

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Varietà Toriche e Politopi Convessi

Tesi di Laurea Magistrale in Geometria Algebrica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Luca Migliorini

Presentata da:  
Annalisa Grossi

II Sessione  
Anno Accademico 2015/2016



*"La Matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse"*  
*Henri Poincaré*



# Introduzione

Questa tesi affronta lo studio delle varietà toriche, una interessante classe di varietà algebriche. Una varietà torica complessa  $n$ -dimensionale è una varietà algebrica  $X$  che contiene un toro algebrico complesso  $n$ -dimensionale  $T = (C^*)^n$  come aperto denso rispetto alla topologia di Zariski che soddisfa inoltre la seguente proprietà: l'azione  $T \times T \rightarrow T$  di  $T$  su se stesso data dalla struttura di gruppo si estende a un'azione  $T \times X \rightarrow X$  del toro sulla varietà. Sin dal primo approccio allo studio di questo argomento risulta chiaro che i metodi utilizzati per la costruzione delle varietà toriche stabiliscono una corrispondenza tra esse e i coni convessi di un reticolo (o, più generalmente i "fan" di coni convessi). Un aspetto interessante riguarda il fatto che si possono utilizzare strumenti della geometria algebrica per descrivere certe proprietà di questi convessi e viceversa, stabilendo così un dizionario tra proprietà geometriche della varietà toriche e combinatorie dei fan associati. Ci soffermeremo su alcuni di questi collegamenti considerando oggetti geometrici, come i coni poliedrali, ed algebrici, o i semi-gruppi affini. Quando si considerano le varietà toriche ci sono infatti due aspetti che devono essere contemplati. Il primo definisce una varietà torica come una varietà algebrica su cui agisce un toro complesso. Il secondo modo, più algebrico, concerne nel vedere le varietà toriche come varietà algebriche definite da un ideale generato da binomi i cui esponenti hanno particolari proprietà correlate al semigrupp affino e dunque al sottoreticolo relativo ad una varietà. Una varietà torica  $X$  risulta allora univocamente determinata dalle liste degli esponenti dei monomi della parametrizzazione o, equivalentemente, dai monomi che costituiscono i binomi dell'ideale. E' quindi naturale studiare tali varietà considerando le liste di esponenti come punti di un reticolo e analizzare le proprietà delle prime mediante quelle del secondo, coinvolgendo dunque anche strumenti e risultati della geometria convessa.

Nel primo capitolo si introducono i coni convessi che sono la struttura combinatoria di base per la trattazione delle varietà toriche. Nel secondo capitolo

si parla di varietà toriche affini e dei vari metodi che si possono utilizzare per arrivare alla costruzione di esse: dai coni convessi alle algebre di semigrupp. Nel terzo capitolo si studiano le varietà toriche proiettive e come esse si possano creare a partire da fan di coni. Si parlerà quindi di come a partire da particolari politopi convessi detti "molto ampi" si possa arrivare a definire un fan di coni e quindi da esso una varietà torica proiettiva. Infine nel quarto capitolo si studiano le singolarità delle varietà toriche facendo uso in un modo sorprendente degli strumenti di combinatoria introdotti nei capitoli precedenti. Questo permette di avere un primo riscontro concreto dell'utilità della geometria torica e degli aspetti di combinatoria sviluppati nella tesi, per affrontare questioni di interesse classico in geometria algebrica: lo studio delle singolarità delle varietà e la ricerca di una tecnica per eliminarle.

E' importante ricordare che il continuo collegamento tra geometria algebrica e algebra combinatoria ha portato a molti sviluppi in questi e altri ambiti della matematica. L'interesse per le varietà algebriche con una struttura combinatoria si è accentuato negli ultimi anni anche a causa dell' applicabilità degli aspetti combinatori in contesti computazionali e algoritmici. Questo ha messo in luce un punto di incontro tra geometria algebrica e altri settori apparentemente alieni da essa come la robotica e la crittografia. L'aspetto interessante di questo studio è dunque quello di essere collegato a tanti ambiti della matematica, da quelli più teorici a quelli più applicati, rendendolo un'ottima palestra per la creatività e l'innovazione matematica.

# Indice





# Elenco delle figure



# Capitolo 1

## Coni e oggetti combinatori

In questo primo capitolo si introducono i coni poliedrali razionali, oggetti combinatori che si riveleranno fondamentali per la trattazione delle varietà toriche.

### 1.1 Coni poliedrali convessi

Si fissi una coppia di spazi vettoriali duali  $M_{\mathbb{R}}$  e  $N_{\mathbb{R}}$ .

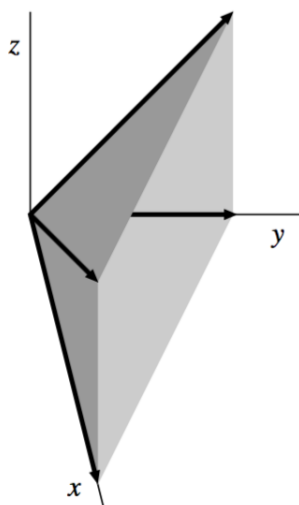
**Definizione 1.1.** Un **cono poliedrale convesso** in  $N_{\mathbb{R}}$  è un insieme della forma

$$\sigma = \text{Cone}(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

dove  $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$  è finito. Diciamo che  $\sigma$  è **generato** da  $S$ . Poniamo infine  $\text{Cone}(\emptyset) = 0$ .

Un cono poliedrale convesso  $\sigma$  è infatti *convesso*, cioè presi  $x, y \in \sigma$  si ha che  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \sigma$  per ogni  $0 \leq \lambda \leq 1$ , ed è un *cono* cioè se  $x \in \sigma$  allora  $\lambda x \in \sigma$  per ogni  $\lambda \geq 0$ . Siccome si considerano solo coni convessi, i coni che soddisfano la definizione ?? verranno chiamati semplicemente *coni poliedrali*.

Un esempio di cono poliedrale è il cono  $\text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$  che è rappresentato nella figura seguente.

Figura 1.1: *Cono poliedrale*

E' anche possibile realizzare coni che contengono intere rette, per esempio il cono  $Cone(e_1, -e_1) \subseteq \mathbb{R}^2$  che è l'asse  $x$ , mentre il cono  $Cone(e_1, -e_1, e_2)$  è il semipiano chiuso superiore  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ . Si possono anche creare coni usando politopi, definendoli come segue.

**Definizione 1.2.** Un **politopo** in  $N_{\mathbb{R}}$  è un insieme della forma

$$P = Conv(S) = \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0, \sum_{u \in S} \lambda_u = 1 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}},$$

dove  $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$  è finito. Diciamo che  $P$  è l'involuppo convesso di  $S$ .

I politopi includono poligoni di  $\mathbb{R}^2$  e poliedri in  $\mathbb{R}^3$ . Come si vedrà nei prossimi capitoli, i politopi hanno un ruolo cruciale nella teoria delle varietà toriche. Qui ci si limita a osservare che un politopo  $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$  genera un cono poliedrale  $C(P) \subseteq N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ , chiamato *cono di  $P$*  e definito da

$$C(P) = \{ \lambda \cdot (u, 1) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \mid u \in P, \lambda \geq 0 \}.$$

Se  $P = Conv(S)$ , allora è possibile descrivere questo come  $C(P) = Cone(S \times \{1\})$ . La figura ?? mostra come appare questo tipo di cono  $C(P)$  nel caso in cui  $P$  è un pentagono nel piano.

