



---

# Università degli Studi di Bologna

---

**Facoltà di Ingegneria**  
Corso di Laurea in Ingegneria Civile

## SIMULAZIONE NUMERICA DI FENOMENI AEROELASTICI CON APPLICAZIONE ALLE STRUTTURE CIVILI

**Tesi di Laurea**

di:

GIOVANNI BERTI

**Relatore**

Chiarissimo Signore:

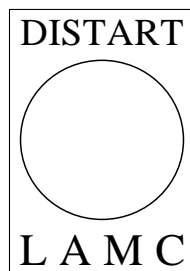
Prof. Ing. FRANCESCO UBERTINI

**Corelatori**

Illustrissimi Signori

Prof. Ing. GIAMBATTISTA SCARPI  
Dott. Ing. STEFANO DE MIRANDA  
Dott. Ing. GIOVANNI CASTELLAZZI  
Dott. Ing. ALESSANDRO MARZANI

---



Tesi di laurea svolta presso il DISTART - Scienza delle Costruzioni  
Laboratorio di Meccanica Computazionale (LAMC)  
Università di Bologna

*Dedica.*

E via... ciao John!



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>1 Nozioni di fluidodinamica</b>	<b>13</b>
1.1 Deformazione di un continuo . . . . .	13
1.1.1 Configurazione di un continuo . . . . .	13
1.1.2 Operatore gradiente di deformazione . . . . .	13
1.1.3 Operatori di deformazione . . . . .	15
1.1.4 Coefficiente di dilatazione lineare . . . . .	17
1.1.5 Coefficiente di dilatazione superficiale . . . . .	17
1.1.6 Coefficiente di dilatazione di volume . . . . .	19
1.1.7 Corpi incomprimibili . . . . .	20
1.2 Cinematica di un corpo continuo . . . . .	20
1.2.1 Velocità ed accelerazione . . . . .	20
1.2.2 Operatore gradiente di velocità . . . . .	21
1.3 Forze su un continuo e tensore degli sforzi . . . . .	22
1.3.1 Forze in un continuo . . . . .	22
1.3.2 Tensore degli sforzi e teorema di Cauchy . . . . .	23
1.4 Leggi di bilancio in meccanica dei continui . . . . .	25
1.4.1 Legge di conservazione della massa . . . . .	25
1.4.2 Legge di bilancio della quantità di moto . . . . .	27
1.4.3 Legge di bilancio dell'energia . . . . .	29
1.4.4 Legge di bilancio della termomeccanica in forma euleriana	30
1.5 Equazioni costitutive . . . . .	30
1.5.1 Principio di indifferenza materiale . . . . .	30

1.5.2	Principio di entropia . . . . .	31
1.6	Fluidi . . . . .	32
1.6.1	Fluidi ideali ed equazioni di Eulero . . . . .	32
1.6.2	Fluidi dissipativi di Fourier-Navier-Stokes . . . . .	33
1.6.3	Principio di entropia per un fluido . . . . .	35
1.6.4	Fluidi di Fourier-Navier-Stokes incomprimibili . . . . .	37
1.6.5	Fluidi di Eulero incomprimibili e teorema di Bernoulli .	37
1.7	Fluido di moto bidimensionale . . . . .	39
1.7.1	Vortici liberi . . . . .	39
1.7.2	Strato limite . . . . .	42
1.7.3	Numero di Reynolds . . . . .	43
1.7.4	Formazione dei vortici . . . . .	43
1.7.5	Coefficienti aerodinamici . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Fenomeni aeroelastici</b>	<b>51</b>
2.1	Distacco dei vortici e lock-in . . . . .	51
2.1.1	Distacco dei vortici e numero di Strouhal . . . . .	51
2.1.2	Condizione di risonanza e lock-in . . . . .	51
2.1.3	Simulazione numerica del fenomeno . . . . .	54
2.2	Across-wind Galloping . . . . .	56
2.2.1	Descrizione del fenomeno . . . . .	56
2.2.2	Schema . . . . .	56
2.2.3	Equazione del moto della sezione . . . . .	58
2.2.4	Condizione di galloping . . . . .	59
2.3	Divergenza torsionale . . . . .	61
2.3.1	Descrizione del fenomeno . . . . .	61
2.3.2	Schema . . . . .	61
2.3.3	Equazione di equilibrio . . . . .	62
2.3.4	Condizione di divergenza torsionale . . . . .	63
2.3.5	Applicazione al caso di una sezione a lamina sottile . .	64
2.3.6	Trattazione di Scanlan . . . . .	64
2.4	Buffeting . . . . .	65



---

2.4.1	Descrizione del fenomeno . . . . .	65
2.4.2	Forze aerodinamiche . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Flutter</b>	<b>69</b>
3.1	Descrizione del fenomeno . . . . .	69
3.1.1	Schematizzazione . . . . .	70
3.1.2	Ipotesi . . . . .	71
3.1.3	Carichi aerodinamici per profili alari sottili . . . . .	71
3.1.4	Carichi aerodinamici per impalcati da ponte . . . . .	73
3.2	Problema agli autovalori . . . . .	75
3.2.1	Equazioni del moto . . . . .	75
3.2.2	Impostazione del problema agli autovalori . . . . .	77
3.2.3	Calcolo della velocità di flutter . . . . .	78
3.3	Procedimento di Scanlan . . . . .	80
3.3.1	Equazioni del moto . . . . .	80
3.3.2	Soluzione delle equazioni del moto . . . . .	81
3.3.3	Determinazione della velocità di flutter . . . . .	83
3.3.4	Procedimento alternativo . . . . .	85
3.4	Flutter torsionale . . . . .	85
3.4.1	Equazione del moto . . . . .	85
3.4.2	Condizione di flutter . . . . .	86
3.5	Impalcato da ponte 3 gradi di libertà . . . . .	87
3.5.1	Schematizzazione . . . . .	87
3.5.2	Ipotesi . . . . .	87
3.5.3	Carichi aerodinamici . . . . .	87
3.5.4	Equazioni del moto . . . . .	89
3.5.5	Soluzione delle equazioni del moto . . . . .	89
3.5.6	Determinazione della velocità di flutter . . . . .	90
3.6	Derivate di flutter di un impalcato . . . . .	90
3.6.1	Ipotesi . . . . .	90
3.6.2	Procedimento di Scanlan . . . . .	92
3.6.3	Procedimento di Larsen . . . . .	96

<b>4</b>	<b>Applicazione al ponte Tsing Ma</b>	<b>101</b>
4.1	Caratteristiche del ponte . . . . .	101
4.1.1	Descrizione del ponte . . . . .	101
4.1.2	Sezione dell'impalcato . . . . .	101
4.1.3	Caratteristiche strutturali . . . . .	102
4.1.4	Caratteristiche aerodinamiche . . . . .	105
4.2	Instabilità per flutter a due gradi di libertà . . . . .	106
4.2.1	Trattazione come lamina piana . . . . .	106
4.2.2	Divergenza torsionale . . . . .	107
4.3	Instabilità per flutter a un grado di libertà . . . . .	108
4.3.1	Trattazione come lamina piana . . . . .	108
4.3.2	Formula approssimata . . . . .	108
4.3.3	Trattazione agli autovalori . . . . .	109
4.3.4	Confronto con il modello numerico . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>

# Introduzione

Il presente lavoro tratta lo studio dei fenomeni aeroelastici di interazione fra fluido e struttura, con il fine di provarli mediante l'ausilio di un codice agli elementi finiti.

Nel primo capitolo sono fornite alcune nozioni di fluidodinamica, in modo da rendere chiari i passaggi teorici fondamentali che portano alle equazioni di Navier-Stokes governanti il moto dei fluidi viscosi. Inoltre è illustrato il fenomeno della formazione di vortici a valle dei corpi tozzi dovuto alla separazione dello strato limite laminare, con descrizione anche di alcuni risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche.

Nel secondo capitolo vengono presi in rassegna i principali fenomeni di interazione fra fluido e struttura, cercando di metterne in luce le fondamenta della trattazione analitica e le ipotesi sotto le quali tale trattazione è valida. Chiaramente si tratta solo di una panoramica che non entra in merito degli sviluppi della ricerca più recente ma fornisce le basi per affrontare i vari problemi di instabilità strutturale dovuti a un particolare fenomeno di interazione con il vento.

Il terzo capitolo contiene una trattazione più approfondita del fenomeno di instabilità per flutter. Tra tutti i fenomeni di instabilità aeroelastica delle strutture il flutter risulta il più temibile, soprattutto per i ponti di grande luce. Per questo si è ritenuto opportuno dedicargli un capitolo, in modo da illustrare i vari procedimenti con cui si riesce a determinare analiticamente la velocità critica di flutter di un impalcato da ponte, a partire dalle funzioni sperimentali denominate derivate di flutter. Al termine del capitolo è illustrato il procedimento con cui si ricavano sperimentalmente le derivate di

flutter di un impalcato da ponte.

Nel quarto capitolo è presentato l'esempio di studio dell'impalcato del ponte Tsing Ma ad Hong Kong. Sono riportati i risultati analitici dei calcoli della velocità di flutter e di divergenza torsionale dell'impalcato e i risultati delle simulazioni numeriche effettuate per stimare i coefficienti aerodinamici statici e il comportamento dinamico della struttura soggetta all'azione del vento.

Considerazioni e commenti sui risultati ottenuti e sui metodi di modellazione numerica adottati completano l'elaborato.

# Capitolo 1

## Nozioni di fluidodinamica

### 1.1 Deformazione di un continuo

#### 1.1.1 Configurazione di un continuo

Con riferimento alla trattazione del professor Ruggeri [2], si consideri il continuo come una regione dello spazio euclideo, indicando con  $C^*$  la configurazione al tempo  $t = 0$  e con  $C$  la configurazione al generico istante  $t$ .

Con riferimento alla figura 1.1 i raggi vettori  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$  vengono scritti nella forma:

$$\mathbf{X} = OP^* \equiv (X_1, X_2, X_3) \quad \mathbf{x} = OP \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

Ad un prefissato tempo  $t$  la conoscenza della funzione vettoriale  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  permette di conoscere un qualunque punto  $P$  di  $C$  se si conosce la sua immagine  $P^*$  in  $C^*$ . Si assume che la funzione vettoriale suddetta sia almeno di classe  $C^2$ .

#### 1.1.2 Operatore gradiente di deformazione

Data la trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  si definisce l'operatore gradiente di deformazione:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \left\| \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right\|$$

Le componenti  $F_{iA}$  dell'operatore gradiente di deformazione costituiscono la matrice Jacobiana  $\mathbf{F}$  associata alla trasformazione. Per garantire che non ci

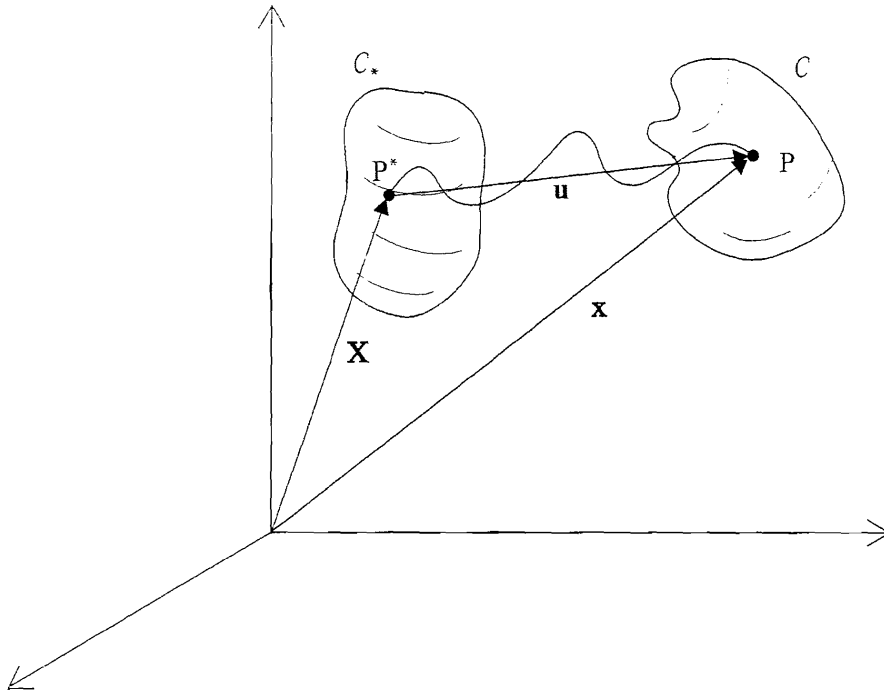


Fig. 1.1: Configurazione di un continuo

sia sovrapposizione tra due particelle bisogna richiedere l'invertibilità locale della trasformazione e quindi imporre:

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0 \quad \forall \mathbf{X} \text{ e } \forall t \geq 0$$

Consideriamo la trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  al tempo  $t = 0$ :

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{I} \Rightarrow J(0) = 1$$

Quindi dovendo essere  $J(t) \neq 0$  e data la continuità della funzione  $J(t)$  si avrà sempre che  $J(t) \geq 0$ . Infatti per diventare negativa la funzione  $J(t)$  dovrebbe comunque passare per  $J(\tilde{t}) = 0$ . Per cui si può assumere che  $J(\mathbf{X}, t) > 0$ , nel tal caso esiste la trasformazione inversa:

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \tag{1.1}$$

Definito il vettore spostamento:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \tag{1.2}$$

Si definisce il gradiente di spostamento:

$$\text{Grad} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \left\| \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \right\| = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I}$$

### 1.1.3 Operatori di deformazione

Facendo riferimento alla figura fig.1.2 definisco i seguenti vettori infinitesimi  $d\mathbf{X} = dP^* \equiv (dX_1, dX_2, dX_3)$  e  $d\mathbf{x} = dP \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$ , per i quali vale la relazione:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} dX_A \Rightarrow d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

L'operatore  $\mathbf{F}$  permette quindi di passare da un vettore infinitesimo di  $C^*$  al suo corrispondente in  $C$ .

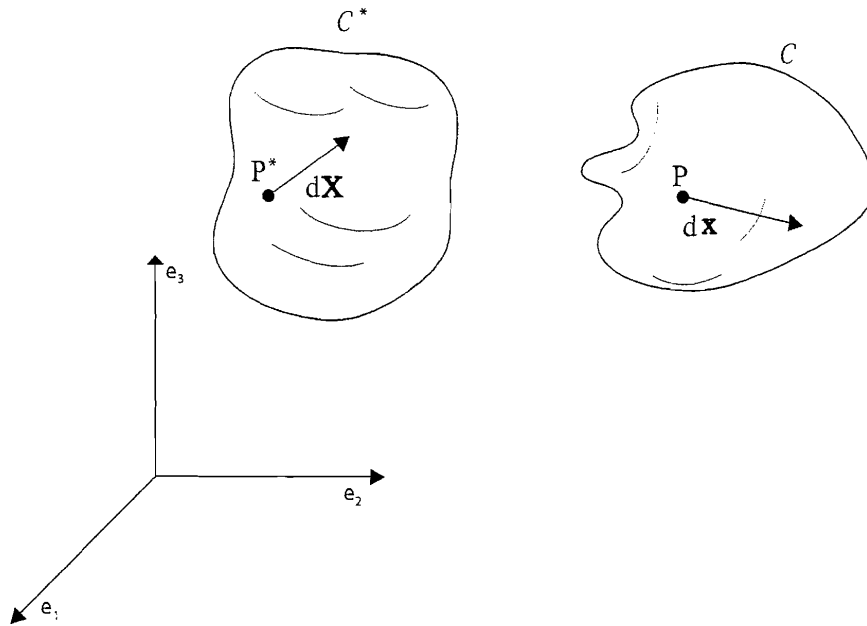


Fig. 1.2: Operatore di deformazione

Allo scopo di misurare il divario tra i moduli di  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{X}$  si calcola la norma di  $d\mathbf{x}$  al quadrato:

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} d\mathbf{X} \quad (1.3)$$

Introducendo l'operatore di deformazione di Cauchy-Green destro:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Rightarrow C_{AB} = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_i}{\partial X_B}$$

Si può scrivere l'equazione (1.3) nella forma:

$$|d\mathbf{x}|^2 = \mathbf{C} d\mathbf{X} d\mathbf{X} \quad (1.4)$$

Si può dimostrare che l'operatore  $\mathbf{C} \in Sym^+$  cioè che appartiene alle matrici simmetriche e definite positive. Introducendo l'operatore di deformazione di Green-Saint Venant:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \Rightarrow E_{AB} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_A} \frac{\partial x_i}{\partial X_B} - \delta_{AB} \right)$$

Si può scrivere l'equazione (1.4) nella forma:

$$|d\mathbf{x}|^2 = |d\mathbf{X}|^2 + 2\mathbf{E} d\mathbf{X} d\mathbf{X}$$

Nel caso di trasformazioni rigide  $\mathbf{E} = 0$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , per cui l'operatore  $\mathbf{E}$  è indice della deformazione che ha subito il corpo.

Tenendo conto della relazione (1.2) il tensore di Cauchy-Green destro può essere scritto in funzione del gradiente di spostamento:

$$\mathbf{C} = (\text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{I})^T (\text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{I}) = \mathbf{I} + \text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T + (\text{Grad} \mathbf{u})^T \text{Grad} \mathbf{u}$$

$$C_{AB} = \delta_{AB} + \frac{\partial u_A}{\partial X_B} + \frac{\partial u_B}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \frac{\partial u_i}{\partial X_B}$$

Analogamente si può esprimere il tensore di Green-Saint Venant in funzione del gradiente di spostamento:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} + \text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T + (\text{Grad} \mathbf{u})^T \text{Grad} \mathbf{u} - \mathbf{I} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T + (\text{Grad} \mathbf{u})^T \text{Grad} \mathbf{u} \right) \\ E_{AB} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_A}{\partial X_B} + \frac{\partial u_B}{\partial X_A} + \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \frac{\partial u_i}{\partial X_B} \right) \end{aligned}$$



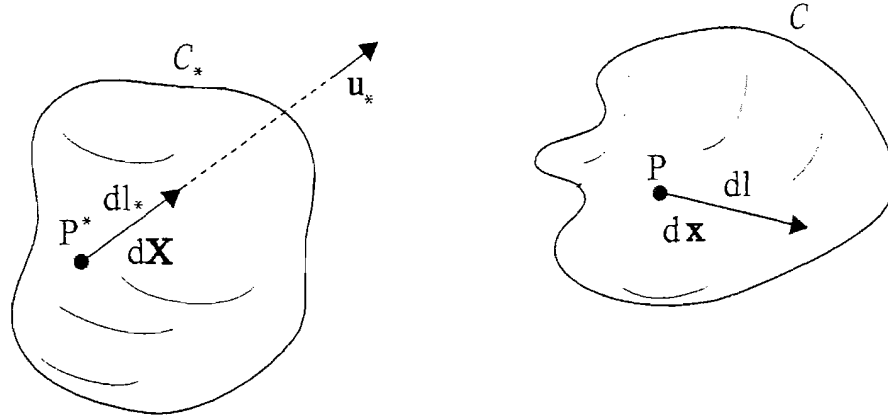


Fig. 1.3: Coefficiente di dilatazione lineare

### 1.1.4 Coefficiente di dilatazione lineare

Con riferimento alla figura fig.1.3 si considera il vettore  $d\mathbf{X}$ , dove  $dl_* = |d\mathbf{X}|$ :

$$d\mathbf{X} = dl_* \mathbf{u}_*$$

Indicando con  $dl = |d\mathbf{x}|$  si definisce quindi il coefficiente di dilatazione lineare nella direzione  $\mathbf{u}_*$  come:

$$\delta_{u_*} = \frac{dl - dl_*}{dl_*} = \frac{dl}{dl_*} - 1 \quad (1.5)$$

Dall'espressione (1.4) segue che:

$$dl = dl_* \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_*}$$

Quindi sostituendo nella (1.5) si ottiene:

$$\delta_{u_*} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{u}_* \cdot \mathbf{u}_*} - 1$$

### 1.1.5 Coefficiente di dilatazione superficiale

Con riferimento alla figura fig.1.4 vengono scritte le espressioni delle aree nelle configurazioni  $C$  e  $C^*$ :

$$d\mathbf{x} \wedge \delta\mathbf{x} = d\Sigma\mathbf{n} \quad (1.6)$$

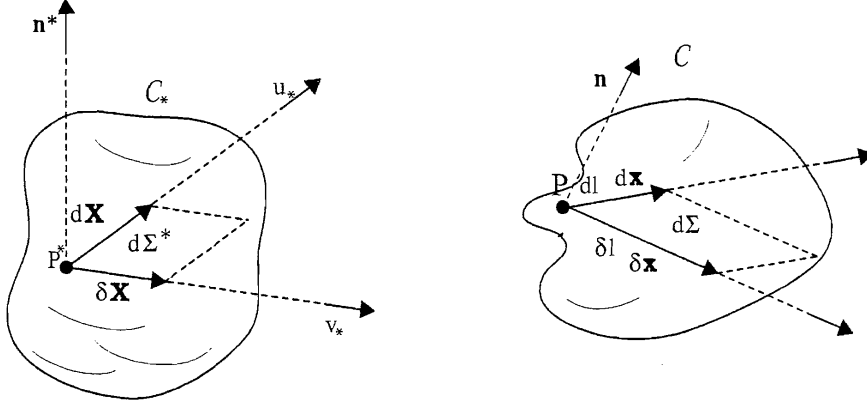


Fig. 1.4: Coefficiente di dilatazione superficiale

$$d\mathbf{X} \wedge \delta\mathbf{X} = d\Sigma^* \mathbf{n}^* \quad (1.7)$$

Applicando le proprietà del calcolo matriciale si può scrivere la relazione:

$$d\mathbf{x} \wedge \delta\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \wedge \mathbf{F} \delta\mathbf{X} = \mathbf{F}^C (d\mathbf{X} \wedge \delta\mathbf{X})$$

Per cui confrontando con le espressioni (1.6) e (1.7) si ha che:

$$d\Sigma \mathbf{n} = d\Sigma^* \mathbf{F}^C \mathbf{n}^*$$

Elevando ambo i membri al quadrato si ottiene:

$$(d\Sigma)^2 = (d\Sigma^*)^2 \mathbf{F}^{CT} \mathbf{F}^C \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n}^* \quad (1.8)$$

Ricordando le seguenti proprietà del calcolo matriciale:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^{CT}}{\det \mathbf{A}} \quad \mathbf{A}^C = \mathbf{A}^{-1T} \det \mathbf{A}$$

Si può considerare la seguente uguaglianza, ricordando che  $J = \det \mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}^{CT} \mathbf{F}^C = J^2 \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-1T} = J^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = J^2 \mathbf{C}^{-1}$$

Che inserita nell'equazione (1.8) porta al risultato:

$$d\Sigma = d\Sigma^* J \sqrt{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n}^*} \quad (1.9)$$

Il coefficiente di dilatazione superficiale è da definizione:

$$\delta_{\Sigma} = \frac{d\Sigma - d\Sigma^*}{d\Sigma^*} = \frac{d\Sigma}{d\Sigma^*} - 1$$

Sostituendo l'espressione (1.9) precedentemente ricavata, nella definizione di coefficiente di dilatazione superficiale si ottiene:

$$\delta_{\Sigma} = J\sqrt{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{n}^*} - 1$$

### 1.1.6 Coefficiente di dilatazione di volume

Con riferimento alla figura fig.1.5 le espressioni dei volumi infinitesimi nelle configurazioni  $C$  e  $C^*$  sono le seguenti, nel rispetto delle proprietà del calcolo vettoriale:

$$dV = d\mathbf{x} \wedge \delta\mathbf{x} \cdot \Delta\mathbf{x} = J (d\mathbf{X} \wedge \delta\mathbf{X} \cdot \Delta\mathbf{X}) = J dV^*$$

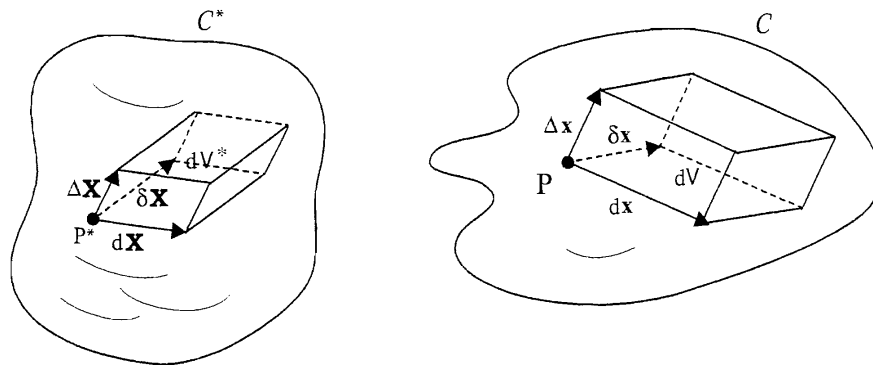


Fig. 1.5: Coefficiente di dilatazione di volume

Per cui si può affermare che:

$$J = \frac{dV}{dV^*} \quad (1.10)$$

Il coefficiente di dilatazione volumetrica è da definizione:

$$\delta_V = \frac{dV - dV^*}{dV^*} = J - 1$$

### 1.1.7 Corpi incompressibili

Da definizione un corpo si dice incompressibile se, pur deformandosi, il suo volume rimane sempre lo stesso.

Applicando la definizione per un corpo incompressibile si ha che deve essere  $\delta_V=0$  e quindi  $J = 1$ .

## 1.2 Cinematica di un corpo continuo

### 1.2.1 Velocità ed accelerazione

La velocità di un punto  $P$  del continuo è definita come:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

Quindi il vettore velocità è una funzione di  $\mathbf{X}$  e  $t$ :

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \tag{1.11}$$

L'espressione (1.11) rappresenta la velocità lagrangiana: fissato un punto  $P^*$  nella configurazione  $C^*$  fornisce la sua velocità istante per istante. L'accelerazione nella forma lagrangiana è espressa come:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

Per ottenere la velocità nella formulazione euleriana inserisco invece la trasformazione inversa (1.1) nell'espressione della velocità lagrangiana (1.11):

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

L'accelerazione in forma euleriana risulta essere:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t)$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$a_j(x, t) = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i$$

Per cui l'operatore  $\frac{d}{dt}$  viene chiamato derivata materiale e rappresenta la derivata di una grandezza lungo il moto della particella:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \quad (1.12)$$

## 1.2.2 Operatore gradiente di velocità

La definizione dell'operatore gradiente di velocità è:

$$\nabla \mathbf{v} = \left\| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right\|$$

$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$  come ogni matrice è composto dalla somma di una matrice simetrica e una emisimmetrica:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T \right)$$

Da notare che  $\text{tr} \mathbf{D} = \text{tr} \nabla \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$ .

La derivata rispetto al tempo del determinante  $J$  dell'operatore gradiente di deformazione  $\mathbf{F}$  è pari a:

$$\dot{J} = \mathbf{F}^C \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (1.13)$$

Sviluppando gli elementi della matrice  $\dot{\mathbf{F}}$  si ottiene:

$$F_{jA} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_j}{\partial X_A} \right) = \frac{\partial}{\partial X_A} \left( \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_j}{\partial X_A} = \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_A}$$

Per cui si può scrivere che:

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \quad (1.14)$$

Sostituendo l'espressione (1.14) nella (1.13) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \mathbf{F}^C \cdot \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^C = \\ &= \text{tr} (\nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{F}^{CT}) = \text{tr} (J \nabla \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) = J \text{tr} (\nabla \mathbf{v}) = J \text{div } \mathbf{v} \end{aligned}$$

Si ha quindi l'identità notevole:

$$\dot{J} = \frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.15)$$

Se il corpo è incompressibile essendo  $J = 1$  si ha che il campo delle velocità è solenoidale:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

## 1.3 Forze su un continuo e tensore degli sforzi

### 1.3.1 Forze in un continuo

Con riferimento alla figura fig.1.6 si possono esprimere le forze di massa  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{b}$  agenti sull'elemento di volume infinitesimo  $dV$ :

$$\mathbf{F}dV = \mathbf{b}dm$$

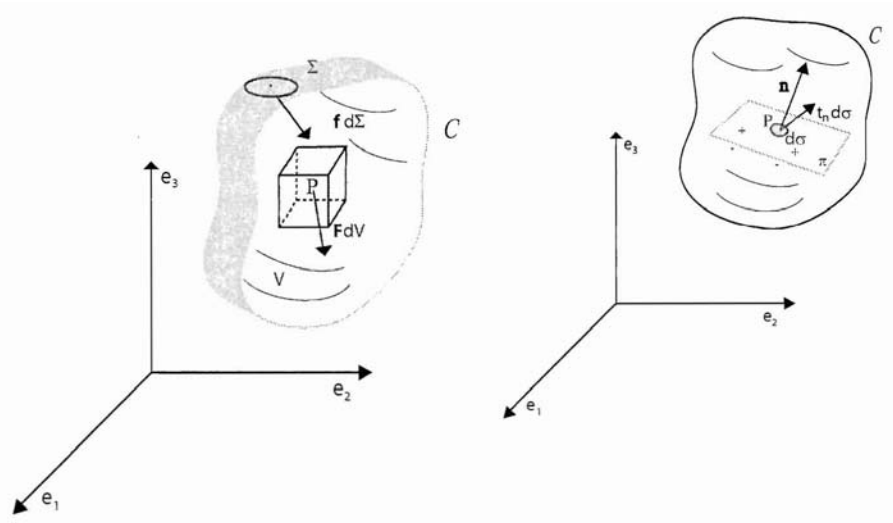


Fig. 1.6: Forze agenti sul continuo

Essendo  $\mathbf{b}$  un'accelerazione ( $\mathbf{b} = \mathbf{g}$  nel caso della forza peso).

Sempre in riferimento alla figura fig.1.6 le forze esterne superficiali sono espresse nella forma:

$$\mathbf{f}d\Sigma$$

Come si vede in figura fig.1.6 le forze di contatto che le molecole appartenenti alla superficie di normale  $\mathbf{n}$   $d\sigma^-$  esercitano su quelle di  $d\sigma^+$  (anch'essa superficie di normale  $\mathbf{n}$ ) avranno una risultante che sarà rappresentata come:

$$\mathbf{t}_n d\sigma$$

Le dimensioni di  $\mathbf{t}_n$  sono quelle di una forza per unità di superficie e  $\mathbf{t}_n$  si chiama sforzo specifico nella direzione  $\mathbf{n}$ . Per il principio di azione e reazione si ha che:

$$\mathbf{t}_{-n} = -\mathbf{t}_n$$

### 1.3.2 Tensore degli sforzi e teorema di Cauchy

Il teorema di Cauchy afferma che per ogni versore  $\mathbf{n} \equiv (n_1, n_2, n_3)$  esiste l'identità:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 \quad (1.16)$$

Dove  $\mathbf{t}_n$  è lo sforzo specifico nella direzione  $\mathbf{n}$  e i vettori  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) indicano gli sforzi specifici nelle direzioni  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_i$ .

