Alma Mater Studiorum
Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

FUNZIONI DI SOBOLEV

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Angela Fino

Sessione Autunnale
Anno Accademico 2015-2016

A mio Nonno
che ha sempre visto
qualcosa di grande in me...

Introduzione

In questa tesi cercherò di analizzare le *funzioni di Sobolev* su $\mathbb{R}^n$, seguendo le trattazioni **Measure Theory and Fine Properties of Functions** di L.C. Evans e R.F.Gariepy e l'elaborato **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations** di H. Brezis. Le funzioni di Sobolev si caratterizzano per essere funzioni con le derivate prime deboli appartenenti a qualche spazio L^p. I vari spazi di Sobolev hanno buone proprietà di completezza e compattezza e conseguentemente sono spesso i giusti spazi per le applicazioni di analisi funzionale.

Ora, come vedremo, per definizione, l'integrazione per parti è valida per le funzioni di Sobolev. E', invece, meno ovvio che altre regole di calcolo siano allo stesso modo valide. Così, ho inteso chiarire questa questione di carattere generale, con particolare attenzione alle proprietà puntuali delle funzioni di Sobolev.

Abbiamo suddiviso il lavoro svolto in 5 capitoli.
Il Capitolo 1 contiene le definizioni di base necessarie per la trattazione svolta; nel secondo capitolo sono stati derivati vari modi di approssimazione delle funzioni di Sobolev con funzioni lisce e sono state fornite alcune regole di calcolo per tali funzioni. Il Capitolo 3 darà un' interpretazione dei valori al bordo delle funzioni di Sobolev utilizzando l'operatore Traccia, mentre il Capitolo 4 discute l' estensione su tutto $\mathbb{R}^n$ di tali funzioni. Proveremo infine le principali disuguaglianze di Sobolev nel Capitolo 5.

Indice

Capitolo 1

Definizioni e proprietà elementari

Per tutta la trattazione, U denota un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Diciamo che $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$ è la **derivata parziale debole** di f rispetto a x_i in U se

$$\int_U f\, \phi_{x_i}\, dx = -\int_U g_i\, \phi\, dx$$

per ogni $\phi \in C^1_c(U)$.

NOTA La derivata parziale debole, se esiste, è definita univocamente $\mathcal{L}^n - q.d.$ Scriviamo

$$f_{x_i} := g_i \;\; (i = 1, ..., n)$$

e

$$Df := (f_{x_1}, ..., f_{x_n})$$

se le derivate deboli $f_{x_1}, ..., f_{x_n}$ esistono.

Definizione 1.2. Sia $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Diciamo che f appartiene allo **Spazio di Sobolev**

$$W^{1,p}(U)$$

se $f \in L^p(U)$ e se per $i = 1, ..., n$ la derivata parziale debole f_{x_i} esiste e appartiene a $L^p(U)$.

(ii) Diciamo che f appartiene a

$$W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$$

se $f \in W^{1,p}(V)$ per ogni sottoinsieme aperto $V \subset\subset U$.

(iii) Diciamo che f è una **funzione di Sobolev** se

$$f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$$

per qualche $1 \leq p \leq \infty$.

(iv) Non identifichiamo due funzioni di Sobolev che sono uguali $\mathcal{L}^n - q.d.$

Osservazione 1. Se f è una funzione di Sobolev, allora per definizione vale l'integrazione per parti

$$\int_U f\,\phi_{x_i}\,dx = -\int_U f_{x_i}\,\phi\,dx$$

per ogni $\phi \in C^1_c(U)$ e $i = 1, ..., n$.

NOTAZIONI Se $f \in W^{1,p}(U)$, definisco

$$\|f\|_{W^{1,p}(U)} := \left(\int_U |f|^p + |Df|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

per $1 \leq p < \infty$, e

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(U)} := \operatorname*{ess\,sup}_U(|f| + |Df|).$$

Definizione 1.3.

(i) Diciamo che

$$f_k \longrightarrow f \; in \, W^{1,p}(U)$$

se

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(U)} \longrightarrow 0.$$

(ii) Analogamente,

$$f_k \longrightarrow f \; in \, W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$$

se

$$\|f_k - f\|_{W^{1,p}(V)} \longrightarrow 0$$

per ogni aperto $V \subset\subset U$.

Capitolo 2

Approssimazioni

2.1 Approssimazioni con funzioni lisce

NOTAZIONI

(i) Definisco la funzione $\eta \in C^\infty$, $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\eta(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

la costante $c > 0$ è scelta in modo tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1.$$

(ii) Poniamo

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n);$$

η_ε è detto **mollificatore standard** o **mollificatore di Friedrichs**.

(iii) Se $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$, definisco

$$f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f;$$

cioè,

$$f^\varepsilon(x) := \int_U \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)dy \ .$$

Osservazione 2. Osserviamo che:

(i) per definizione, η è a supporto compatto, con supporto $B^0(0,1)$.

(ii) Segue che anche η_ε è a supporto compatto, con supporto dato da $B^0(0,\varepsilon)$. Infatti

$$\eta_\varepsilon(x) = 0 \Longleftrightarrow \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0 \Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\varepsilon}\right\| \geq 1 \Longleftrightarrow \|x\| \geq \varepsilon.$$

(iii) Anche per η_ε vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Ciò segue dall'analoga proprietà di η, ponendo un cambio di variabile $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

(iv) Se la funzione f è a supporto compatto, allora anche f^ε è a supporto compatto, con

$$spt(f^\varepsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^n | dist(x, spt(f)) < \varepsilon\}.$$

I mollificatori e le f^ε così definite ci forniscono una tecnica sistematica per approssimare le funzioni di Sobolev con funzioni C^∞.

Teorema 2.1 (**Proprietà dei mollificatori**).

(i) Per ogni $\varepsilon > 0$, $f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f^\varepsilon \longrightarrow f$$

uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$.

(iii) Se $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \leq p < \infty$, allora

$$f^\varepsilon \longrightarrow f \ \ in \ \ L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

(iv) Inoltre, $f^\varepsilon(x) \longrightarrow f(x)$ se x è un punto di Lebesgue di f; in particolare,

$$f^\varepsilon \longrightarrow f \ \ \mathcal{L}^n - q.d.$$

(v) Se $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \leq p \leq \infty$, allora

$$f^{\varepsilon}_{x_i} = \eta_{\varepsilon} * f_{x_i} \; (i = 1, ..., n).$$

(vi) In particolare, se $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \leq p < \infty$, allora

$$f^{\varepsilon} \longrightarrow f \;\; in \;\; W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. 1. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1, ..., n\}$. Scriviamo e_i per indicare il vettore $(0, ..., 1, ..., 0)$ corrispondente all' i-esima coordinata. Prendiamo $|h|$ abbastanza piccolo.

$$\frac{f^{\varepsilon}(x + he_i) - f^{\varepsilon}(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) dy =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) dy$$

per qualche $V \subset\subset \mathbb{R}^n$, in quanto η è a supporto compatto. A $y \in V$ fissato, il quoziente della differenza che compare come integrando converge per $h \to 0$ a

$$\frac{1}{\varepsilon} \eta_{x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^n \eta_{\varepsilon, x_i}(x - y)$$

poichè $\eta \in C^{\infty}$. Inoltre, il valore assoluto dell'integrando è limitato da

$$\frac{1}{\varepsilon} \|D\eta\|_{L^{\infty}} |f| \; \in L^1(V).$$

Infatti, per il teorema del valore medio di Lagrange, con $0 < s < 1$ si ha:

$$\left| \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) \right| =$$

$$= \frac{\left| \eta_{x_i} \left(\frac{x + she_i - y}{\varepsilon} \right) \right|}{|h|} \frac{|h|}{\varepsilon} |f(y)|$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \|D\eta\|_{L^{\infty}} |f| \; \in L^1(V).$$

Quindi possiamo applicare il teorema della convergenza dominata per il quale

$$f^{\varepsilon}_{x_i}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{\varepsilon}(x + he_i) - f^{\varepsilon}(x)}{h}$$

esiste ed è uguale all'integrale del limite, cioè

$$\int_U \eta_{\varepsilon,x_i}(x-y)f(y)dy.$$

Ripetendo il ragionamento per le derivate successive di f^ε segue che le sue derivate parziali esistono e sono continue in ogni punto. Questo prova il punto (i).