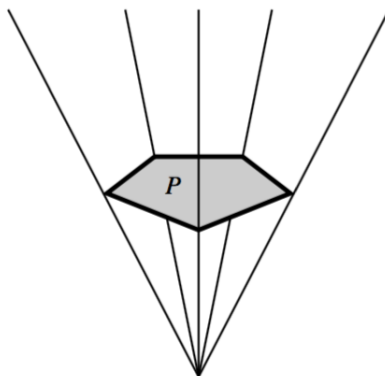


Figura 1.2: Cono poliedrale generato da pentagono

La *dimensione*  $\dim \sigma$  di un cono poliedrale  $\sigma$  è la dimensione del più piccolo sottospazio  $W = \text{span}(\sigma)$  di  $N_{\mathbb{R}}$  contenente  $\sigma$ . Si chiama  $\text{Span}(\sigma)$  lo *span* di  $\sigma$ .

## 1.2 Coni duali e facce

Come di consueto il prodotto scalare tra  $M_{\mathbb{R}}$  e  $N_{\mathbb{R}}$  è denotato con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definizione 1.3.** Dato un cono poliedrale  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ , il suo **cono duale** è definito da

$$\sigma^{\vee} = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ per ogni } u \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$$

La dualità ha le seguenti importanti proprietà.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono poliedrale. Allora  $\sigma^{\vee}$  è un cono poliedrale in  $M_{\mathbb{R}}$  e  $(\sigma^{\vee})^{\vee} = \sigma$ .*

Dato  $m \neq 0$  in  $M_{\mathbb{R}}$ , si ottiene l'iperpiano

$$H_m = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

e il semispazio chiuso

$$H_m^+ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq 0\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

Allora  $H_m$  è l'iperpiano di supporto di un cono poliedrale  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  se  $\sigma \subseteq H_m^+$ , mentre  $H_m^+$  è il semispazio di supporto. Si noti che  $H_m$  è un iperpiano di supporto

di  $\sigma$  se e solo se  $m \in \sigma^\vee \setminus \{0\}$ . Inoltre se  $m_1, \dots, m_s$  generano  $\sigma^\vee$ , allora è immediato verificare che

$$\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+.$$

Quindi ogni cono poliedrale è l'intersezione di una quantità finita di semispazi chiusi. Si possono usare iperpiani di supporto e semispazi per definire le *facce* di un cono.

**Definizione 1.4.** Una **faccia** di un cono poliedrale è  $\tau = H_m \cap \sigma$  per un qualche  $m \in \sigma^\vee$ , e scriviamo  $\tau \preceq \sigma$ . Usando  $m = 0$  si mostra che  $\sigma$  è faccia di se stesso, cioè  $\sigma \preceq \sigma$ . Le facce  $\tau \neq \sigma$  vengono chiamate **facce proprie** e si indicano con  $\tau \prec \sigma$ .

Le facce di un cono poliedrale hanno le seguenti proprietà.

**Lemma 1.2.2.** *Sia  $\sigma = \text{Cone}(S)$  un cono poliedrale. Allora:*

- (a) *Ogni faccia di  $\sigma$  è un cono poliedrale.*
- (b) *L'intersezione di due facce di  $\sigma$  è ancora una faccia di  $\sigma$ .*
- (c) *La faccia di una faccia di  $\sigma$  è ancora una faccia di  $\sigma$ .*

**Definizione 1.5.** Una *facet* (*facchetta*) di  $\sigma$  è una faccia  $\tau$  di codimensione 1, cioè tale che la  $\dim \tau = \dim \sigma - 1$ . Un edge o lato di  $\sigma$  è una faccia di dimensione 1.

Nella figura ?? vediamo un cono tridimensionale con le facet evidenziate in grigio e l'iperpiano di supporto (un piano in questo caso) che mette in evidenza l'edge verticale del cono.

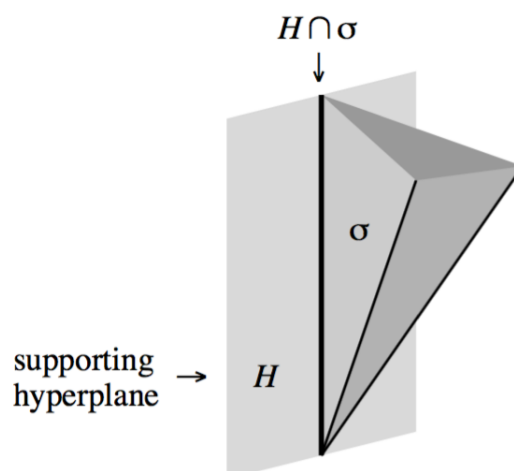


Figura 1.3: Cono tridimensionale con facet e iperpiano di supporto

Qui sono elencate alcune proprietà delle facet del cono.

**Proposizione 1.2.3.** Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cono poliedrale. Allora:

- (a) Se  $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+$  per  $m_i \in \sigma^\vee$ ,  $1 \leq i \leq s$ , allora  $\sigma^\vee = \text{Cone}(m_1, \dots, m_s)$ .
- (b) Se  $\dim \sigma = n$ , allora in (a) possiamo assumere che le facet di  $\sigma$  siano  $\tau_i = H_{m_i} \cap \sigma$ .
- (c) Ogni faccia propria  $\tau \prec \sigma$  è l'intersezione delle facet di  $\sigma$  contenenti  $\tau$ .

Si noti che il punto (b) della proposizione ?? raffina  $\sigma = H_{m_1}^+ \cap \dots \cap H_{m_s}^+$  quando la  $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$ . Quando si lavora in  $\mathbb{R}^n$  il prodotto scalare ci permette di identificare il duale con  $\mathbb{R}^n$ . Da questo punto di vista i vettori  $m_1, \dots, m_s$  della parte (a) della proposizione ?? sono le *facce normali*, cioè quelle perpendicolari alle facet. Questo consente di realizzare facilmente degli esempi.

**Esempio 1.2.4.** E' facile notare che le facce normali al cono  $\sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  della figura ?? sono  $m_1 = e_1, m_2 = e_2, m_3 = e_3, m_4 = e_1 + e_2 - e_3$ . Quindi

$$\sigma^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3) \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Questo cono appare così.

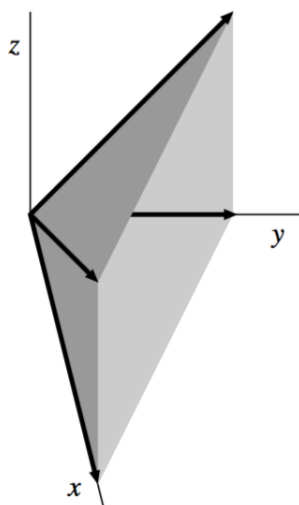


Figura 1.4: Cono poliedrale

Ora consideriamo  $\sigma^\vee$ , che è il cono in figura sopra. Si può verificare che le facce normali a questo cono sono  $e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3$ . Usando la dualità e la parte (a) della proposizione ?? otteniamo

$$\sigma = (\sigma^\vee)^\vee = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3).$$

In questo esempio, facet del cono corrispondono agli edge del suo duale. Più genericamente, data una faccia  $\tau \preceq \sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ , definiamo

$$\tau^\perp = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = 0 \text{ per ogni } u \in \tau\}$$

$$\tau^* = \{m \in \sigma^\vee \mid \langle m, u \rangle \text{ per ogni } u \in \tau\} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp.$$

Chiamiamo  $\tau^*$  la faccia duale di  $\tau$  dalla seguente proposizione.

**Proposizione 1.2.5.** Se  $\tau$  è una faccia di un cono poliedrale  $\sigma$  e  $\tau^* = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ , allora:

- (a)  $\tau^*$  è una faccia di  $\sigma^\vee$ .
- (b) La mappa  $\tau \mapsto \tau^*$  è una corrispondenza biunivoca che ribalta le inclusioni tra le facce di  $\sigma$  e le facce di  $\sigma^\vee$ .
- (c)  $\dim \tau + \dim \tau^* = n$ .

