . Abbiamo quindi che p^+ e p^- sono delle costanti del moto. La stessa cosa si può dire dei momenti p^I

$$i \frac{dp^I(\tau)}{d\tau} = [p^I(\tau), H(\tau)] = 0 \quad (1.123)$$

per lo stesso motivo di prima, i p^I commutano tra di loro. Quindi le equazioni del moto per i momenti

$$\frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (1.124)$$

che è formalmente uguale alle equazioni del moto classiche per una particella libera.

Consideriamo ora gli operatori di Heisenberg della posizione. Per le componenti trasversali

$$\begin{aligned} i \frac{dx^I(\tau)}{d\tau} &= [x^I(\tau), H(\tau)] = \left[x^I(\tau), \frac{1}{2m^2} (p^J p^J + m^2) \right] \\ &= \frac{1}{2m^2} ([x^I, p^J] p^J + p^J [x^I, p^J]) \\ &= \frac{i}{m^2} \delta^{IJ} p^J = i \frac{p^I}{m^2} \end{aligned} \quad (1.125)$$

che è in accordo con l'analogo classico mentre per x_0^- commuta con tutti i p^I quindi

$$\frac{dx_0^-}{d\tau} = 0 \quad (1.126)$$

Se invece consideriamo x^+ e x^- anche questi commutano con i momenti p^I ma hanno una dipendenza esplicita dal tempo

$$i \frac{dx^\pm}{d\tau} = i \frac{\partial x^\pm}{\partial \tau} + [x^\pm(\tau), H(\tau)] = i \frac{p^\pm}{m^2} \quad (1.127)$$

L'aver lavorato in rappresentazione di Heisenberg ci ha permesso un confronto diretto con le equazioni del moto classiche e di verificare le nostre ipotesi con il principio di analogia classica. Ricordiamoci però che questo principio non è sempre applicabile perché non a tutti gli osservabili quantistici corrisponde un osservabile classico, i.e. lo spin intrinseco.

1.5.4 Operatori momento in cono-luce

Ci rimane da verificare l'algebra di Poincarè ma prima verifichiamo l'azione dei operatori momento. È noto che le traslazioni $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ sono generati dai momenti p^μ

$$\delta x^\mu(\tau) = [i\epsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)] = i\epsilon_\rho (-i\eta^{\rho\mu}) = \epsilon^\mu \quad (1.128)$$

grazie alle relazioni di commutazioni degli operatori momento lorentziani

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu} \quad (1.129)$$

che però non sono consistenti con i commutatori in gauge di cono-luce, che ci dicono che $[x^+(\tau), p^-(\tau)] = 0$ mentre l'equazione precedente predice un risultato non nullo. Quindi è necessario verificare che gli operatori momento in gauge di cono-luce generino le traslazioni. Esplicitiamo la somma $i\epsilon_\rho p^\rho(\tau)$

$$i\epsilon_\rho p^\rho(\tau) = -i\epsilon^- p^+ - i\epsilon^+ p^- + i\epsilon^I p^I \quad (1.130)$$

le equazioni del moto ci dicono che i momenti sono indipendenti dal tempo quindi possiamo evitare di esplicitare l'argomento τ . È facile verificare che p^I e p^+ generino le traslazioni desiderate, in particolare per $\epsilon^I \neq 0$ e $\epsilon^+ = \epsilon^- = 0$ abbiamo

$$\delta x^I = \epsilon^I, \quad \delta x^+ = \delta x^- = 0 \quad (1.131)$$

invece per $\epsilon^+ \neq 0$ e $\epsilon^I = \epsilon^- = 0$ otteniamo

$$\delta x^- = \epsilon^-, \quad \delta x^+ = \delta x^I = 0 \quad (1.132)$$

usando le relazioni (1.117). Ci rimane da verificare l'azione di p^- che è una funzione non banale di p^+ e p^I . Sia $\epsilon^+ \neq 0$ e $\epsilon^I = \epsilon^- = 0$ e vogliamo calcolare $\delta x^\mu = i\epsilon^+ [p^-, x^\mu]$. Per $\mu = +$

$$\delta x^+ = -i\epsilon^+ [p^-, x^+(\tau)] = -i\epsilon^+ \left[p^-, \frac{p^+}{m^2} \tau \right] = 0. \quad (1.133)$$

Per $\mu = J$

$$\delta x^J = i\epsilon^+[p^-, x^J] = i\epsilon^+\left[\frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2), x^J\right] = i\epsilon^+\frac{1}{2p^+}[p^I, x^J] = \epsilon^+\frac{p^J}{p^+}. \quad (1.134)$$

Invece per $\mu = -$

$$\delta x^- = -i\epsilon^+[p^-, x^-(\tau)] = -i\epsilon^+\left[p^-, x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau\right] = -i\epsilon^+[p^-, x_0^-] = -\epsilon^+\frac{p^-}{p^+} \quad (1.135)$$

perché

$$\left[x_0^-, \frac{1}{p^+}\right] = x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- = \frac{p^+}{p^+} x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- \frac{p^+}{p^+} = \frac{1}{p^+} [p^+, x_0^-] \frac{1}{p^+} = \frac{i}{p^{+2}}$$

quindi

$$[p^-, x_0^-] = \left[\frac{1}{p^+}(p^I p^I + m^2), x_0^-\right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p^+}, x_0^-\right] (p^I p^I + m^2) = \frac{-i}{2p^+} (p^I p^I + m^2) = -i\frac{p^-}{p^+}$$

da cui otteniamo il risultato $\delta x^- = -\epsilon^+ p^- / p^+$.

Quindi p^- genera in realtà sia una traslazione che una riparametrizzazione della linea di mondo, che è necessaria per mantenere fissa la condizione di gauge di cono-luce. Ricordiamo che gli operatori momento lorentziani p^μ in *coordinate* cono-luce sono oggetti diversi dagli operatori momento in *gauge* di cono-luce, che hanno un'azione non banale sulle coordinate e p^- è definito in funzione degli altri momenti trasversi e p^+ .

1.5.5 Generatori di Lorentz in cono-luce

Quello che ci interessa ora è trovare un'espressione dei generatori di Lorentz $M^{\mu\nu}$ in gauge di cono-luce che soddisfi l'algebra

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} \quad (1.136)$$

che definisce l'algebra di Lie di Lorentz, che deve essere soddisfatta dagli analoghi generatori di una qualsiasi teoria Lorentz-invariante. Vedremo che questa condizione impone restrizioni fisiche significative nel caso della teoria delle stringhe che grosse conseguenze fisiche.

Per costruire i generatori di Lorentz in gauge di cono-luce possiamo tentare di partire dall'espressione covariante

$$M^{\mu\nu} = x^\mu(\tau)p^\nu(\tau) - x^\nu(\tau)p^\mu(\tau) \quad (1.137)$$

e successivamente sostituire $x^+(\tau)$, $x^-(\tau)$ e p^- usando le loro definizioni in gauge di cono-luce. Con M^{+-} otteniamo

$$M^{+-} = x^+(\tau)p^- - x^-(\tau)p^+ = \frac{p^+\tau}{m^2}p^- - \left(x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau\right)p^+ = -x_0^-p^+ \quad (1.138)$$

che però non è hermitiano, $(M^{+-})^\dagger - M^{+-} = [x_0^-, p^+] \neq 0$. Quindi per ottenere un'espressione corretta di M^{+-} che sia hermitiana, lo definiamo come

$$M^{+-} = -\frac{1}{2}(x_0^-p^+ + p^+x_0^-) \quad (1.139)$$

Consideriamo ora il generatore M^{-I} . La prescrizione che stiamo seguendo ci suggerisce l'espressione

$$M^{-I} = x^- \tau p^I - x^I(\tau)p^- = \left(x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau\right)p^I - \left(x_0^I + \frac{p^I}{m^2}\tau\right)p^- = x_0^-p^I - x_0^I p^- \quad (1.140)$$

ma p^- è un'espressione non banale di p^+ e p^I . Per ottenere una versione hermitiana definiamo M^{-I} come

$$M^{-I} = x_0^-p^I - \frac{1}{2}(x_0^I + p^-x_0^I) \quad (1.141)$$

che soddisfa $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$. A questo punto si può verificare che con le definizioni quantistiche degli operatori $M^{\mu\nu}$ fatto nel gauge cono di luce, questi soddisfano la corretta algebra di Lorentz. La teoria quantistica è quindi relativistica. Vedremo che il calcolo di questo commutatore nella teoria delle stringhe impone addirittura delle condizioni sulla dimensionalità dello spazio-tempo, per cui la teoria delle stringhe è Lorentz-invariante solo per una particolare dimensionalità dello spazio-tempo.

Capitolo 2

Stringhe Relativistiche

In questo capitolo cercheremo di costruire una teoria dinamica relativistica per una stringa, ovvero di un oggetto unidimensionale, in uno spazio-tempo D -dimensionale. Per farlo seguiremo gli stessi passaggi del capitolo precedente, partendo da una formulazione di un principio d'azione specificando quali sono le nostre variabili dinamiche e arrivando a delle equazioni del moto che tenteremo di risolvere.