2. Dobbiamo mostrare che se $f \in C(\mathbb{R}^n)$, allora $f^\varepsilon \longrightarrow f$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Sia $V \subset\subset \mathbb{R}^n$. Prendiamo $V \subset\subset W \subset\subset \mathbb{R}^n$. Allora per $x \in V$,

$$f^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)dy = \int_{B(1)} \eta(z)f(x-\varepsilon z)dz.$$

Quindi siccome $\int_{B(1)} \eta(z)dz = 1$, abbiamo

$$|f^\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{B(1)} \eta(z)|f(x-\varepsilon z) - f(x)|dz. \qquad (*)$$

Ora, se f è continua su $\mathbb{R}^n$, allora è uniformemente continua su W poichè a chiusura compatta. Ovvero significa che $\forall \sigma > 0\, \exists \delta > 0$ (che non dipende da x) t.c.$\forall s$, $|s| < \delta$

$$|f(x+s) - f(x)| < \sigma.$$

Ritornando alla nostra stima, quindi, se $\varepsilon|z| < \delta$, cioè se $\varepsilon < \delta$ si ha

$$|f(x-\varepsilon z) - f(x)| < \sigma.$$

Da cui

$$(*) \leq \int_{B(1)} \eta(z)\sigma dz = \sigma.$$

Cioè abbiamo mostrato che

$$\forall \sigma > 0\, \exists \delta > 0\ t.c.\ \forall \varepsilon, |\varepsilon| < \delta, |f^\varepsilon(x) - f(x)| < \sigma$$

che è la definizione di convergenza uniforme.

3. Assumiamo $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Prendiamo $V \subset\subset W \subset\subset \mathbb{R}^n$, $x \in V$ e $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. Calcoliamo prima il caso $1 < p < \infty$. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder si ha che:

$$\begin{aligned}
|f^\varepsilon(x)| &\leq \int_{B(1)} \eta(z)^{1-\frac{1}{p}} \eta(z)^{\frac{1}{p}} |f(x-\varepsilon z)| dz \\
&\leq \left(\int_{B(1)} \eta(z) dz \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(1)} \eta(z) |f(x-\varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{B(1)} \eta(z) |f(x-\varepsilon z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Quindi, elevando alla p ed integrando su V rispetto alla variabile x, troviamo che per $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_{B(1)} \eta(z) \left(\int_V |f(x-\varepsilon z)|^p dx \right) dz \\
&\leq \int_W |f(y)|^p dy. \qquad (**)
\end{aligned}$$

Ora fissiamo $\delta > 0$. Siccome $f \in L^p(W)$, in quanto $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, allora per densità esiste $g \in C(\bar{W})$ tale che

$$\|f - g\|_{L^p(W)} \leq \delta.$$

Questo implica, secondo la stima $(**)$ che

$$\|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f - g\|_{L^p(W)} \leq \delta.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &= \|f^\varepsilon - g^\varepsilon + g^\varepsilon - g + g - f\|_{L^p(V)} \\
&\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\
&\leq 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \leq 3\delta
\end{aligned}$$

in quanto $\|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \leq \delta$ per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo per la (ii), poichè la convergenza uniforme su un compatto implica la convergenza in L^p.
Così la (iii) è provata.

4. Per provare la (iv) supponiamo che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e prendiamo $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue di f. Allora per i conti fatti sopra, vediamo che:

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \|\eta\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| dy \\ &= \|\eta\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon^n} m(B(x,\varepsilon)) \frac{\int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| dy}{m(B(x,\varepsilon))} \quad (***) \end{aligned}$$

ora: $m(B(x,\varepsilon)) = \varepsilon^n m(B(x,1)) = \varepsilon^n \alpha(n)$, dove la prima uguaglianza vale per cambiamento di variabile e la seconda deriva dal fatto che la misura della palla $B(x,1)$ è una costante che dipende solo dalla dimensione, cioè da n. Quindi, ritornando alla catena di disuguaglianze precedente abbiamo:

$$\begin{aligned} (***) &\leq \alpha(n) \|\eta\|_{L^\infty} \frac{\int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| dy}{m(B(x,\varepsilon))} \\ &= o(1) \quad per \quad \varepsilon \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Dove $\frac{\int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| dy}{m(B(x,\varepsilon))} \longrightarrow 0$ per $\varepsilon \longrightarrow 0$ deriva dal risultato A.7 messo in Appendice.

5. Ora assumiamo $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ per qualche $1 \leq p \leq \infty$. Come calcolato sopra,

$$\begin{aligned} f^\varepsilon_{x_i}(x) &= \int_U \eta_{\varepsilon, x_i}(x-y) f(y) dy = -\int_U \eta_{\varepsilon, y_i}(x-y) f(y) dy \\ &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f_{x_i}(y) dy = (\eta_\varepsilon * f_{x_i})(x) \end{aligned}$$

per $x \in U$. Ciò prova la (v) e la (vi) segue dalla (iii). Infatti

$$f^\varepsilon \longrightarrow f \ in \ W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(U) \Longleftrightarrow \forall V \subset\subset U, \|f^\varepsilon - f\|_{W^{1,p}(V)} \longrightarrow 0.$$

Ma

$$\|f^\varepsilon - f\|^p_{W^{1,p}(V)} = \|f^\varepsilon - f\|^p_{L^p(V)} + \|Df^\varepsilon - Df\|^p_{L^p(V)}$$

ed entrambi gli addendi tendono a 0 per $\varepsilon \longrightarrow 0$ per la (iii). $\square$

Consideriamo ora $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto.

Teorema 2.2 (**Approssimazione Locale con funzioni lisce o Teorema di Meyers-Serrin**). *Sia* $f \in W^{1,p}(U)$ *per qualche* $1 \leq p < \infty$. *Allora esiste una successione* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W^{1,p}(U) \cap C^{\infty}(U)$ *tale che*

$$f_k \to f \text{ in } W^{1,p}(U).$$

Nota che non abbiamo affermato che le $f_k \in C^{\infty}(\bar{U})$, come vedremo nel teorema successivo.

Dimostrazione. 1. Sia $\varepsilon > 0$ e definiamo $U_0 := \emptyset$ e

$$U_k := \left\{ x \in U | dist(x, \partial U) > \frac{1}{k} \right\} \cap B^0(0,k) \; (k = 1, 2, ...).$$

Nota che se l'insieme U è limitato, non occorrono le intersezioni con le sfere. Poniamo

$$V_k := U_{k+1} - \bar{U}_{k-1} \; (k = 1, 2, ...)$$

dove le V_k sono strisce aperte che si sovrappongono a due a due, formando così un ricoprimento. Consideriamo ora un partizione dell'unità: sia $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di funzioni lisce tali che

$$\begin{cases} \zeta_k \in C_c^{\infty}(V_k), & 0 \leq \zeta_k \leq 1 \; (k = 1, 2, ...) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \equiv 1 & \text{su } U. \end{cases}$$

Per ogni $k = 1, 2, ...,$ $f\zeta_k \in W^{1,p}(U)$ con $spt(f\zeta_k) \subseteq V_k$, in quanto $spt(\zeta_k) \subseteq V_k$. Quindi esiste $\varepsilon_k > 0$ tale che

$$\begin{cases} spt(\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k)) \subseteq V_k \\ \left(\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \left(\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (D(f\zeta_k)) - D(f\zeta_k)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{cases} \qquad (*)$$

Dove la prima condizione deriva dal fatto che possiamo scegliere $\varepsilon_k < dist(spt(f\zeta_k), \partial V_k)$, in quanto la convoluzione allarga di ε_k il supporto di $f\zeta_k$; le ultime due condizioni derivano dal teorema precedente in quanto $f\zeta_k \in W^{1,p}(U)$, perciò $\eta_{\varepsilon_k} * f\zeta_k \longrightarrow f\zeta_k$ in $W^{1,p}$.