La dimostrazione del teorema di Cauchy si effettua a partire dalla prima equazione cardinale della statica, la quale afferma che la risultante di tutte le forze esterne dovrà essere nulla per una generica parte del continuo:

$$\mathbf{R}^e = \int_{\Delta V} \mathbf{F} dV + \int_{\Delta\sigma} \mathbf{t}_n d\sigma = 0 \quad (1.17)$$

Considerando il tetraedro in figura fig.1.7 si indicano con  $\Delta\sigma_i$  le aree opposte ai versori  $\mathbf{e}_i$ , con  $\Delta\sigma$  l'area della faccia obliqua e con  $\Delta V$  il volume del tetraedro. Applicando il teorema della media per gli integrali, si può scrivere l'equazione (1.17) nella forma:

$$\mathbf{F}(\bar{P}) \Delta V + \mathbf{t}_n(\tilde{P}) \Delta\sigma - \mathbf{t}_1(\tilde{P}_1) \Delta\sigma_1 - \mathbf{t}_2(\tilde{P}_2) \Delta\sigma_2 - \mathbf{t}_3(\tilde{P}_3) \Delta\sigma_3 = 0 \quad (1.18)$$

Essendo  $\bar{P} \in \Delta V$ ,  $\tilde{P} \in \Delta\sigma$ ,  $\tilde{P}_i \in \Delta\sigma_i$ . Per un tetraedro si sa che valgono le seguenti relazioni, essendo  $h$  l'altezza del tetraedro:

$$\Delta V = \frac{\Delta\sigma h}{3} \quad \Delta\sigma_i = n_i \Delta\sigma \quad (1.19)$$

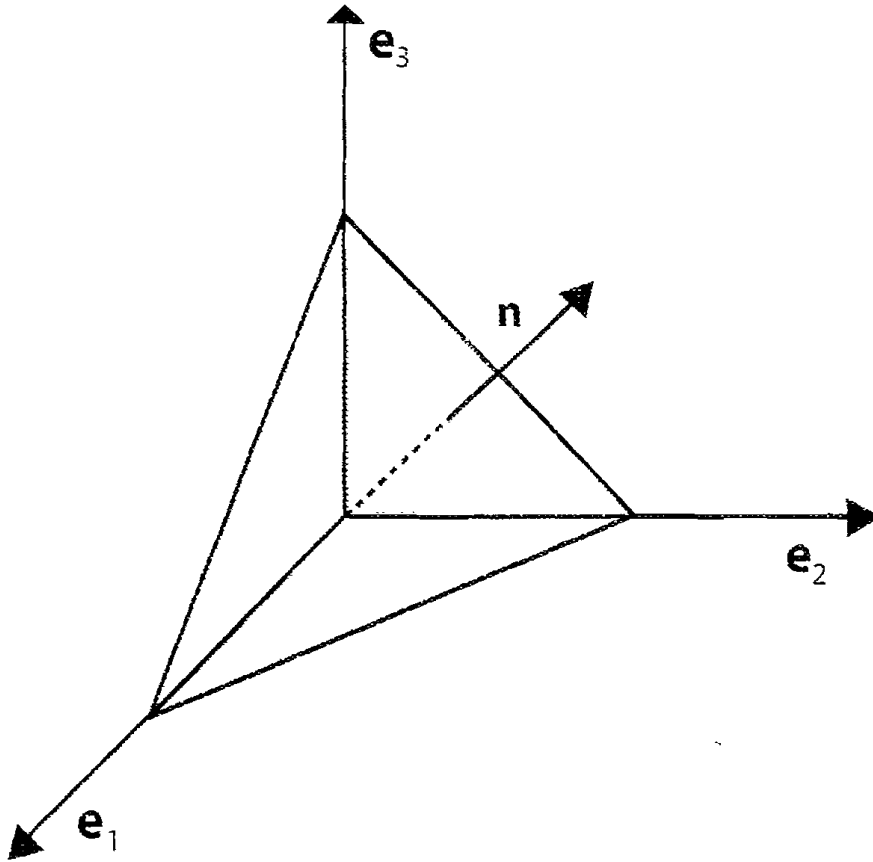


Fig. 1.7: Tetraedro di Cauchy

Per cui in virtù dell'espressione (1.19) la (1.18) diventa:

$$\mathbf{F}(\bar{P}) \frac{h}{3} + \mathbf{t}_n(\tilde{P}) - \mathbf{t}_1(\tilde{P}_1)n_1 - \mathbf{t}_2(\tilde{P}_2)n_2 - \mathbf{t}_3(\tilde{P}_3)n_3 = 0 \quad (1.20)$$

Considerando un tetraedro infinitesimo si ha che  $h \rightarrow 0$  e che  $\bar{P}$ ,  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}_i$  tendono a coincidere con  $P$  per cui l'espressione (1.20) diventa:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3$$

Come volevasi dimostrare.

Le componenti degli sforzi specifici sono:

$$\mathbf{t}_1^T = [ t_{11} \quad t_{21} \quad t_{31} ] \quad \mathbf{t}_2^T = [ t_{12} \quad t_{22} \quad t_{32} ] \quad \mathbf{t}_3^T = [ t_{13} \quad t_{23} \quad t_{33} ]$$



Il tensore degli sforzi di Cauchy è una matrice simmetrica le cui colonne e le righe sono le componenti degli sforzi specifici, dato che come sarà dimostrato nel paragrafo successivo il tensore è simmetrico:

$$\mathbf{t} \equiv \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Per cui l'espressione (1.16) può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Essendo quindi  $t_{ni} = t_{ij}n_j$ .

## 1.4 Leggi di bilancio in meccanica dei continui

### 1.4.1 Legge di conservazione della massa

La massa di un corpo o di una sua parte può essere espressa nella forma:

$$m = \int_C \rho dV \quad (1.21)$$

La legge di conservazione della massa richiede che ogni parte del corpo conservi la stessa massa durante l'evoluzione del continuo.

Con riferimento alla figura fig.1.8 fra la configurazione  $C^*$  e la configurazione  $C$  dovrà valere quindi la relazione:

$$m^* = m \quad (1.22)$$

Facendo riferimento alla relazione (1.21) l'eguaglianza (1.22) può essere scritta nella forma lagrangiana:

$$\int_{C^*} \rho^* dV^* = \int_C \rho dV \quad (1.23)$$

Applicando l'espressione (1.10) si può affermare che  $dV = JdV^*$ , per cui la (1.23) diventa:

$$\int_{C^*} (\rho J - \rho^*) dV^* = 0 \quad (1.24)$$

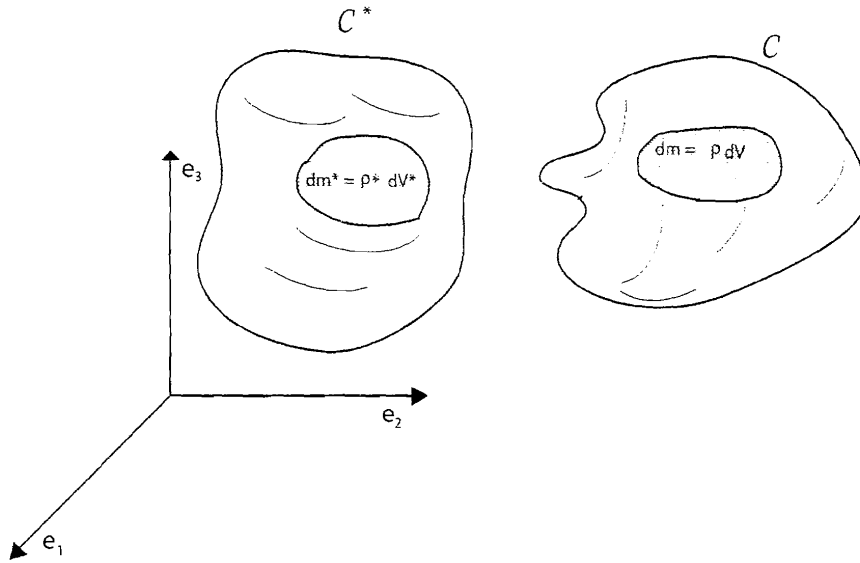


Fig. 1.8: Conservazione della massa

Siccome l'uguaglianza (1.24) deve valere per ogni punto del dominio allora dovrà essere valida l'equazione:

$$\rho^* = \rho J \quad (1.25)$$

Volendo esprimere la legge di conservazione della massa in forma euleriana si scrive l'espressione (1.25) in forma differenziale:

$$\frac{d\rho^*}{dt} = \frac{d(\rho J)}{dt} = \rho \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\rho}{dt}$$

Essendo  $\rho^* = \rho(t=0)$  si impone che  $\frac{d\rho^*}{dt} = 0$  per cui:

$$\rho \frac{dJ}{dt} + J \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Applicando l'espressione (1.15) si ha che  $\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$  e quindi si può scrivere:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.26)$$

Applicando la definizione di derivata materiale indicata nella (1.12) si ha l'espressione (1.26) espressa nella forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

Nella notazione indiciale risulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.27)$$

### 1.4.2 Legge di bilancio della quantità di moto

Se si riscrive l'espressione della prima equazione cardinale della statica (1.17) applicando l'identità (1.16) del teorema di Cauchy e tenendo conto che  $t_{ij} = t_{ji}$  si ha che:

$$\int_{\Delta V} F_j dV + \int_{\Delta \sigma} t_{ij} n_i d\sigma = 0 \quad (1.28)$$

Secondo il teorema di Gauss per superfici regolari  $\Delta \sigma$  e per funzioni regolari  $f = f(x)$  vale la relazione:

$$\int_{\Delta \sigma} f n_k d\sigma = \int_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x_k} dV$$

Essendo  $\mathbf{n} \equiv \|n_k\|$  il versore uscente dalla superficie  $\sigma$ .

Quindi applicando il teorema di Gauss alla relazione (1.28) si ottiene:

$$\int_{\Delta V} \left( F_j + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} \right) dV = 0 \quad (1.29)$$

L'equazione (1.29) deve valere per ogni volume  $\Delta V$  per cui si ottiene l'equazione di bilancio della quantità di moto nel caso statico:

$$F_j + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \forall P \in V \quad (1.30)$$

Scrivendo l'equazione (1.30) in forma vettoriale si ottiene:

$$\mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{t} = \mathbf{0}$$

Le equazioni viste sino ad ora sono state ricavate supponendo il corpo  $C$  in equilibrio, quindi in una condizione statica. Per considerare una condizione dinamica del corpo si applica il principio di D'Alembert secondo cui è possibile passare da un problema statico a uno dinamico sostituendo alle forze attive le forze perdute:  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} - \rho \mathbf{a}$ . L'equazione di bilancio della quantità di moto nel caso dinamico risulta quindi essere:

$$\rho \mathbf{a} - \operatorname{div} \mathbf{t} = \mathbf{F} \quad (1.31)$$

Che nella notazione indiciale diventa:

$$\rho a_j - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} = F_j \quad (1.32)$$

Essendo come già visto  $a_j = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i$  e  $F_j = \rho b_j$ , l'equazione (1.31) può essere scritta nella forma seguente:

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i - \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} = \rho b_j$$

Tenendo conto dell'equazione di bilancio della massa (1.27) l'equazione di bilancio della quantità di moto assume la forma:

$$\frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j - t_{ij}) = \rho b_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

La seconda equazione cardinale della statica implica che il momento delle forze esterne debba essere nullo rispetto ad un qualsiasi polo  $\Omega$ . Per cui scegliendo come polo  $\Omega \equiv O$  questa assume la forma:

$$\int_{\Delta V} \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} dV + \int_{\Delta \sigma} \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}_n d\sigma = 0 \quad (1.33)$$

Applicando il teorema di Cauchy e esprimendo il prodotto vettoriale attraverso il simbolo di Levi-Civita la componente  $i$ -esima dell'equazione (1.33) può essere scritta come:

$$\int_{\Delta V} \varepsilon_{ilm} x_l F_m dV + \int_{\Delta \sigma} \varepsilon_{ilm} x_l t_{mk} n_k d\sigma = 0 \quad (1.34)$$

Applicando il teorema di Gauss-Green l'espressione (1.34) è scritta nella forma:

$$\int_{\Delta V} \varepsilon_{ilm} x_l F_m dV + \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_l t_{mk}) \varepsilon_{ilm} d\sigma = 0 \quad (1.35)$$

Siccome  $\frac{\partial x_l}{\partial x_k} = \delta_{lk}$ , e dato che l'espressione (1.35) deve valere per ogni volume  $\Delta V$ , per ogni punto del volume  $V$  vale la relazione:

$$\varepsilon_{ilm} x_l \left( F_m + \frac{\partial t_{mk}}{\partial x_k} \right) + \varepsilon_{ilm} t_{ml} = 0 \quad \forall P \in V \quad (1.36)$$

Applicando la relazione (1.30) la (1.36) si riduce a:

$$\varepsilon_{ilm}t_{ml} = 0 \quad (1.37)$$

Il simbolo di Levi-Civita è definito come:

$$\varepsilon_{ilm} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ 1 & \text{se gli indici } i, l, m \text{ sono una permutazione pari dei numeri } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se gli indici } i, l, m \text{ sono una permutazione dispari dei numeri } 1, 2, 3 \end{cases}$$

Per cui la (1.37) risulta essere per  $i = 1, 2, 3$ :

$$\left. \begin{array}{l} t_{23} = t_{32} \\ t_{31} = t_{13} \\ t_{12} = t_{21} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{t} \in Sym$$

Per cui è stato dimostrato come dall'equazione di bilancio della quantità di moto e dalla seconda equazione cardinale della statica si ricavi che il tensore degli sforzi di Cauchy è un tensore simmetrico.

### 1.4.3 Legge di bilancio dell'energia

Ogni legge di bilancio può essere scritta localmente nella forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi v_i + \Phi_i) = f$$

Per le equazioni di bilancio energetico il termine  $\Psi$  indica la densità di energia,  $\Phi$  il flusso di energia mentre  $f$  è il termine sorgente.

Nel caso specifico di un problema termomeccanico l'equazione di bilancio dell'energia assume la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) v_i - t_{ij} v_j + q_i \right) = \rho b_j v_j + r$$

In questa equazione la densità di energia totale è composta dalla densità di energia cinetica  $\frac{\rho v^2}{2}$  e di energia interna  $\rho e$ . Il flusso di energia comprende invece la potenza delle forze di contatto  $-t_{ij} v_j$  e la componente normale del flusso di calore  $q_i$ , mentre il termine sorgente è composto dalla potenza delle forze di volume  $\rho b_j v_j$  e dalle sorgenti di calore  $r$ .

### 1.4.4 Leggi di bilancio della termomeccanica in forma euleriana

Riassumendo quindi le tre leggi di bilancio della termomeccanica scritte in forma euleriana e in notazione indiciale risultano essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j - t_{ij}) = \rho b_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) v_i - t_{ij} v_j + q_i \right) = \rho b_j v_j + r \end{array} \right.$$

Questo sistema formato da cinque equazioni scalari contiene le sei incognite  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$ , ed  $e(\mathbf{x}, t)$  risultando quindi indeterminato. Occorre perciò introdurre altre equazioni che descrivano la risposta del materiale: le equazioni costitutive.

## 1.5 Equazioni costitutive

Le equazioni costitutive sono state per molto tempo assegnate senza un preciso criterio di selezione. Poi a seguito degli studi di Coleman e Noll e della trattazione generale da parte di Muller si è arrivati ad affermare che le equazioni costitutive debbano rispettare i principi di indifferenza materiale e entropia di seguito elencati.

### 1.5.1 Principio di indifferenza materiale

Il principio di indifferenza materiale afferma che una legge costitutiva non può dipendere dall'osservatore.

Con riferimento alla figura fig.1.9 si consideri un corpo che passa dalla configurazione  $C$  a quella  $C'$  con una trasformazione di rotazione  $\mathbf{R}$ : il rispetto del principio di indifferenza materiale implica ad esempio che il tensore degli sforzi  $\mathbf{t}'$  in  $C'$  sia uguale a quello in  $C$  a meno della trasformazione di similitudine  $\mathbf{t}' = \mathbf{R}^T \mathbf{t} \mathbf{R}$ . Nel caso di grandezze scalari come ad esempio l'energia interna  $e$  il principio di indifferenza materiale richiede invece che sia  $e' = e$ .

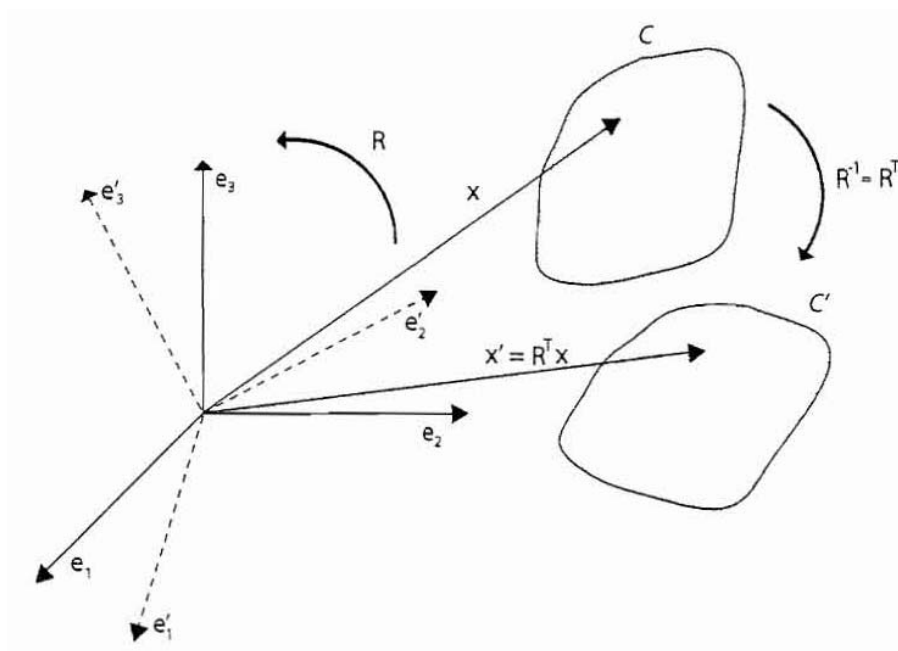


Fig. 1.9: Principio di indifferenza materiale

## 1.5.2 Principio di entropia

Il principio di entropia, che caratterizza la visione moderna del secondo principio della termodinamica, riflette l'esperienza che i processi termici sono dissipativi ed irreversibili e si compone delle tre seguenti basi assiomatiche:

- i) Esiste una quantità scalare additiva ed oggettiva, l'entropia;
- ii) La densità di entropia ed il flusso di entropia sono funzioni costitutive da determinarsi;
- iii) La produzione di entropia è non negativa per tutti i processi termodinamici.

L'equazione di bilancio dell'entropia risulta pertanto espressa nella forma:

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho S v_i + \frac{q_i}{\vartheta} \right) = \frac{r}{\vartheta} + \Sigma, \quad \text{con } \Sigma \geq 0 \quad (1.38)$$

Nell'espressione (1.38) le grandezze in gioco sono le seguenti:  $S$  è la densità di entropia,  $\Phi = \left( \frac{q_i}{\vartheta} \right)$  è il flusso di entropia,  $\Sigma$  la densità di produzione di entropia,  $\frac{r}{\vartheta}$  è una sorgente di entropia e  $\vartheta$  la temperatura assoluta. Per

cui riassumendo il principio di entropia afferma che in ogni processo termodinamico oltre al bilancio di entropia dovuto ai flussi e alle sorgenti di calore vi deve essere un'ulteriore produzione non negativa di entropia  $\Sigma \geq 0$ .

## 1.6 Fluidi

### 1.6.1 Fluidi ideali ed equazioni di Eulero

Un fluido si dice ideale se lo sforzo specifico è in ogni punto normale alla sezione e ha carattere di pressione:

$$\mathbf{t}_n = -p\mathbf{n} \quad p \geq 0 \quad \forall \mathbf{n} \quad (1.39)$$

Inoltre in un fluido ideale la pressione ha carattere isotropo: fissato un punto la pressione è la stessa in tutte le direzioni, ciò equivale a dire che il tensore degli sforzi è isotropo:

$$\mathbf{t} \equiv -p \quad \mathbf{It} \equiv \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad t_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (1.40)$$

Per un fluido ideale si suppone poi che sia trascurabile la conducibilità termica e quindi anche il flusso di calore è considerato pari a zero:  $\mathbf{q} = 0$ .

Per cui le equazioni di bilancio euleriane risultano espresse nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + p\delta_{ij}) = \rho b_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) v_i \right) = \rho b_j v_j + r \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Secondo le ipotesi di Eulero le equazioni costitutive sono assegnate alla pressione  $p$  e alla densità di energia interna  $e$ , in funzione della densità del fluido  $\rho$  e della temperatura assoluta  $\theta$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} p \equiv p(\rho, \theta) \\ e \equiv e(\rho, \theta) \end{array} \right. \quad (1.42)$$

Il sistema formato dalle equazioni di bilancio (1.41) e dalle equazioni costitutive (1.42) prende il nome di sistema di Eulero.



## 1.6.2 Fluidi dissipativi di Fourier-Navier-Stokes

Si definisce un fluido reale un materiale in cui in equilibrio il tensore degli sforzi di Cauchy ha carattere di pressione, per cui le condizioni (1.39) ed (1.40), che erano sempre valide per un fluido ideale, sono valide per un fluido reale solo nella condizione di equilibrio.

Nella condizione di non equilibrio per un fluido reale valgono quindi le seguenti relazioni:

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \quad t_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (1.43)$$

Dove il tensore  $\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{ij}\| \in Sym$  prende il nome di tensore degli sforzi viscoso e si suppone che esso dipenda dalla parte simmetrica del gradiente della velocità  $\mathbf{D} = \nabla \mathbf{v}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = 0$$

Scritta nella forma indiciale:

$$\sigma_{ij} = \nu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Data una generica matrice  $S_{ij}$  ( $n \times n$ ) la sua parte deviatorica (o a traccia nulla) è definita come:

$$\mathbf{S}^D = \mathbf{S} - \frac{1}{n} (\operatorname{tr} \mathbf{S}) \mathbf{I} \quad (1.44)$$

Quindi se si scompone il gradiente delle velocità  $\mathbf{D}$  mettendo in evidenza la sua componente deviatorica  $\mathbf{D}^D$  si ottiene:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^D + \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I}$$

Quindi si può rappresentare  $\boldsymbol{\sigma}$  come una somma di operatori ortogonali fra di loro, nel rispetto del principio di indifferenza materiale:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}^D \quad (1.45)$$

Con  $\lambda = \frac{1}{3} (3\nu + 2\mu)$ . Le equazioni (1.45) prendono il nome di equazioni di Navier-Stokes e gli scalari  $\lambda \equiv \lambda(\rho, \theta)$  e  $\mu \equiv \mu(\rho, \theta)$  sono in funzione della

densità del fluido e della temperatura assoluta e si chiamano coefficienti di viscosità.

L'espressione del tensore degli sforzi di Cauchy (1.43) assume la forma:

$$\mathbf{t} = (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} - p) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}^D = -(\pi - p) \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D$$

Dove  $\pi = -\lambda \operatorname{div} \mathbf{v}$  viene detta pressione dinamica, mentre  $\boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \mathbf{D}^D$  è il tensore di sforzo deviatorico.

Per un fluido reale inoltre il flusso di calore  $\mathbf{q}$  è non nullo e dipende dal gradiente di temperatura:

$$\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta \quad \mathbf{q}(0) = 0 \quad (1.46)$$

Dove la conducibilità termica dipende in un fluido dalla densità e dalla temperatura:  $\chi = \chi(\rho, \theta)$ .

Le leggi di bilancio per un fluido reale sono scritte nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho v_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) = \rho b_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \frac{\rho v^2}{2} + \rho e + p \right) v_i - \sigma_{ij} v_j + q_i \right) = \rho b_j v_j + r \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Sono considerate come variabili le grandezze  $\rho(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ,  $e(\mathbf{x}, t)$ , mentre rimangono da assegnare come costitutive:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \equiv p(\rho, \theta) \\ e \equiv e(\rho, \theta) \\ \chi \equiv \chi(\rho, \theta) \\ \lambda \equiv \lambda(\rho, \theta) \\ \mu \equiv \mu(\rho, \theta) \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Sotto ipotesi di regolarità il sistema delle leggi di bilancio (1.47) può assumere, utilizzando la derivata materiale, la seguente forma equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{dv_j}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p \delta_{ij} - \sigma_{ij}) = \rho b_j \quad (j = 1, 2, 3) \\ \rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + \operatorname{div} \mathbf{q} = r \end{array} \right. \quad (1.49)$$

La terza equazione del sistema (1.49) è stata ottenuta sottraendo dalla terza equazione del sistema (1.47) la seconda equazione sempre dello stesso sistema moltiplicata scalarmente per  $\mathbf{v}$ . Il sistema così ottenuto è perciò equivalente per soluzioni classiche al sistema (1.47). La terza equazione del sistema (1.49) (legge di evoluzione dell'energia) può essere riscritta come legge di evoluzione per la temperatura tenendo in considerazione la prima equazione del sistema (1.49) e le equazioni costitutive (1.48), si ottiene perciò:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho \frac{\partial e}{\partial \theta}} \left( r + \left( \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} - p \right) \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} \right) \quad (1.50)$$

Nella scrittura delle equazioni (1.45) si è tenuto conto del principio di indifferenza materiale, ma come è già stato visto le equazioni costitutive devono rispettare anche il principio di entropia per cui nel prossimo paragrafo verrà mostrato quali sono le condizioni che permettono alle equazioni costitutive di rispettare il principio di entropia.

### 1.6.3 Principio di entropia per un fluido

Si riscrive il principio di entropia (1.38) utilizzando la derivata materiale e tenendo conto della prima equazione del sistema (1.49):

$$\rho \frac{dS}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{\vartheta} \right) - \frac{r}{\vartheta} = \Sigma \geq 0 \quad (1.51)$$

Assumendo che anche la densità entropica  $S$  dipenda da densità e temperatura del fluido e quindi  $S = S(\rho, \theta)$ , si arriva alla seguente equazione, tenendo conto anche delle equazioni (1.51), (1.50) e della prima equazione del sistema (1.49):

$$\left( \frac{1}{\theta} - \frac{\partial S}{\partial e} \right) \operatorname{div} \mathbf{q} + \left( -\rho^2 \frac{\partial S}{\partial \rho} + \left( \rho^2 \frac{\partial e}{\partial \rho} - p \right) \frac{\partial S}{\partial e} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\partial S}{\partial e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta = \Sigma \geq 0 \quad (1.52)$$

Dovendo valere la disuguaglianza (1.52) per ogni possibile processo i termini fra parentesi dovranno annullarsi: infatti essi sono in funzione di  $\rho$  e

$\theta$  e non delle derivate prime  $\text{div } \mathbf{q}$  e  $\text{div } \mathbf{v}$  di cui sono a fattore. Inoltre se si inseriscono le equazioni (1.45) e (1.46) nella (1.52) si ha che i restanti due termini sono quadratici nelle derivate prime  $\text{div } \mathbf{q}$  e  $\text{div } \mathbf{v}$  e quindi sempre maggiori o uguali a zero. Per cui nel rispetto del principio di entropia si ottiene il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial e}{\partial \theta} \\ \theta \frac{\partial S}{\partial \rho} = \frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.53)$$

Dal sistema (1.53) si ricava la forma differenziale di Gibbs:

$$\theta dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (1.54)$$

Si introduce la definizione di energia libera  $\psi$ :

$$\psi = e - \theta S \Rightarrow d\psi = de - \theta dS - S d\theta \quad (1.55)$$

Inserendo l'equazione (1.55) nella forma differenziale di Gibbs (1.54) si ottengono le tre relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \rho^2 \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \\ S = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ e = \psi - \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \end{array} \right\} \quad (1.56)$$

Sempre inserendo le equazioni (1.45) e (1.46) nella (1.52) e tenendo conto della (1.44) si ha la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{\theta} (\lambda \text{div } \mathbf{v} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}^D) \cdot \mathbf{D} + \frac{\chi}{\theta^2} |\nabla \theta|^2 = \\ &= \frac{1}{\theta} \left( \lambda (\text{div } \mathbf{v})^2 + 2\mu \|\mathbf{D}^D\|^2 \right) + \frac{\chi}{\theta^2} |\nabla \theta|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Essendo i tre termini quadratici ed indipendenti fra di loro si ha necessariamente che:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\rho, \theta) \geq 0 \\ \mu(\rho, \theta) \geq 0 \\ \chi(\rho, \theta) \geq 0 \end{array} \right\} \quad (1.57)$$

Per cui riassumendo il principio di entropia nel caso di un fluido di Fourier-Navier-Stokes richiede che le equazioni costitutive del fluido rispettino le relazioni (1.56) e (1.57).

### 1.6.4 Fluidi di Fourier-Navier-Stokes incomprimibili

Considerando un processo isoterma e un fluido incomprimibile risulta valida la relazione già vista in precedenza:

$$J = 1 \Leftrightarrow \rho = \rho^* = \text{cost}$$

Le leggi di bilancio della massa e della quantità di moto risultano espresse nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \mu \Delta v_j = \rho b_j \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.58)$$

Indicando con  $\Delta$  il laplaciano  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$ .

Il sistema è pareggiato avendosi quattro equazioni per le quattro incognite  $v_j$  e  $p$ ,  $p$  è un'incognita in quanto ha il ruolo di reazione vincolare in corrispondenza al vincolo di incomprimibilità.

In questo caso le condizioni al contorno sono espresse nella forma:

$$\mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j = f_i \quad (1.59)$$

I liquidi possono generalmente considerarsi incomprimibili in condizioni comuni, mentre per quanto riguarda l'aria può essere considerata incomprimibile se la sua velocità è inferiore a  $0,3 [Mach]$  cioè inferiore a circa  $370 \left[ \frac{Km}{h} \right]$ . Dato che nei problemi in campo civile la velocità in campo è spesso inferiore a  $370 \left[ \frac{Km}{h} \right]$  si può considerare con buona approssimazione il fluido incomprimibile.

### 1.6.5 Fluidi di Eulero incomprimibili e teorema di Bernoulli

Nel caso di un fluido di Eulero incomprimibile sottoposto alla forza peso  $b_j = -\rho^* g \delta_{j3}$  le equazioni (1.58) risultano scritte nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho^* \frac{dv_j}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\rho g \delta_{j3} \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.60)$$

Si consideri una soluzione in condizione di flusso stazionario. La condizione di flusso stazionario implica per una generica funzione  $f(x, t)$  che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= 0 \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_j} v_j\end{aligned}\quad (1.61)$$

Dalle equazioni (1.61) si osserva che la variazione totale nel tempo è dovuta al solo moto delle particelle.