Questo è un esempio della proposizione ?? quando la  $\dim \sigma < \dim N_{\mathbb{R}}$

**Esempio 1.2.6.** Sia  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^3$ . La figura ?? mostra  $\sigma$  e  $\sigma^\vee$ .



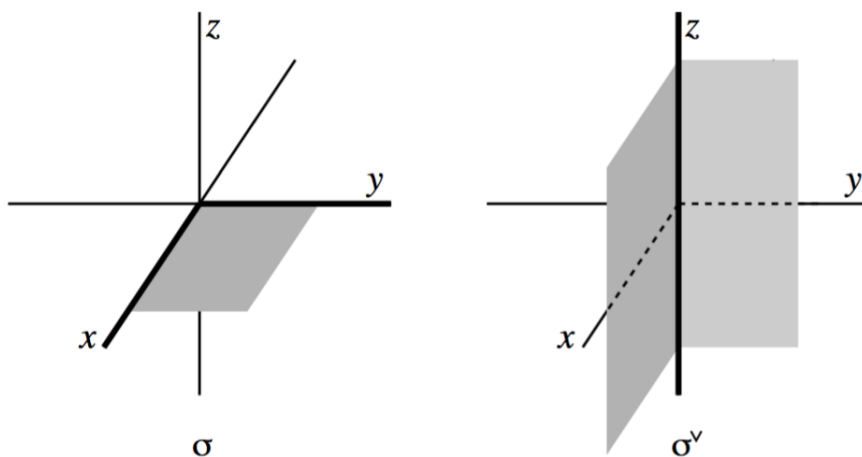


Figura 1.5: Un cono bidimensionale  $\sigma$  e il suo duale  $\sigma^\vee$

Si può verificare che la faccia massimale di  $\sigma$ , che è  $\sigma$  stessa, corrisponde alla faccia minimale  $\sigma^*$  di  $\sigma^\vee$ , cioè l'asse  $z$ . Notiamo inoltre che

$$\dim \sigma + \dim \sigma^* = 3$$

anche se  $\sigma$  ha dimensione 2.

### 1.3 Stretta convessità

Dei coni mostrati nelle figure 1-5, tutti tranne  $\sigma^\vee$  in Figura 5 hanno la bella proprietà di avere l'origine come faccia. Coni di questo tipo sono detti *strettamente convessi*. Questa condizione può essere enunciata in svariati modi.

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cono poliedrale. Allora:*

*$\sigma$  è strettamente convesso  $\iff \{0\}$  è una faccia di  $\sigma \iff \sigma$  non contiene sottospazi di  $N_{\mathbb{R}}$  di dimensione positiva  $\iff \sigma \cap (-\sigma) = \{0\} \iff \dim \sigma^\vee = n$ .*

Esempi di coni poliedrali strettamente convessi sono quelli di ?? e ??, mentre il cono  $\text{Cone}(e_1, -e_1) \subseteq \mathbb{R}^2$  che è l'asse  $x$  e il cono  $\text{Cone}(e_1, -e_1, e_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ , che è il semipiano chiuso superiore di  $\mathbb{R}^2$ , non sono strettamente convessi.

## 1.4 Separazione

**Definizione 1.6.** Come già notato, lo *span* del cono  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  è il più piccolo sottospazio di  $N_{\mathbb{R}}$  contenente  $\sigma$ . Quindi l'*interno relativo* di  $\sigma$ , denotato con  $\text{Relint}(\sigma)$ , è l'interno di  $\sigma$  nel suo span.

$\text{Relint}(\sigma)$  si può caratterizzare in questo modo:

$$u \in \text{Relint}(\sigma) \iff \langle m, u \rangle > 0 \text{ per ogni } m \in \sigma^{\vee} \setminus \sigma^{\perp}.$$

Quando lo span coincide con  $N_{\mathbb{R}}$ , l'interno relativo di  $\sigma$  è semplicemente l'interno di  $\sigma$ , denotato con  $\text{Int}(\sigma)$ . Abbiamo quindi gli strumenti necessari per parlare di *separazione*. Quando due coni si intersecano in una faccia di ognuno, possiamo separare i coni con il seguente risultato, spesso chiamato *lemma di separazione*.

**Lemma 1.4.1** (Lemma di separazione). *Siano  $\sigma_1, \sigma_2$  coni poliedrali in  $N_{\mathbb{R}}$  che si incontrano lungo una faccia comune  $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ . Allora*

$$\tau = H_m \cap \sigma_1 = H_m \cap \sigma_2$$

per ogni  $m \in \text{Relint}(\sigma_1^{\vee} \cap (-\sigma_2)^{\vee})$ .

Nella situazione del Lemma ?? chiamiamo  $H_m$  *iperpiano separatore*.

## 1.5 Coni poliedrali razionali

**Definizione 1.7.** Un **reticolo** in questa trattazione è un gruppo abeliano libero di rango finito. Quindi un reticolo di rango  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .

**Definizione 1.8** (Semigrupp Affine). Un *semigrupp* è un insieme  $S$  con un'operazione binaria associativa e un elemento neutro. Per essere un *semigrupp affine* richiediamo che:

- L'operazione binaria su  $S$  sia commutativa. Scriveremo l'operazione come  $+$  e l'elemento neutro come  $0$ . Quindi un insieme finito  $\mathcal{A} \subseteq S$  genera il sotto-semigrupp

$$\mathbb{N}\mathcal{A} = \left\{ \sum_{m \in \mathcal{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N} \right\} \subseteq S$$

- Il semigrupp è finitamente generato, cioè esiste un insieme finito  $\mathcal{A} \subseteq S$  tale che  $\mathbb{N}\mathcal{A} = S$ .

- Il semigruppò può essere immerso in un reticolo.

Il più semplice esempio di semigruppò affine è  $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$ . Più genericamente, dato un reticolo  $M$  e un sottoinsieme finito  $\mathcal{A} \subseteq M$ , otteniamo il semigruppò affine  $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq M$ . A meno di isomorfismi, tutti i semigruppò affini sono di questa forma.

Siano  $N$  e  $M$  due reticoli duali con spazi vettoriali associati  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  e  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Per  $\mathbb{R}^n$  solitamente usiamo il reticolo  $\mathbb{Z}^n$ .

**Definizione 1.9.** Un cono poliedrale  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  è **razionale** se  $\sigma = \text{Cone}(S)$  per un sottoinsieme  $S \subseteq N$ .

I coni delle figure ??, ??, ?? sono razionali. Notiamo che facet e duali di coni poliedrali razionali sono razionali. Una nuova caratteristica dei coni poliedrali razionali è che un cono poliedrale razionale strettamente convesso  $\sigma$  ha un insieme generatore canonico, costruito come segue. Sia  $\rho$  un lato di  $\sigma$ . Siccome  $\sigma$  è strettamente convesso allora  $\rho$  è un raggio cioè una semiretta, e siccome  $\rho$  è razionale essendo faccia di un cono poliedrale razionale, il semigruppò  $\rho \cap N$  è generato da un unico elemento  $u_{\rho} \in \rho \cap N$ . Chiamiamo  $u_{\rho}$  il raggio generatore di  $\rho$ . La figura ?? mostra il raggio generatore di un raggio razionale  $\rho$  nel piano.