2.1 Azione di una stringa relativistica

Una stringa è semplicemente un oggetto unidimensionale, non più puntiforme quindi con una estensione spaziale. Questo oggetto unidimensionale nello spazio-tempo descriverà una superficie bidimensionale, che chiameremo *foglio di mondo*, analogamente al caso di una particella puntiforme (senza estensione spaziale) che descrive una curva unidimensionale. Per descrivere la stringa avremo bisogno di due parametri adimensionali, τ e σ , e di D funzioni $X^\mu(\tau, \sigma)$ che mappano il foglio di mondo nello spazio-tempo di Minkowski

$$(\tau, \sigma) \mapsto x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (2.1)$$

I parametri τ e σ possono essere considerati come coordinate sulla varietà del foglio di mondo; τ è un parametro di tipo tempo e σ di tipo spazio, nel senso che τ ci da informazioni su come la stringa si evolve nel tempo mentre σ ci da informazioni sulla sua estensione spaziale. Dei due, τ è il parametro più affine al tempo. Vedremo successivamente che la scelta di τ e σ è libera e sfrutteremo questa libertà per risolvere il moto della stringa. Possiamo interpretare gli X^μ come le coordinate dinamiche della stringa nello spazio-tempo. Nel caso della particella le coordinate dinamiche dipendono da un solo parametro, quello che descrive la linea di mondo; analogamente nel caso della stringa le coordinate dinamiche dipendono invece da due parametri, quelli necessari per descrivere il foglio di mondo.

Nel caso della particella abbiamo visto che per ottenere delle equazioni del moto relativistiche è stata imposta la condizione di invarianza per cambio di sistema di riferimento dell'azione che ha portato a un'invarianza per riparametrizzazione dell'azione, che è stato poi sfruttato per fissare il gauge di cono-luce. Vedremo che la situazione si replicherà in maniera simile anche per stringhe.

Le stringhe possono essere di due tipi, o aperte o chiuse. Nel caso di stringhe chiuse le funzioni X^μ sono periodiche nell'argomento σ , per esempio: $\sigma \in [0, \sigma^*]$ con $X^\mu(\tau, \sigma + \sigma^*) = X^\mu(\tau, \sigma)$ per qualsiasi τ . Invece se la stringa è aperta non c'è alcuna condizione di periodicità sulla funzione X^μ e la stringa sarà dotata ad ogni istante di estremi liberi e per risolvere la dinamica sarà necessario imporre delle condizioni sugli estremi.

La quantità Lorentz-invariante più semplice a cui possiamo pensare nel caso di un foglio di mondo è la sua area. Per questo ipotizziamo che l'azione di una stringa sia proporzionale alla sua area. Per calcolare questa area dobbiamo conoscere prima la metrica intrinseca della superficie e per ricavarla facciamo la seguente considerazione: sia $\eta_{\mu\nu}$ la metrica di "background", ovvero dello spazio-tempo D -dimensionale, che supponiamo piatto, in cui si muove la stringa, e siano $X^\mu(\sigma^\alpha)$ le funzioni che parametrizzano la superficie di mondo, dove $\sigma^\alpha = (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$. Allora, andando a calcolare un elemento infinitesimo sul foglio di mondo troviamo che

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta = h_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta \quad (2.2)$$

dove abbiamo definito la metrica intrinseca della varietà

$$h_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} \quad (2.3)$$

e l'area della superficie è ottenuta integrando $\sqrt{-h}$, dove $h \equiv \det(h_{\alpha\beta})$, quindi

$$\mathcal{S} \propto \int d^2\sigma \sqrt{-h} \quad (2.4)$$

Per questioni dimensionali è necessaria una costante che abbia le dimensioni MT^{-1} perché l'azione \mathcal{S} ha le dimensioni ML^2T^{-1} mentre l'integrale le dimensioni L^2 . Un'analisi classica della stringa (vedi [4, Cap. 4]) ci mostra che la lagrangiana è caratterizzata da una tensione T_0 che rappresenta la tensione della stringa e ha le dimensioni MLT^{-2} , quindi ipotizziamo che la costante di cui abbiamo bisogno sia T_0/c , dove c è la velocità della luce. La nostra azione assume la forma

$$\mathcal{S}[X^\mu] = -\frac{T_0}{c} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \quad (2.5)$$

Introducendo la notazione

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (2.6)$$

possiamo esplicitare l'integrando

$$\mathcal{S}[X^\mu] = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (2.7)$$

dove $\dot{X} \cdot X' \equiv \dot{X}^\mu X'_\mu$, $\dot{X}^2 \equiv \dot{X}^\nu \dot{X}_\nu$ e $X'^2 \equiv X'^\rho X'_\rho$. La (2.7) è nota come *azione di Nambu-Goto*.

Verifichiamo ora che l'azione sia invariante per riparametrizzazione. Applichiamo una trasformazione dei parametri

$$(\tau, \sigma) \mapsto (\tau', \sigma') \quad (2.8)$$

che modifica i differenziali

$$d\tau d\sigma = d\tau' d\sigma' \frac{d\tau}{d\tau'} \frac{d\sigma}{d\sigma'} \quad (2.9)$$

mentre i termini dell'integrando si trasformano come

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}, \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma'} \frac{d\sigma'}{d\sigma} \quad (2.10)$$

e otteniamo di conseguenza

$$\begin{aligned} \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \\ = \int d\tau' d\sigma' \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau'} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma'}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau'}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma'}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

che l'azione non cambia in forma. Ci troviamo come nel caso della particella, in cui la scelta della parametrizzazione della linea di mondo non modificava l'azione e quindi non modifica la fisica.

La densità di lagrangiana della stringa è

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{-h} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (2.12)$$

e notiamo che la lagrangiana è solo funzione di \dot{X}^μ e $X^{\mu'}$. Introduciamo le quantità

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{1}{\sqrt{-h}} \left[(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - X'^2 \dot{X}_\mu \right] \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{1}{\sqrt{-h}} \left[(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu \right] \quad (2.13b)$$

che torneranno molto utili. Essendo sia \mathcal{P}_μ^τ che \mathcal{P}_μ^σ delle derivate della lagrangiana \mathcal{L} rispetto a delle derivate di X^μ , li possiamo considerare come dei momenti particolari.

2.2 Equazioni del moto e condizioni al contorno

Siamo interessati ora alle equazioni del moto della stringa, che li possiamo ottenere con il principio di Minima Azione. Perciò, con $\tau \in [\tau_i, \tau_f]$ e $\sigma \in [0, \sigma^*]$ e le variazioni $\delta X^\mu(\tau, \sigma)$ nulli sugli estremi dell'intervallo di τ , la variazione dell'azione

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}[X^\mu] &= \mathcal{S}[X^\mu + \delta X^\mu] - \mathcal{S}[X^\mu] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \left[\mathcal{L}(\dot{X}^\mu + \delta \dot{X}^\mu, X^{\mu'} + \delta X^{\mu'}) - \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) \right] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\nu'}} \delta X^{\nu'} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

usando le relazioni

$$\delta \dot{X}^\mu \equiv \delta \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} \quad \delta X^{\nu'} \equiv \delta \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial(\delta X^\nu)}{\partial \sigma} \quad (2.15)$$

otteniamo

$$\delta \mathcal{S}[X^\mu] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\nu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\nu)}{\partial \sigma} \right] \quad (2.16)$$

da cui, integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} &= \int_0^{\sigma^*} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} \delta X^\mu \\ \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \mathcal{P}_\nu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\nu)}{\partial \sigma} &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \mathcal{P}_\nu^\sigma \delta X^\nu \Big|_0^{\sigma^*} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\nu^\sigma}{\partial \sigma} \delta X^\nu \end{aligned} \quad (2.17)$$

con il primo termine del membro di destra della prima equazione che si annulla a causa della condizione sulle variazioni δX^μ , mentre il primo termine del membro di destra della seconda equazione rappresenta delle condizioni sulle estremi della stringa. È ovvio che nel caso di una stringa chiusa il termine si annulla, mentre nel caso di una stringa aperta poniamo tale termine uguale a zero

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\sigma \mathcal{P}_\nu^\sigma \delta X^\nu \Big|_0^{\sigma^*} = 0 \quad \mu = 0 \dots D-1 \quad (2.18)$$

che equivale a imporre $2D$ condizioni sugli estremi della stringa, dove D sono le dimensioni dello spazio-tempo, che possono essere di due tipi: o estremi liberi, o estremi fissi. Possiamo avere degli estremi liberi con il vincolo

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0 \quad \forall \tau \quad (2.19)$$

che è conosciuto anche come condizione di Neumann, la quale soddisfa (2.18) per qualsiasi variazione δX^μ , oppure possiamo avere degli estremi fissi con

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, 0) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma^*) = 0 \quad \mu \neq 0. \quad (2.20)$$

nota anche come condizione di Dirichlet. Notiamo che non possiamo imporre tale condizione per $\mu = 0$ perché gli estremi si devono “muovere” nel tempo, non possono rimanere fissi anche nella direzione x^0 . La condizione di estremo fisso è una condizione applicabile solo alle direzioni spaziali. La condizione di Dirichlet implica che la stringa è attaccata a qualche oggetto fisico.