Moltiplicando la seconda equazione delle (1.60) per  $v_j$  e sommando membro a membro le tre equazioni ottenute per  $j = 1, 2, 3$  si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \frac{v^2}{2} \right) + v_j \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\rho g v_3$$

Tenendo conto delle equazioni (1.61) e del fatto che  $v_3 = \frac{dx_3}{dt}$  si ha che:

$$\frac{d}{dt} \left( \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g x_3 \right) = 0 \quad (1.62)$$

Dalla equazione (1.62) segue che il termine fra parentesi è indipendente dal tempo, per cui si ha durante il moto stazionario che:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + x_3 = \text{cost} \quad (1.63)$$

Ognuno dei tre termini dell'equazione (1.63) ha le dimensioni di una lunghezza per cui il teorema di Bernoulli viene anche denominato teorema delle tre quote essendo  $x_3$  la quota geometrica,  $\frac{p}{\rho g}$  la quota piezometrica e  $\frac{v^2}{2g}$  la quota cinetica.

Quindi fra due punti  $A$  e  $B$  appartenenti alla stessa linea di flusso di un fluido di Eulero stazionario deve valere la relazione:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\rho g} + x_{3A} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\rho g} + x_{3B} \quad (1.64)$$

Nel caso il punto  $B$  si trovi alla stessa quota  $x_3$  del punto  $A$  l'espressione (1.63) diventa:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p = \text{cost} \quad (1.65)$$

## 1.7 Fluido di moto bidimensionale

### 1.7.1 Vortici liberi

Si consideri un fluido avente moto bi-dimensionale compreso fra due linee di flusso concentriche distanti fra loro  $dr$  e aventi raggio di curvatura  $r$ . Il fluido seguendo una traiettoria circolare sarà sottoposto a una accelerazione centripeta pari a  $\frac{u^2}{r}$ , dove  $u$  è la velocità tangenziale del fluido. La forza agente sull'elemento di fluido e di verso opposto all'accelerazione centripeta è la forza centrifuga, dovuta al fatto che il fluido per inerzia tenderebbe a seguire la direzione tangenziale del moto, ma a causa della pressione del fluido circostante continua il suo atto di moto circolare.

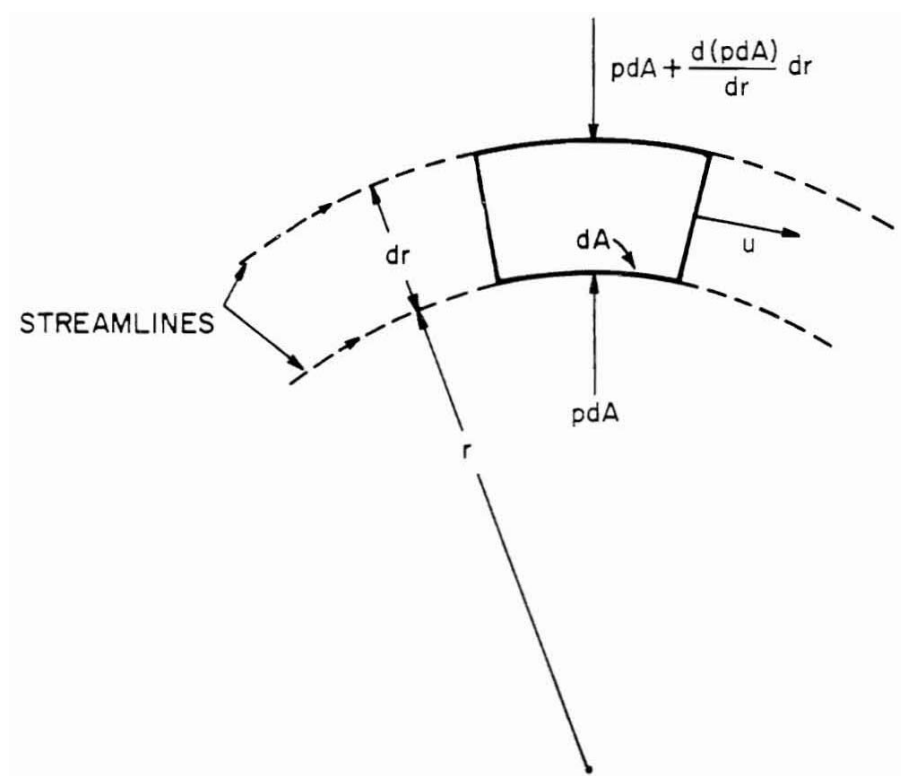


Fig. 1.10: Fluido in una traiettoria curva

Con riferimento alla figura fig.1.10 si scrive l'equilibrio dell'elemento infinitesimo di fluido alla traslazione lungo la direzione radiale, considerando il

fluido incomprimibile e non viscoso:

$$-pdA + pdA + \frac{\partial(pdA)}{\partial r}dr - \rho drdA \frac{u^2}{r} = 0$$

Considerando trascurabile la variazione di area dell'elemento infinitesimo lungo la direzione radiale:  $\frac{\partial dA}{\partial r} = 0$ , e ricordando la definizione di differenziale si ottiene:

$$\begin{aligned} dp &= \rho u^2 \frac{dr}{r} \\ \frac{dp}{dr} &= \rho \frac{u^2}{r} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Lungo ogni linea di flusso anche se curva vale il teorema di Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho u^2 + p = \text{cost} = p_0 \quad (1.67)$$

Per ipotesi si assume che il flusso del fluido sia perfettamente circolare e che il valore costante  $p_0$  sia lo stesso per tutte le linee di flusso. Per cui il teorema di Bernoulli (1.67) risulta scritto nella forma:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho u \frac{du}{dr} \quad (1.68)$$

Confrontando le equazioni (1.66) e (1.68) si può scrivere:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r} \quad (1.69)$$

Integrando l'equazione (1.69) come risultato si ottiene:

$$ur = C = \text{cost}$$

Per cui la velocità tangenziale in un vortice assume teoricamente un andamento iperbolico in funzione della distanza radiale dal centro del vortice:

$$u = \frac{C}{r}$$

Nel caso qui esposto si è considerato un fluido che ruota in un vortice libero, non ad esempio all'interno di un contenitore circolare, altrimenti la trattazione del problema non sarebbe più valida. Nella trattazione attuale



è stata anche trascurata un'eventuale viscosità del fluido, la quale produce nella zona vicino al centro del vortice un fenomeno per cui il fluido ruota come un corpo rigido. Per cui in prossimità del centro la velocità tangenziale del fluido cresce linearmente poi, passata una zona di transizione, man mano che ci si allontana decresce in maniera iperbolica, come si può osservare dalla figura fig.1.11:

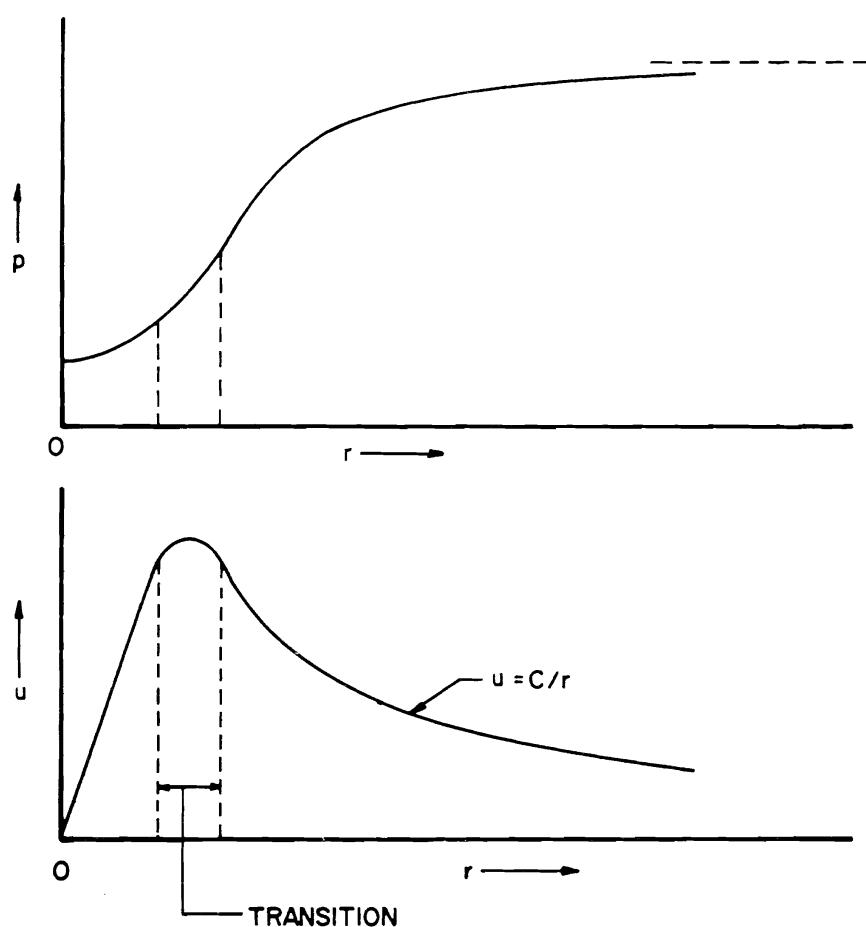


Fig. 1.11: Distribuzione di velocità e pressione in un fluido viscoso

Il massimo valore della velocità tangenziale  $u$  viene raggiunto nella zona di transizione, e questo valore dipende dalla viscosità del fluido e dal momento angolare del vortice.

### 1.7.2 Strato limite

Considerando un fluido che passa radente a una superficie, si nota sperimentalmente che il fluido aderisce alla superficie stessa. Questo fenomeno causa un rallentamento del fluido in uno strato vicino alla superficie denominato "strato limite" [5]. Un tipico andamento della velocità in prossimità dello strato limite è illustrato nella figura fig.1.12:

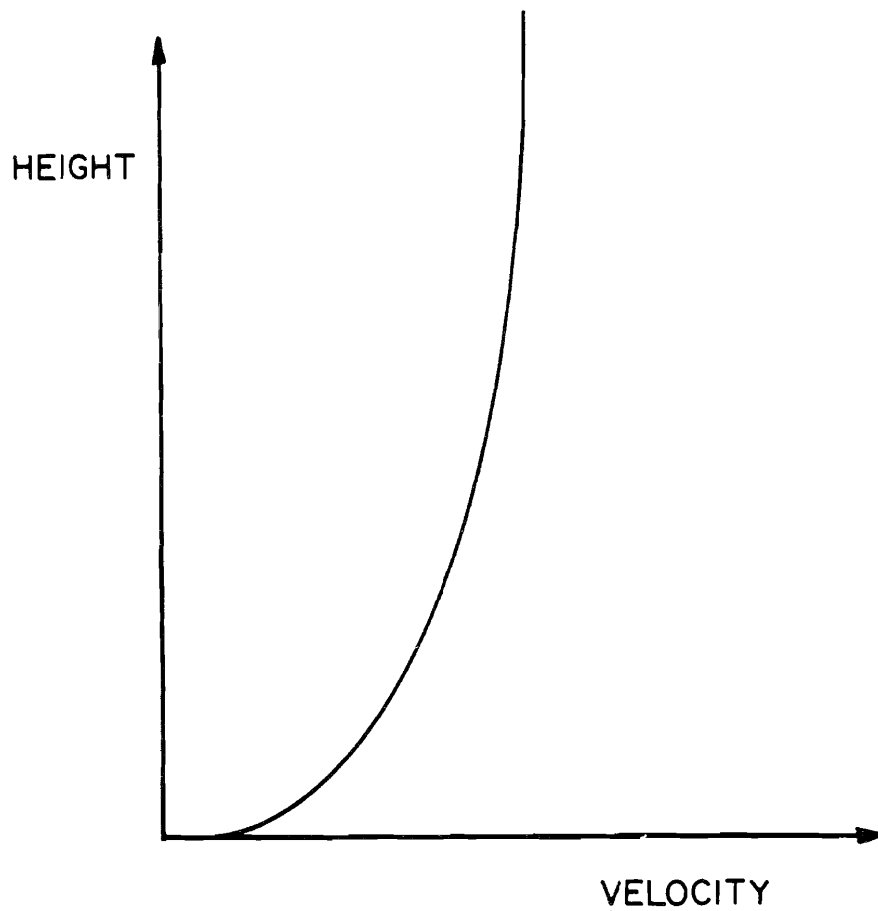


Fig. 1.12: Andamento della velocità all'interno dello strato limite atmosferico

Se il fluido investe un ostacolo, ad esempio lo spigolo vivo di un corpo ma anche una superficie cilindrica, si genera un gradiente avverso di pressione che provoca la separazione dello strato limite superficiale, portando quindi alla formazione di una scia di vortici a valle del corpo investito. La scia è

una regione costituita da vari strati tra i quali vi è uno scambio di energia continuo, se lo scambio di energia avviene a livello macroscopico la scia è turbolenta, se avviene a livello microscopico è laminare.

### 1.7.3 Numero di Reynolds

Come risulta evidente dalle equazioni di Navier-Stokes (1.59), le principali forze che influenzano il moto di un fluido sono di tipo inerziale o viscoso. Per caratterizzare un fluido quindi risulta comodo un coefficiente che metta in relazione l'entità delle forze di inerzia con quelle viscosi, coefficiente che è stato denominato numero di Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\rho U^2 L^2}{\mu U L} = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

Quando il numero di Reynolds è alto significa che predominano gli effetti inerziali, se il numero cala significa che le forze viscosi acquistano sempre più importanza. Il valore del numero di Reynolds è un valore molto locale, dato che varia a seconda di quale lunghezza di riferimento  $L$  del corpo investito dal fluido si considera.

### 1.7.4 Formazione dei vortici

Il distacco dello strato limite avviene quando le particelle di fluido nello strato limite sono sufficientemente decelerate dalla forza viscosa e dal gradiente avverso di pressione in modo da causare una inversione del moto del fluido vicino alla superficie. Il fenomeno del distacco dei vortici dipende quindi fortemente dal numero di Reynolds, come si può osservare da alcuni esempi riportati in seguito, ed è stato studiato in principio da Bernard [6] e Karman [7].

Si prenda in esame una sezione piana avente forma allungata nella direzione perpendicolare al moto del fluido e alle sue estremità due spigoli vivi [13]. Mantenendo costanti le misure geometriche della figura e le caratteristiche del fluido sono state eseguite simulazioni numeriche a diverse velocità,

in modo da variare il numero di Reynolds. Il moto del fluido è stato supposto laminare e bidimensionale.

Per numeri di Reynolds molto bassi ( $Re \approx 0,3$ ) il fluido rimane aderente alla superficie della sezione, seguendone il profilo anche nelle estremità angolose, come si osserva in fig.1.13.

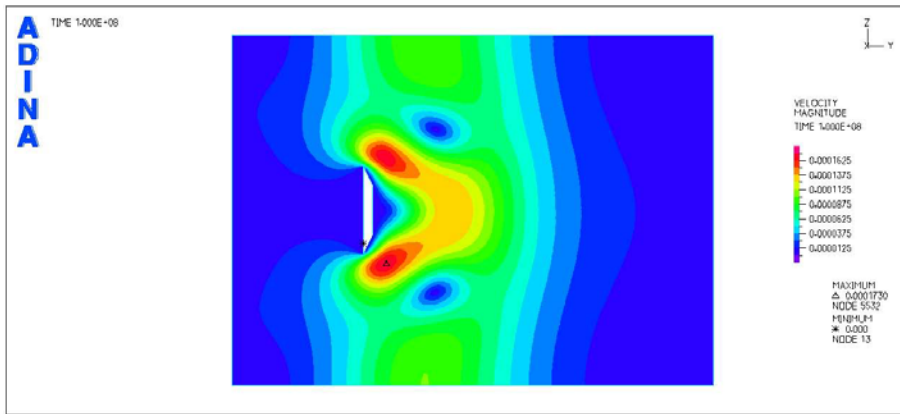


Fig. 1.13: Distacco dei vortici da un sezione allungata per Reynolds pari a 0,3

Incrementando la velocità fino a raggiungere  $Re \approx 10$  si verifica la formazione di due grandi e simmetrici vortici retrostanti la sezione fig.1.14 che rimangono attaccati alla parete sottovento.

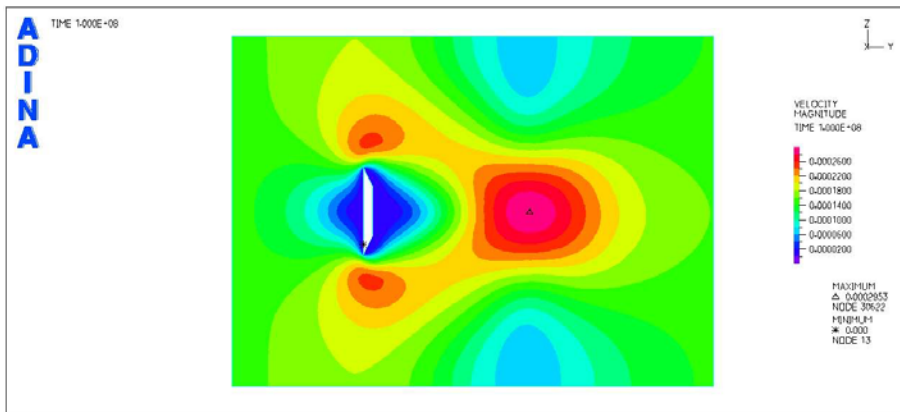


Fig. 1.14: Distacco dei vortici da una sezione allungata per Reynolds pari a 10

Per numeri di Reynolds superiori ( $Re \approx 250$ ) non si hanno più i due grandi

vortici simmetrici bensì un distacco alternato e ciclico di vortici in scia alla sezione, come si vede nella fig.1.15.

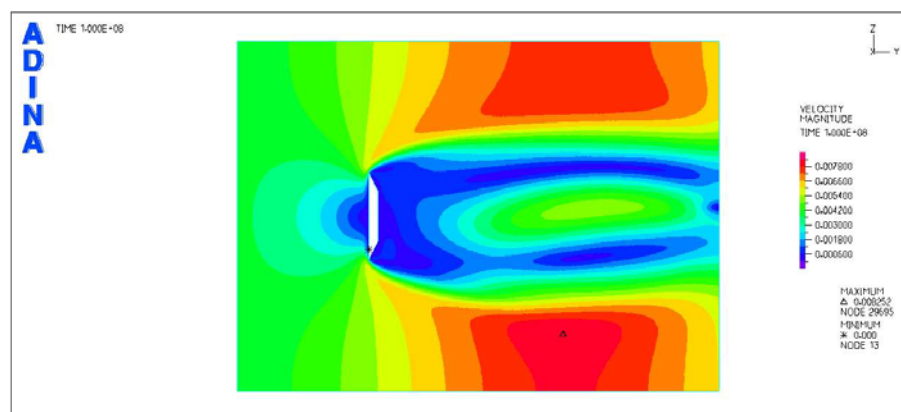


Fig. 1.15: Distacco dei vortici da una sezione allungata per Reynolds pari a 250

Nel caso di numeri di Reynolds maggiori ( $Re \approx 1000$ ) non si ha più la formazione di vortici regolari ma si verifica un'onda turbolenta e irregolare come mostrato in fig.1.16.

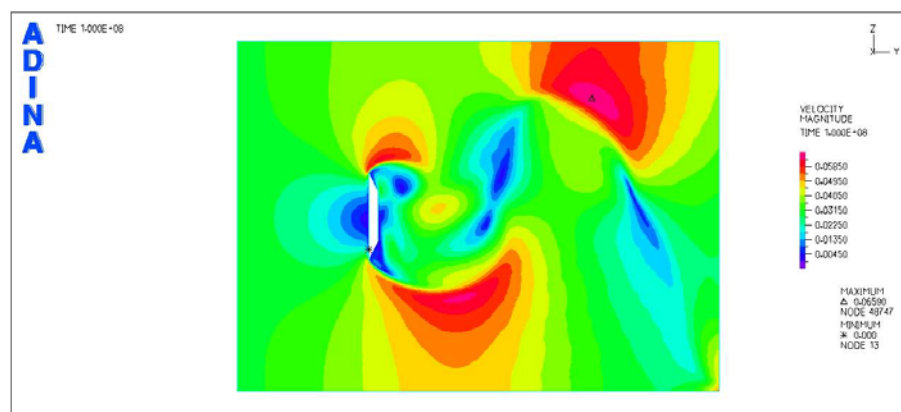


Fig. 1.16: Distacco dei vortici da una sezione allungata per Reynolds pari a 2000

Prendendo in esame un cilindro circolare [8], per bassi valori del numero di Reynolds ( $Re < 5$ ) le linee di flusso seguono il contorno della sezione. Nell'intervallo  $5 \leq Re \leq 40$ , il flusso si separa nella regione a valle del cilindro formando una coppia di vortici simmetrici. Se il numero di Reynolds

viene incrementato ulteriormente,  $40 \leq Re \leq 150$ , la scia diviene instabile e i vortici si staccano alternativamente dalle regioni laterali del cilindro formando una scia di vortici di tipo laminare. Nell'intervallo  $150 \leq Re \leq 300$  la scia comincia a diventare turbolenta anche se lo strato limite del cilindro è ancora laminare. I numeri di Reynolds compresi tra  $300 \leq Re \leq 3 \cdot 10^5$  caratterizzano una scia completamente turbolenta, in un regime denominato subcritico come si può vedere da fig.1.17.

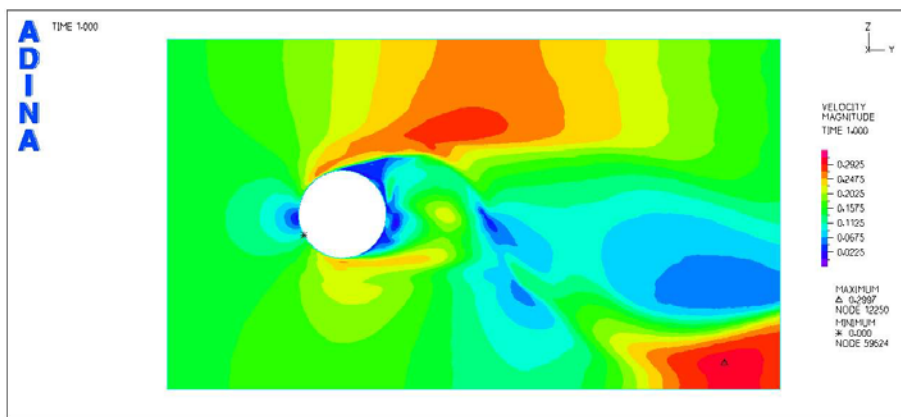


Fig. 1.17: Distacco dei vortici da un cilindro circolare per Reynolds pari a 10000

Il regime critico si manifesta nell'intervallo  $3 \cdot 10^5 \leq Re \leq 3 \cdot 10^6$  ed è caratterizzato da una scia turbolenta e disorganizzata a tal punto che non è più distinguibile il distacco dei vortici. Infine per numeri di Reynolds ancora più elevati si ha il regime supercritico dove riappare nuovamente il distacco dei vortici all'interno della scia turbolenta.

Questi esempi illustrano qualitativamente la grande differenza di comportamento del fluido a seconda che, come succede per bassi numeri di Reynolds, predominano gli effetti viscosi oppure nel caso di più elevati numeri di Reynolds via via assumano importanza gli effetti inerziali.

Inoltre, analizzando il flusso intorno a cilindri quadrati e rettangolari si può notare un diverso comportamento aerodinamico, ad alti numeri di Reynolds. La sezione quadrata induce una separazione seguita da una ampia scia a valle del corpo. La sezione rettangolare, più allungata, presenta una

separazione in corrispondenza degli spigoli a monte del corpo, seguita da un riattacco del flusso lungo la sezione, e successivamente una nuova separazione a valle della sezione, generando una scia più stretta rispetto a quella generata a valle della sezione quadrata.

### 1.7.5 Coefficienti aerodinamici

In accordo con il teorema di Bernoulli (1.65) un corpo investito da un fluido a velocità costante  $U$  è soggetto a alla pressione dinamica  $\frac{1}{2}\rho U^2$  e a quella statica  $p$ . Facendo riferimento alla pressione  $p_0$ , cioè alla pressione del flusso indisturbato dalla presenza del corpo, si definisce il coefficiente di pressione  $C_p$ :

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

Analogamente è possibile determinare il coefficiente di drag  $C_D$ , definito nella direzione del flusso, il coefficiente di lift  $C_L$ , definito nella direzione normale a quella del flusso, e il coefficiente di momento  $C_M$ :

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \\ C_L &= \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} \\ C_M &= \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} \end{aligned} \tag{1.70}$$

Nelle equazioni (1.70) si è indicata con  $B$  una dimensione caratteristica della sezione, mentre  $F_D$ ,  $F_L$  e  $M$  sono rispettivamente le forzanti di Drag e di Lift e il momento agente sulla sezione considerata di lunghezza unitaria. I coefficienti di pressione e di forza dipendono, in generale, dal numero di Reynolds.

Prendendo in esame il caso di un cilindro circolare fig.1.18 nella scia il coefficiente di pressione risulta essere costante al variare del numero di Reynolds.

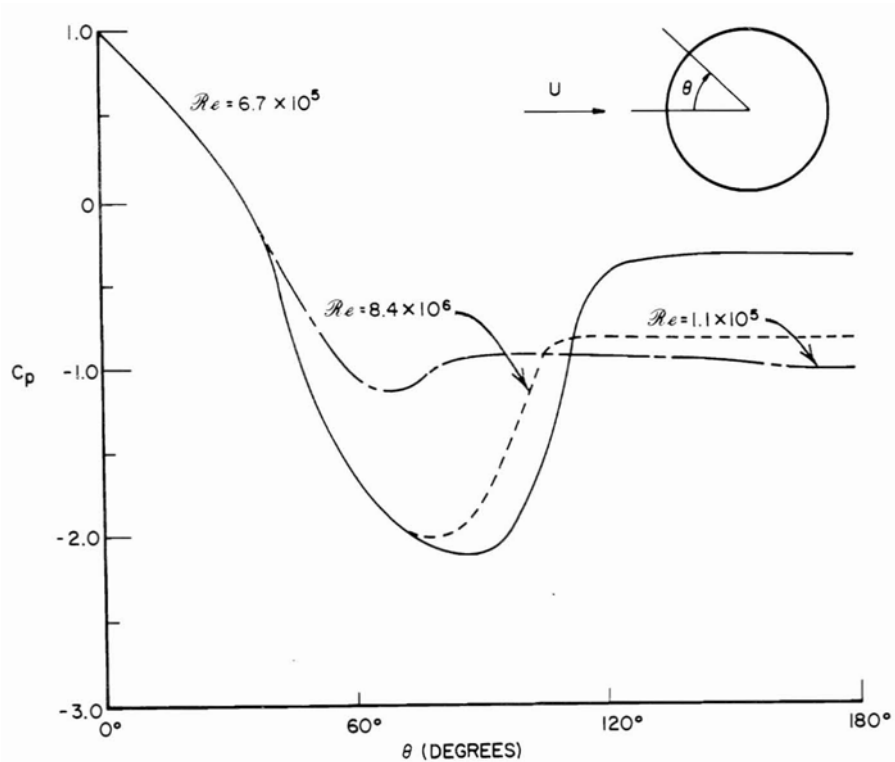


Fig. 1.18: Evoluzione del coefficiente di drag di un cilindro circolare in funzione del numero di Reynolds

Ciò è dovuto al fatto che la separazione dello strato limite superficiale è avvenuta nella parte anteriore del corpo stesso. Tuttavia, all'aumentare del numero di Reynolds il punto di separazione arretra, pertanto la scia si sposta verso la parte sopravvento della sezione e risulta essere più sottile. Ne consegue una minore suzione nelle regioni laterali. Integrando le pressioni locali nella direzione del flusso si ottiene la forzante di Drag e quindi il coefficiente di Drag.

Un tipico andamento del coefficiente di drag  $C_D$  per un cilindro circolare è riportato in fig.1.19, dove si può notare che nel regime critico  $C_D$  diminuisce drasticamente per effetto dell'arretramento del punto di separazione e dell'assottigliamento della scia. Nel regime supercritico e in quello transcritico, il coefficiente di Drag tende ad aumentare sebbene il suo valore sia comunque minore rispetto al regime subcritico. Inoltre, l'andamento



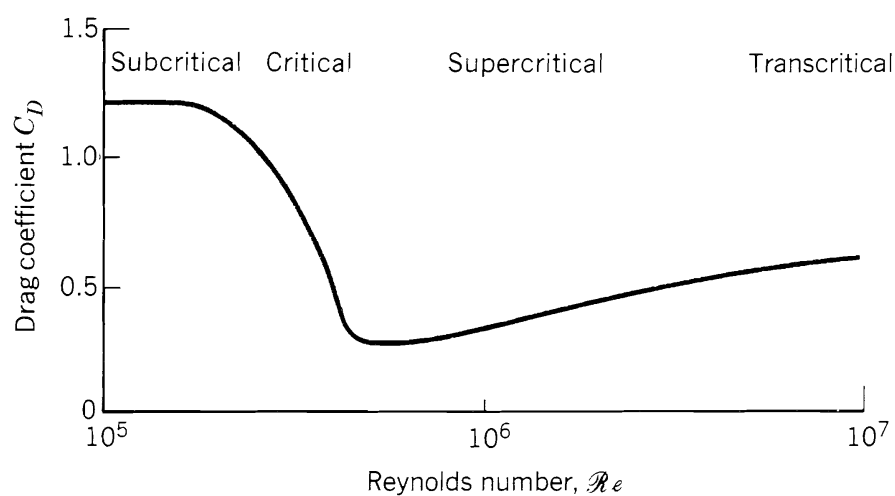


Fig. 1.19: Influenza del numero di Reynolds sul coefficiente di pressione per un cilindro circolare

di  $C_D$  al variare del numero di Reynolds dipende anche dalla rugosità superficiale [14]. In particolare come si nota chiaramente in figura fig.1.20 la rugosità superficiale anticipa la transizione tra un regime e l'altro.

Sebbene, per una sezione circolare, il coefficiente di Drag vari al variare del numero di Reynolds, lo stesso non si può dire per un cilindro a sezione quadrata, per il quale  $C_D$  rimane quasi costante al variare di  $Re$  fig.1.20. Ciò è dovuto al fatto che la separazione è dettata dallo spigolo a monte della sezione, e non vi è possibilità di un riattacco del flusso lungo il corpo. Sempre da figura fig.1.20 è messo in evidenza come smussando gli spigoli del cilindro quadrato si ottenga una notevole dipendenza del coefficiente di Drag dal numero di Reynolds, a tal punto che si può addirittura notare una regione critica come accade nei cilindri circolari.