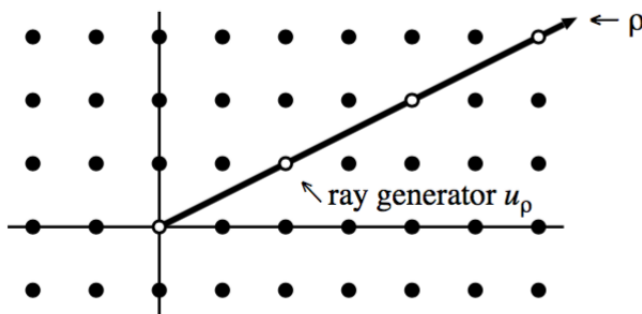


Figura 1.6: Un raggio razionale  $\rho \subseteq \mathbb{R}^2$  e il suo unico raggio generatore  $u_{\rho}$

I punti sono quelli del reticolo  $N = \mathbb{Z}^2$  e quelli bianchi sono quelli di  $\rho \cap N$ .

**Lemma 1.5.1.** Un cono poliedrale razionale strettamente convesso è generato dai raggi generatori dei suoi lati.

E' abitudine chiamare i raggi generatori dei lati i *generatori minimali* di un cono poliedrale razionale strettamente convesso. La figura ?? mostra un cono po-

liedrale razionale strettamente convesso tridimensionale e i suoi raggi generatori.

In un modo simile, un cono poliedrale razionale  $\sigma$  di dimensione massima ha delle facet normali che sono uniche e sono i raggi generatori del duale  $\sigma^\vee$ , che è strettamente convesso dalla proposizione ??.

I seguenti sono coni strettamente convessi particolarmente importanti.

**Definizione 1.10.** Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono poliedrale razionale strettamente convesso.

- (a)  $\sigma$  è **liscio** o **regolare** se i suoi generatori minimali formano parte di una  $\mathbb{Z}$ -base di  $N$ .
- (b)  $\sigma$  è **simpliciale** se i suoi generatori minimali sono linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ .

E' chiaro che la condizione (a) implica la (b); quindi un cono liscio è anche simpliciale. Il cono rappresentato in figura ?? è liscio, mentre quelli in figura ??, ?? non sono neanche simpliciali. Si noti anche che il duale di un cono liscio (rispettivamente simpliciale) di dimensione massimale è ancora liscio (rispettivamente simpliciale). Viene qui di seguito esibito un esempio di un cono simpliciale che non è liscio.

**Esempio 1.5.2.** *Se consideriamo in  $\mathbb{R}^2$  il reticolo  $\mathbb{Z}^2$  è evidente che  $\text{Cone}(S)$  dove  $S = \{(1, 0), (1, 2)\}$  è tale che  $S$  è costituito da vettori linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$  ma essi non formano una  $\mathbb{Z}$  base di  $\mathbb{Z}^2$ .*

# Capitolo 2

## Introduzione alle Varietà Toriche Affini

In questo capitolo si chiarirà il concetto di "toro" e si analizzeranno costruzioni differenti delle varietà toriche affini.

### 2.1 Il Toro

La varietà affine  $(\mathbb{C}^*)^n$  è un gruppo con l'operazione di moltiplicazione componente per componente. Un *toro*  $T$  è una varietà affine isomorfa a  $(\mathbb{C}^*)^n$ , dove il *toro*  $T$  eredita la struttura di gruppo dall'isomorfismo.

Iniziamo con i *caratteri* e i *sottogruppi a un parametro*.

**Definizione 2.1.** Un *carattere* di un toro  $T$  è un morfismo  $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  che è un omomorfismo di gruppi.

Per esempio,  $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  fornisce il carattere  $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$  definito da

$$\chi^m(t_1, \dots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}.$$

Si può mostrare che *tutti* i caratteri di  $(\mathbb{C}^*)^n$  sono di questo tipo e formano un gruppo isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ .

Per un toro arbitrario  $T$ , i suoi caratteri formano un gruppo abeliano libero  $M$  di rango uguale alla dimensione di  $T$ . Si dice che  $m \in M$  corrisponde al carattere  $\chi^m : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Enunciamo il seguente risultato riguardante i tori.

**Proposizione 2.1.1.** (a) *Siano  $T_1$  e  $T_2$  tori e sia  $\phi : T_1 \rightarrow T_2$  un morfismo che sia un omomorfismo di gruppi. Allora l'immagine di  $\phi$  è un toro ed è chiuso in  $T_2$ .*

(b) Sia  $T$  un toro e sia  $H \subseteq T$  una sottovarietà irriducibile di  $T$  che sia un sottogruppo. Allora  $H$  è un toro.

Notare che l'ipotesi di irriducibilità è necessaria in quanto il sottogruppo finito  $z^m = 1$  in  $\mathbb{C}^*$ , non irriducibile, non è un toro. Assumiamo che un toro  $T$  agisca linearmente su uno spazio vettoriale finito dimensionale  $W$  su  $\mathbb{C}$ , dove l'azione di  $t \in T$  su  $w \in W$  è denotata con  $t \cdot w$ . Un risultato di base è che le mappe lineari  $w \mapsto t \cdot w$  sono diagonalizzabili e possono essere simultaneamente diagonalizzate. Per descrivere questo procediamo così. Dato  $m \in M$ , definiamo l'autospazio

$$W_m = \{w \in W \mid t \cdot w = \chi^m(t)w \text{ per ogni } t \in T\}.$$

Se  $W_m \neq \{0\}$ , allora ogni  $w \in W_m \setminus \{0\}$  è un autovettore simultaneo per ogni  $t \in T$ , con autovalori dati da  $\chi^m(t)$ .

**Proposizione 2.1.2.** Nella situazione appena descritta, abbiamo  $W = \bigoplus_{m \in M} W_m$ .

**Definizione 2.2.** Un sottogruppo a un parametro di un toro  $T$  è un morfismo  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow T$  che è un omomorfismo di gruppi.

Per esempio,  $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$  fornisce un sottogruppo a un parametro  $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$  definito da

$$\lambda^u(t) = (t^{b_1}, \dots, t^{b_n}).$$

Tutti i sottogruppi a un parametro di  $(\mathbb{C}^*)^n$  sono fatti così. Segue che il gruppo dei sottogruppi a un parametro di  $(\mathbb{C}^*)^n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ . Per un toro arbitrario  $T$ , i sottogruppi a un parametro formano un gruppo abeliano libero  $N$  di rango uguale alla dimensione di  $T$ . Come per il gruppo dei caratteri, un elemento  $u \in N$  corrisponde a un sottogruppo a un parametro  $\lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow T$ . Vi è un prodotto scalare naturale  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  definito come segue.

- (Intrinseco) Dato una carattere  $\chi^m$  e un sottogruppo  $\lambda^u$ , la composizione  $\chi^m \circ \lambda^u : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  è un carattere di  $\mathbb{C}^*$ , che è dato da  $t \mapsto t^l$  per un certo  $l \in \mathbb{Z}$ . Quindi  $\langle m, u \rangle = l$ .
- (Concreto) Se  $T = (\mathbb{C}^*)^n$ ,  $m = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $u = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ , allora si calcola che

$$\langle m, u \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i,$$

cioè l'usuale prodotto scalare.

Segue che i caratteri e i sottogruppi a un parametro di un toro  $T$  formano gruppi abeliani liberi  $M$  e  $N$  di rango finito con un prodotto scalare  $\langle, \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  che identifica  $N$  con  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$  e  $M$  con  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ . E' dunque opportuno indicare il toro con  $T_N$ . Quindi, considerando l'isomorfismo  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ , vengono indotti gli isomorfismi  $M \simeq \mathbb{Z}^n$  e  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  che identificano i caratteri con i monomi di Laurent, i sottogruppi a un parametro con le curve monomiali e  $\langle, \rangle$  con l'usuale prodotto scalare.