Per ciascuna direzione spaziale e per ciascun estremo possiamo scegliere di imporre o un condizione di Neumann o di Dirichlet. Imponendo questo ultimo tipo di vincolo stiamo imponendo che gli estremi siano attaccati a degli oggetti, che sono chiamati D-brane. Una Dp -brana è un oggetto di dimensionalità p a cui sono attaccati gli estremi di una stringa. Se questi sono liberi in tutte le direzioni allora ci ritroviamo con una D-brana che riempie tutto lo spazio.

Ritornando ora al calcolo della variazione dell'azione, una volta specificate le condizioni al contorno, abbiamo

$$\delta \mathcal{S}[X^\mu] = - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma^*} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{P}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right] \delta X^\mu = 0 \quad (2.21)$$

per qualsiasi δX^μ . Otteniamo così le equazioni del moto

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.22)$$

che è valido sia per stringhe chiuse che aperte. Richiamando le espressioni di \mathcal{P}_μ^τ e \mathcal{P}_μ^σ ne ricaviamo che le equazioni del moto sono parecchio complicate. Tutto ciò può essere semplificato sfruttando l'invarianza per riparametrizzazione dell'azione di Nambu-Goto. Ma prima consideriamo delle trasformazioni di simmetria sul foglio di mondo.

2.3 Correnti conservate sul foglio di mondo

Nell'azione della stringa (2.7), la densità di lagrangiana viene integrata sulle coordinate del foglio di mondo $\sigma^\alpha = (\tau, \sigma)$, non dello spazio-tempo, ed è funzione delle coordinate nello spazio-tempo X^μ , che sono funzione di σ^α . Richiamando la Sez. 1.1.3, possiamo interpretare le funzioni $X^\mu(\sigma^\alpha)$ come D campi su una varietà bidimensionale, per cui le correnti conservate saranno delle correnti bidimensionali che vivranno sul foglio di mondo.

2.3.1 Quantità di moto

Essendo la lagrangiana dell'azione di Nambu-Goto (2.7) dipendente solo dalle derivate dei campi X^μ questa è invariante per traslazioni nello spazio-tempo

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \epsilon^\mu \quad (2.23)$$

dove ϵ^μ sono costanti indipendenti da τ e σ . In questo caso la corrente conservata è data da

$$J_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \quad (2.24)$$

dove J_μ^α è la α -esima componente della corrente conservata dalla trasformazione del μ -esimo campo X^μ , ovvero

$$J_\mu^\alpha \equiv (J_\mu^0, J_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \right) \equiv (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma) \quad (2.25)$$

Ribadiamo che queste sono correnti che vivono solo sul foglio di mondo. Da (2.25) e (2.22) notiamo l'equivalenza tra le equazioni del moto e l'equazione di continuità della corrente J_μ^α

$$\partial_\alpha J_\mu^\alpha = \partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0 \quad (2.26)$$

Ci troviamo di fronte a D correnti conservate J_μ^α , indicizzate da μ , di conseguenza avremo D cariche conservate p_μ , anche loro indicizzate da μ . Per ottenere queste cariche è necessario integrare la componente zero della corrente rispetto alle altre componenti, ossia

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma^*} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) \quad (2.27)$$

dove l'integrale è eseguito a τ costante. Non siamo necessariamente vincolati a calcolare p_μ su una curva a τ ma possiamo calcolarlo su una arbitraria curva γ con gli estremi su $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma^*$

$$p_\mu(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) \quad (2.28)$$

Per stringhe chiuse o con estremi liberi $p_\mu(\gamma)$ e $p_\mu(\tau)$ sono uguali perché il flusso della corrente J_μ^α attraverso una regione semplicemente connessa \mathcal{R} con bordo Γ è nullo.

$$\oint_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\tau d\sigma = 0 \quad (2.29)$$

quindi data una qualsiasi altra curva $\bar{\gamma}$ che va da $\sigma = 0$ a $\sigma = \sigma^*$, questa sarà connessa a γ da due curve α e β che giacciono sugli estremi di σ del foglio di mondo. Le quantità $p_\mu(\alpha)$ e $p_\mu(\beta)$ ($d\sigma = 0$) risulteranno nulle per stringhe chiuse ($\sigma^* \equiv 0$) o con estremi liberi ($\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0$).

La quantità $p_\mu(\tau)$ corrisponde alla *quantità di moto* della stringa a τ fissato. Da ciò possiamo interpretare \mathcal{P}_μ^τ come la densità, rispetto a σ , della quantità di moto della stringa.

Per quanto riguarda la conservazione della quantità di moto, calcolando la derivata totale rispetto a τ di p_μ e usando l'equazione di continuità (2.26)

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma^*} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} = - \int_0^{\sigma^*} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = - \mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma^*} \quad (2.30)$$

si trova che per una stringa chiusa o una stringa aperta con estremi liberi la quantità di moto si conserva

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.31)$$

mentre per estremi fissi, con condizioni di Dirichlet, la conservazione non è garantita. Questa conservazione è sempre intesa sul foglio di mondo, la derivata infatti è rispetto a τ e non t .

Per ottenere una conservazione rispetto al tempo di un osservatore si può sfruttare la libertà nella parametrizzazione e imporre $\tau = ct$. Questa scelta è nota come *gauge statico* e porta a una semplificazione della trattazione della dinamica. Nelle sezioni successive tratteremo il caso generale di questa scelta del gauge ma prima diamo un occhio alle simmetrie di Lorentz, che sono fondamentali per questa teoria.

2.3.2 Simmetrie di Lorentz

Lo scopo di questo lavoro è quello di costruire una teoria quantistica relativistica delle stringhe, quindi è estremamente utile considerare il comportamento di questi oggetti sotto trasformazioni di Lorentz. La Lorentz-invarianza è un requisito fondamentale per le teorie relativistiche.

Una trasformazione di Lorentz è una trasformazione lineare delle coordinate che lascia invariata la forma quadratica $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$. Una trasformazione lineare infinitesima $X^\mu \mapsto X^\mu + \delta X^\mu$ di questo tipo è nella forma

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (2.32)$$

dove $\epsilon^{\mu\nu}$ è una matrice di costanti infinitesimali, che per essere Lorentz-invariante deve essere antisimmetrica, $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$.

Vogliamo verificare se la densità di lagrangiana dell'azione della stringa (2.7) sia Lorentz-invariante. I termini della lagrangiana sono dati dai termini della metrica $h_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$. Possiamo calcolarci la variazione $\delta h_{\alpha\beta}$ della metrica intrinseca del foglio di mondo per una trasformazione dello spazio-tempo $\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu$

$$\begin{aligned} \delta(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu) &= \partial_\alpha(\delta X^\mu) \partial_\beta X_\mu + \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta(\delta X_\mu) \\ &= \epsilon^{\mu\nu} \partial_\alpha X_\nu \partial_\beta X_\mu + \epsilon_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \\ &= \epsilon^{\mu\nu} (\partial_\alpha X_\nu \partial_\beta X_\mu + \partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\nu) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

la variazione risulta nulla perché la somma finale è simmetrica rispetto allo scambio di μ e ν mentre $\epsilon^{\mu\nu}$ è antisimmetrico.

Le correnti $J_{\mu\nu}^\alpha$ sono date da

$$\epsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha) \quad (2.34)$$

sfruttando l'antisimmetria di $\epsilon^{\mu\nu}$. Per cui andiamo a definire le correnti $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ come

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha \quad (2.35)$$

che sono antisimmetriche rispetto agli indici μ e ν per costruzione, $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha$. Ricordiamo che gli indici μ e ν indicizzano le diverse correnti mentre l'indice α indicizza le diverse componenti di una corrente. L'equazione di continuità per queste correnti è

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.36)$$

Come prima, è possibile calcolarsi anche le cariche associate con un integrale su una curva che va $\sigma = 0$ a $\sigma = \sigma^*$

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - M_{\mu\nu}^\sigma d\tau) \quad (2.37)$$

e queste cariche, come le correnti, sono antisimmetriche per gli indici μ e ν , $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$. Ovviamente possiamo decidere di calcolare la carica lungo una curva a τ costante

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau = \int (X_\mu \mathcal{P}_{\mu\nu}^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma \quad (2.38)$$

In quattro dimensioni spazio-temporali abbiamo 6 cariche conservate, di cui 3 sono associate ai boost (M_{0i} , $i = 1, 2, 3$) e 3 alle rotazioni (M_{ij} , $i \neq j$).