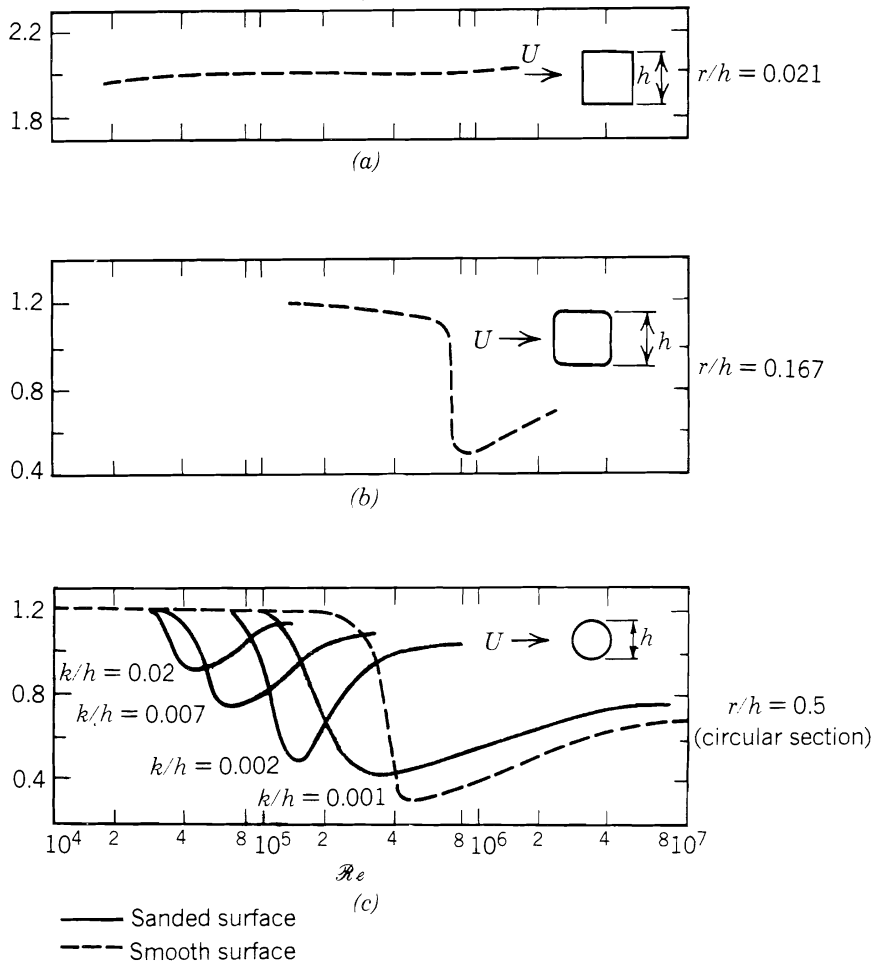


Fig. 1.20: Influenza del numero di Reynolds, raggio di raccordo e scabrezza superficiale sul coefficiente di pressione di un cilindro circolare o quadrato

# Capitolo 2

## Fenomeni aeroelastici

### 2.1 Distacco dei vortici e lock-in

#### 2.1.1 Distacco dei vortici e numero di Strouhal

Il fenomeno del distacco dei vortici che come visto nel capitolo precedente si verifica quando un fluido viscoso investe un corpo tozzo, presenta una certa regolarità per cui si è osservato che la frequenza di distacco dei vortici è pari a:

$$f_{vs} = S_t \frac{U}{D} \quad (2.1)$$

Dove  $S_t$  è il numero di Strouhal che dipende da diversi parametri, quali ad esempio la forma della sezione ed il numero di Reynolds del fluido, come si può notare da figura fig.2.1.

Inoltre se si escludono fenomeni di interazione fra fluido struttura e ci si mantiene lontani dalle zone di transizione del regime di distacco dei vortici si può affermare che la legge che lega  $f_{vs}$  a  $\frac{U}{D}$  sia una legge lineare come illustrato nelle zone di fig.2.2 lontane dalla frequenza propria della struttura, essendo in questi casi il numero di Strouhal costante.

#### 2.1.2 Condizione di risonanza e lock-in

Quando la frequenza del distacco dei vortici  $f_{vs}$  eguaglia la frequenza di oscillazione trasversale  $f_0$  del cilindro elasticamente sospeso o ad elasticità diffusa, si instaura una complessa interazione fluido-struttura che si traduce in una

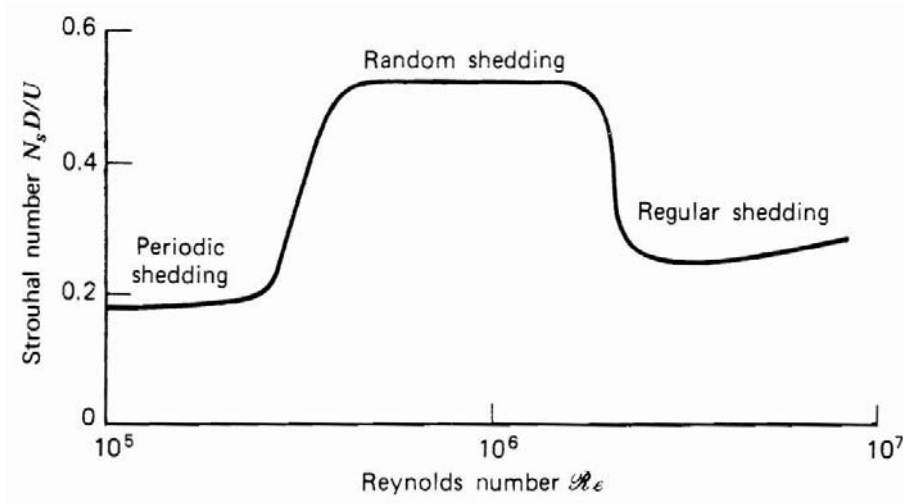


Fig. 2.1: Relazione tra il numero di Strouhal e il numero di Reynolds per un cilindro circolare

condizione di risonanza con conseguenti notevoli ampiezze di oscillazione, pari addirittura al diametro del cilindro per strutture poco smorzate.

Considerando la relazione (2.1) e ponendo  $f_{vs} = f_0$  si ottiene l'espressione della velocità critica, ovvero la velocità per la quale si ha la piena sincronizzazione del distacco dei vortici:

$$U_{cr} = \frac{f_0 D}{S_t}$$

Tuttavia il fenomeno della sincronizzazione si estende su di un intervallo di velocità, intorno alla velocità critica, all'interno del quale la legge del numero di Strouhal risulta essere violata come si nota chiaramente da fig.2.2. L'ampiezza della risposta diminuisce all'aumentare dello smorzamento strutturale e si assesta su valori della velocità critica decrescenti. Inoltre come si nota in fig.2.3, all'aumentare dello smorzamento, l'intervallo di sincronizzazione diminuisce ed arretra leggermente.

La massima risposta della struttura risulta dipendere fortemente dal parametro massa-smorzamento:

$$K_s = \frac{m \zeta_s}{\rho D^2} \quad (2.2)$$

Nella espressione (2.2)  $m$  è la massa per unità di lunghezza della struttura,

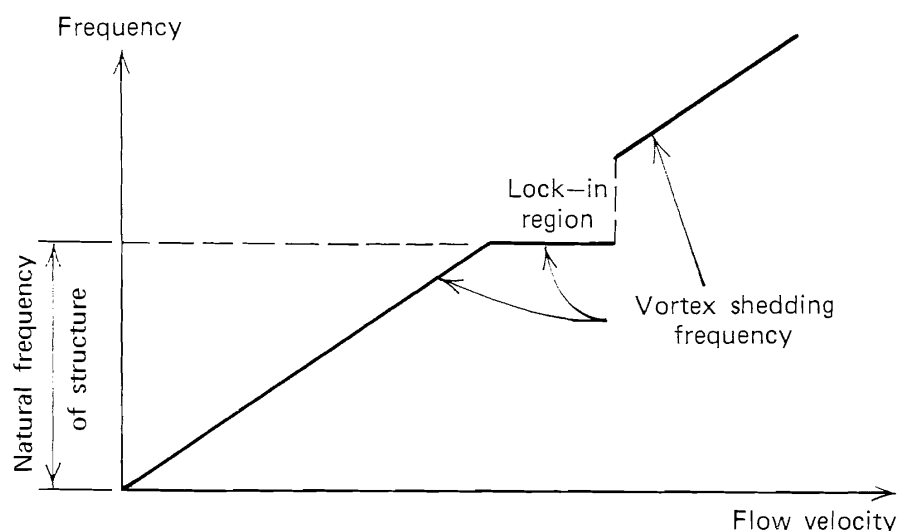


Fig. 2.2: Evoluzione della frequenza di distacco dei vortici da una struttura elastica in funzione della velocità del vento

$\rho$  è la densità dell'aria,  $\zeta_s$  è il rapporto di smorzamento meccanico della struttura, e  $D$  è la dimensione trasversale della sezione del corpo investito dal fluido. Generalmente si fa riferimento al numero di Scruton:

$$S_c = 4\pi K_s = \frac{4\pi m \zeta_s}{\rho D^2}$$

Definito il numero di Scruton esistono varie relazioni matematiche che esprimono in sua funzione la massima ampiezza di oscillazione della struttura. Per esempio la relazione di Griffin e Ramberg:

$$\left(\frac{y}{d}\right)_{\max} = \frac{1,29}{(1 + 0,43(2\pi S_t^2 S_c))^{3,35}}$$

E quella di Sarpkaya:

$$\left(\frac{y}{d}\right)_{\max} = 1,12e^{-1,05S_G} \quad (2.3)$$

Nella (2.3) con  $S_G$  si indica il numero di Skop-Griffin che è un ulteriore parametro di massa-smorzamento.

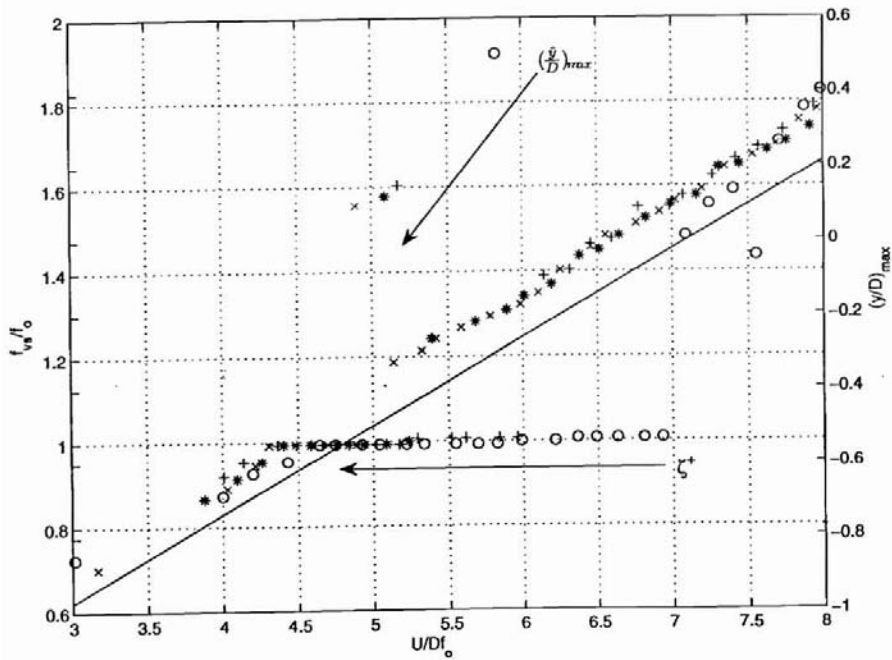


Fig. 2.3: Intervallo di sincronizzazione al variare dello smorzamento e del numero di Struton

### 2.1.3 Simulazione numerica del fenomeno

Il fenomeno del distacco dei vortici generato a valle di un cilindro è stato simulato numericamente mediante l'uso del software commerciale ADINA, come visto anche dagli esempi riportati nel precedente paragrafo. Per riuscire a determinare con precisione la frequenza di distacco dei vortici si è impostato un problema di interazione fra fluido e struttura, in cui il fluido scorreva a una velocità costante mentre la struttura era vincolata a muoversi solo nella direzione ortogonale al moto del fluido ed era vincolata al terreno tramite una molla elastica lineare.

Si può osservare da fig.2.4 come sia facile in questo modo visualizzare la frequenza del distacco dei vortici prendendo in esame lo spostamento della struttura nella direzione ortogonale al flusso. Essendo la struttura priva di massa essa segue senza effetti inerziali il moto del fluido per cui misurando la frequenza del moto armonico della struttura si ottiene direttamente la

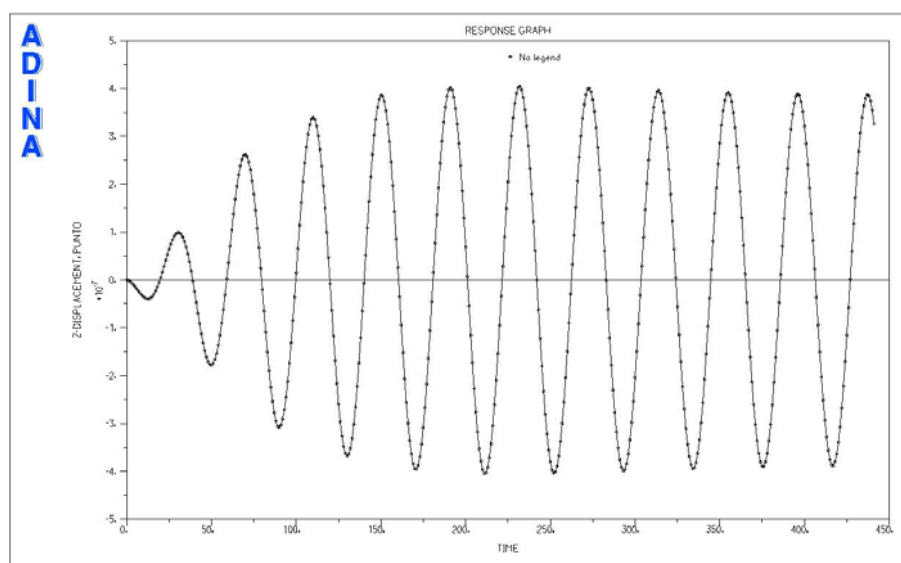


Fig. 2.4: Spostamento nel tempo del cilindro nella direzione ortogonale al flusso

frequenza di distacco dei vortici e quindi dalla relazione (2.1) il numero di Strouhal. Nel caso preso in esame la velocità era pari a  $U = 0,15$  [m/s] il diametro  $D = 1$  [m], che nel caso in cui il fluido preso in esame sia aria corrispondono a un numero di Reynolds pari a  $Re = 10000$ , e il periodo di oscillazione misurato  $T = 35$  [s]. Per cui il numero di Strouhal ottenuto è pari a:

$$S_t = \frac{1}{T} \frac{D}{U} = 0,19 \quad (2.4)$$

Il valore ottenuto dall'espressione (2.4) risulta una buona approssimazione del numero di Strouhal nel caso di una sezione cilindrica circolare per il dato numero di Reynolds.

In fig. 2.5 è mostrato l'andamento degli spostamenti del cilindro circolare quando entra in risonanza causa l'effetto del distacco dei vortici. Per simulare la situazione di risonanza il cilindro è stato dotato di una massa propria tale che la frequenza naturale della struttura corrispondesse alla frequenza di distacco dei vortici.

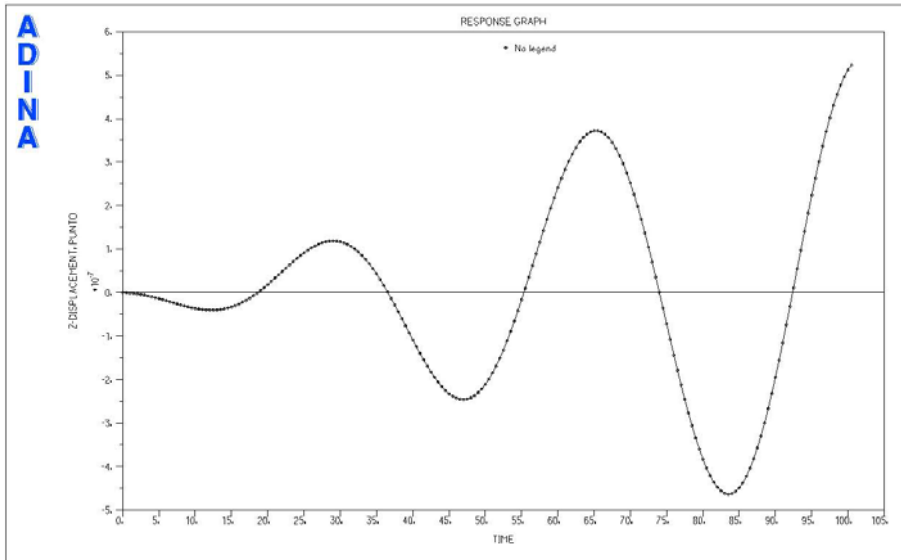


Fig. 2.5: Spostamento nel tempo del cilindro di sezione circolare nella direzione ortogonale al flusso in condizione di risonanza

## 2.2 Across-wind Galloping

### 2.2.1 Descrizione del fenomeno

Il galloping è un fenomeno di instabilità tipico delle strutture snelle e con sezione di forma particolare, come possono essere i cavi elettrici ricoperti da uno strato ghiacciato generato dalla brina o dalla pioggia. Al verificarsi di alcune condizioni specificate in questo paragrafo la struttura inizia a oscillare nella direzione ortogonale alla direzione del vento con frequenza molto più bassa di quella dovuta al distacco dei vortici.

L'esperienza sperimentale dimostra come il problema possa essere studiato sulla base dei coefficienti di drag e di lift della sezione misurati in condizioni statiche.

Le prime analisi del problema del galloping sono apparse in [15], [17] e [16].



### 2.2.2 Schema

Si prenda in esame una sezione generica di lunghezza unitaria e larghezza  $B$ , investita da un fluido a velocità costante  $U_r$  e angolo di attacco  $\alpha$ . Come illustrato in figura fig.2.6 La velocità  $\mathbf{U}_r$  viene scomposta in due vettori  $\mathbf{U}$  e  $-\dot{\mathbf{y}}$  nella direzione orizzontale e verticale [11]:

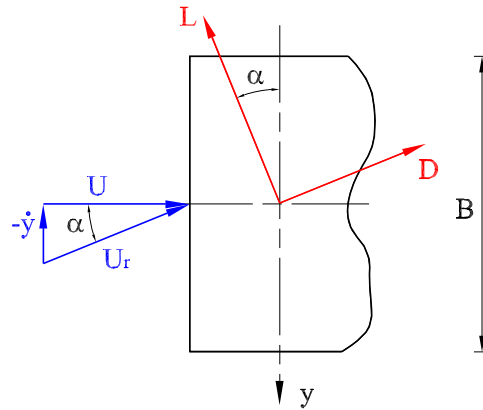


Fig. 2.6: Schema della sezione strutturale soggetta al fenomeno del galloping

L'espressione delle forzanti di Lift  $L$  e di Drag  $D$  è la seguente:

$$L = L(\alpha) = \frac{1}{2} \rho U_r^2 B C_L(\alpha)$$

$$D = D(\alpha) = \frac{1}{2} \rho U_r^2 B C_D(\alpha)$$

La forza nella direzione verticale  $F_y$  è ottenuta come somma delle proiezioni dei vettori  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{L}$  lungo l'asse verticale  $y$ :

$$F_y = F_y(\alpha) = L \cos \alpha + D \sin \alpha \quad (2.5)$$

Scrivendo l'espressione (2.5) nella forma differenziale si ottiene:

$$\frac{dF_y}{d\alpha} = \frac{dL}{d\alpha} \cos \alpha + \frac{dD}{d\alpha} \sin \alpha - L \sin \alpha + D \cos \alpha \quad (2.6)$$

Considerando l'angolo di attacco  $\alpha$  di piccola ampiezza si possono adottare le approssimazioni conseguenti lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione per cui risulta:

$$\cos \alpha \approx 1 \Rightarrow U_r \approx U$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx \alpha \\ \tan \alpha = -\frac{\dot{y}}{U} &\approx \alpha \Rightarrow d\alpha = -\frac{\ddot{y}}{U} dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

Per cui in luce di quanto affermato nelle espressioni (2.7) la (2.6) assume la forma:

$$dF_y = -\left(\frac{dL}{d\alpha} + D\right) \frac{\ddot{y}}{U} dt = -\frac{1}{2}\rho U B \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right) \ddot{y} dt \quad (2.8)$$

Integrando l'equazione differenziale (2.8) rispetto al tempo, e ponendo la costante di integrazione pari a zero, si ottiene l'espressione della forzante aerodinamica nella direzione  $y$ :

$$F_y = -\frac{1}{2}\rho U B \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right) \dot{y} \quad (2.9)$$

Come si evince dall'espressione (2.9) il valore della forzante  $F_y$  agente sulla sezione investita dal fluido è funzione della velocità di traslazione della sezione lungo il suo asse verticale. Nasce quindi un problema di interazione fra fluido e struttura, in quanto l'azione del fluido è appunto dipendente dalla risposta strutturale.

### 2.2.3 Equazione del moto della sezione

Per studiare il fenomeno dell'across-wind galloping occorre prendere in esame l'equazione del moto della sezione lungo l'asse  $y$ :

$$m (\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y) = F_y \quad (2.10)$$

Dove  $\zeta$  è lo smorzamento relativo, mentre  $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$  è la frequenza propria del prevalente modo di vibrare della sezione. Sostituendo nell'equazione (2.10) l'espressione della forzante aerodinamica (2.9) si ottiene:

$$m\ddot{y} + \left(2m\zeta_y\omega_y + \frac{1}{2}\rho U B \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right)\right) \dot{y} + k_y y = 0 \quad (2.11)$$

Nell'espressione (2.11) lo smorzamento complessivo  $c_{Tot}$  è composto dal termine  $2m\zeta_y\omega_y$  che rappresenta lo smorzamento strutturale mentre  $\frac{1}{2}\rho U B \left(\frac{dC_L}{d\alpha} + C_D\right)$

viene denominato smorzamento aerodinamico. Per cui la (2.11) può essere riscritta nella forma:

$$m\ddot{y} + c_{Tot}\dot{y} + k_y y = 0 \quad (2.12)$$

### 2.2.4 Condizione di gallopping

Si ipotizza per l'equazione differenziale (2.12) una soluzione di tipo esponenziale:

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{\lambda t} \\ \dot{y} &= y_0 \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{y} &= y_0 \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Per cui inserendo le espressioni (2.13) nella (2.12) si ottiene:

$$\lambda^2 m y_0 e^{\lambda t} + \lambda c_{Tot} y_0 e^{\lambda t} + k_y y_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (2.14)$$

Trascurando la soluzione banale  $y_0 = 0$  e essendo l'esponenziale  $e^{\lambda t} \neq 0$  la (2.14) assume la forma:

$$\lambda^2 m + \lambda c_{Tot} + k_y = 0 \quad (2.15)$$

Dall'equazione di secondo grado (2.15) risulta semplice determinare il valore dell'esponente  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{-c_{Tot} \pm \sqrt{c_{Tot}^2 - 4mk_y}}{2m}$$

Essendo la maggior parte delle strutture civili dei sistemi dinamici sottosmorzati sarà  $c_{Tot}^2 < 4mk_y$  per cui  $\lambda$  sarà composto da una parte reale e una immaginaria:

$$\lambda = -\frac{c_{Tot}}{2m} \pm i \frac{\sqrt{c_{Tot}^2 - 4mk_y}}{2m} = \lambda_R \pm i\lambda_I$$

Per cui la soluzione delle equazioni del moto sarà di tipo armonico amplificato o smorzato da un'esponenziale; a seconda del segno della parte reale di  $\lambda$  la soluzione sarà quindi convergente o divergente:

$$y = y_0 e^{(\lambda_R \pm i\lambda_I)t} = y_0 e^{\lambda_R t} e^{\pm i\lambda_I t}$$

Si hanno quindi oscillazioni divergenti quando  $\lambda_R = -\frac{c_{Tot}}{2m} > 0$ , cioè quando  $c_{Tot} < 0$ . La condizione di galloping risulta perciò:

$$c_{Tot} = 2m\zeta_y\omega_y + \frac{1}{2}\rho UB \left( \frac{dC_L}{d\alpha} + C_D \right) < 0 \quad (2.16)$$

Osservando la (2.16) si nota che l'unico termine suscettibile a variazione di segno e che quindi può diventare negativo è  $\frac{dC_L}{d\alpha}$ . Nel caso di una sezione cilindrica si ha per motivi di simmetria che  $\frac{dC_L}{d\alpha} = 0$  per cui non è soggetta al fenomeno del galloping. In figura fig.2.7 è riportato il grafico con l'andamento dei coefficienti  $C_L$  e  $C_D$  in funzione dell'angolo di attacco  $\alpha$  nel caso di una sezione ottagonale [18]:

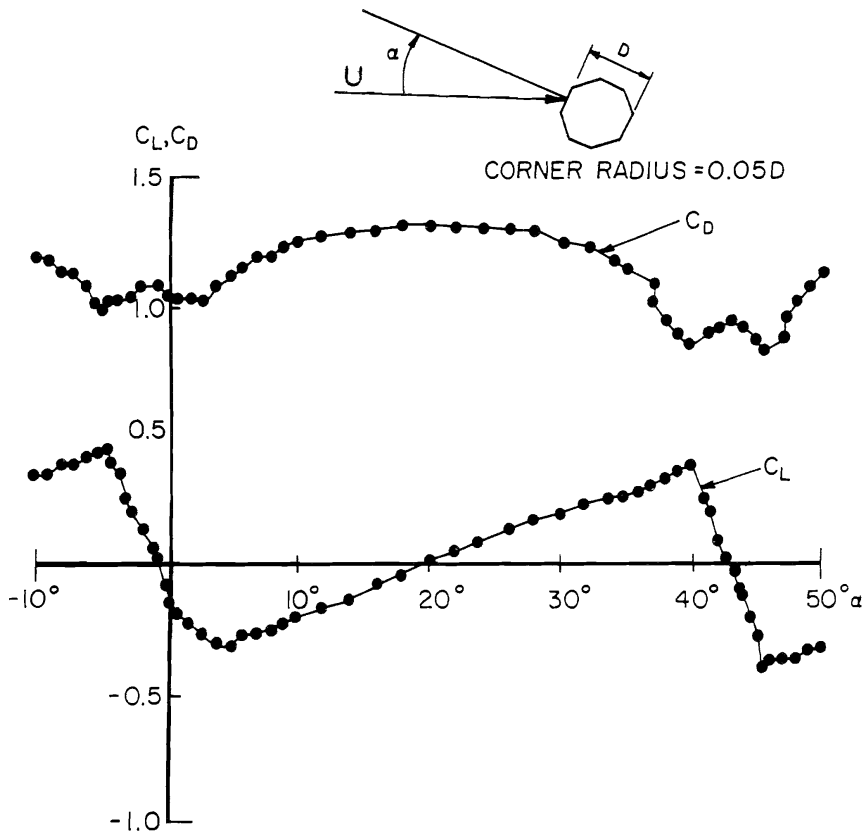


Fig. 2.7: Schema della sezione strutturale soggetta al fenomeno del galloping

Dal grafico in fig.2.7 si osserva che nell'esempio di una sezione ottagonale

il segno di  $\frac{dC_L}{d\alpha}$  non è sempre positivo e quindi la sezione può essere soggetta al fenomeno del galloping. Questo spiega il fenomeno fisico riscontrato nei cavi sospesi in cui si verificava l'instabilità al soffiare del vento in contemporanea con la caduta di pioggia che ghiacciava sui cavi. Questo provocava un'alterazione della forma della sezione investita dal vento, con conseguente pendenza negativa del grafico  $C_L = C_L(\alpha)$ .

## 2.3 Divergenza torsionale

### 2.3.1 Descrizione del fenomeno

Il fenomeno della divergenza torsionale è stato inizialmente studiato in campo aerodinamico in cui si riscontrava lo svergolamento delle ali dovuto all'eccessiva velocità. Come si vedrà il fenomeno può essere studiato considerando una sezione sottile o una sezione tipo di impalcato da ponte che causa l'azione del vento sarà soggetta a una forza di lift, di drag e di momento torcente, a cui dovrà resistere opponendo la sua rigidità strutturale.

Per quanto la struttura possa essere rigida sotto l'azione del carico del vento dovrà comunque deformarsi, e in particolare ruotare attorno al proprio centro elastico. Questa rotazione porta ad aumentare la superficie investita dal vento e quindi cresce la forza agente sulla struttura, lo stato di sollecitazione della stessa e conseguentemente la sua deformazione. Questo fenomeno può degenerare quando l'azione torcente si spinge oltre la soglia di resistenza torsionale e portare quindi all'instabilità del sistema.

Nel caso di strutture a sezione piana sottile il momento torcente aerodinamico cresce al crescere dell'angolo di attacco  $\varphi$ . Ciò può non essere vero per sezioni di forma particolare, che proprio grazie alla loro forma risultano immuni dal fenomeno della divergenza torsionale. Generalmente in campo civile le strutture sono soggette al fenomeno della divergenza strutturale per velocità del vento molto alte e quindi non pericolose per le condizioni comuni di esercizio.

### 2.3.2 Schema

Nello schema di fig.2.8 è illustrata una sezione di lunghezza unitaria e di larghezza pari a  $B = 2b$  investita da un fluido a velocità costante  $U$ . L'unica caratteristica meccanica della struttura nota è la rigidezza  $K_\varphi$ , applicata nel centro elastico  $C$ , in quanto si sta analizzando un fenomeno statico che coinvolge solo il grado di libertà rotazionale della sezione [10].

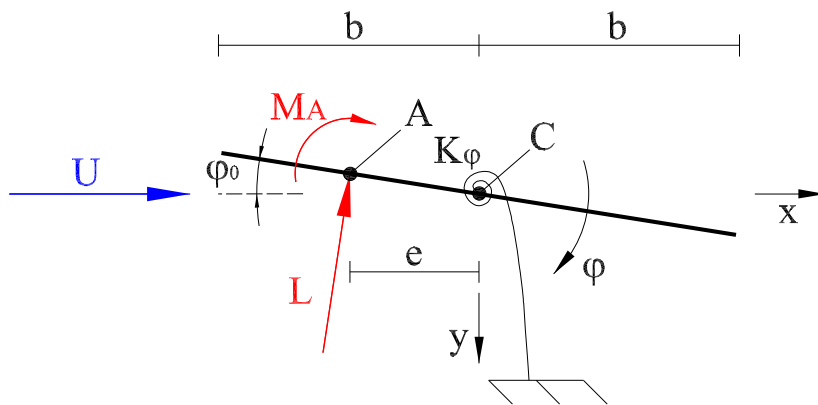


Fig. 2.8: Schema della sezione strutturale soggetta al fenomeno di divergenza torsionale

Le azioni aerodinamiche  $L$  e  $M_A$  sono applicate nel centro aerodinamico  $A$ , definito come il punto in cui il momento aerodinamico  $M$  non dipende da  $\varphi$ .