## 2.2 Definizione astratta di Varietà Torica Affine

Possiamo ora definire il principale oggetto di interesse del capitolo.

**Definizione 2.3.** Una **varietà torica affine** è una varietà algebrica affine irriducibile  $V$  tale che

- $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$  è un sottoinsieme aperto rispetto alla topologia di Zariski di  $V$
- l'azione di  $T_N$  su se stesso si estende in modo naturale a una azione di  $T_N$  su  $V$ . (In questo caso con azione si intende quella data dalla struttura di gruppo cioè quella data dal morfismo  $T_N \times V \rightarrow V$  dove la coppia  $(t, v)$  viene mandata in  $t \cdot v$  e dove  $\cdot$  è l'operazione di gruppo ereditata da  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ ).

**Esempio 2.2.1.** Consideriamo  $A^2(\mathbb{C})$ , cioè lo spazio affine bidimensionale; è una varietà torica affine di dimensione 2 poiché  $A^2(\mathbb{C}) \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\}) \simeq (\mathbb{C}^*)^2$  è un sottoinsieme aperto per Zariski di  $A^2(\mathbb{C})$  e l'estensione dell'azione  $T_N \times A^2(\mathbb{C}) \rightarrow A^2(\mathbb{C})$  manda  $(t_1, t_2), (x, y)$  in  $(t_1 \cdot x, t_2 \cdot y)$ .

**Esempio 2.2.2.** La varietà  $V = \mathbf{V}(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$  è un altro esempio di varietà torica affine di dimensione 3 con toro

$$V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1}) \mid t_i \in \mathbb{C}^*\} \simeq (\mathbb{C}^*)^3,$$

dove l'isomorfismo è  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$ .

Esploriamo ora dei modi equivalenti per costruire varietà toriche affini.

## 2.3 Reticoli

In questo contesto, come già detto, un *reticolo* è un gruppo abeliano libero di rango finito. Quindi un reticolo di rango  $n$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ . Per esempio, un toro

$T_N$  ha reticoli  $M$  (dei caratteri) e  $N$  (dei sottogruppi a un parametro). Dato un toro  $T_N$  con reticolo dei caratteri  $M$ , un insieme  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$  definisce i caratteri  $\chi^{m_i} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Consideriamo quindi la mappa

$$\phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^s \quad (2.1)$$

definita da

$$\phi_{\mathcal{A}}(t) = (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{C}^s.$$

**Definizione 2.4.** Dato un insieme finito  $\mathcal{A} \subseteq M$ , la varietà torica affine  $Y_{\mathcal{A}}$  è definita dalla chiusura di Zariski dell'immagine della mappa  $\phi_{\mathcal{A}}$  da ??.

La definizione è giustificata dalla seguente proposizione.

**Proposizione 2.3.1.** *Dato  $\mathcal{A} \subseteq M$  come sopra, poniamo  $\mathbb{Z}\mathcal{A} \subseteq M$ , il sottoreticolo generato da  $\mathcal{A}$ . Quindi  $Y_{\mathcal{A}}$  è una varietà torica affine il cui toro ha reticolo dei caratteri  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ . In particolare la dimensione di  $Y_{\mathcal{A}}$  è il rango di  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ .*

*Dimostrazione.* La mappa ?? può essere rivista come mappa di tori

$$\phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^s.$$

Dalla proposizione ??, l'immagine  $T = \phi_{\mathcal{A}}(T_N)$  è un toro che è chiuso in  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Quest'ultimo fatto implica che  $Y_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s = T$  siccome  $Y_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine. Segue che l'immagine è aperta rispetto a Zariski in  $Y_{\mathcal{A}}$ . Inoltre,  $T$  è irriducibile (è un toro), quindi la stessa cosa vale per la sua chiusura di Zariski  $Y_{\mathcal{A}}$ .

Consideriamo ora l'azione di  $T$ . Siccome  $T \subseteq (\mathbb{C}^*)^s$ , un elemento  $t \in T$  agisce su  $\mathbb{C}^s$  e porta varietà in varietà. Allora

$$T = t \cdot T \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$$

mostra che  $t \cdot Y_{\mathcal{A}}$  è una varietà contenente  $T$ . D'altra parte  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq t \cdot Y_{\mathcal{A}}$  per definizione di chiusura di Zariski. Sostituendo a  $t, t^{-1}$  si ha che  $t \cdot Y_{\mathcal{A}} \subseteq Y_{\mathcal{A}}$ , quindi in definitiva  $Y_{\mathcal{A}} = t \cdot Y_{\mathcal{A}}$  e l'azione di  $T$  induce un'azione su  $Y_{\mathcal{A}}$ . Concludiamo che  $Y_{\mathcal{A}}$  è una varietà torica affine.

Resta da calcolare il reticolo dei caratteri di  $T$  che denotiamo con  $M'$ . Siccome  $T = \phi_{\mathcal{A}}(T_N)$ , la mappa  $\phi_{\mathcal{A}}$  costituisce il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} T_N & \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} & (\mathbb{C}^*)^s \\ \text{su} \downarrow & \nearrow 1-1 & \\ T & & \end{array}$$



Questo diagramma di tori induce un diagramma commutativo tra i reticoli dei caratteri.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s & \xrightarrow{\widehat{\phi}_{\mathcal{A}}} & M \\ su \downarrow & \nearrow 1-1 & \\ M' & & \end{array}$$

Siccome  $\widehat{\phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \rightarrow M$  porta la base standard  $e_1, \dots, e_s$  in  $m_1, \dots, m_s$ , l'immagine di  $\widehat{\phi}_{\mathcal{A}}$  è  $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ . Quindi il diagramma può essere visto così.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^s & \xrightarrow[\text{su}]{\widehat{\phi}_{\mathcal{A}}} & \mathbb{Z}\mathcal{A} \\ su \downarrow & \nearrow \cong & \\ M' & & \end{array}$$

Dal diagramma, otteniamo  $M' \simeq \mathbb{Z}\mathcal{A}$ . Si è giunti dunque a dimostrare la tesi in quanto la dimensione del toro eguaglia il rango del suo reticolo dei caratteri.  $\square$

Più semplicemente, fissando una base di  $M$ , possiamo assumere  $M = \mathbb{Z}^n$ . Quindi gli  $s$  vettori di  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$  possono essere visti come le colonne di una matrice  $A$   $n \times s$  con coefficienti interi. In questo caso la dimensione di  $Y_{\mathcal{A}}$  è semplicemente il rango della matrice  $A$ .

Vedremo in seguito che ogni varietà torica affine è isomorfa a  $Y_{\mathcal{A}}$  per un sottoinsieme finito  $\mathcal{A}$  in un reticolo.

## 2.4 Ideali torici

Prima di esporre l'argomento centrale di questo paragrafo si ricordi che per comprendere il significato della notazione  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  procediamo così: dopo aver scritto  $\mathbb{C}[S]$  come quoziente di anello di polinomi con un ideale  $I$ , e posto  $\mathbf{V}(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0 \text{ per ogni } f \in I\}$ , questi sono i punti chiusi di  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$ , che saranno i soli di cui dovremo occuparci. In pratica ad ogni  $\mathbb{C}$ -algebra finitamente generata che si può scrivere come quoziente di anello di polinomi facciamo corrispondere la varietà data dagli zeri dell'equazione che definisce l'ideale.