Definisco

$$f_\varepsilon := \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k).$$

In qualche intorno di ogni punto $x \in U$ ci sono solo un numero finito di termini non nulli in questa somma, in quanto a x fissato in U, x starà in un certo $V_{\bar{k}}$, ma per $k > \bar{k}$, $V_{\bar{k}}$ non sarà più contenuto nei supporti delle convoluzioni successive, dunque $(\eta_{\varepsilon_k} * f\zeta_k)(x) = 0$ per $k > \bar{k}$. Quindi

$$f_\varepsilon \in C^\infty(U).$$

2. Dato che

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k = f\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$$

il sistema $(*)$ implica che

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(U)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

e

$$\|Df_\varepsilon - Df\|_{L^p(U)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (D(f\zeta_k)) - D(f\zeta_k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Di conseguenza, $f_\varepsilon \in W^{1,p}(U)$ e

$$f^\varepsilon \longrightarrow f \, in \, W^{1,p}(U)$$

per $\varepsilon \to 0$. □

La nostra intenzione è di approssimare una funzione di Sobolev con funzioni lisce fino alla frontiera. Questo necessita qualche ipotesi sul comportamento geometrico di ∂U.

Definizione 2.1. Diciamo che la frontiera ∂U è di **classe** C^1 se per ogni punto $x \in \partial U$, esiste $r > 0$ e una mappa $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che, in seguito ad una rotazione e ad un cambio di coordinate se necessario, abbiamo

$$U \cap Q(x, r) = \{y | \gamma(y_1, ..., y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x, r),$$

dove

$$Q(x,r) := \{y||y_i - x_i| < r, i = 1, ..., n\}.$$

In altre parole, in un intorno di ogni punto la frontiera è localmente il grafico di una funzione C^1.

Osservazione 3. In particolare ∂U è localmente Lipschitz.

Teorema 2.3 (**Approssimazione Globale con funzioni lisce**)**.** *Assumiamo che U sia limitato e ∂U sia C^1.*

(i) Se $f \in W^{1,p}(U)$ per qualche $1 \leq p < \infty$, allora esiste una successione $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq W^{1,p}(U) \cap C^\infty(\bar{U})$ tale che

$$f_k \to f \quad in \quad W^{1,p}(U).$$

(ii) Se inoltre $f \in C(\bar{U})$, allora

$$f_k \to f \quad uniformemente.$$

Dimostrazione. 1. Per $x \in \partial U$, prendiamo $r > 0$ e $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ come nella definizione sopra. Scriviamo anche $Q := Q(x,r), Q' := Q(x, \frac{r}{2})$.

2. Supponiamo prima che f si annulli vicino a $\partial Q' \cap U$. Per $y \in U \cap Q'$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha > 0$, definiamo

$$y^\varepsilon := y + \varepsilon \alpha e_n.$$

Osserviamo $B(y^\varepsilon, \varepsilon) \subset U \cap Q$ per ogni ε sufficientemente piccolo, a patto che α sia grande abbastanza, diciamo $\alpha := Lip(\gamma) + 2$.

3. Definiamo

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(y) &:= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \eta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) f(y^\varepsilon - z) dz \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(y^\varepsilon, \varepsilon)} \eta\left(\frac{y-w}{\varepsilon} + \alpha e_n\right) f(w) dw \end{aligned}$$

per $y \in U \cap Q'$. Come nel Teorema 2.1, si ha

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\bar{U} \cap Q')$$

e

$$f_\varepsilon \to f \ \ in \ \ W^{1,p}(U \cap Q').$$

Inoltre siccome $f = 0$ vicino $\partial Q' \cap U$, abbiamo $f_\varepsilon = 0$ vicino $\partial Q' \cap U$ per ε sufficientemente piccolo; possiamo quindi estendere f_ε a 0 su $U - Q'$.

4. Siccome ∂U è compatta, possiamo ricoprire ∂U con un numero finito di cubi $Q'_i = Q(x_i, \frac{r_i}{2})(i = 1, 2, ..., N)$. Sia $\{\zeta_i\}_{i=0}^N$ una successione di funzioni lisce tali che:

$$\begin{cases} 0 \le \zeta_i \le 1, & spt(\zeta_i) \subseteq Q'_i \ \ (i = 1, ..., N) \\ 0 \le \zeta_0 \le 1, & spt(\zeta_0) \subseteq U \\ \sum_{i=0}^N \zeta_i \equiv 1 & su \ \ U \end{cases}$$

e poniamo

$$f^i := f\zeta_i \ \ (i = 0, 1, 2, ..., N).$$

Fissiamo $\delta > 0$. Costruiamo come nel passo 3 funzioni $g^i := (f^i)_{\varepsilon_i} \in C^\infty(\bar{U})$ e che soddisfano

$$spt(g^i) \subset \bar{U} \cap Q_i, \ \|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(U \cap Q_i)} < \frac{\delta}{2N}$$

per $i = 1, ..., N$. Inoltre, per il teorema 2.2 precedente $C^\infty(U)$ è denso in $W^{1,p}(U)$, dunque esiste $g^0 \in C_c^\infty(U)$ tale che

$$\|g^0 - f^0\|_{W^{1,p}(U)} < \frac{\delta}{2}.$$

Infine, poniamo

$$g := \sum_{i=0}^N g^i \in C^\infty(\bar{U})$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\|g - f\|_{W^{1,p}(U)} &= \|g - f \cdot 1\|_{W^{1,p}(U)} \\
&= \|g - f \sum_{i=0}^{N} \zeta_i\|_{W^{1,p}(U)} \\
&= \|g - \sum_{i=0}^{N} f^i\|_{W^{1,p}(U)} \\
&\leq \|g^0 - f^0\|_{W^{1,p}(U)} + \sum_{i=1}^{N} \|g^i - f^i\|_{W^{1,p}(U\cap Q_i)} \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

Ragionando come nella dimostrazione del punto (ii) del Teorema 2.1, si ha che se $f \in W^{1,p} \cap C(\bar{U})$, allora $f_k \longrightarrow f$ uniformemente su $\bar{U}$, come volevasi dimostrare. □

2.2 Regole di calcolo per funzioni di Sobolev

Come abbiamo visto nella sezione 2.1, possiamo approssimare funzioni di Sobolev con funzioni lisce. Possiamo quindi ora verificare le usuali regole di calcolo per le derivate deboli.

Assumiamo $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.4 (**Regole di calcolo per le funzioni di Sobolev**).

(i) *Se* $f, g \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$, *allora*

$$fg \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$$

e

$$(fg)_{x_i} = f_{x_i} g + f g_{x_i} \qquad \mathcal{L}^n - q.d.$$

per $i = 1, 2, ..., n$.

(ii) *Se* $f \in W^{1,p}(U)$ *e* $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$, *allora*

$$F(f) \in W^{1,p}(U)$$

e

$$F(f)_{x_i} = F'(f) f_{x_i} \qquad \mathcal{L}^n - q.d.$$

per $i = 1, 2, ..., n$.