La rotazione  $\varphi$  è misurata considerando i contributi dovuti alla rotazione iniziale  $\varphi_0$  e a quella elastica  $\varphi_e$ , per cui risulterà:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_e \quad (2.17)$$

### 2.3.3 Equazione di equilibrio

Le azioni aerodinamiche agenti sulla sezione sono espresse nella forma seguente:

$$L = L(\varphi) = \frac{1}{2}\rho U^2 B C_L(\varphi)$$

$$M_A = \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 C_{MA} \quad (2.18)$$

I coefficienti aerodinamici  $C_L(\varphi)$  e  $C_{MA}$ , applicando lo sviluppo in serie di Taylor e considerando la (2.17), possono essere espressi come:

$$C_L(\varphi) = C_L(\varphi_0 + \varphi_e) = C_L(0) + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_0 + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_e$$

$$\frac{\partial M_A}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow C_{MA} = C_{MA}(0) = C_{MA0} \quad (2.19)$$

Applicando le espressioni (2.19) alle (2.18) si ottiene la seguente espressione delle azioni aerodinamiche:

$$L = L(\varphi) = \frac{1}{2} \rho U^2 B \left( C_L(0) + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_0 + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_e \right)$$

$$M_A = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{MA0}$$

La condizione di equilibrio alla rotazione attorno al centro elastico  $C$  porta alla seguente equazione:

$$M_A + Le = K_\varphi \varphi_e$$

$$\frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{MA0} + \frac{1}{2} \rho U^2 B \left( C_L(0) + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_0 + \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_e \right) e = K_\varphi \varphi_e \quad (2.20)$$

### 2.3.4 Condizione di divergenza torsionale

Dall'equazione (2.20) si ricava l'espressione dell'angolo  $\varphi_e$ :

$$\varphi_e = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{MA0} + \frac{1}{2} \rho U^2 B e C_L(0) + \frac{1}{2} \rho U^2 B e \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} \varphi_0}{K_\varphi - \frac{1}{2} \rho U^2 B \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} e} \quad (2.21)$$

Si ha divergenza torsionale quando l'ampiezza dell'angolo  $\varphi_e$  tende a infinito, condizione che si verifica quando il denominatore dell'espressione tende a zero. Per cui imponendo che il valore del denominatore sia pari a zero si calcola la velocità di divergenza  $U_D$ :

$$U_D = \sqrt{\frac{2K_\varphi}{\rho B \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} e}} \quad (2.22)$$

### 2.3.5 Applicazione al caso di una sezione a lamina sottile

Nel caso di una sezione ideale a lamina sottile investita da un flusso bidimensionale e incomprimibile si possono assumere le seguenti ipotesi sul valore dei coefficienti aerodinamici e sulla distanza  $e$  fra il centro aerodinamico  $A$  e il centro elastico  $C$ :

$$\begin{aligned} C_L(0) &= 0 \\ C_{MA0} &= 0 \\ \frac{\partial C_L(\varphi)}{\partial \varphi} &= 2\pi \\ e &= \frac{b}{2} = \frac{B}{4} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Per cui sostituendo le espressioni (2.23) nell'equazione (2.21) si ottiene l'espressione dell'angolo  $\varphi_e$  nella forma:

$$\varphi_e = \frac{\frac{1}{4}\rho U^2 B^2 \pi \varphi_0}{K_\varphi - \frac{1}{4}\rho U^2 B^2 \pi}$$

Per cui la velocità di divergenza torsionale nel caso di una lamina piana risulterà essere:

$$U_D = \sqrt{\frac{4K_\varphi}{\rho B^2 \pi}} \approx \frac{1,13}{B} \sqrt{\frac{K_\varphi}{\rho}} \quad (2.24)$$

### 2.3.6 Trattazione di Scanlan

Viene di seguito riportata la trattazione del problema della divergenza torsionale con la notazione usata da Scanlan molto comune nel campo dell'ingegneria civile, mentre quella vista in precedenza utilizzava una notazione di più frequente uso nel campo aerodinamico. Come si vedrà i due procedimenti risultano equivalenti.

L'equazione di equilibrio alla rotazione attorno a  $C$  risulta essere:

$$\frac{1}{2}\rho U^2 B^2 C_M(\varphi_e) = K_\varphi \varphi_e \quad (2.25)$$



Per angoli  $\varphi_e$  piccoli il coefficiente  $C_M(\varphi_e)$  può essere espresso nella forma:

$$C_M(\varphi_e) = C_{M0} + \left. \frac{\partial C_M(\varphi_e)}{\partial \varphi_e} \right|_0 \varphi_e = C_{M0} + C'_{M0} \varphi_e \quad (2.26)$$

Applicando la (2.26) alla (2.25) si ottiene la seguente espressione del valore dell'angolo  $\varphi_e$ :

$$\varphi_e = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_{M0}}{K_\varphi - \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C'_{M0}} \quad (2.27)$$

Dall'equazione (2.27) si ricava la velocità di divergenza uguagliando il denominatore a zero:

$$U_D = \sqrt{\frac{2K_\varphi}{\rho B^2 C'_{M0}}}$$

Dalla tabella in fig.2.9 si possono ricavare i valori del coefficiente  $C'_{M0}$  in funzione del rapporto  $\frac{b}{d}$  in una sezione rettangolare.

Nel caso limite di una sezione a lamina sottile si ricava dal grafico che il coefficiente  $C'_{M0}$  vale  $C'_{M0} = 1,6$ .

Per cui la velocità di divergenza torsionale nel caso di una lamina piana risulterà essere:

$$U_D = \sqrt{\frac{2K_\varphi}{\rho B^2 1,6}} \approx \frac{1,12}{B} \sqrt{\frac{K_\varphi}{\rho}} \quad (2.28)$$

Come si evince confrontando le espressioni (2.24) e (2.28) i due procedimenti per determinare la velocità di divergenza si equivalgono.

## 2.4 Buffeting

### 2.4.1 Descrizione del fenomeno

Il fenomeno del buffeting viene causato dal carico non stazionario provocato dalle fluttuazioni di velocità del fluido che investe la struttura. Se queste fluttuazioni sono determinate dalla presenza di un'altra struttura a monte della stessa sono denominate onde di buffeting, altrimenti sono dovute alla turbolenza atmosferica.

Le strutture snelle come gli impalcati dei ponti sospesi o le ciminiere sono naturalmente quelle più sensibili a questo fenomeno e sono oggetto della breve trattazione che seguirà in questo paragrafo. Per questo tipo di strutture è possibile affrontare una trattazione bidimensionale del problema.

### 2.4.2 Forze aerodinamiche

Nell'ipotesi che le oscillazioni della struttura presa in esame siano di piccola ampiezza si può supporre il suo comportamento aerodinamico lineare. In virtù di ciò si può supporre che l'effetto delle forze applicate sulla struttura sia equivalente alla sovrapposizione degli effetti delle forze autoeccitate analizzate nella trattazione del flutter e delle forze di buffeting dovute a una turbolenza generatisi a monte della struttura.

Per le intensità di turbolenza tipiche dei venti nello strato limite atmosferico, e per le frequenze di turbolenza più comuni nei casi pratici, si può assumere che i quadrati dei valori delle fluttuazioni di velocità  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , siano trascurabili rispetto al quadrato del valore della velocità  $U$  e che i coefficienti di forza  $C_D$ ,  $C_L$  e  $C_M$  siano indipendenti dalla frequenza nel range di frequenze di oscillazione della struttura considerate. Nella validità di queste ipotesi l'espressione delle forze di buffeting nella forma quasi statica è accettabile per cui le forze agenti sulla sezione di struttura posta alla quota  $x$  sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{D(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} &= C_D(\varphi_0) \frac{A}{B} \left( 1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) \\ \frac{-L(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 B} &= C_L(\varphi_0) \left( 1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) + \left( \frac{dC_L}{d\varphi} \Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{A}{B} C_D(\varphi_0) \right) \frac{w(x,t)}{U} \\ \frac{M(t)}{\frac{1}{2}\rho U^2 B^2} &= \left( C_M(\varphi_0) + C_D(\varphi_0) \frac{Ar}{B^2} \right) \left( 1 + 2 \frac{u(x,t)}{U} \right) + \frac{dC_M}{d\varphi} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \frac{w(x,t)}{U} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nelle equazioni (2.29) con  $B$  si indica una dimensione tipica della sezione presa in esame (ad esempio la larghezza di un impalcato da ponte),  $A$  è l'area

della sezione strutturale proiettata sul piano normale alla velocità principale  $U$ ,  $r$  è la distanza del centro di massa dell'impalcato dal centro elastico di rotazione dello stesso,  $u(x, t)$  e  $w(x, t)$  sono le componenti di fluttuazione della velocità nelle direzioni del vento e perpendicolare al moto del vento e  $\varphi_0$  è l'angolo principale di attacco dell'azione del vento rispetto alla struttura. Il termine  $\frac{w(x, t)}{U}$  rappresenta un'oscillazione angolare dell'angolo di attacco  $\varphi_0$ .

Una volta determinati i carichi aerodinamici lo studio del sistema dinamico prosegue in modo analogo a quanto trattato nel caso del flutter, per cui si rimanda al capitolo successivo.

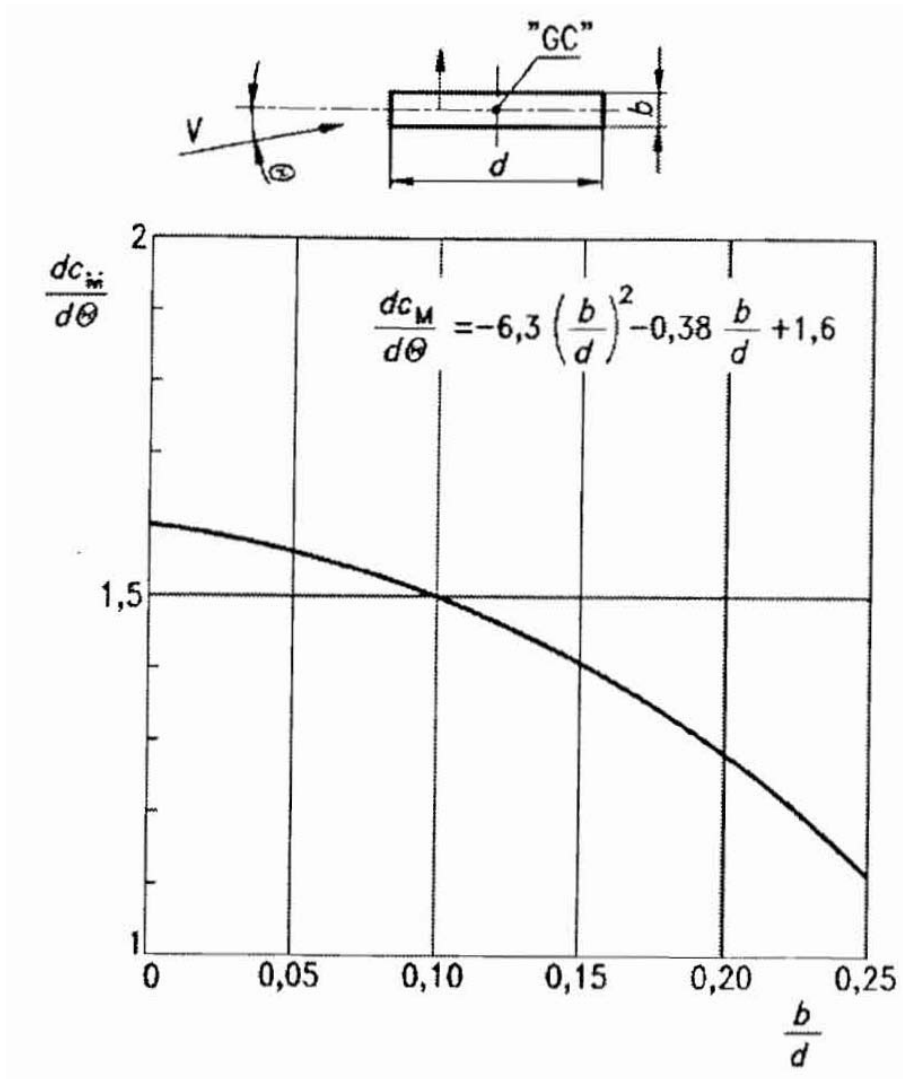


Fig. 2.9: Coefficiente di momento in funzione dell'angolo di attacco per sezioni rettangolari

# Capitolo 3

## Flutter

### 3.1 Descrizione del fenomeno

Il Flutter è un'instabilità dinamica originariamente studiata per i profili alari, e successivamente estesa alle strutture ed in particolar modo ai ponti di grande luce. Il termine Flutter, in realtà, riassume diverse tipologie d'instabilità dinamica: Flutter classico, Stall-Flutter, Flutter ad un grado di libertà.

Il Flutter classico è un fenomeno cui corrisponde l'accoppiamento di due gradi di libertà della struttura, generalmente quello traslazionale e rotazionale, che innesca delle oscillazioni instabili.

Lo Stall-Flutter è un'instabilità legata al moto torsionale della sezione, e indotta da una forzante di lift non lineare in prossimità dello stallo (perdita di portanza).

Il Flutter ad un grado di libertà, include lo Stall-Flutter, ma in generale è associato a quelle sezioni la cui forma è tale da indurre una pronunciata separazione del flusso in corrispondenza di essa. Sezioni tozze, poco aerodinamiche sono tipici esempi di sezioni strutturali candidate a questo tipo di Flutter.

È doveroso ricordare che, in generale, il Flutter, in tutte le sue forme, coinvolge fenomeni aerodinamici non lineari. Tuttavia, sotto opportune ipotesi, è possibile linearizzare le forzanti indotte dall'interazione fluido-struttura e dunque studiare la soglia di stabilità della struttura. Lo studio dell'evoluzione

dell'aerodinamica non stazionaria da cui trae origine il fenomeno, è rimandata a studi specifici generalmente più complessi.

Le ipotesi che permettono lo studio del Flutter delle strutture sono fondamentalmente due: la struttura è elastica lineare smorzata linearmente, e dunque presenta delle oscillazioni armoniche smorzate esponenzialmente; le oscillazioni sono piccole, e si ritiene che la soglia di stabilità sia raggiunta quando tali oscillazioni raggiungono un valore critico corrispondente alla velocità di Flutter. Pertanto, come per il Galloping e la Divergenza torsionale, l'analisi si riduce allo studio della velocità critica che porta all'instabilità della struttura, in questo caso dovuta al Flutter. La progettazione aerodinamica della struttura sarà tanto più affidabile quanto più la velocità critica di Flutter sarà alta, o comunque maggiore della velocità eolica di progetto, avente una certa probabilità di eccedenza nel sito dove sorgerà la struttura.

### 3.1.1 Schematizzazione

Per la schematizzazione della sezione bidimensionale a due gradi di libertà si fa riferimento allo schema in fig.3.1:

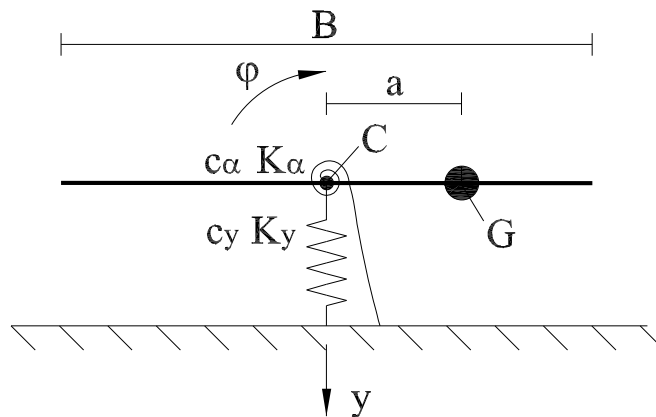


Fig. 3.1: Schema della sezione strutturale bidimensionale a due gradi di libertà soggetta a flutter

### 3.1.2 Ipotesi

Per studiare il problema sono state fatte le seguenti ipotesi:

- 1) Il flusso del fluido che investe l'impalcato è orizzontale e di velocità  $U$ .
- 2) Le rigidzze ( $k_y, k_\varphi$ ) e gli smorzamenti ( $c_y, c_\varphi$ ) considerati nella sezione di mezzeria rappresentano quelli dell'intero impalcato.
- 3) I versi positivi degli spostamenti  $y, \varphi$ , sono assunti coerentemente con quanto indicato nella schematizzazione.
- 4) Con  $B$  si indica la larghezza dell'impalcato.
- 5) Nella determinazione dei carichi aerodinamici i termini contenenti ( $\ddot{y}, \ddot{\varphi}$ ) sono stati trascurati, dato che l'effetto di inerzia causato dal distacco della massa dell'aria è chiaramente molto inferiore rispetto a quello dovuto alla massa  $m$  dell'impalcato.

### 3.1.3 Carichi aerodinamici per profili alari sottili

La trattazione del fenomeno del Flutter nel caso delle strutture civili deriva dalle pratiche aeronautiche, per cui si accenna brevemente l'origine del problema facendo riferimento alla non stazionarietà delle forze aerodinamiche agenti su un profilo alare sottile soggetto a moto traslazionale e rotazionale.

Un sezione di forma generica è tale da modificare le linee di flusso della corrente fluida incidente, creando dei disturbi distribuiti lungo la sezione stessa, e addirittura inducendo la separazione del flusso in corrispondenza di essa fino ad innescare la formazione di vortici che defluiscono a valle dando vita ad una scia vorticoso. Pertanto, quello che all'origine era un flusso irrotazionale, diviene un flusso rotazionale in corrispondenza della sezione, e conseguentemente la velocità delle particelle fluide, in prossimità della sezione, non è più tangente alla sezione stessa in quanto si genera una componente verticale della velocità.

Nel caso di un profilo alare stazionario, i disturbi indotti dalla sezione stessa, sono così contenuti che la velocità delle particelle fluide segue il contorno della sezione (sezione streamline), e dunque la portanza che si sviluppa è essenzialmente una media con una deviazione standard molto contenuta

dal momento che i disturbi del flusso prossimo alla superficie, sono a loro volta molto contenuti.

Se il profilo alare oscilla traslazionalmente e rotazionalmente, le particelle fluide, in corrispondenza della sezione, presentano anche una componente normale alla superficie, sinonimo del fatto che la non stazionarietà del flusso, in questo caso, gioca un ruolo fondamentale inducendo delle forzanti aeroelastiche (dipendenti cioè dal moto della sezione) che allo stato limite ultimo inducono un'instabilità dinamica, nota appunto come Flutter.

Theodorsen [19], utilizzando la teoria del flusso a potenziale, dimostrò che le forzanti  $L_y$  e  $M_\varphi$  sono lineari in  $y$  e  $\varphi$  e nelle loro rispettive derivate del primo e secondo ordine. In particolare, Theodorsen arrivò alla definizione di una funzione, nota appunto come funzione di Theodorsen, che tiene in conto della non stazionarietà del flusso in prossimità del profilo alare, indotta dal moto della sezione stessa. Tale funzione indicata con  $C(k)$ , è una funzione complessa:

$$C(k) = F(k) + iG(k) \quad (3.1)$$

La funzione (3.1) è espressa in funzione della frequenza ridotta  $k$ :

$$k = 2\pi \frac{fb}{U} \quad (3.2)$$

Come si vede dall'espressione (3.2) la frequenza ridotta dipende da  $b = \frac{B}{2}$ , essendo  $B$  la larghezza della sezione. In particolare  $L_y$  e  $M_\varphi$  per un profilo alare, si esprimono nel seguente modo:

$$L_y = -\rho b^2 (U\pi\dot{\varphi} + \pi\dot{y} - \pi ba\ddot{\varphi}) - 2\pi\rho C(k) \left( U\varphi + \dot{y} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\varphi} \right)$$

$$\begin{aligned} M_\varphi = & -\rho b^2 \left( \pi \left( \frac{1}{2} - a \right) Ub\dot{\varphi} + \pi b^2 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\varphi} - a\pi b\dot{y} \right) + \\ & + 2\rho Ub^2\pi \left( \frac{1}{2} + a \right) C(k) \left( U\varphi + \dot{y} + b \left( \frac{1}{2} - a \right) \dot{\varphi} \right) \end{aligned}$$



### 3.1.4 Carichi aerodinamici per impalcati da ponte

Scanlan and Tomko [9] estesero lo studio di Theodorsen alle sezioni da ponte, generalmente aventi spessori non trascurabili. Ciò che ne derivò furono le cosiddette derivate aeroelastiche o derivate di Flutter.

La differenza sostanziale con la trattazione originaria di Theodorsen, risiede nel fatto che mentre la funzione di Theodorsen è una funzione nota a priori, le derivate aeroelastiche devono essere necessariamente stimate tramite sperimentazione in galleria del vento, perché rappresentano l'estensione di una teoria esatta fondata su determinate ipotesi che cadono nel caso di sezioni come quelle dei ponti.

È ben evidente che gli impalcati da ponte hanno sezioni con spessori tutt'altro che trascurabili, responsabili dei disturbi del flusso che non solo non possono essere intesi come uniformemente distribuiti (basta pensare al distacco del flusso in prossimità di uno spigolo a monte della sezione, seguito da un riattacco a valle della sezione, oppure che si propaghi nella scia senza nemmeno riattaccarsi alla sezione stessa), ma variano anche tra intradosso e extradosso della sezione stessa.

Per questo le derivate aeroelastiche andrebbero usate e, ancor prima, ricavate con molta cautela. Si ricorda, infatti, che le forzanti espresse in funzione delle derivate aeroelastiche sono lineari e poiché soltanto per valori di  $k \rightarrow 0$  tali forzanti lineari assumono il loro valore quasi-stazionario (nel caso delle sezioni alari sottili  $C(k) \rightarrow 1$  per  $k \rightarrow 0$ , come si vede dalla figura fig.3.2, quindi nel caso in cui durante la sperimentazione, si lavori con valori  $k \gg 0$  bisognerebbe porre notevole attenzione alle condizioni iniziali impresse al sistema: ampiezze iniziali di oscillazione relativamente grandi, per valori di  $k \gg 0$ , inducono una non stazionarietà che si traduce in forzanti tutt'altro che lineari. Pertanto, le derivate aeroelastiche rischierebbero di non essere univoche, ma dipendenti dall'ampiezza di oscillazione iniziale, visto che per definizione l'interazione aeroelastica tra fluido e struttura si instaura per effetto della non stazionarietà indotta dal moto della struttura.

Le forzanti aeroelastiche proposte da Scanlan e Tomko, e largamente uti-

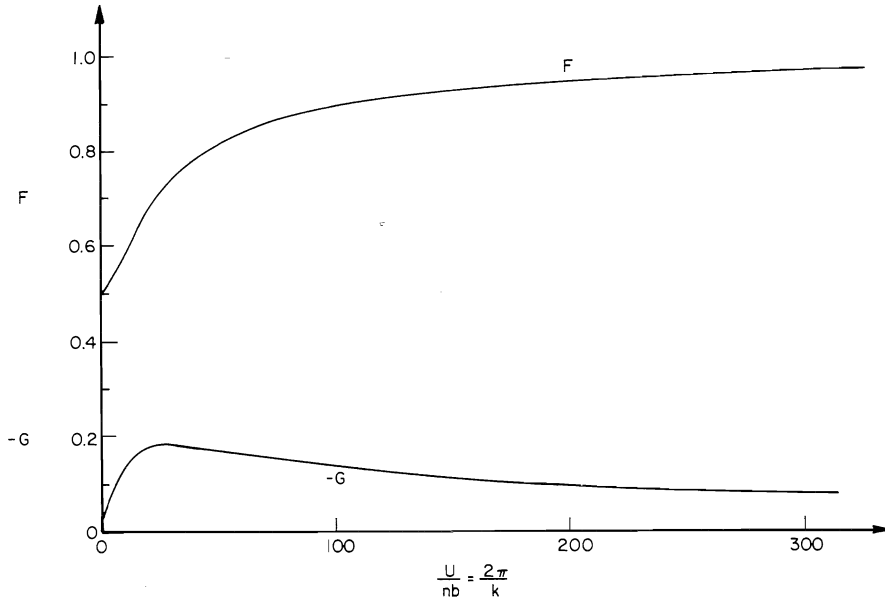


Fig. 3.2: Parte reale e immaginaria della funzione di Theodorsen

lizzate oggigiorno, sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 L_y &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2B) \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi \right] \\
 M_\varphi &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2B^2) \left[ KA_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 A_3^* \varphi \right] \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Dove  $K$  è il numero di Strouhal pari a  $K = 2k = \frac{\omega B}{U}$ ,  $\rho$  è la densità del fluido,  $B$  è la larghezza dell'impalcato,  $\omega = 2\pi f$  la pulsazione di oscillazione dell'impalcato e  $H_i^* = H_i^*(K)$ ,  $A_i^* = A_i^*(K)$  sono funzioni del numero di Strouhal determinate sperimentalmente e denominate derivate aeroelastiche.

Nel caso in cui l'impalcato sia considerato come una lastra piana, si ha ovviamente che  $ab = 0$  essendo l'eccentricità nulla, e la corrispondenza tra le derivate aeroelastiche e la funzione di Theodorsen è la seguente:

$$H_1^*(K) = -\frac{\pi F(k)}{k}$$

$$A_1^*(K) = -\frac{\pi F(k)}{4k}$$

$$\begin{aligned}
 H_2^*(K) &= \frac{\pi}{4k} \left( 1 + F(k) + \frac{2G(k)}{k} \right) \\
 A_2^*(K) &= -\frac{\pi}{16k} \left( 1 - F(k) - \frac{2G(k)}{k} \right) \\
 H_3^*(K) &= \frac{\pi}{2k^2} \left( F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right) \\
 A_3^*(K) &= \frac{\pi}{8k^2} \left( F(k) - \frac{kG(k)}{2} \right) \\
 H_4^*(K) &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{2G(k)}{k} \right) \\
 A_4^*(K) &= \frac{\pi G(k)}{4k}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nelle equazioni (3.4) sono contenute le funzioni  $F(k)$  e  $G(k)$  espresse come:

$$\begin{aligned}
 F(k) &= \frac{J_1(J_1 + Y_0) + Y_1(Y_1 - J_0)}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2} \\
 G(k) &= \frac{J_1 J_0 + Y_1 Y_0}{(J_1 + Y_0)^2 + (Y_1 - J_0)^2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Con  $J_j$  e  $Y_j$  funzioni di Bessel del primo e del secondo tipo, di ordine  $j$ .

## 3.2 Problema agli autovalori

### 3.2.1 Equazioni del moto

Le equazioni del moto di un sistema a due gradi di libertà avente il baricentro delle masse non coincidente con il baricentro delle rigidità sono scritte nella forma:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + S\ddot{\varphi} + c_y\dot{y} + K_y y = L_y \\ S\ddot{y} + I_o\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + K_\varphi\varphi = M_\varphi \end{cases} \tag{3.6}$$

Applicando la definizione di raggio d'inerzia  $\rho_o = \sqrt{\frac{I_o}{m}} \Rightarrow m = \frac{I_o}{\rho_o^2} \Rightarrow S = \frac{I_o}{\rho_o^2} ab$  le equazioni (3.6) diventano:

$$\begin{cases} \ddot{y} + ab\ddot{\varphi} + 2\zeta_y\omega_y\dot{y} + \omega_y^2 y = \frac{L_y}{m} \\ \frac{ab}{\rho_o^2}\ddot{y} + \ddot{\varphi} + 2\zeta_\varphi\omega_\varphi\dot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi = \frac{M_\varphi}{I_o} \end{cases} \tag{3.7}$$

Per comodità si adotta la notazione matriciale in modo da snellire la trattazione del problema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & ab \\ ab & 1 \\ \frac{ab}{\rho_o^2} & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{M}}} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\zeta_y \omega_y & 0 \\ 0 & 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_y^2 & 0 \\ 0 & \omega_\varphi^2 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_y}{I_o} \\ \frac{M_\varphi}{I_o} \end{bmatrix}$$

Le equazioni (3.6) si scrivono perciò in forma matriciale contratta nel modo seguente:

$$\tilde{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_y}{I_o} \\ \frac{M_\varphi}{I_o} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Dalle espressioni (3.3) si ricavano i valori delle forzanti aerodinamiche:

$$\begin{cases} \frac{L_y}{m} = \left[ U \frac{\rho B}{m} K H_1^* \dot{y} + U \frac{\rho B^2}{m} K H_2^* \dot{\varphi} + U^2 \frac{\rho B}{m} K^2 H_3^* \varphi \right] \\ \frac{M_\varphi}{I_o} = \left[ U \frac{\rho B^2}{I_o} K A_1^* \dot{y} + U \frac{\rho B^3}{I_o} K A_2^* \dot{\varphi} + U^2 \frac{\rho B^2}{I_o} K^2 A_3^* \varphi \right] \end{cases} \quad (3.9)$$

Raccogliendo i termini e scrivendo in forma matriciale le (3.9) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_y}{I_o} \\ \frac{M_\varphi}{I_o} \end{bmatrix} = U \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\rho B}{m} K H_1^* & \frac{\rho B^2}{m} K H_2^* \\ \frac{\rho B^2}{I_o} K A_1^* & \frac{\rho B^3}{I_o} K A_2^* \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{C}}_A} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + U^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho B}{m} K^2 H_3^* \\ 0 & \frac{\rho B^2}{I_o} K^2 A_3^* \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_A} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

La (3.10) in forma contratta risulta essere:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_y}{I_o} \\ \frac{M_\varphi}{I_o} \end{bmatrix} = U \tilde{\mathbf{C}}_A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + U^2 \tilde{\mathbf{K}}_A \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Sostituendo l'espressione (3.11) nella (3.8) si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = U \tilde{\mathbf{C}}_A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + U^2 \tilde{\mathbf{K}}_A \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Portando tutti i termini al primo membro le equazioni del moto risultano espresse nella seguente forma matriciale:

$$\tilde{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + (\tilde{\mathbf{C}} - U\tilde{\mathbf{C}}_A) \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + (\tilde{\mathbf{K}} - U^2\tilde{\mathbf{K}}_A) \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Come si può notare osservando la (3.12) lo studio dell'instabilità per flutter può essere visto come lo studio di un sistema a due o più gradi di libertà che si muove di moto libero e smorzato. La particolarità sta nel fatto che le forzanti aerodinamiche intervengono nei termini di smorzamento e di rigidità del sistema, essendo potenzialmente causa perciò di fenomeni di instabilità.

### 3.2.2 Impostazione del problema agli autovalori

Si assume una soluzione esponenziale del sistema:

$$\begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}}_{\Delta} e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \lambda \Delta e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \lambda^2 \Delta e^{\lambda t} \quad (3.13)$$

Quindi sostituendo la (3.13) nel sistema (3.12) si ottiene:

$$\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} \Delta e^{\lambda t} + \lambda (\tilde{\mathbf{C}} - U\tilde{\mathbf{C}}_A) \Delta e^{\lambda t} + (\tilde{\mathbf{K}} - U^2\tilde{\mathbf{K}}_A) \Delta e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$

Considerando  $e^{\lambda t} \neq 0$  in modo da escludere la soluzione banale si può scrivere:

$$\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} \Delta + \lambda (\tilde{\mathbf{C}} - U\tilde{\mathbf{C}}_A) \Delta + (\tilde{\mathbf{K}} - U^2\tilde{\mathbf{K}}_A) \Delta = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Se si moltiplicano ambo i membri della (3.14) per  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$  si ha la seguente espressione:

$$\lambda^2 \Delta = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} - U\tilde{\mathbf{C}}_A) \lambda \Delta - \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{K}} - U^2\tilde{\mathbf{K}}_A) \Delta \quad (3.15)$$

Dalla (3.15) segue che risulta valida l'uguaglianza seguente:

$$\lambda \begin{bmatrix} \Delta \\ \lambda \Delta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{I}} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{K}} - U^2\tilde{\mathbf{K}}_A) & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} (\tilde{\mathbf{C}} - U\tilde{\mathbf{C}}_A) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \Delta \\ \lambda \Delta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Escludendo la soluzione banale del sistema si può considerare il vettore delle costanti diverso da zero:

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ \lambda \Delta \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Per cui semplificando il vettore delle costanti si ha che il sistema (3.16) viene espresso nella forma:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{\mathbf{I}} &= \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{A}} - \lambda \tilde{\mathbf{I}} &= \tilde{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dall'equazione (3.17) risulta evidente dalla definizione di autovalore di una matrice che i coefficienti  $\lambda$  incogniti necessari per determinare la soluzione delle equazioni del moto siano gli autovalori della matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . In realtà trovati gli autovalori la legge di moto dei gradi di libertà della sezione rimane determinata a meno di una costante, il cui valore tuttavia non è di prioritario interesse in quanto l'importante per studiare i fenomeni di instabilità dinamica è capire se l'andamento della legge di moto all'aumentare del tempo diverge o tende a stabilizzarsi.