Quindi consideriamo  $\mathbb{C}^s = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s])$ , infatti  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]/(0)$  e ovviamente  $V(I) = V(0) = \mathbb{C}^s$ .  $Y_{\mathcal{A}}$  è una varietà torica affine che proviene da un insieme finito  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ . Possiamo descrivere l'ideale

$\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$  come segue. Come nella dimostrazione della proposizione ??,  $\phi_{\mathcal{A}}$  induce una mappa tra i reticoli dei caratteri

$$\widehat{\phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \longrightarrow M$$

che manda la base standard  $e_1, \dots, e_s$  in  $m_1, \dots, m_s$ . Sia  $L$  il kernel di questa mappa; si può allora costruire la seguente sequenza esatta

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathbb{Z}^s \longrightarrow M.$$

Più concretamente, gli elementi  $l = (l_1, \dots, l_s)$  di  $L$  soddisfano  $\sum_{i=1}^s l_i m_i = 0$  e questo implica la relazione sugli  $m_i$ . Dato  $l = (l_1, \dots, l_s) \in L$ , si pone

$$l_+ = \sum_{l_i > 0} l_i e_i \quad e \quad l_- = - \sum_{l_i < 0} l_i e_i.$$

Notiamo che  $l = l_+ - l_-$  e che  $l_+, l_- \in \mathbb{N}^s$ . Segue facilmente che il binomio

$$x^{l_+} - x^{l_-} = \prod_{l_i > 0} x_i^{l_i} - \prod_{l_i < 0} x_i^{-l_i}$$

si annulla sull'immagine di  $\phi_{\mathcal{A}}$  e quindi su  $Y_{\mathcal{A}}$  dato che  $Y_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine.

**Proposizione 2.4.1.** *L'ideale della varietà torica affine  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$  è*

$$\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^{l_+} - x^{l_-} \mid l \in L \rangle = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ e } \alpha - \beta \in L \rangle.$$

*Dimostrazione.* L'uguaglianza dei due ideali risulta piuttosto evidente. Denotiamo l'ideale a destra dell'uguaglianza con  $I_L$ . Ricordiamo che  $\mathbf{I}(V) = \{f \in S \mid f(p) = 0 \text{ per ogni } p \in V\}$ . Quindi per definizione di  $L$ , in quanto ker della mappa  $\widehat{\phi}_{\mathcal{A}} : \mathbb{Z}^s \longrightarrow M$ , risulta subito che  $I_L \subseteq \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ . Dobbiamo provare l'inclusione opposta. Scegliamo un ordine monomiale  $>$  su  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$  e un isomorfismo  $T_N \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ . Allora possiamo assumere che  $M = \mathbb{Z}^n$  e che la mappa  $\phi : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow \mathbb{C}^s$  è data dai monomi di Laurent  $t^{m_i}$  nelle variabili  $t_1, \dots, t_n$ . Se  $I_L \neq \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ , allora possiamo prendere  $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) \setminus I_L$  con monomio principale minimale  $x^\alpha = \prod_{i=1}^s x_i^{\alpha_i}$ . Riscalando se necessario,  $x^\alpha$  diventa il termine principale di  $f$ .  $f(t^{m_1}, \dots, t^{m_s})$  è identicamente nullo come polinomio in  $t_1, \dots, t_n$ , infatti  $f \in \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \mid f(p) = 0 \text{ per ogni } p \in Y_{\mathcal{A}}\}$  e ovviamente  $(t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) \in \phi_{\mathcal{A}}(T_N)$ .

Quindi ci deve essere una cancellazione che coinvolge i termini che provengono da  $x^\alpha$ . In altre parole,  $f$  deve contenere un monomio  $x^\beta = \prod_{i=1}^s x_i^{\beta_i} < x^\alpha$  tale che

$$(t^{m_1})^{\alpha_1} \dots (t^{m_s})^{\alpha_s} = (t^{m_1})^{\beta_1} \dots (t^{m_s})^{\beta_s}$$

Questo implica che

$$\sum_{i=1}^s a_i m_i = \sum_{i=1}^s b_i m_i,$$

così che  $\alpha - \beta = \sum_{i=1}^s (a_i - b_i) e_i \in L$ . Allora  $x^\alpha - x^\beta \in I_L$  dalla seconda descrizione di  $I_L$ . Segue che  $f - x^\alpha + x^\beta \in \mathbf{I}(Y_A) \setminus I_L$  infatti  $f \in \mathbf{I}(Y_A)$ ,  $x^\alpha - x^\beta \in \mathbf{I}(Y_A)$  poichè, preso  $(t^{m_1}, \dots, t^{m_s}) \in \phi_A(T_N)$  allora  $(x^\alpha - x^\beta)_{/(t^{m_1}, \dots, t^{m_s})} = 0$ . Quindi siccome  $f \notin I_L$ ,  $x^\alpha - x^\beta \in I_L$ , se  $f - (x^\alpha - x^\beta) \in I_L$  allora  $f \in I_L$  che non è vero per come è stata scelta  $f$ . Quindi questo prova che  $f - (x^\alpha - x^\beta) \in \mathbf{I}(Y_A) \setminus I_L$ . Tuttavia per costruzione  $f - (x^\alpha - x^\beta)$  ha un termine principale strettamente più piccolo di  $f$  ma  $f$  era stato scelto in  $\mathbf{I}(Y_A) \setminus I_L$  con termine principale minimale. Quindi si deve concludere che  $\mathbf{I}(Y_A) = I_L$ .  $\square$

Dopo aver enunciato la proposizione ?? possiamo dare la seguente definizione.

**Definizione 2.5.** Sia  $L \subseteq \mathbb{Z}^s$  un sottoreticolo.

- (a) L'ideale  $I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ e } \alpha - \beta \in L \rangle$  è chiamato **ideale di reticolo**.
- (b) Un ideale di reticolo *primo* è chiamato **ideale torico**.

Siccome le varietà toriche sono irriducibili per definizione, gli ideali della proposizione ?? sono primi quindi sono ideali torici. Esempi di ideali torici sono:

**Esempio 2.4.2.**  $\langle x^3 - y^2 \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y]$

**Esempio 2.4.3.**  $\langle xz - yw \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z, w]$

**Esempio 2.4.4.**  $\langle x_i x_{j+1} - x_{i+1} x_j \mid 0 \leq i \leq j \leq d \rangle \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_d]$

Come ora mostriamo questi tipi di ideali sono automaticamente ideali torici.

**Proposizione 2.4.5.** Un ideale  $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$  è torico se e solo se è primo e generato da binomi.

*Dimostrazione.* E' ovvio che se un ideale è torico allora è primo (per definizione) e generato da binomi. D'altra parte supponiamo che un ideale  $I$  sia primo e generato da binomi  $x^{\alpha_1} - x^{\beta_1}$ . Poi osserviamo che  $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  è non vuoto (contiene  $(1, \dots, 1)$ ) ed è un sottogruppo di  $(\mathbb{C}^*)^s$ . Siccome  $\mathbf{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^s$  è irriducibile poichè  $I$  è primo, segue che  $\mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  è una sottovarietà irriducibile di  $(\mathbb{C}^*)^s$  che è anche un sottogruppo. Dalla proposizione ?? segue che  $T = \mathbf{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$  è un toro.

Proiettando sulla  $i$ -esima coordinata di  $(\mathbb{C}^*)^s$  otteniamo un carattere  $T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow$

$\mathbb{C}^*$ , che per convenzione scriviamo come  $\chi^{m_i} : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  per  $m_i \in M$ . Segue facilmente che  $\mathbf{V}(I) = Y_{\mathcal{A}}$  per  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ , dove  $Y_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa  $\phi_{\mathcal{A}} : T \rightarrow (\mathbb{C}^*)^s$  e siccome  $I$  è primo, abbiamo che  $I = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$  dal Nullstellensatz. Quindi  $I$  è torico dalla proposizione ??.