Per concludere, sostituiamo il parametro T_0 con un parametro alternativo noto come *slope parameter* α'

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \quad (2.39)$$

rappresenta la costante di proporzionalità tra il momento angolare e il quadrato dell'energia in unità di \hbar . Inoltre tale parametro è legato alla lunghezza caratteristica della stringa ℓ_s .

$$\ell = \hbar c \sqrt{\alpha'} \quad (2.40)$$

Senza entrare troppo nei dettagli della discussione riportiamo soltanto l'azione riscritta usando il parametro α'

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c^2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \quad (2.41)$$

2.4 Stringhe relativistiche in cono-luce

2.4.1 Scelta di una parametrizzazione

In questa sezione tratteremo di una classe particolare di parametrizzazioni di τ , quella in cui è posto uguale a una combinazione lineare delle coordinate della stringa:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau \quad (2.42)$$

Per esempio se scegliamo $n_\mu = (1, 0 \dots 0)$ e $\lambda = c$ questo corrisponde al gauge statico. La condizione (2.42) corrisponde a imporre che tutti i punti del foglio di mondo intersecati da un iperpiano di normale n_μ abbiano lo stesso τ . La scelta del gauge statico è analoga alla scelta della forma istantanea, discussa nella Sez. 1.2, in cui si considerano iperpiani a $t = \text{const}$ che sono descritti appunto da un vettore normale $n_\mu = (1, 0 \dots 0)$. Facciamo notare che questo gauge non è Lorentz-invariante. Cambiando sistema di riferimento cambia la combinazione lineare di (2.42) e quindi il gauge prende forme diverse in sistemi di riferimento diversi.

D'ora in poi considereremo solo stringhe aperte con estremi liberi. La trattazione di stringhe in D-brane di dimensionalità inferiore a quella dello spazio-tempo è più complicata di quella che andremo a trattare. Inoltre passeremo alle unità di misura naturali: $\hbar = 1$ e $c = 1$.

Sappiamo che per una stringa libera la quantità di moto p_μ è una costante del moto quindi possiamo pensare di fissare la parametrizzazione di τ con la condizione (per le stringhe)

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (2.43)$$

ma la scelta del versore n_μ non può essere totalmente arbitraria perché richiediamo che la stringa sia un oggetto di tipo spazio, ovvero che la distanza ΔX^μ tra due punti allo stesso τ debba essere di tipo spazio. Per soddisfare ciò n_μ deve essere o di tipo tempo o di tipo spazio.

Possiamo inoltre fissare una parametrizzazione di σ tale per cui $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ risulti costante con $\sigma \in [0, \pi]$, in particolare

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi}. \quad (2.44)$$

Usando le equazioni del moto troviamo che $\partial_\tau(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0$ da cui risulta la costanza di $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ rispetto a σ , $\partial_\sigma(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0$. Per una stringa aperta e libera \mathcal{P}^σ si annulla agli estremi e quindi $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ si annulla su tutta la stringa. L'espressione per $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ è

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'\sqrt{-h}} \left[(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau(n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma(n \cdot X) \right] \quad (2.45)$$

dove $\partial_\sigma(n \cdot X)$ è nullo e $\partial_\tau(n \cdot X)$ una costante non nulla. Quindi l'annullarsi di $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ implica

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (2.46)$$

Infine, con l'ultima espressione in mente e usando la definizione di \mathcal{P}_μ^τ

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \quad \longrightarrow \quad n \cdot p = \frac{1}{2\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \quad (2.47)$$

che ci porta a $1 = X'^2 / \sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}$ sapendo che $n \cdot \dot{X} = 2\alpha' (n \cdot p)$. Otteniamo quindi

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0. \quad (2.48)$$

Possimo insomma riassumere le condizioni (2.43) e (2.44) con

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (2.49)$$

che possono essere a loro volta riassunte con

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (2.50)$$

Con (2.50) troviamo che $\sqrt{-h} = X'^2$ ($X'^2 > 0$), da cui segue che

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}_\mu, \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} X'_\mu \quad (2.51)$$

ottenendo infine delle equazioni del moto semplificate

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0 \quad (2.52)$$

che hanno la forma di un'equazione d'onda, che è un risultato molto importante.

2.4.2 Equazione d'onda ed espansione in modi normali

Con una scelta intelligente della parametrizzazione abbiamo ridotto le complicate equazioni del modo (2.22) a delle più semplici equazioni d'onda (2.52) che ora cercheremo di risolvere in maniera generale nel caso di stringhe aperte libere, che hanno condizioni al contorno $\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \pi) = 0$ le quali diventano

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = 0 \quad (2.53)$$

grazie a (2.51). La soluzione più generale è nella forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)), \quad (2.54)$$

dove f^μ e g^μ sono due funzioni arbitrarie di singola variabile, che diventa

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) - f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (2.55)$$

a causa di $\partial_\sigma X^\mu(\tau, 0) = 0$, da cui deduciamo che f^μ e g^μ sono uguali a meno di un costante che inglobiamo nella definizione di f . Applicando la condizione $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \pi) = 0$ troviamo che la derivata di f^μ deve essere una funzione periodica di periodo 2π

$$f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi) = 0. \quad (2.56)$$

Sapendo che $f^{\mu'}$ è una funzione periodica di 2π , possiamo considerare la sua espansione di Fourier nella base di seni e coseni

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)] \quad (2.57)$$

e integrando la derivata otteniamo

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)] \quad (2.58)$$

dove abbiamo assorbito le costanti di integrazione nelle nuove costanti A_n^μ e B_n^μ . Utilizzando (2.55) abbiamo infine che

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)] \cos(n\sigma). \quad (2.59)$$

Introduciamo ora le costanti a_n^μ e i loro complessi coniugati $a_n^{\mu*}$

$$a_n^\mu = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\alpha'}} (B_n^\mu - iA_n^\mu), \quad a_n^{\mu*} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2\alpha'}} (B_n^\mu + iA_n^\mu) \quad (2.60)$$

per cui

$$A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = -i\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}). \quad (2.61)$$

Queste costanti nella teoria quantistica diventeranno degli operatori di creazione e distruzione, per questo sono state introdotte ora. Possiamo calcolarci f_1^μ considerando $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ e p^μ

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots \quad \longrightarrow \quad p^\mu = \int_0^\pi d\sigma P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \quad (2.62)$$

e ne otteniamo che f_1^μ è legato al momento totale p^μ della stringa, $f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$. Infine riscriviamo f_0^μ come x_0^μ .

Otteniamo che la soluzione generale è

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^\mu e^{in\tau} - a_n^{\mu*} e^{-in\tau}] \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \quad (2.63)$$

È chiaro che i termini del membro di destra rappresentano il modo zero, la quantità di moto e i modi di vibrazione della stringa. Se tutti i coefficienti a_n^μ si annullassero, l'equazione rappresenterebbe il moto di una particella puntiforme.

Introduciamo ora della nuova notazione per semplificare l'espressione della soluzione:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \qquad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n} \qquad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n} \qquad (2.64)$$

è chiaro che $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. La nostra soluzione ora assume la forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \qquad (2.65)$$

la soluzione è definita una volta specificate le costanti x_0^μ e α_n^μ , con $n \geq 0$. Con ciò completiamo la soluzione dell'equazione d'onda con condizioni di Neumann. Riportiamo infine le espressioni delle derivate che torneranno utili dopo:

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \cos(n\sigma) e^{-in\tau}, \\ X^{\mu'} &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu \sin(n\sigma) e^{-in\tau}, \\ \dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \qquad (2.66)$$

Ricordiamo infine che la scelta dei α_n^μ non può essere arbitraria ma deve soddisfare (2.50). Useremo il gauge di cono-luce per trovare una soluzione che soddisfi sia l'equazione d'onda (2.52) e le condizioni (2.50).

2.4.3 Soluzione cono-luce delle equazioni del moto

La soluzione cono-luce non sfrutta semplicemente le coordinate cono-luce, che non fanno altro che sostituire x^0 e x^1 con x^+ e x^- , ma impone delle condizioni che fissano il gauge fissando la coordinata X^+ . Questo gauge è fissato scegliendo come vettore normale $n_\mu = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ e quindi

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} \equiv X^+, \qquad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} \equiv p^+ \qquad (2.67)$$

di conseguenza la condizione che imponiamo è

$$X^+ = 2\alpha' p^+ \tau, \qquad p^+ = \pi \mathcal{P}^{\tau+} \qquad (2.68)$$

Con questo gauge su X^+ è possibile dimostrare che non c'è alcuna dinamica in X^- e tutta la dinamica si riversa sulle coordinate *trasversali* X^I ($I = 2, 3 \dots d$, con d dimensioni spaziali).

Per prima cosa vanno soddisfatti i vincoli (2.50), riscriviamo il prodotto scalare in coordinate cono-luce

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (2.69)$$

dove con $(A^I)^2$ intendiamo $A^I A^I$. Da (2.68) sappiamo che $X'^+ = 0$ e che $\dot{X}^+ = 2\alpha' p^+$. Quindi risolvendo per le derivate di X^-

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (2.70)$$

Ricordiamo che assumeremo sempre $p^+ \neq 0$ perché $p^+ = 0$ corrisponde al caso particolare di una particella non massiva che viaggia nella direzione x^1 negativa, che ignoreremo.