### 3.2.3 Calcolo della velocità di flutter

Dall'equazione (3.17) si ricavano quindi gli autovalori della matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ , e nel caso di una sezione a due gradi di libertà come quella presa in esame si avranno quattro autovalori complessi coniugati, partendo dal presupposto che come di frequente il sistema sia sottosmorzato. E' importante specificare questo perchè come si vedrà il procedimento di seguito riportato risulta valido solamente se il moto dei due gradi di libertà della sezione è di tipo armonico.

Infatti per ricavare la velocità di flutter bisogna come primo passo ipotizzare un valore della pulsazione  $\omega$  e della velocità  $U$  per poi ricavare il numero di Strouhal con la già citata formula  $K = \frac{\omega B}{U}$ . Noto  $K$  si procede ricavando dai grafici tabulati il valore delle derivate di flutter misurate sperimentalmente  $H_i^* = H_i^*(K)$ ,  $A_i^* = A_i^*(K)$  in funzione del numero di Strouhal e della forma della sezione. Alcuni valori delle derivate di flutter per le più comuni forme di impalcato da ponte sono riportati in fig.3.3.

Note le derivate di flutter si può definire la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  e risolvere quindi l'equazione (3.17) determinando così gli autovalori che saranno espressi nella forma:

$$\lambda_y = \lambda_{yR} \pm i\lambda_{yI}$$

$$\lambda_\varphi = \lambda_{\varphi R} \pm i\lambda_{\varphi I}$$

A questo punto bisogna verificare se la pulsazione imposta in partenza è effettivamente uguale (a meno di un certo valore di tolleranza  $\varepsilon$ ) a una delle parti immaginarie  $\lambda_{yI}$  e  $\lambda_{\varphi I}$ . Per cui in un certo range di valori di tentativo  $\omega_i$ , tenendo fissa la velocità  $U_j$ , si determina  $K$  e si risolve il problema agli autovalori verificando che:

$$|\omega_i - (\lambda_{yI})_i| \leq \varepsilon \Rightarrow (\lambda_y)_j = (\lambda_y)_i$$

$$|\omega_i - (\lambda_{\varphi I})_i| \leq \varepsilon \Rightarrow (\lambda_\varphi)_j = (\lambda_\varphi)_i$$

Una volta trovati gli autovalori  $(\lambda_y)_j$  e  $(\lambda_\varphi)_j$  si ripete il procedimento in modo analogo, fissando un valore di velocità  $U_{j+1}$  e ricavando i rispettivi autovalori  $(\lambda_y)_{j+1}$  e  $(\lambda_\varphi)_{j+1}$ . Risulta pratico graficare in funzione dei vari valori di velocità  $U_j$  presi in esame le parti immaginarie  $(\lambda_{yI})_j$ ,  $(\lambda_{\varphi I})_j$  e reali  $(\lambda_{yR})_j$ ,  $(\lambda_{\varphi R})_j$  dei rispettivi autovalori

Ricordando che la soluzione alle equazioni del moto è del tipo (3.13) la velocità di flutter  $U_F$  sarà quella velocità  $U_j$  per cui la parte reale di uno dei due autovalori  $(\lambda_{yR})_j$  o  $(\lambda_{\varphi R})_j$  diventa positiva: ciò significa che la legge di moto dei due gradi di libertà sarà di tipo armonico amplificato e non smorzato da un esponenziale.

### 3.3 Procedimento di Scanlan

#### 3.3.1 Equazioni del moto

Supponendo che il baricentro delle masse della struttura coincida con quello delle rigidzze le equazioni del moto (3.7) possono essere espresse nella forma:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\zeta_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y = \frac{L_y}{m} \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = \frac{M_\varphi}{I_o} \end{cases} \quad (3.18)$$

Inserendo l'espressione dei carichi aerodinamici (3.3) nelle equazioni del moto (3.18) si ottiene:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\zeta_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y = \frac{\rho U^2 B}{m} \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi \right] \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} \left[ KA_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 A_3^* \varphi \right] \end{cases} \quad (3.19)$$

Introducendo la variabile adimensionalizzata  $s = \frac{Ut}{B}$  l'operazione di derivazione nel tempo di una funzione si esegue nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{g}(s) &= \frac{dg(s)}{dt} = \frac{dg(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dg(s)}{ds} \frac{U}{B} = g'(s) \frac{U}{B} \\ \ddot{g}(s) &= \frac{d\dot{g}(s)}{dt} = \frac{d\dot{g}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} \left( g'(s) \frac{U}{B} \right) \frac{U}{B} = g''(s) \frac{U^2}{B^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Tenendo conto delle (3.20) le equazioni del moto vengono espresse nella forma:

$$\begin{cases} y'' \frac{U^2}{B^2} + 2\zeta_y \omega_y \frac{U}{B} y' + \omega_y^2 y = \frac{\rho U^2 B}{m} \left[ KH_1^* \frac{y'}{B} + KH_2^* \varphi' + K^2 H_3^* \varphi \right] \\ \varphi'' \frac{U^2}{B^2} + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \frac{U}{B} \varphi' + \omega_\varphi^2 \varphi = \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} \left[ KA_1^* \frac{y'}{B} + KA_2^* \varphi' + K^2 A_3^* \varphi \right] \end{cases} \quad (3.21)$$

Essendo il numero di Strouhal pari a  $K = \frac{\omega B}{U}$  la pulsazione sarà definita come  $\omega = \frac{KU}{B}$ . Analogamente si possono definire  $\omega_y = \frac{K_y U}{B}$ ,  $\omega_\varphi = \frac{K_\varphi U}{B}$  per cui le equazioni del moto (3.21) vengono riscritte come:

$$\begin{cases} \frac{y''}{B} + 2\zeta_y K_y \frac{y'}{B} + K_y^2 \frac{y}{B} = \frac{\rho B^2}{m} \left[ KH_1^* \frac{y'}{B} + KH_2^* \varphi' + K^2 H_3^* \varphi \right] \\ \varphi'' + 2\zeta_\varphi K_\varphi \varphi' + K_\varphi^2 \varphi = \frac{\rho B^4}{I_o} \left[ KA_1^* \frac{y'}{B} + KA_2^* \varphi' + K^2 A_3^* \varphi \right] \end{cases} \quad (3.22)$$



Scrivendo per comodità le (3.22) in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y''}{B} \\ \varphi'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_y K_y - \frac{\rho B^2}{m} K H_1^* & -\frac{\rho B^2}{m} K H_2^* \\ -\frac{\rho B^4}{I_o} K A_1^* & 2\zeta_\varphi K_\varphi - \frac{\rho B^4}{I_o} K A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y'}{B} \\ \varphi' \end{bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} K_y^2 & -\frac{\rho B^2}{m} K^2 H_3^* \\ 0 & K_\varphi^2 - \frac{\rho B^4}{I_o} K^2 A_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y}{B} \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Soluzione delle equazioni del moto

Si suppone che le soluzioni del sistema di equazioni differenziali (3.23) siano di tipo esponenziale:

$$\begin{aligned}
 y &= y_0 e^{i\omega t} = y_0 e^{i\frac{KU}{B} \frac{B}{U} s} = y_0 e^{iKs} \Rightarrow y' = iK y_0 e^{iKs} \Rightarrow y'' = -K^2 y_0 e^{iKs} \\
 \varphi &= \tilde{\varphi}_0 e^{i(\omega t + \phi)} = \varphi_0 e^{i\omega t} = \varphi_0 e^{iKs} \Rightarrow \varphi' = iK \varphi_0 e^{iKs} \Rightarrow \varphi'' = -K^2 \varphi_0 e^{iKs} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Si suppone quindi che i gradi di libertà verticale e rotazionale siano moti armonici aventi la stessa pulsazione ma sfasati di un angolo  $\phi$ .

Applicando le definizioni  $K = \frac{\omega B}{U}$ ,  $K_y = \frac{\omega_y B}{U}$ ,  $K_\varphi = \frac{\omega_\varphi B}{U}$  e essendo l'esponenziale  $e^{iKs} \neq 0$  il sistema (3.23) può essere scritto nella forma:

$$\begin{bmatrix} -\frac{B^2}{U^2} \omega^2 + i2\zeta_y \frac{B^2}{U^2} \omega_y \omega + & -i\frac{\rho B^4}{mU^2} H_2^* \omega^2 - \frac{\rho B^4}{mU^2} H_3^* \omega^2 \\ +\frac{B^2}{U^2} \omega_y^2 - i\frac{\rho B^4}{mU^2} H_1^* \omega^2 & \\ -i\frac{\rho B^6}{I_o U^2} A_1^* \omega^2 & -\frac{B^2}{U^2} \omega^2 + 2i\zeta_\varphi \frac{B^2}{U^2} \omega_\varphi \omega + \frac{B^2}{U^2} \omega_\varphi^2 + \\ & -i\frac{\rho B^6}{I_o U^2} A_2^* \omega^2 - \frac{\rho B^6}{I_o U^2} A_3^* \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_0}{B} \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\frac{U^2}{B^2 \omega_y^2}$  e una volta definita la variabile

$X = \frac{\omega}{\omega_y}$ , il sistema (3.25) si riscrive come segue:

$$\begin{bmatrix} -X^2 + i2\zeta_y X + B^2 - i\frac{\rho B^2}{m} H_1^* X^2 & -i\frac{\rho B^2}{m} H_2^* X^2 - \frac{\rho B^2}{m} H_3^* X^2 \\ -i\frac{\rho B^4}{I_o} A_1^* X^2 & -X^2 + 2i\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X + \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} + -i\frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* X^2 - \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* X^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y_0}{B} \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.26)$$

Esiste una soluzione alla (3.26) diversa da quella banale se e solo se:

$$\det \begin{bmatrix} -X^2 + i2\zeta_y X + B^2 - i\frac{\rho B^2}{m} H_1^* X^2 & -i\frac{\rho B^2}{m} H_2^* X^2 - \frac{\rho B^2}{m} H_3^* X^2 \\ -i\frac{\rho B^4}{I_o} A_1^* X^2 & -X^2 + 2i\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X + \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} + -i\frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* X^2 - \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* X^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

Sviluppando il calcolo del determinante (3.27) si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned} & X^4 - 2i\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X^3 - \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} X^2 + i\frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* X^4 + \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* X^4 + \\ & -i2\zeta_y X^3 - 4\zeta_y \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X^2 + i2\zeta_y \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} X + 2\zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* X^3 - i2\zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* X^3 + \\ & -X^2 + 2i\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X + \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} - i\frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* X^2 - \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* X^2 + i\frac{\rho B^2}{m} H_1^* X^4 + \\ & + 2\frac{\rho B^2}{m} H_1^* \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} X^3 - i\frac{\rho B^2}{m} H_1^* \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} X^2 - \frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_2^* X^4 + \\ & + i\frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_3^* X^4 + \frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_2^* A_1^* X^4 - i\frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_3^* A_1^* X^4 = 0 \quad (3.28) \end{aligned}$$

L'espressione di annullamento del determinante (3.28) è un polinomio di quarto grado nell'incognita  $X$ , di cui si raccolgono i coefficienti:

$$X^4 \left( 1 + i\frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* + \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* + i\frac{\rho B^2}{m} H_1^* - \frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_2^* + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + i \frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_3^* + \frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_2^* A_1^* - i \frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_3^* A_1^* \Big) + \\
 & + X^3 \left( -i 2 \zeta_y + 2 \zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* - i 2 \zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* - 2 i \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} + 2 \frac{\rho B^2}{m} H_1^* \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} \right) + \\
 & + X^2 \left( -1 - i \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* - \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* - 4 \zeta_y \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} - i \frac{\rho B^2}{m} H_1^* \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} - \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} \right) + \\
 & + X \left( i 2 \zeta_y \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} + 2 i \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} \right) + \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} = 0 \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Se il sistema è sottosmorzato come è probabile che sia, la soluzione dell'equazione (3.29) sarà del tipo  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ .

### 3.3.3 Determinazione della velocità di flutter

Sostituendo la soluzione  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$  dell'equazione  $\Delta = 0$  nella espressione di  $y = y_0 e^{i\omega t}$  si ottiene:

$$y = y_0 e^{i(\omega_1 + i\omega_2)t} = y_0 e^{i\omega_1 t - \omega_2 t} = h_0 e^{-\omega_2 t} e^{i\omega_1 t}$$

Per cui se  $\omega_2$  assume valore negativo la soluzione è un'armonica amplificata da una funzione esponenziale e si ha quindi instabilità per flutter. La condizione limite di flutter sarà quindi per  $\omega_2 = 0$  e quindi quando  $\omega = \omega_1$  detta frequenza di flutter  $\omega^*$ . Quindi la condizione di flutter si ha quando la pulsazione ha solo la parte reale (che poi inserita nella soluzione ipotizzata delle equazioni del moto diventerà la parte immaginaria) perciò per individuare questa condizione si divide l'espressione del determinante (3.29) nella parte reale e in quella immaginaria ponendole uguali a zero e cercando le radici reali di un polinomio di quarto e terzo grado:

$$\begin{aligned}
 \Delta_R = X^4 & \left( 1 + \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* - \frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_2^* + \frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_2^* A_1^* \right) + \\
 & + X^3 \left( 2 \zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* + 2 \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} \frac{\rho B^2}{m} H_1^* \right) + \\
 & + X^2 \left( -\frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} - 4 \zeta_y \zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} - 1 - \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* \right) + \left( \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} \right)^2 = 0 \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_I = X^3 & \left( \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* + \frac{\rho B^2}{m} H_1^* + \frac{\rho B^2}{m} \frac{\rho B^4}{I_o} H_1^* A_3^* - \frac{\rho B^4}{I_o} \frac{\rho B^2}{m} H_3^* A_1^* \right) + \\
& + X^2 \left( -2\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} - 2\zeta_y - 2\zeta_y \frac{\rho B^4}{I_o} A_3^* \right) + \\
& + X \left( -\frac{\rho B^2}{m} H_1^* \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} - \frac{\rho B^4}{I_o} A_2^* \right) + 2\zeta_y \frac{\omega_\varphi^2}{\omega_y^2} + 2\zeta_\varphi \frac{\omega_\varphi}{\omega_y} = 0 \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Queste equazioni danno radici reali e coincidenti solo nella condizione limite di flutter in cui  $\omega_2 = 0$ , se le radici delle due equazioni non sono coincidenti il problema non ha quindi significato fisico. Sempre perchè i valori abbiano un significato fisico, della equazione (3.30) bisogna considerare solo le radici positive, altrimenti si avrebbe inserendo il valore di  $\omega$  nella soluzione delle equazioni del moto una frequenza di oscillazione negativa.

Il procedimento per ricavare la velocità di flutter parte fissando un valore di  $K$  e determinando quindi il valore delle derivate di flutter  $H_i^* = H_i^*(K)$ ,  $A_i^* = A_i^*(K)$ . Dopodichè si estraggono le radici reali delle equazioni (3.30) e (3.31) e le si rappresenta su di un grafico avente in ascissa i valori di  $K$ .

Si ripete il procedimento iterativamente per un certo range di valori di  $K$  finchè i grafici delle radici dell'equazione  $\Delta_R = 0$  e quello dell'equazione  $\Delta_I = 0$  non si intersecano, in quel punto significa che si è arrivati alla condizione di flutter e quindi si sono individuati  $K^*$  e  $X^* = \frac{\omega^*}{\omega_y}$ . La velocità di flutter si determina infine calcolando  $U^* = \frac{\omega^* B}{K^*}$ .

Il procedimento suggerito da Scanlan risulta più veloce di quello visto nel paragrafo precedente con la risoluzione del problema agli autovalori perchè si studia il fenomeno solo in corrispondenza della situazione di flutter, in cui si sa che la parte immaginaria della pulsazione  $\omega_2$  è uguale a zero. Questo porta a una notevole semplificazione perchè non occorre più verificare che la pulsazione ipotizzata nel decidere il valore di  $K$  sia uguale a quella effettivamente ottenuta come pulsazione del moto della struttura.

### 3.3.4 Procedimento alternativo

Per visualizzare in maniera più chiara i risultati ottenuti si può adottare lo stesso procedimento illustrato nel paragrafo precedente ma ricavando le radici dall'equazione (3.29). Essendo un'equazione di quarto grado si avranno quattro radici che saranno formate da una parte reale e una immaginaria. Non considerando le radici la cui parte reale è negativa perchè come visto non avrebbero significato fisico si esamina il valore in funzione di  $K$  della parte reale: quando questo valore si annulla si avrà la condizione di flutter.

## 3.4 Flutter torsionale

### 3.4.1 Equazione del moto

Nel caso in cui si consideri il moto torsionale disaccoppiato da quello flessionale si può scrivere l'equazione del moto del grado di libertà angolare senza porla all'interno di un sistema. Per cui dal sistema di equazioni (3.19) si estrae l'equazione (3.32), ovviamente dopo aver tolto il termine  $KA_1^* \frac{\dot{y}}{U}$  che lega lo spostamento verticale dell'impalcato alla rotazione dello stesso.

$$\ddot{\varphi} + 2\zeta_{\varphi}\omega_{\varphi}\dot{\varphi} + \omega_{\varphi}^2\varphi = \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} \left[ KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 A_3^* \varphi \right] \quad (3.32)$$

Raccogliendo i coefficienti dell'equazione (3.32) al primo membro si ottiene:

$$\ddot{\varphi} + \left( 2\zeta_{\varphi}\omega_{\varphi} - \frac{\rho U B^3}{I_o} KA_2^* \right) \dot{\varphi} + \left( \omega_{\varphi}^2 - \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} K^2 A_3^* \right) \varphi = 0 \quad (3.33)$$

Si assume una soluzione esponenziale del sistema:

$$\varphi(t) = Ae^{\lambda t} \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \lambda Ae^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{\varphi}(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

Per cui l'equazione (3.33) può essere scritta come:

$$\lambda^2 \varphi_0 e^{\lambda t} + \left( 2\zeta_{\varphi}\omega_{\varphi} - \frac{\rho U B^3}{I_o} KA_2^* \right) \lambda \varphi_0 e^{\lambda t} + \left( \omega_{\varphi}^2 - \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} K^2 A_3^* \right) \varphi_0 e^{\lambda t} = 0 \quad (3.34)$$

Escludendo la soluzione banale  $\varphi_0 = 0$  e essendo l'esponenziale  $e^{\lambda t} \neq 0$  l'equazione (3.34) risulta scritta nella forma:

$$\lambda^2 + \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right)\lambda + \left(\omega_\varphi^2 - \frac{\rho U^2 B^2}{I_o}K^2A_3^*\right) = 0 \quad (3.35)$$

Dalla nota formula per le equazioni di secondo grado la soluzione della (3.35) risulta:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right) \pm \quad (3.36)$$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right)^2 - \left(\omega_\varphi^2 - \frac{\rho U^2 B^2}{I_o}K^2A_3^*\right)} \quad (3.37)$$

Prendendo in esame l'equazione (3.36) si osserva che il valore sotto radice quadra è praticamente sempre negativo per i problemi fisici riscontrabili nel campo dell'ingegneria civile. Per cui  $\lambda$  sarà composto da una parte reale e una immaginaria:

$$\lambda = \lambda_R + i\omega \rightarrow \begin{cases} \lambda_R = -\frac{1}{2} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right) \\ \omega = \sqrt{\omega_\varphi^2 - \frac{1}{4} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right)^2 - \frac{\rho U^2 B^2}{I_o}K^2A_3^*} \end{cases} \quad (3.38)$$

### 3.4.2 Condizione di flutter

La condizione di flutter si ha quindi quando la parte reale  $\lambda_R$  assume valori positivi e cioè quando:

$$-\frac{1}{2} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right) > 0 \quad (3.39)$$

Nella maggior parte delle strutture civili si verifica che:

$$\omega_\varphi^2 \gg \frac{1}{4} \left(2\zeta_\varphi\omega_\varphi - \frac{\rho UB^3}{I_o}KA_2^*\right)^2 + \frac{\rho U^2 B^2}{I_o}K^2A_3^* \quad (3.40)$$

Se la disuguaglianza (3.40) è valida allora  $\frac{1}{4} \left( 2\zeta_\varphi \omega_\varphi - \frac{\rho U B^3}{I_o} K A_2^* \right)^2 + \frac{\rho U^2 B^2}{I_o} K^2 A_3^*$  è trascurabile rispetto a  $\omega_\varphi^2$  per cui la (3.38) diventa:

$$\lambda = \lambda_R + i\omega \rightarrow \begin{cases} \lambda_R = -\frac{1}{2} \left( 2\zeta_\varphi \omega_\varphi - \frac{\rho U B^3}{I_o} K A_2^* \right) \\ \omega = \sqrt{\omega_\varphi^2} = \omega_\varphi \end{cases}$$

Grazie all'ipotesi (3.40) si può quindi considerare  $\omega \approx \omega_\varphi$  per cui la condizione limite di flutter che si ricava dall'equazione (3.39) è la seguente:

$$(A_2^*)_F = \frac{2\zeta_\varphi I_o}{\rho B^4} \quad (3.41)$$

Perciò mediante l'equazione (3.41) si ricava direttamente il valore di  $(A_2^*)_F$ , non essendo neccassario un procedimento iterativo in quanto si è supposto  $\omega \approx \omega_\varphi$ . Dunque conoscendo il legame sperimentale  $A_2^* = A_2^*(K)$  si determina  $K_F$  da cui segue l'espressione della velocità di flutter  $U_F = \frac{\omega_\varphi B}{K_F}$ .

## 3.5 Impalcato da ponte 3 gradi di libertà

### 3.5.1 Schematizzazione

Per la schematizzazione della sezione bidimensionale a tre gradi di libertà si fa riferimento allo schema in fig.3.4:

### 3.5.2 Ipotesi

Le ipotesi nel caso a tre gradi di libertà sono le stesse viste per lo studio dell'impalcato a due gradi di libertà, tra cui chiaramente considerare le rigidzze  $(k_x, k_y, k_\varphi)$  e gli smorzamenti  $(c_x, c_y, c_\varphi)$  della sezione di mezzeria come rappresentativi di quelli di tutto l'impalcato.

### 3.5.3 Carichi aerodinamici

Sempre trascurando i termini  $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi})$  che rappresentano l'inerzia dovuta al distacco dei vortici d'aria, i carichi areodinamici secondo la teoria di Scanlan

sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2B) \left[ KP_1^* \frac{\dot{x}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 P_3^* \varphi + K^2 P_4^* \frac{x}{B} + KP_5^* \frac{\dot{y}}{U} + K^2 P_6^* \frac{y}{B} \right] \\
L_y &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2B) \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi + K^2 H_4^* \frac{y}{B} + KH_5^* \frac{\dot{x}}{U} + K^2 H_6^* \frac{x}{B} \right] \\
M_\varphi &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2B^2) \left[ KA_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 A_3^* \varphi + K^2 A_4^* \frac{y}{B} + KA_5^* \frac{\dot{x}}{U} + K^2 A_6^* \frac{x}{B} \right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Dove  $K$  è il numero di Strouhal pari a  $K = \frac{\omega B}{U}$ ,  $\rho$  è la densità del fluido e  $P_i^* = P_i^*(K)$ ,  $H_i^* = H_i^*(K)$ ,  $A_i^* = A_i^*(K)$  sono le diciotto derivate di flutter dell'impalcato.

Scrivendo i carichi (3.42) in forma matriciale si ottiene nella forma più generale:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} D_x \\ L_y \\ M_\varphi \end{bmatrix} &= U \rho K B \underbrace{\begin{bmatrix} P_1^* & P_5^* & BP_2^* \\ H_5^* & H_1^* & BH_2^* \\ BA_5^* & BA_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix}}_{\tilde{C}_A} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \\
&+ U^2 \rho K^2 B \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{P_4^*}{B} & \frac{P_6^*}{B} & P_3^* \\ \frac{H_6^*}{B} & \frac{H_4^*}{B} & H_3^* \\ \frac{A_6^*}{B} & \frac{A_4^*}{B} & BA_3^* \end{bmatrix}}_{\tilde{K}_A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Nell'ipotesi che la velocità del vento  $U$  sia considerata costante si possono trascurare gli ultimi tre termini delle equazioni (3.42) assumendo quindi che i carichi agenti sull'impalcato siano:

$$\begin{aligned}
D_x &= \rho U^2 B \left[ KP_1^* \frac{\dot{x}}{U} + KP_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 P_3^* \varphi \right] \\
L_y &= \rho U^2 B \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi \right] \\
M_\varphi &= \rho U^2 B^2 \left[ KA_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KA_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 A_3^* \varphi \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$



Scrivendo i carichi (3.44) in forma matriciale nella notazione usuale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ L_y \\ M_\varphi \end{bmatrix} = U \underbrace{\rho K B}_{\tilde{C}_A} \begin{bmatrix} P_1^* & 0 & B P_2^* \\ 0 & H_1^* & B H_2^* \\ 0 & B A_1^* & B^2 A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + U^2 \underbrace{\rho K^2 B}_{\tilde{K}_A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_3^* \\ 0 & 0 & H_3^* \\ 0 & 0 & B A_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

### 3.5.4 Equazioni del moto

Le equazioni del moto di un sistema a tre gradi di libertà sono espresse nella forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = D_x \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = L_y \\ I_o\ddot{\varphi} + c_\varphi\dot{\varphi} + k_\varphi \varphi = M_\varphi \end{cases} \quad (3.46)$$

Si esprimono le equazioni del moto (3.46) in forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_o \end{bmatrix}}_{\tilde{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_\varphi \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ L_y \\ M_\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dall'unione delle equazioni (3.46) e (3.47) si ottiene:

$$\tilde{M} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + (\tilde{C} - U\tilde{C}_A) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + (\tilde{K} - U^2\tilde{K}_A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

### 3.5.5 Soluzione delle equazioni del moto

Si assuma una soluzione del sistema (3.48) del tipo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \varphi_0 \end{bmatrix}}_{\Delta} e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \lambda \Delta e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \lambda^2 \Delta e^{\lambda t} \quad (3.49)$$

Quindi sostituendo la soluzione (3.45) nel sistema (3.48) si ottiene:

$$\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} \Delta e^{\lambda t} + \lambda \left( \tilde{\mathbf{C}} - U \tilde{\mathbf{C}}_A \right) \Delta e^{\lambda t} + \left( \tilde{\mathbf{K}} - U^2 \tilde{\mathbf{K}}_A \right) \Delta e^{\lambda t} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Semplificando l'esponenziale dato che  $e^{\lambda t} \neq 0$  l'equazione (3.50) diventa:

$$\lambda^2 \tilde{\mathbf{M}} \Delta + \lambda \left( \tilde{\mathbf{C}} - U \tilde{\mathbf{C}}_A \right) \Delta + \left( \tilde{\mathbf{K}} - U^2 \tilde{\mathbf{K}}_A \right) \Delta = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

Per cui analogamente a quanto visto per il sistema a due gradi di libertà si ha una soluzione dell'equazione (3.51) diversa da quella banale  $\Delta = 0$  se e solo se:

$$\tilde{\mathbf{A}} - \lambda \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{0}} \quad (3.52)$$

Con  $\tilde{\mathbf{A}}$  definito come nella trattazione del sistema a due gradi di libertà.

### 3.5.6 Determinazione della velocità di flutter

Anche per determinare la velocità di flutter si procede come visto nel sistema a due gradi di libertà, considerando il problema agli autovalori (3.52). Essendo in questo caso la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$  una tre per tre avrà sei autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_p = \lambda_{pR} \pm i \lambda_{pI}$$

$$\lambda_h = \lambda_{hR} \pm i \lambda_{hI}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha R} \pm i \lambda_{\alpha I}$$

Con il già visto procedimento iterativo si determineranno gli autovalori in un certo range di velocità, facendo attenzione alla condizione di flutter che si avrà quando la parte reale di uno di questi diventerà positiva.

## 3.6 Derivate di flutter di un impalcato

### 3.6.1 Ipotesi

La formulazione classica della analisi di flutter si basa sull'ipotesi che l'interazione tra fluido e struttura possa essere evidenziata mediante una analisi bidimensionale della sezione perpendicolare all'asse longitudinale del ponte, trascurando pertanto tutti gli effetti tridimensionali. Un'altra ipotesi semplificativa

prevede di trascurare il moto della sezione nella direzione della velocità  $U$  del vento indisturbato e tutti gli effetti delle forze dovute alla resistenza viscosa. In questo caso, i possibili movimenti della sezione del ponte si riducono alla traslazione verticale, definita dallo spostamento  $y$  rispetto alla posizione di equilibrio, e alla rotazione  $\varphi$ . Le equazioni del moto della sezione del ponte saranno espresse quindi nella forma già vista in precedenza:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_y & 0 \\ 0 & c_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_y & 0 \\ 0 & K_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_y \\ M_\varphi \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Nell'equazione matriciale (??) i termini  $L_y$  e  $M_\varphi$  rappresentano rispettivamente la componente lungo la direzione perpendicolare alla velocità del vento della forza aerodinamica, e il momento aerodinamico agenti sulla sezione. Questi termini, in un'analisi di flutter, comprendono le forze aerodinamiche che nascono a seguito dello spostamento della sezione e quelle dovute al distacco dei vortici. In un'analisi completa dell'interazione tra fluido e struttura, per tenere conto anche del fenomeno del buffeting, si dovrebbero considerare anche le forze aerodinamiche che si generano a causa della presenza di un profilo del vento indisturbato caratterizzato da una componente fluttuante.