Avevamo già dato la definizione di semigruppato e semigruppato affine. Dato un reticolo che identifichiamo con  $\mathbb{Z}^n$  a meno di isomorfismi, se si considera  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$  finito, allora  $\mathbb{N}\mathcal{A} = \{\sum_{m \in \mathcal{A}} a_m m \mid a_m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$  è un semigruppato affine (e a meno di isomorfismi tutti i semigruppato affini sono così fatti).

**Definizione 2.6.** Se  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  per  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq \mathbb{Z}^n$  è un semigruppato affine, allora  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}] = \{\sum_{i=1}^s c_{m_i} \chi^{m_i} \mid c_{m_i} \in \mathbb{C}\}$  è l'algebra del semigruppato ovvero uno  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale su  $S$  con moltiplicazione indotta dalla struttura di semigruppato cioè t.c.  $\chi^{m_1} \cdot \chi^{m_2} = \chi^{m_1+m_2}$ .

In pratica con  $\mathbb{C}[S]$  si indicano le funzioni sulla varietà affine.

**Esempio 2.4.6.** Il semigruppato affine  $\mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{Z}^n$  dà origine all'anello dei polinomi

$$\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],$$

dove  $x_i = \chi^{e_i}$  e  $e_1, \dots, e_n$  è la base standard di  $\mathbb{Z}^n$ .

**Esempio 2.4.7.** Se  $e_1, \dots, e_n$  è una base di un reticolo  $M$ , allora  $M$  è generato da  $\mathcal{A} = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$  come semigruppato affine. Ponendo  $t_i = \chi^{e_i}$  otteniamo l'anello dei polinomi di Laurent

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}].$$

**Esempio 2.4.8.** Sia  $S = \mathbb{N}\{(0, 1), (1, 0)\}$ , allora  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \chi^{m_2}] = \mathbb{C}[x_1, x_2]$ . In questo caso  $\mathcal{A}$  coincide con  $\{(0, 1), (1, 0)\}$  e l'algebra del semigruppato è cosituita dai polinomi a coefficienti complessi nelle indeterminate  $x_1, x_2$ .

Oppure possiamo considerare un esempio dove gli elementi di  $\mathcal{A}$  hanno delle relazioni tra loro, cioè non risultano indipendenti in  $\mathbb{Z}$  come nell'esempio precedente.

**Esempio 2.4.9.** Definiamo  $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), v_3 = (-1, 0), v_4 = (0, -1)$ . Sia  $S = \mathbb{N}\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ , allora  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}]$ : In questo esempio gli elementi di  $\mathcal{A}$  hanno relazioni tra loro ovvero risulta che  $v_1 = -v_3$  e  $v_2 = -v_4$  cioè ci sono delle relazioni tra i generatori e le relazioni tra i generatori

forniscono l'equazione della varietà associata al semigruppone in un qualche senso che sarà chiaro più avanti nella trattazione.

Anelli di semigruppone affini danno origine a varietà toriche affini nel modo seguente.

**Proposizione 2.4.10.** *Sia  $S \subseteq M$  un semigruppone affine. Allora:*

- (a)  $\mathbb{C}[S]$  è un dominio di integrità ed è finitamente generato come  $\mathbb{C}$ -algebra.
- (b)  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  è una varietà torica affine il cui toro ha reticolo dei caratteri  $\mathbb{Z}S$ , e se  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  per un sottoinsieme finito  $\mathcal{A} \subseteq M$ , allora  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$

*Dimostrazione.* Come notato sopra,  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$  implica che  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  e  $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}]$ , così  $\mathbb{C}[S]$  è finitamente generato. Siccome  $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$  dal fatto che  $S \subseteq M$ , vediamo che  $\mathbb{C}[S]$  è un dominio di integrità dall'esempio ??.

Usando  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\}$ , otteniamo l'omomorfismo di  $\mathbb{C}$ -algebre

$$\pi : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] \longrightarrow \mathbb{C}[M]$$

dove  $x_i \mapsto \chi^{m_i} \in \mathbb{C}[M]$ . Questo corrisponde al morfismo

$$\phi_{\mathcal{A}} : T_N \longrightarrow \mathbb{C}^s.$$

Si deve quindi verificare che il ker di  $\pi$  è l'ideale torico  $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ . L'immagine di  $\pi$  è  $\mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}] = \mathbb{C}[S]$ , e quindi l'anello delle coordinate di  $Y_{\mathcal{A}}$  è

$$\mathbb{C}[Y_{\mathcal{A}}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s] / \text{Ker}(\pi) \simeq \text{Im}(\pi) = \mathbb{C}[S].$$

Questo prova che  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S]) = Y_{\mathcal{A}}$ . Siccome  $S = \mathbb{N}\mathcal{A}$  implica che  $\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ , il toro di  $Y_{\mathcal{A}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  ha il reticolo dei caratteri desiderato grazie alla proposizione ??.

Si può vedere un esempio della proposizione appena enunciata.

**Esempio 2.4.11.** *Consideriamo il semigruppone affine  $S \subseteq \mathbb{Z}$  generato da 2 e 3, così risulta  $S = \{0, 2, 3, \dots\}$ . Per studiare l'algebra del semigruppone  $\mathbb{C}[S]$  osserviamo che se  $\mathcal{A} = \{2, 3\}$ , allora  $\phi_{\mathcal{A}}(t) = (t^2, t^3)$  e l'ideale torico è  $\mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}}) = \langle x^3 - y^2 \rangle$ . Quindi*

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \simeq \mathbb{C}[x, y] / \langle x^3 - y^2 \rangle$$

e la varietà torica affine  $Y_{\mathcal{A}}$  è la curva  $x^3 = y^2$ .

## 2.5 Costruzioni equivalenti

Si vuole enunciare il principale risultato del capitolo che afferma che i vari approcci analizzati per studiare le varietà toriche affini conducono tutti alla stessa classe di oggetti. Occorre prima il seguente lemma.

**Lemma 2.5.1.** *Sia  $A \subseteq \mathbb{C}[M]$  un sottospazio stabile sotto l'azione di  $T_N$ . Allora*

$$A = \bigoplus_{\chi^m \in A} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

**Teorema 2.5.2.** *Sia  $V$  una varietà affine. Sono equivalenti le seguenti affermazioni.*

- (a)  $V$  è una varietà torica affine in accordo con la definizione ??
- (b)  $V = Y_{\mathcal{A}}$  per un insieme finito  $\mathcal{A}$  in un reticolo.
- (c)  $V$  è una varietà affine definita da un ideale torico.
- (d)  $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[S])$  per un semigrupp affine  $S$ .