(iii) *Se* $f \in W^{1,p}(U)$, *allora* f^+, f^-, $|f| \in W^{1,p}(U)$, *dove* $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$ *e*

$$Df^+ = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f > 0\} \\ 0 & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f \leq 0\}, \end{cases}$$

$$Df^- = \begin{cases} 0 & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f \geq 0\} \\ -Df & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f < 0\}, \end{cases}$$

$$D|f| = \begin{cases} Df & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f > 0\} \\ 0 & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f = 0\}, \\ -Df & \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f < 0\}. \end{cases}$$

(iv) $Df = 0\, \mathcal{L}^n - q.d.\, su\, \{f = 0\}$.

Osservazione 4. Se U è limitato, la condizione $F(0) = 0$ per la (ii) non è necessaria.

Dimostrazione. 1. Per provare la (i), scegliamo $\phi \in C_c^1(U)$ con $spt(\phi) \subset V \subset\subset U$. Sia $f^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x)$, $g^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * g)(x)$ con $x \in V$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_U fg\phi_{x_i} dx &= \int_V fg\phi_{x_i} dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_V f^\varepsilon g^\varepsilon \phi_{x_i} dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_V (f^\varepsilon_{x_i} g^\varepsilon + f^\varepsilon g^\varepsilon_{x_i}) \phi dx \\
&= -\int_V (f_{x_i} g + f g_{x_i}) \phi dx \\
&= -\int_U (f_{x_i} g + f g_{x_i}) \phi dx,
\end{aligned}$$

in accordo col Teorema 2.1.

2. Per provare la (ii), scegliamo ϕ, V, f^ε come sopra. Allora

$$\begin{aligned}\int_U F(f)\phi_{x_i}dx &= \int_V F(f)\phi_{x_i}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_V F(f^\varepsilon)\phi_{x_i}dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_V F'(f^\varepsilon)f^\varepsilon_{x_i}\phi dx \\ &= -\int_V F'(f)f_{x_i}\phi dx \\ &= -\int_U F'(f)f_{x_i}\phi dx,\end{aligned}$$

dove ancora abbiamo ripetutamente usato il Teorema 2.1.

3. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e definiamo

$$F_\varepsilon := \begin{cases}(r^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & se\, r \geq 0 \\ 0 & se\, r < 0.\end{cases}$$

Allora $F_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, $F'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$ e così la (ii) implica che per $\phi \in C^1_c(U)$

$$\int_U F_\varepsilon(f)\phi_{x_i}dx = -\int_U F'_\varepsilon(f)f_{x_i}\phi dx.$$

Ora, mandando $\varepsilon \to 0$ troviamo

$$\int_U f^+\phi_{x_i}dx = -\int_{U\cap\{f>0\}} f_{x_i}\phi dx.$$

Ciò prova la prima parte di (iii) e le altre affermazioni seguono dalle formule

$$f^- = (-f)^+, |f| = f^+ + f^-.$$

La (iv) è una conseguenza della (iii), siccome

$$Df = Df^+ - Df^-.$$

□

2.3 $W^{1,\infty}$ e funzioni lipschitziane

Teorema 2.5 ($W^{1,\infty}$ **e funzioni lipschitziane**). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, allora*

$$f \text{ è localmente Lipschitz in } U$$

se e solo se

$$f \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(U).$$

Dimostrazione. 1. Prima supponiamo che f sia localmente lipschitziana. Fissiamo $i \in \{1, ..., n\}$. Poi per ogni $V \subset\subset W \subset\subset U$, fissiamo $0 < h < dist(V, \partial W)$, e definiamo

$$g_i^h(x) := \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \qquad (x \in V).$$

Ora

$$\sup_{x \in V} |g_i^h(x)| \leq Lip(f|_W) \quad \forall h \quad \Rightarrow \quad \sup_{h>0} \|g_i^h\|_{L^\infty(V)} < \infty.$$

Quindi per il Teorema A.3 di Compattezza debole in L^p esiste una sottosuccessione $h_j \to 0$ e una funzione $g_i \in L^\infty_{\text{loc}}(U)$ tale che

$$g_i^{h_j} \to g_i \qquad \textit{debolmente in } L^p(V)$$

per ogni $1 < p < \infty$. In particolare, $g_i \in L^\infty_{\text{loc}}(U)$ poichè se una funzione appartiene a tutti gli spazi L^p e le norme in L^p sono equilimitate, allora appartiene a L^∞ (si sfrutta il Teorema A.4 messo in appendice).
Consideriamo V compatto contenente $spt(\phi(x + he_i) - \phi(x))$ con $\phi \in C^1_c(V)$, abbiamo

$$\int_U f(x) \frac{\phi(x + he_i) - \phi(x)}{h} dx = - \int_U g_i^h(x)\phi(x + he_i)dx.$$

Poniamo $h = h_j$ e mandiamo $j \to \infty$:

$$\int_U f\phi_{x_i} dx = - \int_U g_i \phi dx.$$

Dunque g_i è la derivata parziale debole di f rispetto a x_i per $i = 1, ..., n$ e quindi $f \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$.

2. Viceversa, supponiamo $f \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(U)$. Sia $B \subset\subset U$ una qualunque palla chiusa contenuta in U. Allora dal Teorema 2.1 sappiamo

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \|Df^\varepsilon\|_{L^\infty(B)} < \infty$$

per ε_0 sufficientemente piccolo, dove per $x \in B$, $f^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x)$ è l'usuale convoluzione col mollificatore. Siccome f^ε è C^∞, abbiamo

$$f^\varepsilon(x) - f^\varepsilon(y) = \int_0^1 Df^\varepsilon(y + t(x-y))dt \cdot (x-y)$$

per $x, y \in B$; da cui

$$|f^\varepsilon(x) - f^\varepsilon(y)| \leq C|x-y|,$$

dove la costante C è indipendente da ε. Quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \qquad (x, y \in B).$$

Dunque $f|_B$ è Lipschitz per ogni palla $B \subset\subset U$, cioè f è localmente lipschitziana in U.

Per essere più precisi, c'è un rappresentante della classe di f che è localmente lipschitziana in U. $\square$

Capitolo 3

Traccia

Teorema 3.1 (**Traccia di una funzione di Sobolev**). *Sia U limitato, ∂U di classe C^1, $1 \leq p < \infty$. Allora*

(i) esiste un operatore lineare e limitato

$$T : W^{1,p}(U) \to L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$$

tale che

$$Tf = f \quad su \ \ \partial U$$

per ogni $f \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.

(ii) Inoltre, per ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $f \in W^{1,p}(U)$,

$$\int_U f \operatorname{div} \phi dx = -\int_U Df \cdot \phi dx + \int_{\partial U} (\phi \cdot \nu) Tf d\mathcal{H}^{n-1},$$

ν denota la normale unitaria esterna a ∂U.

Definizione 3.1. La funzione Tf così definita è detta la **traccia** di f su ∂U.

Interpretiamo la traccia Tf come i valori al bordo di f su ∂U.