Normalmente le forze aerodinamiche a secondo membro dell'equazione matriciale (??), sono ricavate in funzione della pulsazione ridotta  $K = \frac{\omega B}{U}$ , dove  $\omega = 2\pi f$  è la pulsazione angolare di oscillazione del ponte,  $B$  è la lunghezza della sezione nella direzione del vento e  $U$  è la velocità del vento indisturbato. Pertanto le equazioni (??) permettono, note le forze  $L$  e  $M$ , di ricavare le velocità critiche del vento che portano al flutter, cioè come già visto ad una instabilità accoppiata flesso-torsionale. La formulazione analitica delle forze aerodinamiche dovuta a Scanlan e Tomko e successivamente rivista da Larsen, prevede che esse siano funzioni degli spostamenti  $y$  e  $\varphi$ , e delle rispettive derivate temporali  $\dot{y}$  e  $\dot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} L_y &= \frac{1}{2}\rho U^2 B \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi + K^2 H_4^* \frac{y}{B} \right] \\ M_\varphi &= \frac{1}{2}\rho U^2 B^2 \left[ KH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + KH_2^* \frac{B\dot{\varphi}}{U} + K^2 H_3^* \varphi + K^2 H_4^* \frac{y}{B} \right] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nelle equazioni (3.54) le funzioni  $H_i^* = H_i^*(K)$ ,  $A_i^* = A_i^*(K)$  rappresentano le derivate aerodinamiche, altresì dette derivate di flutter, mentre con  $\rho$  viene indicata la densità dell'aria che investe l'impalcato. Sia il procedimento di Scanlan che quello di Larsen prevedono di imporre un moto di tipo armonico con pulsazione  $\omega$  alla sezione dell'impalcato da ponte, ma come si vedrà in seguito Scanlan usa la notazione reale mentre Larsen quella complessa.

### 3.6.2 Procedimento di Scanlan

Trascurando il quarto termine delle forzanti aerodinamiche (3.54) e considerando la notazione tipicamente usata per i profili alari dove  $b = \frac{B}{2}$  e quindi  $k = \frac{K}{2}$  le forzanti aerodinamiche risultano espresse nella forma [9]:

$$\begin{aligned} L_y &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2b) \left[ kH_1^* \frac{\dot{y}}{U} + kH_2^* \frac{b\dot{\varphi}}{U} + k^2 H_3^* \varphi \right] \\ M_\varphi &= \frac{1}{2}\rho U^2 (2b^2) \left[ kA_1^* \frac{\dot{y}}{U} + kA_2^* \frac{b\dot{\varphi}}{U} + k^2 A_3^* \varphi \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Sostituendo nelle espressioni (3.55) il valore di  $k = \frac{\omega b}{U}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} L_y &= \rho b \left[ H_1^* \omega b \dot{y} + H_2^* \omega b^2 \dot{\varphi} + H_3^* \omega^2 b^2 \varphi \right] \\ M_\varphi &= \rho b^2 \left[ A_1^* \omega b \dot{y} + A_2^* \omega b^2 \dot{\varphi} + A_3^* \omega^2 b^2 \varphi \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Si riscrivono le equazioni del moto di un sistema a due gradi di libertà (3.53) raccogliendo i termini inerziali:

$$\begin{cases} m (\ddot{y} + 2\zeta_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y) = L_y \\ I_o (\ddot{\varphi} + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi) = M_\varphi \end{cases} \quad (3.57)$$

Inserendo le espressioni dei carichi aerodinamici (3.56) all'interno delle equazioni del moto (3.57) si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\zeta_y \omega_y \dot{y} + \omega_y^2 y = \frac{\rho b^2 H_1^* \omega}{m} \dot{y} + \frac{\rho b^3 H_2^* \omega}{m} \dot{\varphi} + \frac{\rho b^3 H_3^* \omega^2}{m} \varphi \\ \ddot{\varphi} + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi = \frac{\rho b^3 A_1^* \omega}{I_o} \dot{y} + \frac{\rho b^4 A_2^* \omega}{I_o} \dot{\varphi} + \frac{\rho b^4 A_3^* \omega^2}{I_o} \varphi \end{cases} \quad (3.58)$$

Scanlan suggerisce, nel caso si debba lavorare con dati sperimentali, di adottare i seguenti coefficienti dimensionali, in modo da semplificare i calcoli:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\rho b^2 \omega H_1^*}{m} & A_1 &= \frac{\rho b^3 \omega A_1^*}{m} \\ H_2 &= \frac{\rho b^3 \omega H_2^*}{m} & A_2 &= \frac{\rho b^4 \omega A_2^*}{m} \\ H_3 &= \frac{\rho b^3 \omega^2 H_3^*}{m} & A_3 &= \frac{\rho b^4 \omega^2 A_3^*}{m} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Per cui in virtù delle (3.59) le equazioni del moto (3.58) risultano essere espresse nella forma:

$$\begin{cases} \ddot{y} + (2\zeta_y \omega_y - H_1) \dot{y} + \omega_y^2 y - H_2 \dot{\varphi} - H_3 \varphi = 0 \\ \ddot{\varphi} + (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \varphi - A_1 \dot{y} - A_3 \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Si suppone che la soluzione del sistema (3.60) sia di tipo sinusoidale e sfasata di  $\theta$  fra il grado di libertà traslazionale  $y$  e quello rotazionale  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \\ \dot{y} &= \lambda y_0 e^{\lambda t} \sin \omega t + \omega y_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \\ \ddot{y} &= \lambda^2 y_0 e^{\lambda t} \sin \omega t + 2\omega \lambda y_0 e^{\lambda t} \cos \omega t - \omega^2 y_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 e^{\lambda t} \sin(\omega t - \theta) = \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \cos \theta - \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \sin \theta \\ \dot{\varphi} &= \lambda \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \cos \theta + \omega \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \cos \theta - \lambda \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \sin \theta + \\ &\quad + \omega \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \sin \theta \\ \ddot{\varphi} &= \lambda^2 \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \cos \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \cos \theta - \omega^2 \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \cos \theta + \\ &\quad - \lambda^2 \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \sin \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 e^{\lambda t} \sin \omega t \sin \theta + \omega^2 \varphi_0 e^{\lambda t} \cos \omega t \sin \theta \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sostituendo le soluzioni ipotizzate (3.61) nelle equazioni del moto (3.60) si ottengono le due equazioni (3.62) e (3.63):

$$\begin{aligned} &\lambda^2 y_0 \sin \omega t + 2\omega \lambda y_0 \cos \omega t - \omega^2 y_0 \sin \omega t + \\ &+ (2\zeta_y \omega_y - H_1) (\lambda y_0 \sin \omega t + \omega y_0 \cos \omega t) + \omega_y^2 y_0 \sin \omega t + \\ &- H_2 (\lambda \varphi_0 \sin \omega t \cos \theta + \omega \varphi_0 \cos \omega t \cos \theta - \lambda \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta + \end{aligned}$$

$$+ \omega \varphi_0 \sin \omega t \sin \theta) - H_3 (\varphi_0 \sin \omega t \cos \theta - \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta) = 0 \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \varphi_0 \sin \omega t \cos \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 \cos \omega t \cos \theta - \omega^2 \varphi_0 \sin \omega t \cos \theta + \\ & - \lambda^2 \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 \sin \omega t \sin \theta + \omega^2 \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta + \\ & + (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) (\lambda \varphi_0 \sin \omega t \cos \theta + \omega \varphi_0 \cos \omega t \cos \theta - \lambda \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta + \\ & + \omega \varphi_0 \sin \omega t \sin \theta) + \omega_\varphi^2 (\varphi_0 \sin \omega t \cos \theta - \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta) + \\ & - A_1 (\lambda y_0 \sin \omega t + \omega y_0 \cos \omega t) - A_3 (\varphi_0 \sin \omega t \cos \theta - \varphi_0 \cos \omega t \sin \theta) = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Si raccolgono in ambo le equazioni (3.62) e (3.63) le funzioni  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$ :

$$\begin{aligned} & (\lambda^2 y_0 - \omega^2 y_0 + \omega_y^2 y_0 + (2\zeta_y \omega_y - H_1) \lambda y_0 + \\ & - H_2 \lambda \varphi_0 \cos \theta - H_2 \omega \varphi_0 \sin \theta - H_3 \varphi_0 \cos \theta) \sin \omega t + \\ & ((2\zeta_y \omega_y - H_1) \omega y_0 + 2\omega \lambda y_0 - H_2 \omega \varphi_0 \cos \theta + \\ & + H_2 \lambda \varphi_0 \sin \theta + H_3 \varphi_0 \sin \theta) \cos \omega t = 0 \\ & (\lambda^2 \varphi_0 \cos \theta - \omega^2 \varphi_0 \cos \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 \sin \theta + (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) \lambda \varphi_0 \cos \theta + \\ & + (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) \omega \varphi_0 \sin \theta - A_3 \varphi_0 \cos \theta + \omega_\varphi^2 \varphi_0 \cos \theta - A_1 \lambda y_0) \sin \omega t + \\ & + (-\lambda^2 \varphi_0 \sin \theta + 2\lambda \omega \varphi_0 \cos \theta + \omega^2 \varphi_0 \sin \theta + (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) \omega \varphi_0 \cos \theta + \\ & - (2\zeta_\varphi \omega_\varphi - A_2) \lambda \varphi_0 \sin \theta + A_3 \varphi_0 \sin \theta - \omega_\varphi^2 \varphi_0 \sin \theta - A_1 \omega y_0) \cos \omega t = 0 \end{aligned}$$

Perchè siano valide le equazioni del moto (3.60) si impone che i coefficienti di  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$  siano nulli. Si ottengono così quattro equazioni:

$$\lambda H_1 + H_2 \frac{\varphi_0}{y_0} (\lambda \cos \theta + \omega \sin \theta) + H_3 \frac{\varphi_0}{y_0} \cos \theta = \lambda^2 - \omega^2 + 2\lambda \zeta_y \omega_y + \omega_y^2 \quad (3.64)$$

$$H_1 \omega + H_2 \frac{\varphi_0}{y_0} (\omega \cos \theta - \lambda \sin \theta) - H_3 \frac{\varphi_0}{y_0} \sin \theta = 2\zeta_y \omega_y \omega + 2\omega \lambda \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} & A_1 \lambda \frac{y_0}{\varphi_0} + A_2 (\lambda \cos \theta + \omega \sin \theta) + A_3 \cos \theta = \\ & = (\lambda^2 - \omega^2) \cos \theta + 2\lambda \omega \sin \theta + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi (\lambda \cos \theta + \omega \sin \theta) + \omega_\varphi^2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
 & A_1 \omega \frac{y_0}{\varphi_0} + A_2 (\omega \cos \theta - \lambda \sin \theta) - A_3 \sin \theta = \\
 & = (\omega^2 - \lambda^2) \sin \theta + 2\lambda\omega \cos \theta + 2\zeta_\varphi \omega_\varphi (\omega \cos \theta - \lambda \sin \theta) - \omega_\varphi^2 \sin \theta \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

Applicando le equazioni ricavate si possono infine calcolare le derivate di flutter. Per prima cosa si imposta una prova sperimentale in cui si impedisce alla sezione di traslare verticalmente lasciandola libera di ruotare. Durante la prova sperimentale si avrà quindi  $y_0 = 0$  e  $\theta = 0$  e verranno ricavati i valori  $\lambda_1$  e  $\omega_1$  dalla legge di moto misurata sperimentalmente della sezione a un grado di libertà. Per cui dall'equazione (3.67) si può ricavare il valore di  $A_2$ :

$$A_2 = 2 (\lambda_1 + \zeta_\varphi \omega_\varphi)$$

E dall'equazione (3.66) il valore di  $A_3$ :

$$A_3 = \omega_\varphi^2 - \omega_1^2 - \lambda_1^2$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza si esegue una prova sperimentale in cui la sezione è impedita di ruotare:  $\varphi_0 = 0$  e da cui si misurano i valori di  $\lambda_2$  e  $\omega_2$ . Per cui dalla equazione (3.65) si può ricavare il valore di  $H_1$ :

$$H_1 = 2 (\lambda_2 + \zeta_y \omega_y)$$

In un'ulteriore prova sperimentale si lascia la sezione libera di oscillare sia angolarmente che verticalmente in modo da misurare i valori delle grandezze:  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\alpha_0$ , e  $h_0$ . Dall'equazione (3.66) si ricava quindi il valore di  $A_1$ :

$$A_1 = \frac{\varphi_0}{y_0} \omega \cos \theta \left( \frac{\omega^2 + \lambda^2 + A_3 - \omega_\varphi^2}{\lambda \omega + \sin \theta \cos \theta (\omega^2 + \lambda^2)} \right) \quad (3.68)$$

Dall'equazioni (3.64) e (3.65) è possibile ricavare i valori di  $H_2$  e  $H_3$ :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{y_0}{\omega \varphi_0} (\sin \theta (\lambda^2 + \omega_y^2 - \omega^2 - H_1 \lambda + 2\zeta_y \omega_y \lambda) + \\
 &+ \cos \theta (2\omega \lambda - H_1 \omega + 2\zeta_y \omega_y \omega)) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

$$H_3 = \frac{y_0}{\varphi_0 \cos \theta} (\lambda^2 - \omega^2 + \omega_y^2 + 2\zeta_y \omega_y \lambda - H_1 \lambda) + \quad (3.70)$$
$$-\frac{H_2}{\cos \theta} (\lambda \cos \theta + \omega \sin \theta)$$

Vanno considerati i valori limite delle espressioni (3.68), (3.69), (3.70), quando i termini  $y_0$ ,  $\theta$  o  $\lambda$  tendono ad annullarsi.

### 3.6.3 Procedimento di Larsen

Analogamente a quanto fatto nel procedimento appena esposto si impongono delle oscillazioni forzate con pulsazione angolare  $\omega$  alla sezione a due gradi di libertà del ponte [12]:

$$y(t) = y e^{i\omega t}$$

$$\varphi(t) = \varphi e^{i\omega t}$$

Supponendo lineare il processo aerodinamico, anche le forze aerodinamiche saranno rappresentabili da funzioni sinusoidali di uguale pulsazione  $\omega$ , ma sfasate rispetto al moto della sezione. Analogamente avranno i coefficienti di lift e di momento:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U^2 B}$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho U^2 B^2}$$

Dalle precedenti equazioni e dopo alcuni passaggi si ottiene l'espressione



delle otto derivate aerodinamiche:

$$\begin{aligned}
 A_1^* &= - \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Mt} \sin \varphi_{Mt}}{2(2\pi)^2 \left( \frac{y}{B} \right)} & H_1^* &= - \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Lt} \sin \varphi_{Lt}}{2(2\pi)^2 \left( \frac{y}{B} \right)} \\
 A_2^* &= - \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Mr} \sin \varphi_{Mr}}{2(2\pi)^2 \varphi} & H_2^* &= - \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Lr} \sin \varphi_{Lr}}{2(2\pi)^2 \varphi} \\
 A_3^* &= \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Mr} \cos \varphi_{Mr}}{2(2\pi)^2 \varphi} & H_3^* &= \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Lr} \cos \varphi_{Lr}}{2(2\pi)^2 \varphi} \\
 A_4^* &= - \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Mt} \cos \varphi_{Mt}}{2(2\pi)^2 \left( \frac{y}{B} \right)} & H_4^* &= \left( \frac{U}{fB} \right)^2 \frac{C_{Lt} \cos \varphi_{Lt}}{2(2\pi)^2 \left( \frac{y}{B} \right)}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Nelle espressioni (3.71) sono indicati ad esempio con  $C_{Lt}$  il valore dell'ampiezza della funzione sinusoidale rappresentativa dell'andamento del coefficiente di lift e con  $\varphi_{Lt}$  il suo sfasamento rispetto al moto traslatorio imposto. Per determinare tutte le derivate aerodinamiche è dunque necessario eseguire due simulazioni (una in cui la sezione ruota e l'altra in cui trasla sempre secondo legge sinusoidale) per ogni valore della frequenza ridotta  $K = \frac{\omega B}{U}$  preso in esame, e rilevare gli andamenti temporali dei coefficienti aerodinamici in ognuna di esse.

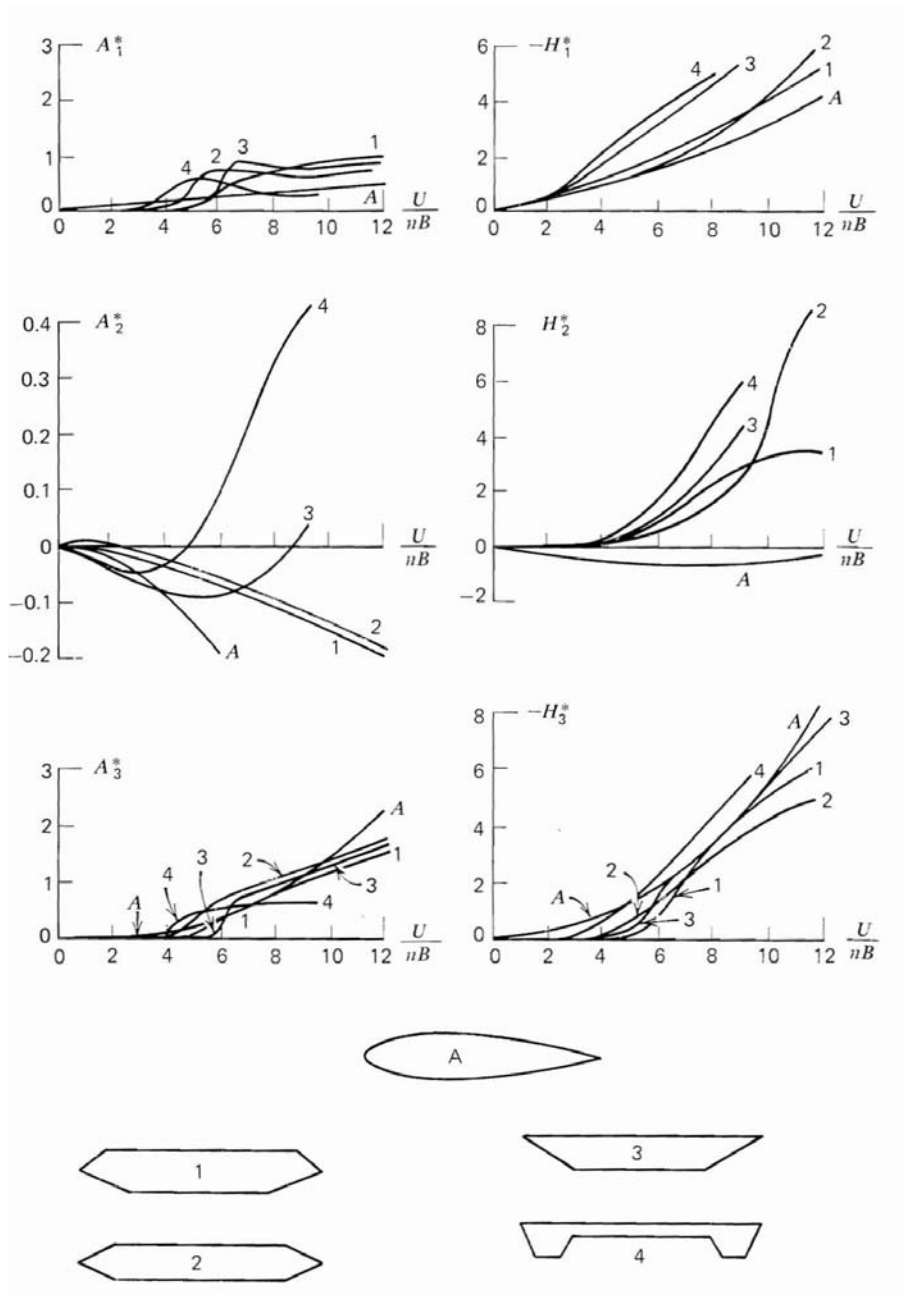


Fig. 3.3: Derivate aeroelastiche per varie forme di impalcato

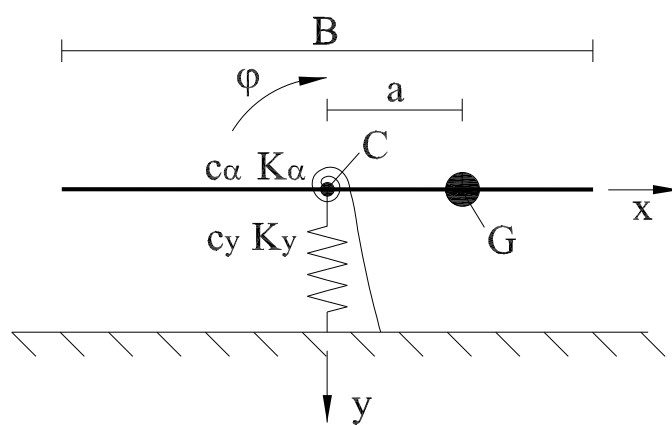


Fig. 3.4: Schema della sezione strutturale a tre gradi di libertà soggetta a flutter



# Capitolo 4

## Applicazione al ponte Tsing Ma

### 4.1 Caratteristiche del ponte

#### 4.1.1 Descrizione del ponte

Il ponte Tsing Ma fig.4.1 costruito ad Hong Kong è il settimo ponte sospeso più lungo mai costruito, e il più lungo al mondo che porti traffico ferroviario. Infatti con sei carreggiate per le automobili e due linee di binari poste a un livello inferiore dell'impalcato collega le due isole Tsing Yi e Ma Wan.

La luce della campata principale è di 1,377 [m] e l'altezza delle torri è di 206 [m]. Il ponte ovviamente è costantemente monitorato per prevenire instabilità causate dal vento, e nel livello inferiore dell'impalcato, normalmente adibito al solo traffico ferroviario, sono situate due sedi stradali di emergenza in modo da deviare lì il traffico in condizioni di forte vento.

#### 4.1.2 Sezione dell'impalcato

La sezione tipica dell'impalcato è larga 41 [m] e alta 7,643 [m]. E' composta principalmente da telai in acciaio che sono connessi fra loro da travi di acciaio e lastre di irrigidimento poste sulla parte superiore ad inferiore dell'impalcato fig.4.2.

Da notare la forma particolare delle travi esterne disposte a triangolo e ricoperte da una sottile lamiera. Questo particolare forma della sezione serve per garantire un migliore comportamento aerodinamico, infatti come



Fig. 4.1: Veduta del ponte Tsing Ma al tramonto

si vedrà nei paragrafi successivi la forma allungata che tende a fendere le linee del vento permette con buona approssimazione di studiare i problemi di instabilità aerodinamica dell'impalcato considerandolo come una lamina piana.

Un'altro importante accorgimento aerodinamico sono delle protezioni particolari posizionate in corrispondenza dei piloni di sostegno, onde evitare che le turbolenze generate a valle di essi vadano a compromettere seriamente la stabilità dei veicoli che transitano sull'impalcato.

### 4.1.3 Caratteristiche strutturali

A seguito di un'analisi modale del ponte condotta da Xu e altri [1] si sono determinate le frequenze naturali torsionali e flessionali di vibrazione dell'impalcato. Di queste frequenze in genere le prime sono le più significative per descrivere il comportamento della struttura ma nel particolare caso di un impalcato soggetto all'azione del vento si è scelto di considerare solo le prime frequenze corrispondenti a un modo di vibrare simmetrico rispetto alla sezione centrale

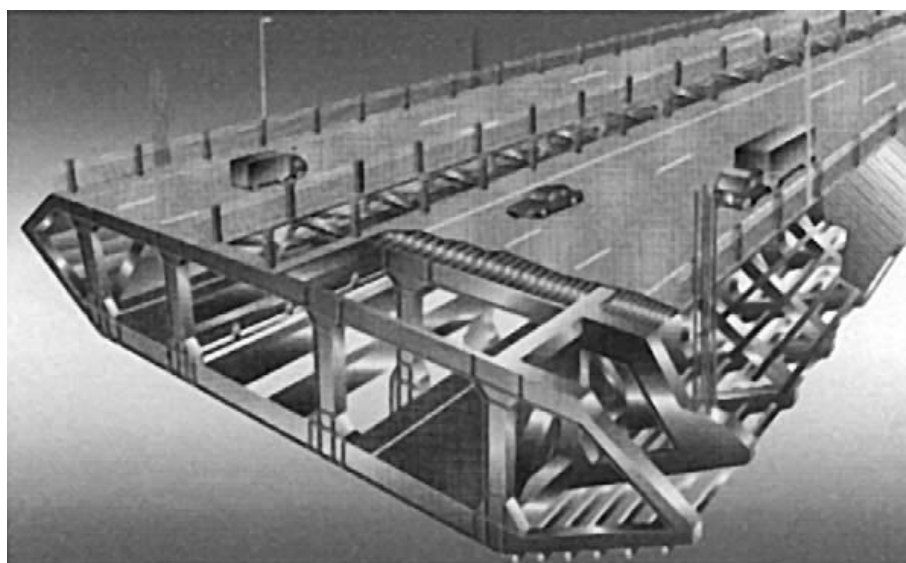


Fig. 4.2: Schema della sezione dell'impalcato

dell'impalcato. Questo perchè i modi emisimmetrici di vibrare provocano spostamenti nulli nella sezione centrale dell'impalcato e quindi influenzano molto meno il fenomeno di interazione tra fluido e struttura che risulta tanto maggiore quanto sono maggiori gli spostamenti della struttura stessa. I valori delle frequenze naturali flessionale  $f_y$  e torsionale  $f_\varphi$  dell'impalcato assunti nella trattazione del problema risultano quindi essere :

$$\begin{aligned} f_y &= 0,1366 \text{ [1/s]} \implies \omega_y = 2\pi f_y = 0,858 \text{ [1/s]} \\ f_\varphi &= 0,2712 \text{ [1/s]} \implies \omega_\varphi = 2\pi f_\varphi = 1,703 \text{ [1/s]} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Il rapporto fra le frequenze (4.1) è quindi pari a:

$$\varepsilon = \frac{f_\varphi}{f_y} = \frac{0,2712}{0,1366} = 1,985$$

A questo punto si pone il problema di determinare i valori della massa  $m$  e del momento di inerzia  $I_0$  da considerare quando si effettua lo studio della stabilità del modello sezionale. Sono state prese in esame due diverse soluzioni, una che considera solo le masse e i momenti di inerzia partecipanti al primo modo simmetrico di vibrare della struttura e l'altra che tiene in-

vece considera anche il contributo dei restanti modi di vibrare e anche la partecipazione al moto delle torri e dei cavi del ponte sospeso.

Perciò nel caso in cui si consideri solo la massa e il momento di inerzia partecipanti al primo modo simmetrico di vibrare il modello sezionale avrà le seguenti caratteristiche meccaniche per metro lineare di profondità:

$$\begin{aligned}
 m &= 27778 \text{ [kg/ m]} \\
 I_0 &= 2,44 \cdot 10^6 \text{ [kg m]} \\
 \zeta_y &= 0,0222\% \\
 \zeta_\varphi &= 0,0384\%
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dalle espressioni (4.2) applicando le definizioni di pulsazione e smorzamento relativo si ricava:

$$\begin{aligned}
 K_y &= \omega_y^2 \cdot m = 20449 \text{ [N/ m]} \\
 K_\varphi &= \omega_\varphi^2 \cdot I_0 = 7,08 \cdot 10^6 \text{ [N m]} \\
 c_y &= 2m\zeta_y\omega_y = 1058 \text{ [kg/ (s m)]} \\
 c_\varphi &= 2I_0\zeta_\varphi\omega_\varphi = 319129 \text{ [kg/ (s m)]}
 \end{aligned}$$

Nel caso invece si tenga conto anche del contributo degli altri modi di vibrare e degli elementi strutturali oltre l'impalcato come le torri e i cavi, le caratteristiche meccaniche per metro lineare del modello sezionale saranno:

$$\begin{aligned}
 m &= 44365,6 \text{ [kg]} \\
 I_0 &= 8,68 \cdot 10^6 \text{ [kg m}^2\text{]} \\
 \zeta_y &= 0,05\% \\
 \zeta_\varphi &= 0,05\%
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dalle espressioni (4.3) applicando le definizioni di pulsazione e smorzamento relativo si ricava:

$$K_y = \omega_y^2 \cdot m = 32660 \text{ [N/ m]}$$



$$K_\varphi = \omega_t^2 \cdot I_0 = 25,18 \cdot 10^6 \text{ [N m]}$$

$$c_y = 2m\zeta_y\omega_y = 3806 \text{ [kg/(s m)]}$$

$$c_\varphi = 2I_0\zeta_\varphi\omega_\varphi = 1478204 \text{ [kg/(s m)]}$$

#### 4.1.4 Caratteristiche aerodinamiche

Con riferimento all'articolo [3] si riportano i risultati dei test condotti in galleria del vento sul modello sezionale dell'impalcato per misurare i coefficienti statici di drag, lift e momento per diversi angoli di incidenza del vento. In fig.4.3 è riportato il sistema di riferimento adottato nel condurre i test.

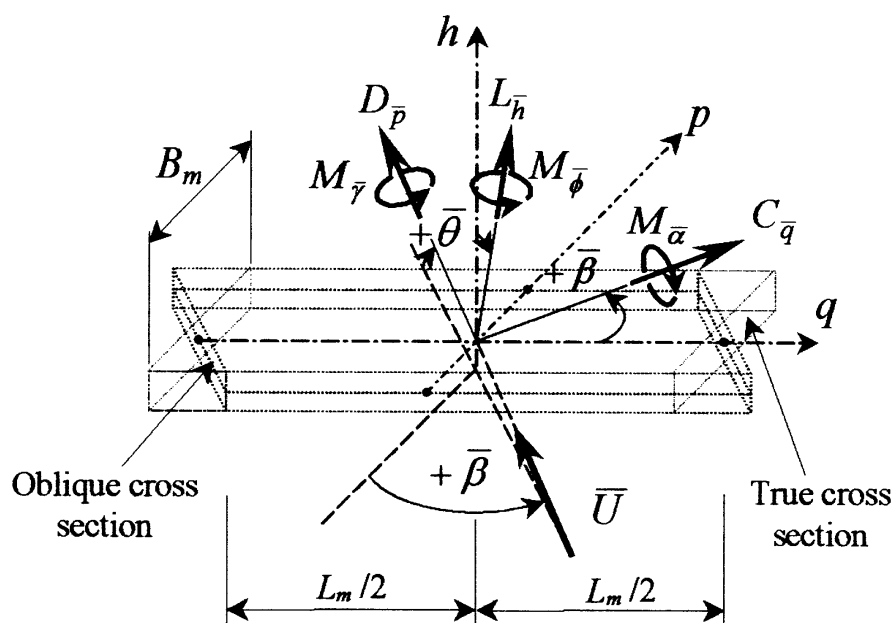


Fig. 4.3: Sistema di riferimento del modello impiegato in galleria del vento

I coefficienti aerodinamici statici ricavati sono riportati in fig.4.4. Le prove sono state eseguite su un modello in scala 1:100, investito da un vento di 15 [m/s] in modo da contenere le vibrazioni della sezione, che avrebbero alterato i risultati di prova.

Nell'articolo [4] sono riportati anche gli andamenti delle derivate di flutter dell'impalcato, anch'essi ricavati per diversi angoli di attacco del vento. In

tabella fig.4.5 sono riportati tra parentesi i valori delle velocità di flutter calcolate per un sistema a due gradi di libertà in base al valore delle derivate di flutter misurate. Gli altri termini indicano invece la velocità di flutter calcolata impiegando la relazione semplificata (3.41). Come si può notare l'utilizzo della relazione semplificata sovrastima il valore della velocità di flutter.

## 4.2 Instabilità per flutter a due gradi di libertà

### 4.2.1 Trattazione come lamina piana

Come si vede dalla tabella riportata in figura fig.4.5 la velocità di flutter per l'impalcato è di  $115.1 \text{ [m/s]}$  ricavata da un modello che riproduce il sistema avente i parametri (4.3), cioè che tiene conto del contributo dei vari modi di vibrare dell'impalcato e delle torri.