Grazie al gauge di cono-luce abbiamo risolto “facilmente” le derivate di X^- e reso \dot{X}^+ una costante. Il moto della stringa è completamente determinato dalle variabili dinamiche

$$X^I(\tau, \sigma) \quad x_0^-(\tau) \quad (2.71)$$

nello spazio delle configurazioni, che nello spazio delle fasi avranno i loro rispettivi momenti coniugati. x_0^- è la costante di integrazione di X^- .

La soluzione generale per le coordinate trasverse X^I è

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (2.72)$$

con gli α_n^I da determinare. Mentre per X^+ , essendo valido (2.68), x_0^+ è nullo così come i α_n^+ per qualsiasi n . La situazione è più complessa per la coordinata X^- , la forma della soluzione è la stessa di (2.65)

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (2.73)$$

ma i coefficienti α_n^- devono soddisfare sia (2.70), sia

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (2.74)$$

che deriva da (2.66) per $\mu = -$.

Con un po' di conti

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{2\alpha'}{4\alpha' p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, n \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}
\end{aligned}$$

si trova che

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (2.75)$$

ovvero, gli α_n^- sono completamente determinate dagli α_n^I . In altre parole, fissato il X^+ con il gauge cono-luce, il moto lungo X^- è totalmente determinato dalla dinamica delle coordinate trasverse.

Il membro di destra della (2.75) viene chiamato *modo trasverso di Virasoro* L_n

$$L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n \quad (2.76)$$

in particolare per $n = 0$ abbiamo

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0 \quad \longrightarrow \quad 2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0. \quad (2.77)$$

Possiamo anche esprimere (2.70) in termini di L_n

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (2.78)$$

I modi trasversi di Virasoro rappresentano i modi normali della coordinata X^-

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0 \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} L_n e^{-n\tau} \cos(n\alpha) \quad (2.79)$$

Anche se qui sembrano un semplice cambio di notazione, vedremo l'importanza dei modi trasversi di Virasoro nel calcolo delle relazioni commutazioni dei modi normali perché sono caratterizzati da una particolare algebra, *l'algebra di Virasoro*.

Concludiamo il capitolo riportando il calcolo della massa della stringa M , usando la relazione mass-shell $M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+p^- - p^I p^I$, esplicitando $2p^+p^-$ troviamo che

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0 = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I \alpha_{-n}^I = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I \alpha_{-n}^I \right) = p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_p^I (\alpha_p^I)^* \quad (2.80)$$

dove $p^I = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I$ e $(\alpha_n^I)^* = \alpha_{-n}^I$. Possiamo calcolarci la massa

$$M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_p^I (\alpha_p^I)^* \quad (2.81)$$

che risulta avere uno spettro continuo e positivo. Vedremo che nel caso quantistico sarà necessario apportare delle correzioni al calcolo della massa.

Capitolo 3

Stringhe Relativistiche Quantizzate

Nel secondo capitolo siamo arrivati alla conclusione che le nostre variabili dinamiche sono le coordinate X^I , le densità di quantità di moto $\mathcal{P}^{\tau I}$ e le costanti in σ , x_0^- e p^+ . Per costruire la teoria quantistica useremo sempre la prescrizione di quantizzazione di Dirac, elevando le variabili dinamiche a operatori autoaggiunti. In questo caso ipotizzeremo direttamente le relazioni di commutazioni delle variabili dinamiche in base a considerazioni fisiche. Lavoreremo con gli operatori di campo in rappresentazione di Heisenberg, come abbiamo fatto nella Sez. 1.5, verificando che le equazioni del moto che andiamo ad ottenere siano corrette, facendo un confronto con il caso classico. Successivamente, da una formulazione con operatori di campo passeremo a una formulazione con operatori di creazione e distruzione, tipiche del formalismo della seconda quantizzazione, per mettere in luce alcuni aspetti chiave della teoria delle stringhe.

3.1 Commutatori e hamiltoniana in cono-luce

Abbiamo visto che i vincoli $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$, che corrispondono a una particolare classe di parametrizzazioni del foglio del mondo, portano alle equazioni del moto $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$ e ai momenti $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ e $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ esprimibili come

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'} \quad (3.1)$$

Imponendo il gauge cono-luce $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, che rientra nella classe delle parametrizzazioni soprammenzionati, e risolvendo i vincoli per \dot{X}^- otteniamo

$$\dot{X}^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'} \right) \quad (3.2)$$

che è un'espressione che tornerà molto utile, per esempio per calcolare $\mathcal{P}^{\tau-}$

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (3.3)$$

Per prima cosa forniamo la lista di operatori in rappresentazione di Heisenberg che useremo come variabili dinamiche

$$X^I(\tau, \sigma), \quad x_0^-(\tau), \quad \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \quad p^+(\tau) \quad (3.4)$$

Nel caso di X^I e $\mathcal{P}^{\tau I}$ abbiamo degli operatori che dipendono sia da σ che da τ mentre ci aspettiamo che x_0^- e p^+ siano indipendenti dal tempo, anche se abbiamo esplicitato l'argomento τ per indicare che sono in rappresentazione di Heisenberg. Dobbiamo ora definire le loro relazioni di commutazione ad un tempo τ .

Ricordando che τ è una variabile di tipo tempo, possiamo assumere che due osservabili valutati a tempi diversi sono sempre compatibili. Le componenti dell'operatore posizione commutano tra di loro così come le quelle della densità di momento, per qualsiasi $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$

$$[X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0 \quad (3.5)$$

Mentre richiediamo che gli operatori $X^I(\tau, \sigma)$ non commutino con $\mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma)$ solo se valutati sullo stesso punto della stringa

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (3.6)$$

Usiamo la funzione delta di Dirac, e non la delta di Kronecker, perché σ è una variabile continua. È ragionevole ipotizzare che le misure di posizione e momento in punti diversi della stringa, allo stesso istante τ , non interferiscano tra di loro perché i due punti, a causa del gauge, si trovano a una distanza di tipo spazio l'uno dall'altro, quindi i due eventi non possono essere legati tra di loro in maniera causale. Ovviamente abbiamo anche la relazione di commutazione tra x_0^- e p^+

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i \quad (3.7)$$

Mentre tutti gli altri commutatori sono nulli.

Per trovare le equazioni del moto abbiamo bisogno di una hamiltoniana. Dal gauge $X^+ = 2\alpha'p^+\tau$ deriviamo che $\partial_\tau = 2\alpha'\partial_{X^+}$ e ∂_{X^+} è dato da p^- . Quindi intuiamo che l'evoluzione rispetto a τ è generato da $2\alpha'p^+p^-$ e di conseguenza ipotizziamo che l'hamiltoniana, come operatore di Heisenberg, sia

$$\begin{aligned} H(\tau) &= 2\alpha'p^+p^- = 2\alpha'p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}(\tau, \sigma) \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma)X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ricordiamo che ogni volta che esplicitiamo gli argomenti τ e σ , stiamo trattando di operatori di Heisenberg. Possiamo esprimere l'hamiltoniana anche in termini di modi trasversi di Virasoro, infatti sappiamo da (2.77) che $L_0 = 2\alpha'p^+p^-$ e quindi

$$H = L_0 \quad (3.9)$$

Comunque sia bisogna essere cauti con la definizione (3.8) perché i prodotti $\mathcal{P}\mathcal{P}$ e $X'X'$ possono risultare ambigui, è necessaria una definizione più attenta. Inoltre vedremo che la Lorentz-invarianza richiede un termine sottrattivo nell'hamiltoniana.

Le variabili dinamiche in (3.4) sono operatori dipendenti dal tempo in rappresentazione di Heisenberg che sono stati costruiti a partire da operatori indipendenti dal tempo in rappresentazione di Schroedinger. È evidente che il nostro operatore hamiltoniano, costruito da partire da queste variabili, non abbia una dipendenza temporale, basta sostituire in (1.111) per verificarlo, perciò $H(\tau) = H$. Inoltre è evidente che sia x_0^- che p^+ commutino con l'hamiltoniana, perciò anche questi risultano indipendenti dal tempo. Il caso per $X^I(\tau, \sigma)$ e $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ è invece meno banale.

Usando (1.111) per $X^I(\tau, \sigma)$

$$\begin{aligned}
i\dot{X}^I(\tau, \sigma) &= [X^I(\tau, \sigma), H] \\
&= \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') + \frac{X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right) \right] \\
&= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}(\tau, \sigma')] \\
&= 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')
\end{aligned} \tag{3.10}$$

otteniamo

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I} \tag{3.11}$$

che è compatibile con l'analogo classico (2.51). Si può ripetere il calcolo per $\dot{\mathcal{P}}^{\tau J}$ e usare il risultato per verificare che l'equazione

$$\ddot{X}^I - X^{I''} = 0 \tag{3.12}$$

che ora è da intendersi come un'equazione operatoriale.