Dimostrazione. 1. Assumiamo prima che $f \in C^1(\bar{U})$. Siccome ∂U è C^1, possiamo per ogni punto $x \in \partial U$ trovare $r > 0$ e una funzione C^1 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tale che,

$$U \cap Q(x, r) = \{y | \gamma(y_1, ..., y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x, r).$$

Scriviamo $Q := Q(x, r)$ e supponiamo temporaneamente che $f \equiv 0$ su $U - Q$. Osserviamo che se consideriamo la funzione

$$F(y_1, ..., y_{n-1}, y_n) = \gamma(y_1, ..., y_{n-1}) - y_n$$

allora in $U \cap Q(x, r)$, $F < 0$. Abbiamo così espresso il bordo come una $(n-1)-$varietà. Dunque la normale esterna è $\nu = \frac{DF}{\|DF\|} = \frac{(D\gamma, -1)}{(|D\gamma|^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

$$\Rightarrow -e_n \cdot \nu = \nu_n = \frac{1}{(|D\gamma|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} > 0 \quad \mathcal{H}^{n-1} - q.d. \;\; su \;\; Q \cap \partial U. \qquad (*)$$

2. Fissiamo $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\beta_\varepsilon(t) := (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon \qquad (t \in \mathbb{R})$$

e calcoliamo usando il Teorema A.5 di Gauss-Green che

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} \beta_\varepsilon(f) d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{Q \cap \partial U} \beta_\varepsilon(f) d\mathcal{H}^{n-1} \\
&\leq C \int_{Q \cap \partial U} \beta_\varepsilon(f)(-e_n \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-1} \\
&= -C \int_{Q \cap U} (\beta_\varepsilon(f))_{y_n} dy \\
&\leq C \int_{Q \cap U} |\beta'_\varepsilon(f)||Df| dy \\
&\leq C \int_U |Df| dy,
\end{aligned}$$

siccome $|\beta'_\varepsilon| \leq 1$. Ora mandando $\varepsilon \to 0$, troviamo

$$\int_{\partial U} |f| d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_U |Df| dy. \qquad (**)$$

3. Abbiamo stabilito la $(**)$ sotto l'ipotesi che $f \equiv 0$ su $U - Q$ per qualche cubo $Q = Q(x, r)$, $x \in \partial U$. Nel caso generale, possiamo ricoprire ∂U con un numero finito di tali cubi (in quanto ∂U è un compatto essendo per ipotesi U limitato) e usare una partizione dell'unità come nella prova del Teorema 2.3 per ottenere

$$\int_{\partial U} |f| d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_U |Df| + |f| dy$$

per ogni $f \in C^1(\bar{U})$. Per $1 < p < \infty$, applichiamo questa stima con $|f|^p$, al posto di $|f|$, per ottenere

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} |f|^p d\mathcal{H}^{n-1} &\leq C \int_U |Df||f|^{p-1} + |f|^p dy \\ &\leq C \int_U |Df|^p + |f|^p dy \qquad (***)\end{aligned}$$

per ogni $f \in C^1(\bar{U})$.

4. Così se definiamo

$$Tf := f|_{\partial U}$$

per $f \in C^1(\bar{U})$, vediamo dalla $(***)$ e dal Teorema 2.3 che T si estende in modo unico ad un operatore lineare limitato da $W^{1,p}(U)$ a $L^p(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$, con

$$Tf = f|_{\partial U}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$. Questo prova la (i). La (ii) segue da un argomento di approssimazione usando il Teorema A.5 di Gauss-Green. $\square$

Capitolo 4

Estensioni

Teorema 4.1 (Estensioni di funzioni di Sobolev). *Sia U limitato e ∂U di classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Sia $U \subset\subset V$. Allora esiste un operatore lineare e limitato*

$$E : W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tale che

$$Ef = f \quad su\, U$$

e

$$spt(Ef) \subset V$$

per ogni $f \in W^{1,p}(U)$.

Definizione 4.1. Ef è chiamata un' **estensione** di f su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. 1. Prima introduciamo qualche notazione:

- Dato $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, scriviamo

  $$x = (x', x_n)$$

  dove $x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Analogamente, scriviamo $y = (y', y_n)$.

- Dato $x \in \mathbb{R}^n$ e $r, h > 0$, definiamo il cilindro aperto

  $$C(x, r, h) := \{y \in \mathbb{R}^n | |y' - x'| < r, |y_n - x_n| < h\}.$$

Siccome ∂U è C^1, per ogni $x \in \partial U$, esistono $r, h > 0$ e una funzione C^1 $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \max\limits_{|x'-y'|<r} |\gamma(y') - x_n| < \frac{h}{4}, \\ U \cap C(x,r,h) = \{y \| x' - y'| < r, \gamma(y') < y_n < x_n + h\}, \\ C(x,r,h) \subseteq V. \end{cases}$$

Fissiamo $x \in \partial U$ e con r, h, γ come sopra, scriviamo

$$C := C(x,r,h),\ C' := C(x, \frac{r}{2}, \frac{h}{2})$$

$$U^+ := C' \cap U,\ U^- := C' - \bar{U}.$$

2. Sia $f \in C^1(\bar{U})$ e supponiamo per il momento che $spt(f) \subseteq C' \cap \bar{U}$. Poniamo

$$\begin{cases} f^+(y) = f(y) & \text{se } y \in \bar{U}^+, \\ f^-(y) = f(y', 2\gamma(y') - y_n) & \text{se } y \in U^-. \end{cases}$$

Notiamo che f^- è ben definita poichè se $y \in U^- \Rightarrow (y', 2\gamma(y') - y_n) \in U$. Infatti, siccome $y \in U^- = C' - \bar{U} \Rightarrow y \in C' \Rightarrow |x' - y'| < \frac{r}{2} < r$. Ora, se mostriamo che, posto $\bar{y_n} = 2\gamma(y') - y_n$, vale

$$\gamma(y') < \bar{y_n} < x_n + h \ \ (*)$$

allora avremo $(y', 2\gamma(y') - y_n) \in U \cap C(x,r,h)$ in quanto soddisfa la seconda condizione del primo sistema. Ora:

$$(*) \iff \gamma(y') > y_n$$

siccome $y \in U^-$ appartiene al sotto-grafico di γ, dunque la condizione di destra è verificata e assicura che il tutto sia ben definito.

Questa costruzione si definisce estensione per riflessione. Notiamo che $f^- = f^+$ su $\partial U \cap C'$.

3. *Affermazione* 1: $\|f^-\|_{W^{1,p}(U^-)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$.

Dimostrazione dell' Affermazione 1: Sia $\phi \in C_c^1(U^-)$ e sia $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione di funzioni C^∞ tali che

$$\begin{cases} \gamma_k \geq \gamma, \gamma_k \to \gamma \quad \text{uniformemente} \\ D\gamma_k \to D\gamma \quad \mathcal{L}^{n-1} - q.d., \sup\limits_k \|D\gamma_k\|_{L^\infty} < \infty. \end{cases}$$

Allora, per $i = 1, ..., n-1$,

$$\begin{aligned} \int_{U^-} f^- \phi_{y_i} dy &= \int_{U^-} f(y', 2\gamma(y') - y_n)\phi_{y_i} dy \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{U^-} f(y', 2\gamma_k(y') - y_n)\phi_{y_i} dy \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_{U^-} (f_{y_i}(y', 2\gamma_k(y') - y_n) + 2f_{y_n}(y', 2\gamma_k(y') - y_n)\gamma_{k,y_i}(y'))\phi dy \\ &= -\int_{U^-} (f_{y_i}(y', 2\gamma(y') - y_n) + 2f_{y_n}(y', 2\gamma(y') - y_n)\gamma_{y_i}(y'))\phi dy. \end{aligned}$$

Dove lo scambio dei limiti è consentito grazie alla convergenza uniforme e alla continuità. Analogamente,

$$\int_{U^-} f^- \phi_{y_n} dy = \int_{U^-} f_{y_n}(y', 2\gamma(y') - y_n)\phi dy.$$

Ora ricordando che

$$\|D\gamma\|_{L^\infty} < \infty$$

vale

$$\int_{U^-} |Df(y', 2\gamma(y') - y_n)|^p dy \leq C \int_U |Df|^p dy < \infty$$

sfruttando la formula di cambiamento di variabile. Quindi, siccome vale anche

$$\int_{U^-} |f(y', 2\gamma(y') - y_n)|^p dy \leq C \int_U |f|^p dy < \infty$$

abbiamo dimostrato che $\|f^-\|_{W^{1,p}(U^-)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}$.