Ipotizzando l'impalcato come una lamina piana, le derivate di flutter in virtù delle espressioni (3.4) possono essere espresse in forma chiusa in funzione delle funzioni di Bessel (3.5). Per cui si imposta il problema agli autovalori (3.17) illustrato nel capitolo precedente, come già detto la velocità di flutter corrisponderà a quella velocità per cui la parte reale di uno dei due autovalori determinati a seguito del processo iterativo assume segno positivo. Come si può osservare da figura fig.(4.6) la velocità di flutter determinata con le ipotesi di lamina piana è di  $75 \text{ [m/s]}$

Nel caso in cui invece si consideri solo il contributo delle masse e dei momenti di inerzia del primo modo simmetrico di vibrare utilizzando quindi i parametri (4.2) si ottiene il valore della velocità di flutter pari a  $123 \text{ [m/s]}$  come si riscontra in figura fig.(4.7)

Quindi da quanto visto da questi semplici esempi si evince che l'ipotesi di considerare in un'analisi di massima l'impalcato come una lamina piana è molto utile perchè permette di risparmiare molto tempo di calcolo ottenendo una buona approssimazione. Tutto questo se l'impalcato si presta per questo

tipo di semplificazione: nel caso del ponte Tsing Ma essendo l'impalcato aerodinamico si compie un errore relativamente piccolo nel trattarlo come una lamina piana.

Si nota molta differenza fra il valore della velocità di flutter calcolata per lo stesso impalcato avendo assunto valori delle masse diversi a parità di frequenze proprie della struttura. Le ipotesi sulle caratteristiche meccaniche della struttura risultano quindi molto importanti.

### 4.2.2 Divergenza torsionale

Osservando i grafici delle fig.4.6 e fig.4.7 si noti come la parte immaginaria di uno degli autovalori tenda asintoticamente a zero, prima che si verifichi la condizione di flutter per cui la parte reale dell'altro autovalore diventa positiva. Quando la parte immaginaria di uno degli autovalori tende ad annullarsi per un dato valore della velocità, significa che a partire da quel valore non si avranno più quattro autovalori complessi e coniugati come soluzione del sistema (3.17) ma bensì due autovalori complessi e coniugati e altri due autovalori reali, questo porta alla conclusione che il moto non sarà più di tipo armonico smorzato ma di tipo esponenziale. Si è raggiunta così la velocità di divergenza torsionale del sistema dinamico a due gradi di libertà che nei due esempi trattati è pari a:

$$\begin{aligned}(U_{D,1})_{dinamico} &= 60 \text{ [m/s]} \\ (U_{D,2})_{dinamico} &= 109 \text{ [m/s]}\end{aligned}\tag{4.4}$$

Applicando l'espressione (2.24) si può calcolare velocemente la velocità di divergenza torsionale per una sezione a lamina piana ad un solo grado di libertà nel caso statico. Nei due esempi presi in esame si avrà:

$$\begin{aligned}(U_{D,1})_{statico} &= \sqrt{\frac{4K_{\varphi}}{\rho B^2 \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 7,08 \cdot 10^6}{1,225 \cdot 41^2 \pi}} = 66,16 \text{ [m/s]} \\ (U_{D,2})_{statico} &= \sqrt{\frac{4K_{\varphi}}{\rho B^2 \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 25,18 \cdot 10^6}{1,225 \cdot 41^2 \pi}} = 124,7 \text{ [m/s]}\end{aligned}\tag{4.5}$$

Per cui confrontando le espressioni (4.5) e (4.4) si osserva che analizzando il problema della divergenza torsionale come un problema statico di stabilità di una lamina piana, nel caso della sezione del ponte Tsing Ma si ottengono risultati accettabili, ma comunque con velocità di divergenza minori rispetto allo studio del sistema a due gradi di libertà dinamico.

## 4.3 Instabilità per flutter a un grado di libertà

### 4.3.1 Trattazione come lamina piana

Nella trattazione del flutter a un grado di libertà come si vede dall'espressione (3.32) sono impiegati i valori delle derivate di flutter  $A_2^*(K)$  e  $A_3^*(K)$ . In particolar modo dall'equazione (3.36) si capisce che si può avere flutter torsionale solo per valori di  $A_2^*(K)$  positivi. Dalla fig.4.8 si nota come nel caso di lamina piana sia impossibile raggiungere l'instabilità per flutter torsionale ad un grado di libertà essendo la funzione  $A_2^*(K)$  sempre negativa.

Infatti risolvendo il problema iterativo (3.38) in maniera analoga a quanto fatto per il sistema a due gradi di libertà si ottiene che la parte reale dell'esponente della soluzione è sempre negativa fig.4.9, e quindi il moto armonico torsionale del sistema a un grado di libertà è sempre smorzato da un esponenziale negativo.

Da fig.4.9 si vede come la lamina a un grado di libertà vada in divergenza torsionale per una velocità di 113 [m/s].

In questo caso però la lamina piana non è fedele al reale fenomeno fisico in quanto il vero valore delle derivate di flutter  $A_2^*(K)$  e  $A_3^*(K)$  per l'impalcato è quello illustrato in fig.4.10 e fig.4.11.

### 4.3.2 Formula approssimata

Nel caso dell'impalcato del ponte preso in esame dal grafico fig.4.5 si vede come adottando la formula approssimata (3.41) si ottenga un valore della

velocità di flutter pari a  $149.1 \text{ [m/s]}$ , molto superiore a quello calcolato impiegando le derivate di flutter dell'impalcato reale.

### 4.3.3 Trattazione agli autovalori

Nel caso invece si studi il sistema a un grado di libertà con la classica trattazione iterativa agli autovalori si ottiene una velocità di flutter pari a  $138 \text{ [m/s]}$  come si può vedere in figura 4.12:

Si ottiene un risultato più vicino a quello con due gradi di libertà rispetto a quello ottenuto con la formula approssimata.

### 4.3.4 Confronto con il modello numerico

Con un modello numerico messo a punto con il software commerciale ADINA è possibile simulare l'interazione fra fluido e struttura. Si è verificato quindi che la frequenza di vibrazione dell'impalcato a un grado di libertà calcolata in via teorica sia all'incirca la stessa riscontrata nella simulazione numerica.

Considerando le caratteristiche meccaniche dell'impalcato (4.6) e una velocità del vento pari a  $U = 5 \text{ [m/s]}$  si ottiene che il periodo di vibrazione della struttura è pari a  $3,7 \text{ [s]}$ .

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 8,68 \cdot 10^6 \text{ [kg m}^2\text{]} \\
 \zeta_\varphi &= 0,05\% \\
 \omega_\varphi &= 1,703 \text{ [1/s]}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Il periodo ottenuto dal modello numerico è invece di  $4 \text{ [s]}$  come si vede dal grafico in fig.4.13.

Considerando invece le caratteristiche meccaniche dell'impalcato (4.7) e una velocità del vento pari a  $U = 5 \text{ [m/s]}$  si ottiene che il periodo di vibrazione della struttura è pari a  $11,7 \text{ [s]}$ .

$$\begin{aligned}
 I_0 &= 8,68 \cdot 10^6 \text{ [kg m}^2\text{]} \\
 \zeta_\varphi &= 0,05\%
 \end{aligned}$$

$$\omega_{\varphi} = 1,703 [1/s] \quad (4.7)$$

Il periodo ottenuto dal modello numerico è invece di 11,4 [s] come si vede dal grafico in fig.4.14.

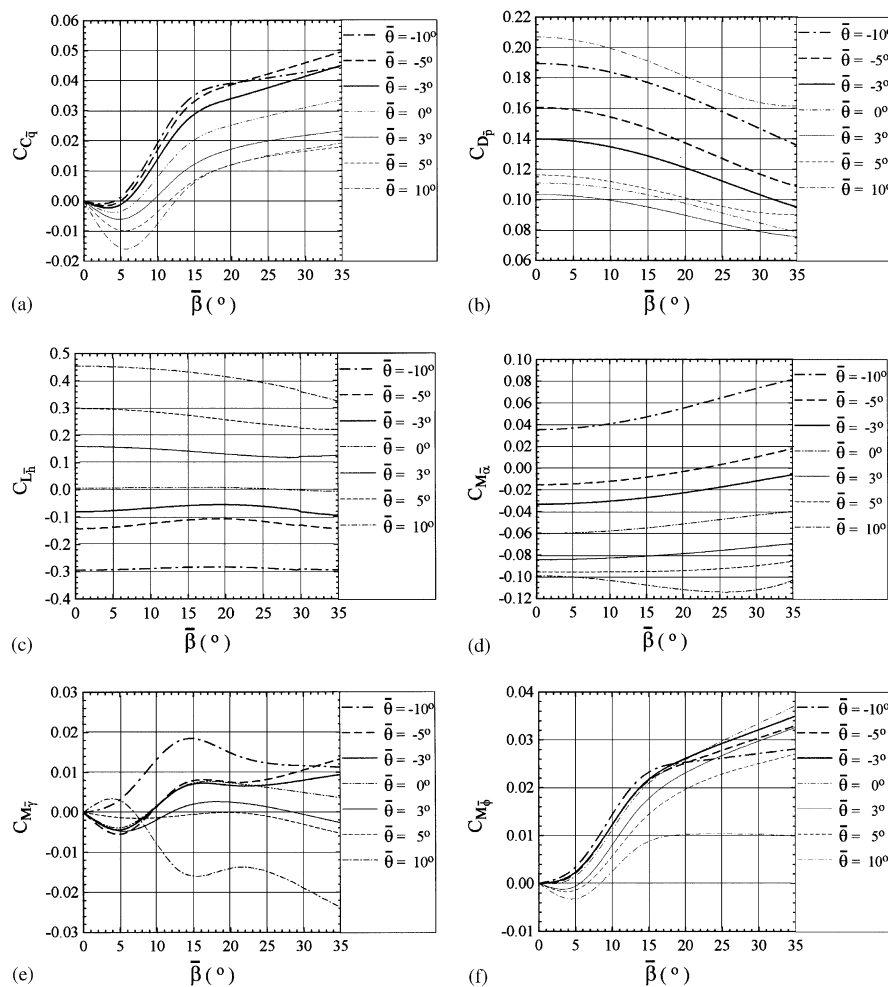


Fig. 4.4: Valori sperimentali dei coefficienti aerodinamici dell'impalcato per diversi angoli di attacco

$\bar{\theta}$ (deg)	$\bar{\beta}$ (deg)				
	0	5	13	20	31
0	149.1 (115.1)	200.0 $\uparrow$ (134.4)	153.9 (130.6)	167.8 (140.7)	171.3 (148.5)
3	74.1 (72.3)	74.1 (70.0)	86.2 (83.6)	77.4 (72.2)	88.5 (90.5)
5	56.3 (55.2)	43.0 (42.7)	49.1 (47.8)	48.2 (48.2)	61.0 (59.2)

Fig. 4.5: Valori della velocità di flutter

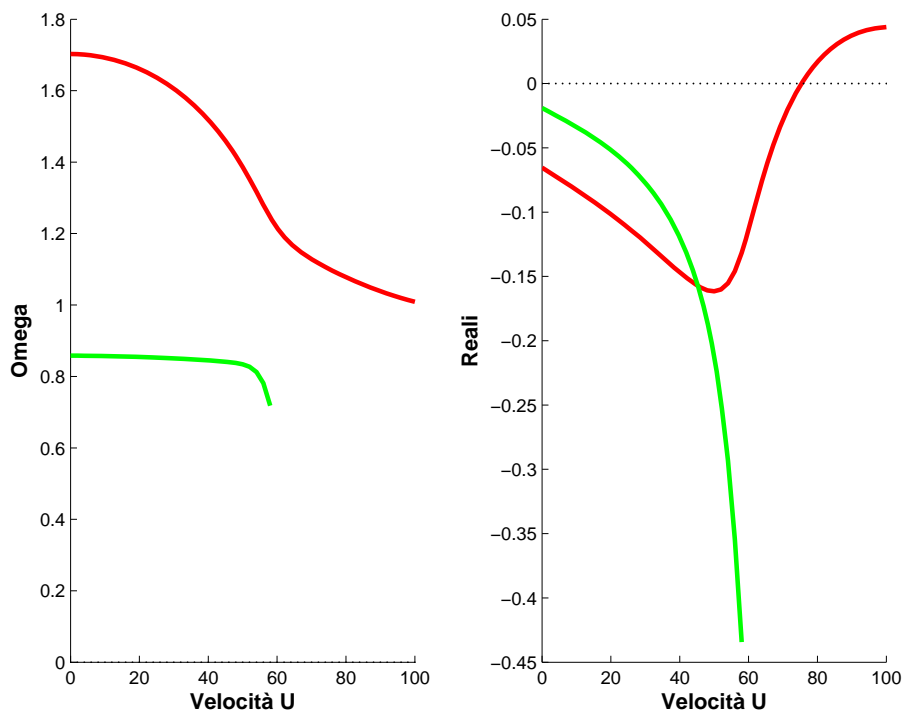


Fig. 4.6: Soluzione del problema agli autovalori



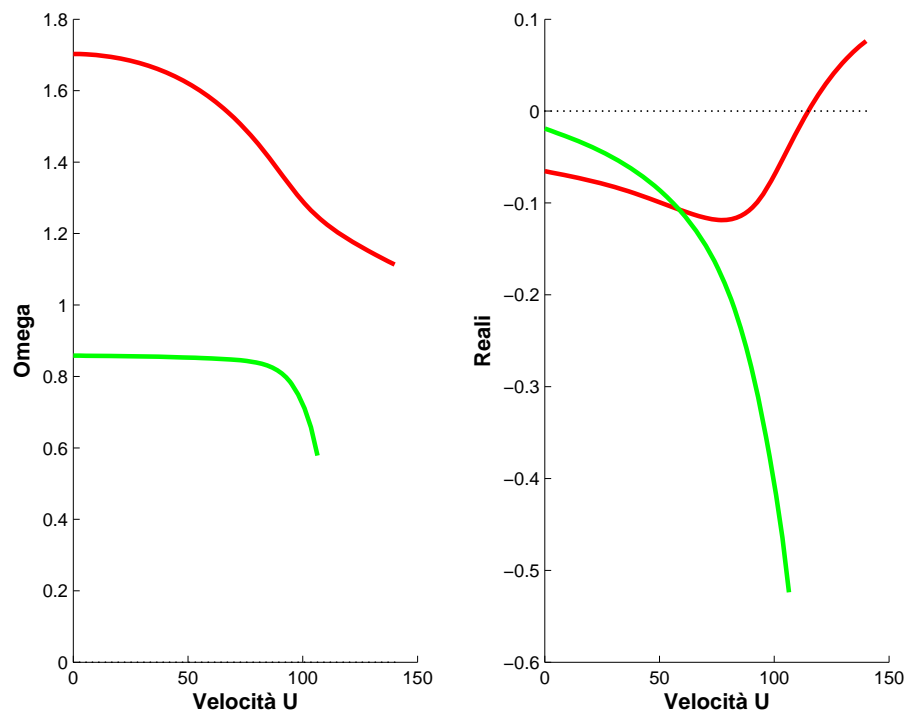


Fig. 4.7: Soluzione del problema agli autovalori

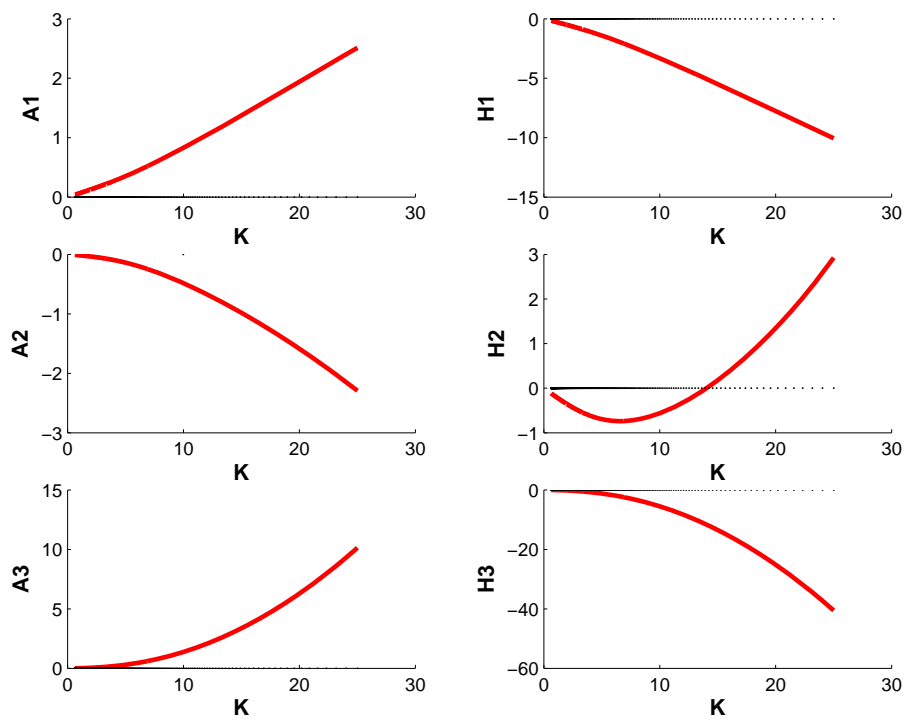


Fig. 4.8: Derivate di flutter per lamina piana

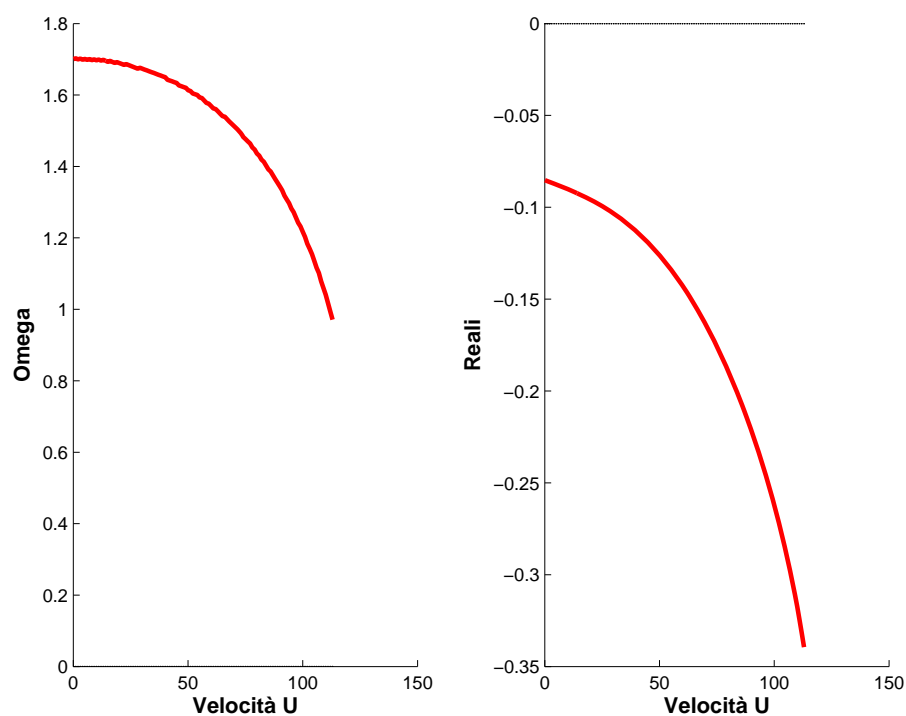
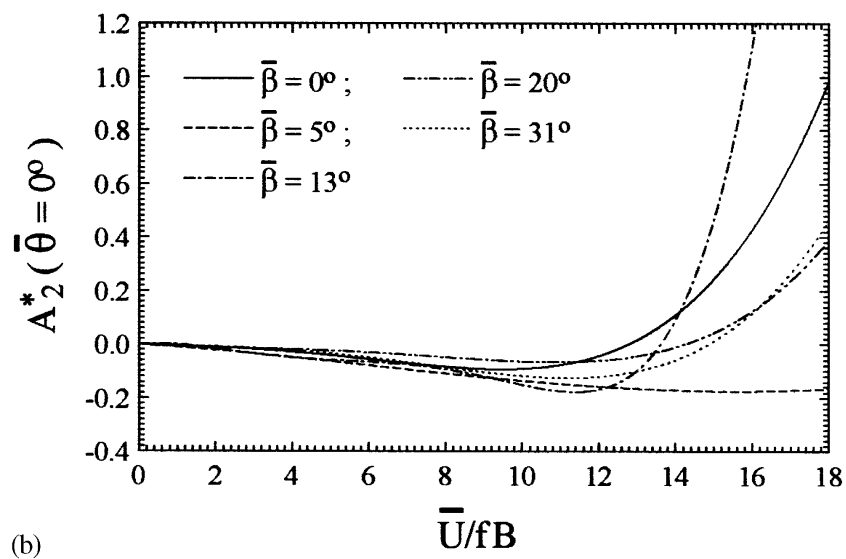


Fig. 4.9: Autovalore per lamina piana



(b)

Fig. 4.10: Valore della derivata  $A_2$

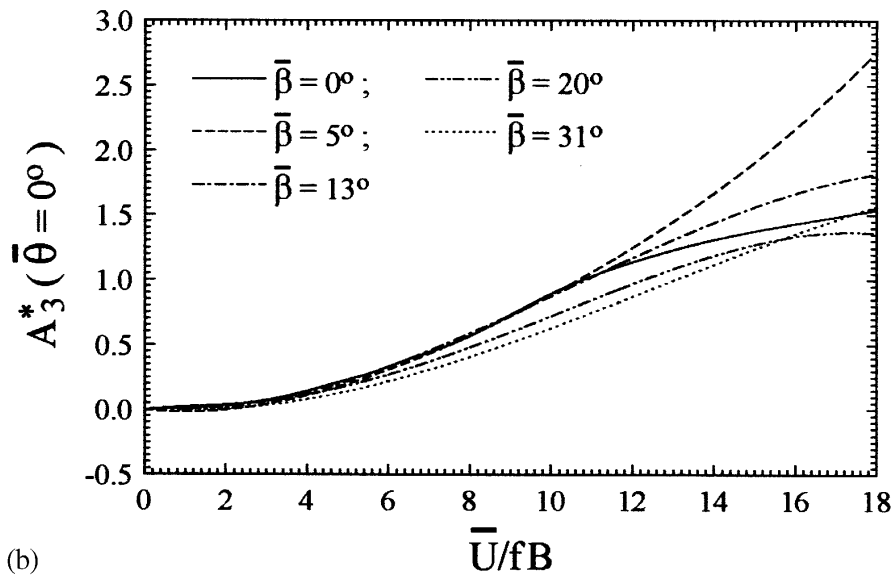


Fig. 4.11: Valore della derivata A3

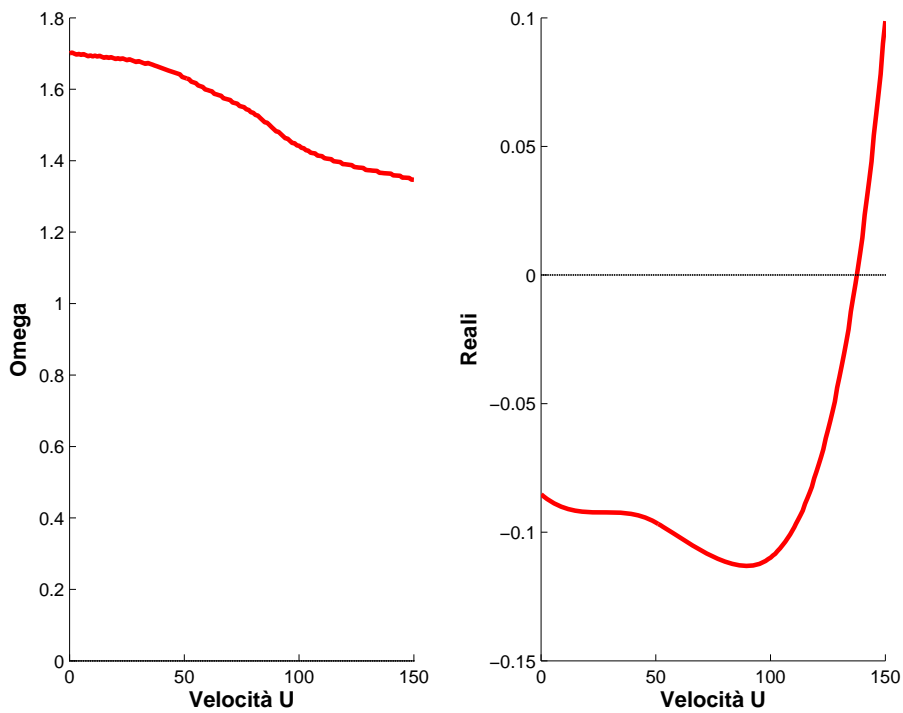


Fig. 4.12: Autovalore per l'impalcato reale

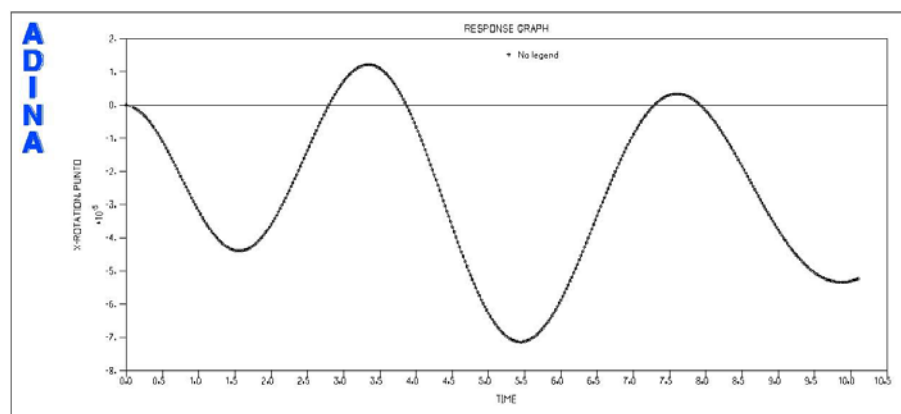


Fig. 4.13: Legge di moto angolare per il modello numerico

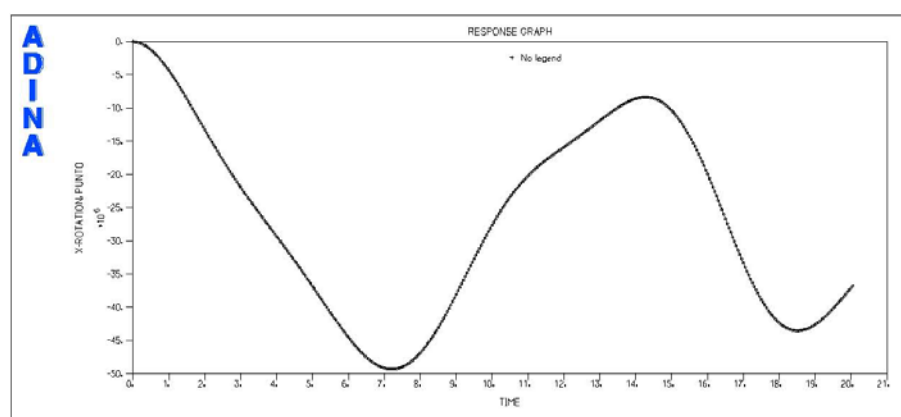


Fig. 4.14: Legge di moto angolare per il modello numerico



# Capitolo 5

## Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi, si è riscontrato che la modellazione dei fenomeni aeroelastici mediante codice agli elementi finiti produce buoni risultati, ottenendo valori confrontabili con quelli teorici.

Nel caso di modellazione numerica di fenomeni di interazione fra fluido e struttura si è vista la necessità di adottare software che prevedano una rigenerazione automatica della mesh ogniqualvolta questa sia eccessivamente deformata dagli spostamenti della struttura. Infatti proprio per la mancanza di questa opzione è stato impossibile spingere la struttura fino alla condizione di instabilità per flutter, o comunque analizzare il suo comportamento per alti valori di velocità.

Molto interessante risulta lo studio teorico del comportamento strutturale sotto l'azione del vento, finalizzato a determinare quanta massa e quali rigidità partecipano effettivamente all'interazione fra fluido e struttura. Come si è visto la risposta varia notevolmente a seconda dei valori delle caratteristiche meccaniche attribuite al modello sezionale, per cui questa analisi risulta fondamentale, anche perché mentre la parte aerodinamica può essere testata in galleria del vento, il modello da portare in galleria per i test deve già possedere le caratteristiche meccaniche ipotizzate.





# Bibliografia

- [1] Y.L Xu, J.M.Ko, W.S. Zhang, *Vibration Study of the tsing Ma Suspension Bridge*, J Bridge Eng., ASCE 2 (4) (1997) 149-156.
- [2] Tommaso Ruggeri, *Introduzione alla termomeccanica dei continui*.
- [3] L.D. Zhu, Y.L. Xu, F. Zhang, H.F. Xiang, *Tsing Ma bridge deck under skew winds-Part I: Aerodynamic coefficients*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 90 (2002) 781-805.
- [4] L.D. Zhu, Y.L. Xu, F. Zhang, H.F. Xiang, *Tsing Ma bridge deck under skew winds-Part II: Flutter derivatives*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 90 (2002) 807-837.
- [5] H. Schlichting, *Boundary layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [6] H. Benard, *Formulation de centres de giration a l'arriere d'un obstacle en mouvement*, C.r.Acad. Sci., 147 (1908), 839-842.
- [7] Th. v. Karman, *Über den Mechanismus des Widerstandes den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*, in *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften*, Gottingen (1911), 509-517.
- [8] Claudio Borri, Stefano Pastò, *Lezioni di ingegneria del vento*.
- [9] R. H. Scanlan, J. J. Tomko, *Airfoil and bridge deck flutter derivatives*, Journal of the engineering mechanics division, December 1971.
- [10] E. H. Dowell editor, *A modern course in aeroelasticity*, (2004) Kluwer Academic Publishers
- [11] R. H. Scanlan, E. Simiu, *Wind effects on structures*, (1986) John Wiley and Sons, Inc.
- [12] F. Cambuli, R. Fuliotto, N. Mandas, *Simulazione numerica del flusso su un impalcato da ponte per la valutazione delle derivate aerodinamiche*.
- [13] C. Scruton and E. W. E. Rogers, *Steady and Unsteady Wind Loading of Buildings and Structures*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A269 (1971), 353-383.

- [14] O. Guven, C. Farrell, and V. C. Patel, *Surface-Roughness Effects on the mean flow past Circular Cylinders*, J. Fluid Mech. 98 (1980), 673-701.
- [15] H. Glauert, *Rotation of an airfoil about a fixed axis*, Aeronautical Research Committee, R & M 595, Great Britain, 1919.
- [16] J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1956.
- [17] J. P. Den Hartog, *Transmission Line Vibrations Due to Steel*, Trans. AIEE, 51 (1932), 1074-1076.
- [18] R. L. Wardlaw, *Wind tunnel investigation in industrial aerodynamics*, Can aeronaut. space J., 18, No. 3 (March 1972).
- [19] T. Theodorsen, *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*, NACA report No. 496, 1935.