Riportiamo infine le relazioni di commutazione di alcune combinazioni di derivate delle coordinate, che torneranno utili successivamente

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \tag{3.13a}$$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0 \tag{3.13b}$$

Ricordiamo inoltre che le condizioni classiche al contorno diventano delle condizioni operatoriali, quindi nel caso di estremi liberi abbiamo delle equazione operatoriali $\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0$ per $\sigma = 0, \pi$.

3.2 Relazioni di commutazione per gli oscillatori

Le relazioni di commutazioni finora ricavate sono molto delicate perché sono delle relazioni di commutazione dipendenti da parametri continui e contenenti delle funzioni delta di Dirac e sue derivate. Quindi è come se avessimo un set non numerabile di relazioni di commutazione. Può essere molto più comodo avere un set numerabile di relazioni di commutazioni. Abbiamo visto nel capitolo precedente che la soluzione del moto può essere espressa in termini di costanti α_n^μ che rappresentano le ampiezze dei modi normali di vibrazione della stringa, quindi possono essere interpretati come degli oscillatori. Possiamo partire dalle relazioni di commutazioni delle coordinate e delle densità di momento e cercare di ottenere le regole di commutazione per gli α_n^μ , che vengono elevati a operatori.

Ricordandoci della soluzione (2.72), abbiamo le seguenti espressioni per le derivate delle coordinate trasversali

$$(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad \sigma \in [0, \pi] \quad (3.14)$$

il tutto è da intendere d'ora in poi in senso operatoriale. Queste funzioni sono definite solo per $\sigma \in [0, \pi]$, per i nostri scopi è utile avere una funzione periodica di 2π espresse in termini di coordinate della stringa. Notiamo che

$$(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) = (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) \quad (3.15)$$

e questo ci porta a definire un operatore periodico $A^I(\tau, \sigma)$

$$A^I(\tau, \sigma) \equiv \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau + \sigma)}, \quad A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma) \quad (3.16)$$

e possiamo legare tale operatore alle coordinate della stringa, per σ che appartiene all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Infatti possiamo identificare $A^I(\tau, \sigma)$ con $(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma)$ per $\sigma \in [0, \pi]$ e con $(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma)$ per $\sigma \in [-\pi, 0]$.

Gli operatori $A^I(\tau, \sigma)$ sono utili per trovare le relazioni di commutazioni degli oscillatori α_n^I . Usando le equazioni (3.13) troviamo che

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi] \quad (3.17)$$

che esplicitando A^I e A^J diventa

$$\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} e^{-m'(\tau + \sigma)} e^{-n'(\tau + \sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.18)$$

Il membro di destra contiene una derivata di una delta di Dirac, quindi si tratta in realtà di una relazione distribuzionale che ha più senso dentro un integrale. Di conseguenza è

sensato applicare ad entrambi i membri gli integrali

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \quad (3.19)$$

che sul membro di sinistra non fa altro che selezionare i termini con $m' = m$ e $n' = n$, rimanendo con $e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J]$. Sul membro di sinistra la situazione è meno banale. Risolvendo l'integrale

$$\begin{aligned} i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ = i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ = -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ottenendo

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} e^{i(m+n)\tau} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (3.21)$$

Abbiamo ricavato così la relazione di commutazione fondamentale per gli oscillatori α_m^I

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (3.22)$$

Notiamo che α_0^I commuta con tutti gli altri modi, ciò è ragionevole perché α_0^I è proporzionale al momento p^I . Per completare la lista delle relazioni di commutazioni bisogna calcolare il commutatore dei modi α_0^I e gli operatori x_0^I che compaiono nella soluzione generale delle coordinate trasverse (2.72).

Sappiamo che vale $[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^I(\tau, \sigma)] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$, dalla relazione tra coordinata X^I e densità di momento $\mathcal{P}^{I\tau}$. Possiamo integrare tale relazione rispetto a σ nell'intervallo $[0, \pi]$ per eliminare le funzioni periodiche e la delta di Dirac. Rimaniamo con

$$\left[x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i\eta^{IJ} \quad (3.23)$$

Che si riduce ulteriormente perché, come avevamo detto prima, α_0^I commuta con tutti gli α_n^I e quindi $[\alpha_0^I, \dot{X}^I] = 0$. Otteniamo

$$[x_0^I, X^I(\tau, \sigma')] = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} [x_0^I, \alpha_{n'}^J] \cos(n'\sigma') e^{-in'\tau} = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} \quad (3.24)$$

che possiamo riscrivere come

$$[x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} \left[x_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau} \right] \cos(n'\sigma) = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} \quad (3.25)$$

Per eliminare il fattore $\cos(n'\sigma)$ possiamo applichiamo l'integrazione $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos n\sigma$, con $n \geq 1$, ad entrambi i membri. Da tale integrazione otteniamo

$$[x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} = 0 \quad (3.26)$$

che implica

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{per } n \neq 0, \quad (3.27)$$

che sostituendo in (3.26) ci da

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (3.28)$$

che riflette la relazione di commutazione che ci aspettavamo tra x_0^I e p^J

$$[x_0^I, p^J] = i \eta^{IJ}. \quad (3.29)$$

Ritorniamo ora alle relazioni di commutazione (3.22) degli α_n^I . Ci siamo riferiti ai modi α_n^I con il termine *oscillatori* per una particolare ragione, l'equazione (3.22) ci mostra che l'insieme degli α_n^I è equivalente a un set infinito di operatori di creazione e di distruzione, che in meccanica quantistica classica vengono utilizzati per descrivere l'oscillatore armonico. Mostriamo ora il perché. Nella risoluzione dell'equazione del moto classica avevamo introdotto dei coefficienti a_n^μ e i loro complessi coniugati $a_n^{\mu*}$ con la relazione

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \quad \text{per } n \geq 1 \quad (3.30)$$

Eleviamo questi coefficienti α_n^μ a operatori, i complessi coniugati diventano ora gli hermitiani coniugati $\alpha_n^{\mu\dagger}$

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n} \quad \text{per } n \geq 1 \quad (3.31)$$

Dalla definizione risulta che $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$, per $n \in \mathbb{Z}$. Ricordiamo che gli operatori a_n^I sono definiti solo per n intero positivo.

Dalla relazione (3.22) si trova facilmente che

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (3.32)$$

ma soprattutto, che

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ} \quad (3.33)$$

Questo vuol dire che la coppia $(a_m^I, a_m^{I\dagger})$ soddisfa la tipica relazione di commutazione degli operatori di creazione e distruzione di un oscillatore armonico quantistico. Abbiamo una coppia di questi operatori per ciascun valore intero di $m \geq 1$ e coordinata trasversa I , e tutti disaccoppiati tra di loro, nel senso che commutano tra di loro. Quindi abbiamo ottenuto che gli α_n^I sono operatori di distruzione e gli α_{-n}^I di creazione, per $n \geq 1$.

Riportiamo l'espansione della coordinata $X^I(\tau, \sigma)$ in termini di operatori di creazione e di distruzione α_{-n}^I e α_n^I , che ci tornerà utile

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (3.34)$$

In conclusione, abbiamo mostrato che è possibile descrivere quantisticamente una stringa aperta libera, sostituendo gli operatori $X^I(\tau, \sigma)$ e $\mathcal{P}^{\tau I}$ con un set infinito coppie di operatori di creazione e distruzione, ovvero di oscillatori più i modi zero (x_0^I, p^I) e (x_0^-, p^+) . Questa proprietà tornerà molto utile e renderà la trattazione quantistica della stringa più interessante.

3.3 Modi trasversi di Virasoro

Dall'espansione in modi normali delle coordinate $X^I(\tau, \sigma)$, abbiamo visto il loro legame con gli oscillatori armonici. L'espansione di X^+ è triviale, perché è fissato dal gauge

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0 \tau \quad (3.35)$$

che significa che $x_0^+ = 0$ e $\alpha_n^+ = 0$ per $n \neq 0$. È molto più interessante considerare l'espansione di $X^-(\tau, \sigma)$

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (3.36)$$

Abbiamo visto che i modi α_n^- possono essere scritti in termini di α_n^I attraverso la definizione dei modi trasversi di Virasoro L_n

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n, \quad L_n \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (3.37)$$

Questi modi trasversi vengono ora elevati a *operatori trasversi di Virasoro* L_n . Bisogna tener conto del fatto gli operatori α_n^I sono caratterizzati da relazioni di commutazione non banali (3.22). Ci domandiamo quindi se l'ordine in cui gli α_n^I compaiono nella (3.37) sia quello corretto. In base a (3.22), il prodotto $\alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$ non commuta solo per $n = 0$, di conseguenza l'unico operatore a risultare ambiguo è L_0 . Questo operatore è di fondamentale importanza perché è l'hamiltoniana cono-luce della stringa e appare nel calcolo della sua massa. Analizziamo ora in maggior dettaglio l'operatore L_0 , esplicitando la somma che lo definisce

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-n}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (3.38)$$