4. Definiamo

$$Ef := \bar{f} = \begin{cases} f^+ & \text{su } \bar{U}^+ \\ f^- & \text{su } \bar{U}^- \\ 0 & \text{su } \mathbb{R}^n - (\bar{U}^+ \cup \bar{U}^-), \end{cases}$$

e notiamo che $\bar{f}$ è continua su $\mathbb{R}^n$, poichè $f^+ = f^-$ su $\partial U \cap C'$.

5. *Affermazione* 2: $E(f) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $sptE(f) \subseteq C' \subseteq V$ e

$$\|E(f)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Dimostrazione dell' Affermazione 2*:* Sia $\phi \in C_c^1(C')$. Per $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned}\int_{C'} \bar{f}\phi_{y_i} dy &= \int_{U^+} f^+\phi_{y_i} dy + \int_{U^-} f^-\phi_{y_i} dy \\ &= -\int_{U^+} f^+_{y_i}\phi dy - \int_{U^-} f^-_{y_i}\phi dy + \int_{\partial U} (T(f^+) - T(f^-))\phi\nu_i d\mathcal{H}^{n-1}\end{aligned}$$

per il Teorema 3.1. Ma poichè, come avevamo notato in precedenza, $f^+ = f^-$ su ∂U, allora l'ultimo termine svanisce essendo $T(f^+) = T(f^-) = f|_{\partial U}$.

Questo calcolo e l' *Affermazione 1* completano la prova nel caso f sia C^1, con supporto in $C' \cap \bar{U}$.

6. Assumiamo ora $f \in C^1(\bar{U})$, ma eliminiamo la restrizione sul suo supporto. Siccome ∂U è un compatto, possiamo ricoprire ∂Ucon un numero finito di cilindri $C_k = C(x_k, r_k, h_k)(k = 1, ..., N)$. Sia $\{\zeta_k\}_{k=0}^N$ una partizione dell'unità come nella prova del Teorema 2.3, definiamo $E(\zeta_k f)(k = 1, ..., N)$ come sopra, e poniamo

$$Ef := \sum_{k=1}^{N} E(\zeta_k f) + \zeta_0 f.$$

7. Infine, se $f \in W^{1,p}(U)$, approssimiamo f con funzioni $f_k \in W^{1,p}(U) \cap C^1(\bar{U})$ e definiamo

$$Ef := \lim_{k\to\infty} Ef_k.$$

$\square$

Capitolo 5

Disuguaglianze di Sobolev

5.1 Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Proviamo ora che se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \leq p < n$, allora $f \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, con $p^* > p$.

Definizione 5.1. Per $1 \leq p < n$, definiamo

$$p^* := \frac{np}{n-p};$$

p^* è chiamato il **coniugato Sobolev** di p.

Nota che $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Teorema 5.1 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Assumiamo*

$$1 \leq p < n.$$

Allora $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ ed esiste una costante C_1 che dipende solo da p e n, tale che

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 5. Nota che l'immersione $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ è limitata.

La dimostrazione si basa sul seguente Lemma.

Lemma 5.2. *Sia $n \geq 2$ e $f_1, f_2, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Per $x \in \mathbb{R}^n$ e $1 \leq i \leq n$ poniamo:*

$$x_i' = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

cioè x_i è omessa dalla lista. Allora la funzione

$$f(x) = f_1(x_1') \cdots f_n(x_n') \quad x \in \mathbb{R}^n$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$

Dimostrazione. Proviamo il risultato per induzione. Per $n = 2$: ovvio. Per $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx_3 &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)||f_3(x_1, x_2)|dx_3 \\
&= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)|dx_3 \\
&\leq |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(per Cauchy-Schwarz). Applicando Cauchy-Schwarz un'altra volta si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|dx \leq \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Supponiamolo ora vero per n e proviamolo per $n+1$. Fissiamo $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_1(x_1') \cdot ... \cdot f_n(x_n') f_{n+1}(x_{n+1}')$; per la disuguaglianza di Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx_1 dx_2 \cdots dx_n \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left(\int |f_1 f_2 \cdots f_n|^{n'} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \right)^{\frac{1}{n'}}$$

dove $n' = \frac{n}{n-1}$ esponente coniugato di n. Applicando il passo induttivo alle funzioni $|f_1|^{n'}$, $|f_2|^{n'}, \cdots |f_n|^{n'}$ (ciascuna è funzione di $n-1$ variabili perchè x_{n+1} è fissato),

$$\left(\| |f_i|^{n'} \|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|^{n'(n-1)} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_i|^n \right)^{\frac{1}{n-1} = \frac{n'}{n}} = \|f_i\|^{n'}_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})} \right)$$

otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^{n'} \cdots |f_n|^{n'} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \leq \prod_{i=1}^{n} \| |f_i|^{n'} \|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|^{n'}_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})},$$

da cui segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx_1 dx_2 \cdots dx_n \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Ora, facendo variare x_{n+1}, ogni funzione $x_{n+1} \mapsto \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})}$ appartiene a $L^n(\mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$. Infatti ad esempio:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|f_1\|_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})} dx_{n+1} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1(x_2, ..., x_n, x_{n+1})|^n dx_2 ... dx_n \right) dx_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^n < \infty \ (Hp).\end{aligned}$$

Di conseguenza, il loro prodotto $\prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^{n-1})}$appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ (per una conseguenza della disuguaglianza di Hölder) e

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(x)| dx_1 dx_2 \cdots dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

che conclude la dimostrazione per induzione.

Prova del Teorema. Iniziamo col caso $p = 1$, quindi $p^* = \frac{n}{n-1}$ e $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Abbiamo

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_n) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_n) \right| dt$$

e analogamente, per ogni $1 \leq i \leq n$,

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n) \right| dt =: f_i(x_i').$$

Quindi

$$|f(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i').$$

Da cui segue che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} (f_i(x_i'))^{\frac{1}{n-1}}. \qquad (*)$$

Ma per il Lemma

$$(*) \leq \prod_{i=1}^{n} \|(f_i)^{\frac{1}{n-1}}\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Di conseguenza abbiamo

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}. \quad (**)$$

Questo completa la prova quando $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$.

Torniamo ora nel caso $1 < p < n$, ancora con $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Sia $m \geq 1$, applicando la $(**)$ a $|f|^{m-1}f$ invece che a f, otteniamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{\frac{mn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{m} \leq \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial |f|^{m-1} f}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} &= m \prod_{i=1}^{n} \left\| |f|^{m-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \\
&\leq m \prod_{i=1}^{n} \left(\|f\|_{L^{p'(m-1)}}^{m-1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= m \|f\|_{L^{p'(m-1)}}^{m-1} \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Scegliamo ora m tale che $\frac{mn}{n-1} = p'(m-1)$ che dà $m = \frac{n-1}{n} p^*$ ($m \geq 1$ dato che $1 < p < n$). Otteniamo

$$\|f\|_{p^*} \leq m \prod_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{p}^{\frac{1}{n}}$$

e cioè

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|Df\|_p \quad \forall f \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

Per completare la prova, sia $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e sia $\{f_n\}$ una successione in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_n \to f$ in $W^{1,p}$. Abbiamo

$$\|f_n\|_{p^*} \leq C \|Df_n\|_p.$$

Essendo $\{f_n\}$ di Cauchy in L^{p^*} segue che

$$f \in L^{p^*} e \|f\|_{p^*} \leq C\|Df\|_p.$$

□

5.2 Disuguaglianza di Poincaré sulle palle

Il nostro prossimo scopo è quello di derivare una versione locale della disuguaglianza precedente. Per fare questo avremo bisogno del seguente Lemma:

Lemma 5.3. *Per ogni* $1 \leq p < \infty$ *esiste una costante* C*, dipendente solo da* p *e da* n*, tale che*

$$\int_{B(x,r)} |f(y) - f(z)|^p dy \leq C r^{n+p-1} \int_{B(x,r)} |Df(y)|^p |y - z|^{1-n} dy$$

per ogni $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n, f \in C^1(B(x,r))$ *e* $z \in B(x,r)$*.*

Dimostrazione. Se $y, z \in B(x,r)$, allora

$$\begin{aligned} f(y) - f(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z + t(y-z)) dt \\ &= \int_0^1 Df(z + t(y-z)) dt \cdot (y - z) \end{aligned}$$

e quindi

$$|f(y) - f(z)|^p \leq |y - z|^p \int_0^1 |Df|^p (z + t(y-z)) dt.$$

Quindi per $s > 0$:

$$\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,s)} |f(y) - f(z)|^p d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq$$
$$\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,s)} |y - z|^p \int_0^1 |Df|^p (z + t(y-z)) dt d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (*)$$

Siccome stiamo integrando sul bordo della palla, allora $|y-z|=s$

$$\begin{aligned}(*) &= s^p\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,s)}|Df|^p(z+t(y-z))d\mathcal{H}^{n-1}(y)dt\\ &\le s^p\int_0^1\frac{1}{t^{n-1}}\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p d\mathcal{H}^{n-1}(w)dt. \qquad (**)\end{aligned}$$

Dove l'ultima disuguaglianza è stata ottenuta ponendo $w=z+t(y-z)=ty+(1-t)z$. Inoltre, per omogeneità rispetto alla dilatazione rispetto alla misura di Hausdorff, si ha $d\mathcal{H}^{n-1}(y)=\frac{1}{t^{n-1}}d\mathcal{H}^{n-1}(w)$. Per quanto riguarda l'insieme di integrazione, w appartiene al segmento di estremi y e z, tutto contenuto in $B(x,r)$. Perciò l'insieme su cui si integra col cambio di variabile al più diminuisce, quindi integrando su $B(x,r)$, l'integrale si maggiora. Inoltre $|y-z|=s\Rightarrow|\frac{w}{t}-\frac{(1-t)}{t}z-z|=s\Rightarrow|w-z|=ts$. Ovvero $w\in\partial B(z,ts)$.

$$\begin{aligned}(**) &= s^p\int_0^1\frac{1}{t^{n-1}}\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p d\mathcal{H}^{n-1}(w)\frac{|w-z|^{1-n}}{|w-z|^{1-n}}dt\\ &= s^{n+p-1}\int_0^1\int_{B(x,r)\cap\partial B(z,ts)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}d\mathcal{H}^{n-1}(w)dt\\ &= s^{n+p-2}\int_{B(x,r)\cap B(z,s)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}dw.\end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza è ottenuta usando la formula di Coarea del Teorema A.6. Integriamo in s da 0 a $2r$ e riusiamo la formula di Coarea per ottenere che

$$\int_{B(x,r)}|f(y)-f(z)|^p dy\le Cr^{n+p-1}\int_{B(x,r)}|Df(w)|^p|w-z|^{1-n}dw.$$

□

Teorema 5.4 (**Disuguaglianza di Poincaré sulle palle**). *Per ogni* $1\le p<n$ *esiste una costante* C_2*, dipendente solo da* p *e da* n*, tale che*

$$\left(⨍_{B(x,r)}|f-(f)_{x,r}|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}\le C_2 r\left(⨍_{B(x,r)}|Df|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $B(x,r)\subseteq\mathbb{R}^n, f\in W^{1,p}(B^0(x,r))$.

Ricorda

$$(f)_{x,r} = \fint_{B(x,r)} f dz.$$

Dimostrazione. 1. Approssimando se necessario, possiamo assumere che $f \in C^1(B(x,r))$. Ricordiamo il Lemma 5.3 per calcolare

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} |f-(f)_{x,r}|^p dy &= \fint_{B(x,r)} \left| \fint_{B(x,r)} f(y) - f(z) dz \right|^p dy \\
&\le \fint_{B(x,r)} \fint_{B(x,r)} |f(y)-f(z)|^p dz dy \\
&\le C \fint_{B(x,r)} r^{p-1} \int_{B(x,r)} |Df(z)|^p |y-z|^{1-n} dz dy \\
&= C r^{p-1} \fint_{B(x,r)} |Df(z)|^p \left(\int_{B(x,r)} |y-z|^{1-n} dy \right) dz \\
&\le C r^{p-1} \fint_{B(x,r)} |Df(z)|^p \left(\int_{B(z,2r)} |y-z|^{1-n} dy \right) dz \quad (*)
\end{aligned}$$

Ora risolvendo l'integrale interno con le coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ $(\rho, \theta, \phi_1, ..., \phi_{n-2})$ avremo che i vari integrali rispetto agli angoli $\theta, \phi_1, ..., \phi_{n-2}$ ci daranno una certa costante C:

$$\int_{B(z,2r)} |y-z|^{1-n} dy = \int \int ... \int_0^{2r} \rho^{1-n} \rho^{n-1} d\rho = Cr.$$

Quindi

$$(*) = Cr^p \fint_{B(x,r)} |Df|^p dz$$

$$\Rightarrow \fint_{B(x,r)} |f-(f)_{x,r}|^p dy \le Cr^p \fint_{B(x,r)} |Df|^p dz. \qquad (**)$$

2. *Affermazione:* Esiste una costante $C = C(n,p)$ tale che

$$\left(\fint_{B(x,r)} |g|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \le C \left(r^p \fint_{B(x,r)} |Dg|^p dy + \fint_{B(x,r)} |g|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $g \in W^{1,p}(B^0(x,r))$.

Prova dell'Affermazione: Prima osserviamo che, rimpiazzando $g(y)$ con $\frac{1}{r} g(ry)$ se necessario, possiamo assumere $r = 1$. Analogamente possiamo assumere $x = 0$. Ci avvaliamo ora del Teorema 4.1 per estendere g a $\bar{g} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Essendo l'estensione limitata, soddisfa

$$\|\bar{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{W^{1,p}(B^0(0,1))}.$$

Allora il Teorema 5.1 implica

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(1)} |g|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{p^*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\bar{g}|^{p^*} dy\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D\bar{g}|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_{B(1)} |Dg|^p + |g|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

3. Usiamo infine $(**)$ e l' *Affermazione* con $g := f - (f)_{x,r}$ per completare la prova. $\square$

5.3 Disuguaglianza di Morrey

Definizione 5.2. Sia $0 < \alpha < 1$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si definisce **Hölderiana di esponente** α se

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}^n x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Teorema 5.5 (**Disuguaglianza di Morrey**).

(i) Per ogni $n < p < \infty$ esiste una costante C_3, dipendente solo da p e da n, tale che

$$|f(y) - f(z)| \leq C_3 r \left(\fint_{B(x,r)} |Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}$$

per ogni $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, $f \in W^{1,p}(B^0(x,r))$ e per quasi ogni $y, z \in B(x,r)$.

(ii) In particolare, se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, allora il limite

$$\lim_{r \to 0} (f)_{x,r} =: f^*(x)$$

esiste per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, e f^* è Holderiana di esponente $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

NOTA. Ricorda il Teorema 2.5 per il caso $p = \infty$.