Il prodotto $\alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ è in normalmente ordinato (“*normal ordered*”), nel senso che l’operatore di creazione α_{-p}^I è a sinistra dell’operatore di distruzione α_p^I . In questo modo il prodotto agisce in maniera semplice sullo stato di vuoto. Non è consigliato usare operatori che non abbiano un’azione ben definita sullo stato di vuoto ed è per questo che preferiamo lavorare con prodotti normalmente ordinati. Il prodotto $\alpha_p^I \alpha_{-p}^I$ non è normalmente ordinato, possiamo però riscriverlo come

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + p \eta^{II}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \end{aligned} \quad (3.39)$$

ma tale espressione è divergente perché contiene la somma di tutti i numeri interi positivi e ciò è abbastanza problematico. Un’opzione è quello di decidere di ignorare tale problematica e intuire che in realtà L_0 va definito a meno di una costante di riordinamento a (finita o infinita). L’introduzione di una costante nel calcolo di L_0 porta a un shift dello spettro delle masse. Sappiamo che classicamente $\sqrt{2\alpha' p^-} = L_0/p^+$ e dai calcoli precedenti abbiamo ottenuto che

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (3.40)$$

Adottiamo la seguente strategia: definiamo l’operatore L_0 come la parte normalmente ordinata dell’espressione precedente

$$L_0 \equiv \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} p a_n^{I\dagger} a_n^I \quad (3.41)$$

in questo modo risulta pure hermitiano, $(L_0)^\dagger = L_0$, e introduciamo una costante di ordinamento a che entra nel calcolo di p^-

$$2\alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0 + a) \quad (3.42)$$

Se i nostri calcoli sono corretti, questa costante di ordinamento a sembrerebbe essere $\frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n$. C’è però un modo matematico per ottenere un risultato finito da tale serie. Consideriamo la funzione zeta di Riemann $\zeta(s)$, definita come

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (3.43)$$

per $\text{Re}\{s\} > 1$. Se pensiamo a s come una variabile complessa, possiamo fare una continuazione analitica della funzione a tutto il piano complesso. Si ottiene che $\zeta(s)$ è sempre finito, tranne per $s = 1$. Risulta quindi definito e finito anche per $s = -1$, in particolare il valore della continuazione analitica di $\zeta(s)$ per $s = -1$ risulta essere $-1/12$. La definizione originaria della funzione zeta di Riemann ci suggerisce il risultato

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \quad (3.44)$$

da cui

$$a = -\frac{D-2}{24} \quad (3.45)$$

Come vedremo in seguito, per questioni di Lorentz-invarianza, questa è l'espressione corretta. Non solo, il risultato corretto è $a = -1$ che *fixa* le dimensioni spaziotemporali a $D = 26$ per poter avere una teoria quantistica Lorentz-invariante. Ma questa al momento è solo una possibile interpretazione della somma che apparentemente sembra divergente, per ora trattiamo a come una costante da determinare. Come abbiamo detto in precedenza, la sua introduzione porta a uno shift dello spettro delle masse

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I \right) \quad (3.46)$$

Abbiamo visto che $(L_0)^\dagger = L_0$, questo non vale per gli altri operatori di Virasoro. In generale $(L_n)^\dagger = L_{-n}$, questo deriva dal fatto che l'aggiunto di α_n^I è $\alpha_{-n}^I = (\alpha_n^I)^\dagger$.

In base alla relazione di commutazione degli α_n^I con x_n^I si trova che

$$[L_m, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'}\alpha_m^I \quad (3.47)$$

La proprietà più importante degli operatori di Virasoro è che questi non commutano tra di loro, le loro relazioni di commutazione non sono per niente triviali. Incominciamo considerando il commutatore di L_m e α_n^I

$$\begin{aligned} [L_m, \alpha_n^I] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (p\delta_{p+n,0} \alpha_{m-p}^J + (m-p)\delta_{m-p+n,0} \alpha_p^J) \\ &= \frac{1}{2} (-n\alpha_{m+n}^J - n\alpha_{m+n}^J) \end{aligned} \quad (3.48)$$

dove abbiamo utilizzato (3.22). Otteniamo quindi che

$$[L_m, \alpha_n^J] = -n\alpha_{m+n}^J \quad (3.49)$$

Tale risultato lo possiamo sfruttare per calcolare il commutatore di due operatori di Virasoro, L_m e L_n . Prima separiamo la somma che definisce L_m in una maniera tale che sia normalmente ordinato anche per L_0

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I \alpha_{m-k}^I \quad (3.50)$$

Usando questa espressione, il commutatore di L_m con L_n ci da

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (\alpha_{m-k}^I [\alpha_k^I, L_n] + [\alpha_{m-k}^I, L_n] \alpha_k^I) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (\alpha_k^I [\alpha_{m-k}^I, L_n] + [\alpha_k^I, L_n] \alpha_{m-k}^I) \end{aligned} \quad (3.51)$$

e valutando i commutatori tra l'operatori L_n e i diversi α^I usando (3.49) otteniamo

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k+n}^I + (m-n) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_n^I) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} ((m-n) \alpha_k^I \alpha_{m+n-k}^I + k \alpha_{k+n}^I \alpha_{m-n}^I) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Per problemi di ordinamenti distinguiamo due casi: $m+n$ uguale a zero o diverso da zero. Per $m+n \neq 0$ non abbiamo problemi di ordinamento e ci troviamo con

$$[L_m, L_n] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k+n}^I = (m-n) \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I \quad (3.53)$$

dove abbiamo eseguito la sostituzione $k \rightarrow k-n$ nel secondo termine del secondo membro e poi sommato. Abbiamo quindi dimostrato che

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} \quad \text{per } m+n \neq 0 \quad (3.54)$$

Il commutatore di due operatori di Virasoro è un operatore di Virasoro con il numero di modi che è dato dalla somma dei modi degli operatori di cui si esegue il commutatore, nel caso che quest'ultima somma non sia nulla. L'equazione precedente definisce una algebra di Lie particolare, detta *algebra di Virasoro senza estensione centrale*, o algebra di Witt.

Analizziamo il caso $m+n=0$, ossia $n=-m$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} [L_m, L_{-m}] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k-m}^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{k-m}^I \alpha_{m-k}^I \end{aligned} \quad (3.55)$$

eseguiamo ora delle sostituzioni per ottenere dei prodotti normalmente ordinati. Il primo termine è già normalmente ordinato, sul secondo facciamo il cambio $k \rightarrow -k$, sul terzo $k \rightarrow m + k$ e sull'ultimo $k \rightarrow m - k$. Otteniamo così

$$[L_m, L_{-m}] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \quad (3.56)$$

Ipotizziamo senza perdere di generalità che $m > 0$, in questo modo gli unici termini non normalmente ordinati sono quelli del terzo termine per $-m \leq k \leq 0$. Possiamo spezzare la sommatoria in due sommatorie, da 0 a m ma con k invertito di segno e da 0 a ∞ senza invertire il segno di k , inoltre possiamo esprimere $\alpha_k^I \alpha_{-k}^I$ come $[\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] + \alpha_{-k}^I \alpha_k^I$ che a sua volta è uguale a $k\eta^{II} + \alpha_{-k}^I \alpha_k^I$, con $k\eta^{II} = k(D-2)$. Tenendo conto di ciò si ottiene

$$[L_m, L_{-m}] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2)A(m) \quad (3.57)$$

dove $A(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k(m-k)$ e si può dimostrare che $A(m) = \frac{1}{12}(m^3 - m)$. Quindi, espandendo la sommatoria nell'ultima equazione otteniamo

$$[L_m, L_{-m}] = 2m \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \right) + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \quad (3.58)$$

ovvero

$$[L_m, L_{-m}] = 2mL_0 + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \quad (3.59)$$

In conclusione le relazioni di commutazione degli operatori di Virasoro possono essere riassunte con

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad (3.60)$$

Un set di operatori L_n con $n \in \mathbb{Z}$ che soddisfano queste relazioni formano un'algebra di Virasoro con estensione centrale. Il secondo termine del membro di destra viene chiamato estensione centrale ed è una costante (che moltiplica l'identità) che commuta con tutti gli altri operatori dell'algebra e si annulla per $m = 0, \pm 1$. Quest'algebra è importante perché vedremo che gli operatori di Virasoro entreranno direttamente nella definizione dei generatori di Lorentz.