Dimostrazione. 1. Assumiamo prima che f sia C^1 e usiamo il Lemma 5.3 con $p = 1$ per calcolare

$$\begin{aligned}|f(y) - f(z)| &\leq \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(w)| + |f(w) - f(z)| dw \\ &\leq C \int_{B(x,r)} |Df(w)|(|y-w|^{1-n} + |z-w|^{1-n}) dw\end{aligned}$$

(Abbiamo usato il Lemma con $p = 1$ e diviso per r^n ottenendo la media integrale, per la disuguaglianza successiva vale invece la disuguaglianza di Hölder.)

$$\begin{aligned}&\leq C\left(\int_{B(x,r)} (|y-w|^{1-n} + |z-w|^{1-n})^{\frac{p}{p-1}} dw\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C r^{(n-(n-1)\frac{p}{p-1})\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C r^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

2. Per approssimazione, si ha che se $f \in W^{1,p}(B^0(x,r))$, la stessa stima continua a valere per quasi ogni $y, z \in B(x,r)$. Questo prova (i).

3. Ora supponiamo che $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Allora per quasi ogni x, y possiamo applicare la stima data da (i) con $r = |x-y|$ ottenendo

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\leq C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Df|^p dw\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C\|Df\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{1-\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Quindi f è uguale quasi ovunque a una funzione $\bar{f}$ Hölderiana di esponente $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Chiaramente $f^* = \bar{f}$ dappertutto in $\mathbb{R}^n$. Infatti

$$\fint_{B(x,r)} f(y) dy \to f(x) \;\; per \;\; r \to 0 \;\; x - q.d.$$

poichè:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B|}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{|B|}\int_{B(x,r)} (f(y)-f(x))dy\right| \\ &\le \frac{1}{|B|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|dy \\ &\le \frac{C}{|B|}\int_{|y-x|<r} |x-y|^{1-\frac{n}{p}}dy\end{aligned}$$

ora usando un cambio di coordinate polari in $\mathbb{R}^n(\rho,\theta,\phi_1,...,\phi_{n-2})$ avremo che i vari integrali rispetto agli angoli $\theta,\phi_1,...,\phi_{n-2}$ ci daranno una certa costante $\bar{C}$:

$$\begin{aligned}\frac{C}{|B|}\int_{|y-x|<r} |x-y|^{1-\frac{n}{p}}dy &= \frac{C}{|B|}\int\int ...\int_0^r \rho^{1-\frac{n}{p}+n-1}d\rho \\ &= \bar{C}\int_0^r \rho^{n(1-\frac{1}{p})}d\rho \\ &= C'r^{n-\frac{n}{p}+1} \to 0 \;\; per \;\; r\to 0.\end{aligned}$$

$\square$

Appendice A

Risultati citati

In questa appendice enunceremo le definizioni e i teoremi utilizzati o citati nel corso della trattazione.

Teorema A.1. *Lo spazio delle funzioni continue è denso in* L^p*.*

Corollario A.2. *Sia* $W \subset \mathbb{R}^n$ *aperto e* $f \in L^p(W)$*, allora esiste* $g \in C(W)$ *tale che*

$$\|f - g\|_{L^p(W)} \leq \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$*.*

Dimostrazione. Definiamo $\bar{f}$ come prolungamento di f su $\mathbb{R}^n$.

$$\bar{f} := \begin{cases} f & su \quad W \\ 0 & su \quad \mathbb{R}^n - W \end{cases}$$

Essendo $f \in L^p(W)$, allora per definizione $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Per il teorema precedente esiste $g \in C(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|\bar{f} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$. Ora

$$\|\bar{f} - g\|_{L^p(W)} \leq \|\bar{f} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Essendo $\bar{f}|_W = f$, abbiamo la tesi

$$\|f - g\|_{L^p(W)} \leq \varepsilon.$$

$\square$

Definizione A.1 (**Partizione dell' unità associata ad un compatto e ad un ricoprimento aperto**). Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, U aperto tale che $K \subset\subset U$. Sia $\{V_j\}_{j\in I}$ (con I una famiglia di indici) un ricoprimento aperto di U, $U \subset \bigcup_{j\in I} V_j$. Si dice una partizione dell'unità associata ad un compatto K ed al ricoprimento $\{V_j\}_{j\in I}$, un numero finito $m \in \mathbb{N}$ di funzioni $(\zeta_k)_{k=1,...,m}$, $\zeta_k : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \zeta_k \in C^\infty & k = 1, ..., m \\ spt(\zeta_k) \subset\subset V_{i_k} & per \;\; i_k \in I \\ 0 \leq \zeta_k \leq 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \zeta_k = 1 & su \;\; U \end{cases}$$

Definizione A.2. Sia $1 \leq p < \infty$. Si dice che una successione $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p(U)$ converge debolmente a una funzione $f \in L^p(U)$, se

$$\lim_{k\to\infty} \int_U f_k g dx = \int_U f g dx$$

per ogni $g \in L^q(U)$, dove

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1 < q \leq \infty).$$

Teorema A.3 (**Teorema di compattezza debole in L^P**). *Supponiamo $1 < p < \infty$. Sia $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p(U)$ tale che*

$$\sup_k \|f_k\|_{L^p(U)} < \infty.$$

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ e una funzione $f \in L^p(U)$ tale che

$$f_{k_j} \to f \quad deb \quad in \quad L^p(U).$$

Teorema A.4. *Sia U un dominio limitato in $\mathbb{R}^n$. Se f è una funzione misurabile su U tale che $|f|^p \in L^1(U)$ per qualche $p \in \mathbb{R}$, definiamo*

$$\phi_p(f) = \left(\frac{1}{|U|} \int_U |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Allora

$$\lim_{p\to\infty} \phi_p(f) = \sup_U |f|.$$

Definizione A.3. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. U si definisce regolare se è limitato, $Int(\bar{U}) = U$ e ∂U è una $(n-1)-$varietà di classe almeno C^1.

Teorema A.5 (Teorema di Gauss-Green della divergenza). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e sia $F : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\bar{U})$. Allora*

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_{\partial U} (F \cdot \nu) d\mathcal{H}^{n-1}$$

con ν normale esterna a ∂U.

Teorema A.6 (Formula di Coarea). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^1$, $n \geq m$. Allora per ogni funzione $\mathcal{L}^n-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

(i) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ *è $\mathcal{H}^{n-m}$ sommabile per $\mathcal{L}^m - q.d.y$*

(ii)
$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{f^{-1}\{y\}} g \;\; d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy.$$

Teorema A.7. *Sia $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $1 \leq p < \infty$. Allora*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f - f(x)|^p dy = 0 \qquad (*)$$

per $\mathcal{L}^n - q.d.x$.

Definizione A.4. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ per cui vale $(*)$ è chiamato un **punto di Lebesgue** di f.

Appendice B

Notazioni

Elenco delle notazioni utilizzate nella trattazione:
$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x-y| \leq r\}$
$B^0(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | |x-y| < r\}$
$B(r) = B(0,r)$
$V \subset\subset U$: V è a chiusura compatta contenuta in U; cioè, $\bar{V}$ è compatta e $\bar{V} \subset U$
∂U: frontiera di U
$spt(f)$: supporto di f
$Lip(f)$: costante di Lipschitz di f
f^+, f^-: $\max(0,f)$, $\max(0,-f)$
$C(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | f \ \mathit{continua}\}$
$C_c(U)$: funzioni in $C(U)$ a supporto compatto
$L^p(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \left(\int_U |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, f \ \mathit{Lebesgue\ misurabile}\}$ $(1 \leq p < \infty)$
$L^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | \operatorname{ess\,sup}_U(|f|) < \infty, f \ \mathit{Lebesgue\ misurabile}\}$
$L^p_{\mathrm{loc}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | f \in L^p(V) \ \forall V \subset\subset U\}$
$\mathcal{H}^s$: misura di Hausdorff $s-$dimensionale

Bibliografia

[1] Lawrence Craig Evans; Ronald F.Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2015

[2] Haim Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag New York, 2011

Ringraziamenti

Ringrazio il Professore Bruno Franchi che mi ha seguita nella stesura di questa tesi con grande disponibilità e professionalità.