Per concludere la sezione mostriamo come agiscono gli operatori di Virasoro sulle coordinate X^I . Consideriamo l'espansione (3.34), utilizzando la relazione di commutazione (3.49) troviamo che il commutatore dell'operatore L_m e della coordinata $X^I(\tau, \sigma)$

$$[L_m, X^I(\tau, \sigma)] = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos n\sigma e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \quad (3.61)$$

usando la formula di Eulero $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ e facendo la sostituzione $n \rightarrow n - m$ si ottiene

$$[L_m, X^I(\tau, \sigma)] = -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)} + e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)}) \alpha_n^I \quad (3.62)$$

che si può riesprimere in termini di derivate di X^I

$$\begin{aligned} [L_m, X^I(\tau, \sigma)] &= -\frac{i}{2} e^{im(\tau-\sigma)} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau-\sigma)} \alpha_n^I - \frac{i}{2} e^{im(\tau+\sigma)} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} \alpha_n^I \\ &= -\frac{i}{2} e^{im(\tau-\sigma)} (\dot{X}^I - X^{I'}) - \frac{i}{2} e^{im(\tau+\sigma)} (\dot{X}^I + X^{I'}) \\ &= -ie^{im\tau} \cos m\sigma \dot{X}^I + e^{im\tau} \sin m\sigma X^{I'} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Quindi possiamo dire che l'azione di L_m su una coordinata trasversa X^I , via commutatore

$$[L_m, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'} \quad (3.64)$$

dove

$$\xi_m^\tau = -ie^{im\tau} \cos m\sigma, \quad \xi_m^\sigma = e^{im\tau} \sin m\sigma, \quad (3.65)$$

genera una riparametrizzazione del foglio di mondo

$$\tau \mapsto \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \quad \sigma \mapsto \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) \quad (3.66)$$

dove ϵ è un parametro infinitesimo. Possiamo verificarlo con uno sviluppo in serie di Taylor della coordinata X^I

$$X^I(\tau + \epsilon \xi_m^\tau, \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma) = X^I(\tau, \sigma) + \epsilon (\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}) = X^I(\tau, \sigma) + \epsilon [L_m, X^I(\tau, \sigma)] \quad (3.67)$$

Nel caso particolare di L_0 , per $m = 0$ otteniamo $\xi_m^\tau = -i$ e $\xi_m^\sigma = 0$ e quindi l'azione di L_0 sulle coordinate X^I

$$[L_0, X^I] = -i\partial_\tau X^I \quad (3.68)$$

è quella di generare l'evoluzione rispetto a τ , infatti L_0 è, a meno di una costante additiva, l'hamiltoniana della stringa e quindi deve generare delle traslazioni rispetto al tempo τ . Inoltre, per come è fatto ξ_m^σ questa non cambia le coordinate degli estremi della stringa, infatti essa si annulla per $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$.

Un'ultima particolarità, le funzioni ξ_m^τ e ξ_m^σ non sono funzioni reali e quindi non mantengono la realtà delle coordinate τ e σ . Le trasformazioni reali devono essere generate da operatori anti-hermitiani. Un classico esempio di ciò, dalla meccanica quantistica, è dato dall'operatore momento $p_j = -i\partial_j$, dove p_j è hermitiano. Una traslazione reale delle coordinate è dato dall'operatore ip , che invece è anti-hermitiano. Dati gli operatori L_m e L_{-m} possiamo costruire delle combinazioni anti-hermitiani: $L_m - L_{-m}$ e $i(L_m + L_{-m})$, che generano trasformazioni reali. Per esempio la prima combinazione genera via commutatore la trasformazione $\xi^\tau \dot{X}^I + \xi^\sigma X^{I'}$ dove $\xi^\tau = 2 \cos m\sigma \cos m\tau$ e $\xi^\sigma = 2 \sin m\sigma \sin m\tau$, entrambe funzioni reali.

3.4 Generatori di Lorentz

Siamo interessati ora a trovare i generatori di Lorentz e le loro relazioni di commutazione in gauge di cono-luce. Partiamo prima dalla forma covariante, sappiamo che le cariche conservate $M_{\mu\nu}$, per $\sigma \in [0, \pi]$ sono date classicamente da

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) \quad (3.69)$$

Usando il gauge cono-luce e le espressioni (3.1) si ottiene

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) \quad (3.70)$$

Sappiamo che la carica $M^{\mu\nu}$ è indipendente da τ e quindi possiamo sviluppare il prodotto $X^\mu \dot{X}^\nu$, usando le espansioni (2.65) e (2.66) di X^μ e \dot{X}^ν rispettivamente, selezionando solo i termini indipendenti da τ

$$X^\mu \dot{X}^\nu = 2\alpha' x_0^\mu p^\nu + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2 n\sigma + \dots \quad (3.71)$$

Integrando $X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu$ su $\sigma \in [0, \pi]$ e dividendo per $2\pi\alpha'$ si ottiene

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (3.72)$$

che ci permette di esprimere, classicamente, i generatori di Lorentz in termini di oscillatori α_n^μ .

L'equazione (3.72) ci suggerisce l'espressione per gli operatori generatori delle trasformazioni di Lorentz in gauge di cono-luce, ma la struttura inusuale della teoria cono-luce non ci dà alcuna garanzia sulla possibilità di realizzare l'algebra di Lorentz. Un fallimento nel realizzare l'algebra significherebbe un fallimento nel costruire una teoria Lorentz-invariante.

Analizziamo solo i generatori M^{-I} , perché la coordinata X^- è una funzione per niente triviale delle coordinate trasversali X^I . Ci aspettiamo che M^{-I} generi delle trasformazioni di Lorentz delle coordinate della stringa, possibilmente accompagnate da una riparametrizzazione del foglio di mondo. Nel caso semplice della particella puntiforme avevamo visto che l'azione di M^{-I} era accompagnata da una riparametrizzazione della linea di mondo (per mantenere il gauge). Ovviamente M^{-I} deve soddisfare l'algebra di Lorentz, che in coordinate cono-luce diventa

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0 \quad (3.73)$$

Una primo tentativo di formulare M^{-I} consiste nell'usare le coordinate cono-luce in (3.72)

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I + x_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (3.74)$$

Il generatore M^{-I} deve essere hermitiano e normalmente ordinato. Il prodotto $x_0^- p^I$ è hermitiano ma non lo è $x_0^I p^-$, perchè non commutano. Simmetrizzando questo termine otteniamo

$$M^{-I} \stackrel{?}{=} x_0^- p^I + \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \quad (3.75)$$

dove l'ultimo termine invece è hermitiano, perchè $(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I$ e $(\alpha_n^-)^\dagger = \alpha_{-n}^-$. Inoltre è anche normalmente ordinato, tutti gli operatori di distruzione compaiono alla destra di operatori di creazione e gli oscillatori α^- sono operatori di Virasoro a loro volta normalmente ordinati. Ricordandoci inoltre che p^- equivale a L_0 più una costante additiva a , troviamo che

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} [x_0^I (L_0 + a) + (L_0 + a) x_0^I] - \frac{1}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n} \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n) \quad (3.76)$$

Useremo l'ultima espressione come candidato per M^{-I} . Ci è rimasto ora da calcolare il commutatore $[M^{-I}, M^{-J}]$ e verificare che si annulli. Questo calcolo è di estrema importanza, per le conseguenze fisiche che porta, ma è molto laborioso, fa uso di gran parte delle relazioni di commutazioni che abbiamo ricavato fino ad ora. Riportiamo soltanto il risultato finale (secondo [4, p. 259])

$$[M^{-I}, M^{-J}] = \frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \times \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24} (D-2) + a \right] \right\} \quad (3.77)$$

Questo commutatore si annulla solo per

$$m \left[1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24} (D-2) + a \right] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.78)$$

che vuol dire che i termini nelle parentesi quadre si devono annullare identicamente, ossia

$$1 - \frac{1}{24} (D-2) = 0 \quad \frac{1}{24} (D-2) + a = 0 \quad (3.79)$$

Queste equazioni fissano la dimensionalità dello spazio-tempo

$$D = 26 \tag{3.80}$$

e la costante di ordinamento

$$a = -1 \tag{3.81}$$

Questo valore di a è consistente con il risultato della funzione zeta di Riemann per cui $\zeta(-1) = -1/12 = 1 + 2 + 3 + \dots$ che avevamo previsto in Sez. 3.3.

Abbiamo mostrato che la Lorentz-invarianza della teoria delle stringhe fissa la dimensione dello spazio-tempo e il shift costante delle masse. Nella teoria supersimmetrica un calcolo simile invece porta al risultato $D = 10$. Questo ci mostra che la teoria delle stringhe è una teoria molto vincolata, l'unico parametro libero che abbiamo a disposizione è la lunghezza della stringa ℓ , che determina α' . Non possiamo nemmeno decidere la dimensione dello spazio-tempo per avere una teoria consistente.

Nasce ovviamente una problematica nel risultato $D = 26$, perché si osservano solo quattro dimensioni, di cui tre spaziali e una temporale. Le altre 22 dimensioni? Si suppone che siano delle dimensioni compatte, osservabili solo a scale di lunghezza pari alla lunghezza di Planck ($\sim 10^{-35}$ m).

Bibliografia

- [1] Paul A.M. Dirac. «Forms of relativistic dynamics». In: *Reviews of Modern Physics* 21.3 (1949), p. 392.
- [2] Paul A.M Dirac. *The principles of quantum mechanics: vol 27 of The international series of monographs on Physics*. 1958.
- [3] Thomas Heinzl. «Light-cone quantization: Foundations and applications». In: *Methods of Quantization*. Springer, 2001, pp. 55–142.
- [4] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009.