*Dimostrazione.* Le implicazioni (b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Leftrightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (a) seguono dalla proposizione ??, ?? e ??. Per (a)  $\Rightarrow$  (d), sia  $V$  una varietà torica affine contenente il toro  $T_N$  con reticolo dei caratteri  $M$ . Siccome l'anello delle coordinate di  $T_N$  è l'algebra del semigrupp  $\mathbb{C}[M]$ , l'inclusione  $T_N \subseteq V$  induce una mappa tra gli anelli delle coordinate

$$\mathbb{C}[V] \longrightarrow \mathbb{C}[M]$$

Questa mappa è iniettiva poichè  $T_N$  è denso rispetto a Zariski in  $V$ , così che possiamo riguardare  $\mathbb{C}[V]$  come una sottoalgebra di  $\mathbb{C}[M]$

Siccome l'azione di  $T_N$  su  $V$  è data da un morfismo  $T_N \times V \longrightarrow V$ , vediamo che se  $t \in T_N$  e  $f \in \mathbb{C}[V]$ , allora  $p \mapsto f(t^{-1} \cdot p)$  è un morfismo su  $V$ . Segue che  $\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[M]$  è stabile sotto l'azione di  $T_N$ . Dal lemma ?? , otteniamo

$$\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{\chi^m \in \mathbb{C}[V]} \mathbb{C} \cdot \chi^m.$$

Quindi  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[S]$  per il semigrupp  $S = \{m \in M \mid \chi^m \in \mathbb{C}[V]\}$ . Infine, siccome  $\mathbb{C}[V]$  è finitamente generato, si possono trovare  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[V]$  con  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]$ . Esprimendo ogni  $f_i$  in termini dei caratteri come sopra, otteniamo un insieme finito di generatori di  $S$ . Segue che  $S$  è un semigrupp affine.  $\square$

Si provi a pensare alla dimostrazione appena effettuata in questi termini. Quando una varietà affine irriducibile contiene un toro  $T_N$  come sottoinsieme aperto per Zariski, si hanno le inclusioni

$$\mathbb{C}[V] \subseteq \mathbb{C}[M].$$

Quindi  $\mathbb{C}[V]$  consiste di quelle funzioni sul toro  $T_N$  che si estendono a funzioni polinomiali su  $V$ . Quindi il punto chiave è che  $V$  è una varietà torica precisamente quando le funzioni che si estendono sono determinate dai caratteri che si estendono.

**Esempio 2.5.3.** *Si può vedere che  $V = \mathbf{V}(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$  è una varietà torica con ideale torico  $\langle xy - zw \rangle \subseteq \mathbb{C}[x, y, z, w]$ . Il toro è  $(\mathbb{C}^*)^3$  tramite la mappa  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$ . I punti interi usati in questa mappa possono essere rappresentati come le colonne della matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Il corrispondente semigruppò  $S \subseteq \mathbb{Z}^3$  consiste nelle combinazioni  $\mathbb{N}$  lineari dei vettori colonna. Quindi gli elementi di  $S$  sono i punti interi che giacciono nella regione poliedrale in  $\mathbb{R}^3$  rappresentata nella figura ??.*

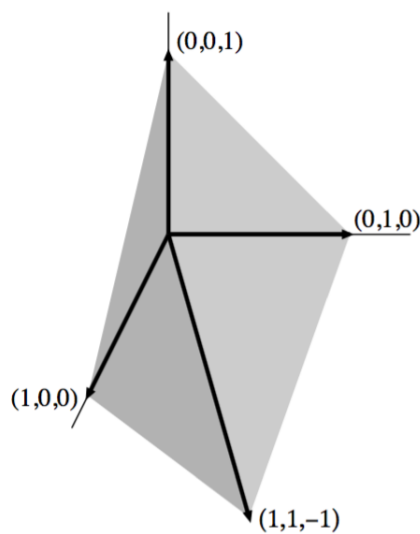


Figura 2.1: *Cono che contiene i punti del reticolo corrispondenti a  $V = \mathbf{V}(xy - zw)$*

In questa figura i quattro vettori che generano  $S$  sono evidenziati in nero, e il bordo della regione poliedrale è parzialmente annerito. Nei termini espressi nel capitolo precedente, la regione poliedrale è un cono poliedrale razionale. Si può vedere che  $S$  consiste in tutti i punti interi che giacciono nel cono in figura 1.

## 2.6 Algebre di semigruppì e varietà toriche affini

Gli strumenti combinatori che abbiamo introdotto nel capitolo 1 sono strumenti fondamentali per arrivare alla costruzione di varietà toriche affini.

Dato un cono poliedrale razionale  $\sigma \subseteq \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ , i punti del reticolo

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M \subseteq M$$

formano un semigruppò. Un fatto non banale è che il semigruppò è finitamente generato.

**Lemma 2.6.1** (Lemma di Gordan).  $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$  è finitamente generato e quindi è un semigruppò affine.

*Dimostrazione.* Siccome  $\sigma$  è poliedrale razionale allora si è visto che anche  $\sigma^{\vee}$  è poliedrale razionale. Dunque  $\sigma = \text{Cone}(T)$  per un insieme finito  $T \subseteq M$ . Quindi  $K = \{\sum_{m \in T} \delta_m m \mid 0 \leq \delta_m < 1\}$  è una regione bordata di  $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$ , così che  $K \cap M$  è finito dato che  $M \simeq \mathbb{Z}^n$ . Notiamo che  $T \cup (K \cap M) \subseteq S_{\sigma}$  genera  $S_{\sigma}$  come semigruppò. Per provare questo, prendiamo  $w \in S_{\sigma}$  e scriviamo  $w = \sum_{m \in T} \lambda_m m$  dove  $\lambda_m \geq 0$ . Quindi  $\lambda_m = [\lambda_m] + \delta_m$  con  $[\lambda_m] \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq \delta_m < 1$ , così che

$$w = \sum_{m \in T} [\lambda_m] m + \sum_{m \in T} \delta_m m.$$

La seconda somma è in  $K \cap M$  (ricordando che  $w \in M$ ). Segue che  $w$  è una combinazione a coefficienti interi non negativi di elementi di  $T \cup (K \cap M)$ .

Siccome semigruppì affini corrispondono a varietà toriche affini, abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 2.6.2.** Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cono poliedrale razionale con semigruppò  $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ . Allora

$$U_{\sigma} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M])$$

è un varietà torica affine. Inoltre,

$\dim U_{\sigma} = n \iff$  il toro di  $U_{\sigma}$  è  $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \iff \sigma$  è strettamente convesso.



*Dimostrazione.* Dal lemma di Gordan e dalla proposizione ??,  $U_\sigma$  è una varietà torica affine il cui toro ha reticolo dei caratteri  $\mathbb{Z}S_\sigma \subseteq M$ . Per studiare  $\mathbb{Z}S_\sigma$ , notiamo che

$$\mathbb{Z}S_\sigma = S_\sigma - S_\sigma = \{m_1 - m_2 \mid m_1, m_2 \in S_\sigma\}.$$

Supponiamo che  $km \in \mathbb{Z}S_\sigma$  per alcuni  $k > 1$  e  $m \in M$ . Allora  $km = m_1 - m_2$  per alcuni  $m_1, m_2 \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Siccome  $m_1$  e  $m_2$  giacciono nell'insieme convesso  $\sigma^\vee$ , abbiamo

$$m + m_2 = \frac{1}{k}m_1 + \frac{k-1}{k}m_2 \in \sigma^\vee.$$

Segue che  $m = (m + m_2) - m_2 \in \mathbb{Z}S_\sigma$ , così che  $M/\mathbb{Z}S_\sigma$  sia privo di torsione. Quindi

$$\text{il toro di } U_\sigma \quad T_N \iff \mathbb{Z}S_\sigma = M \iff \text{il rango di } \mathbb{Z}S_\sigma = n$$

Siccome  $\sigma$  è strettamente convesso se e solo se  $\dim \sigma = n$ , resta da mostrare che

$$\dim U_\sigma = n \iff \text{rango } \mathbb{Z}S_\sigma = n \iff \dim \sigma^\vee = n.$$

La prima equivalenza segue dal fatto che la dimensione di una varietà torica affine è la dimensione del toro, che è il rango del suo reticolo dei caratteri.  $\square$

- Si assuma d'ora in poi che  $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$  sia strettamente convesso siccome vogliamo che  $T_N$  sia il toro di una varietà torica affine  $U_\sigma$ .
- Sembra meno naturale focalizzare l'attenzione su  $\sigma$  dal momento che  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$  rende  $\sigma^\vee$  più importante. La risposta apparirà più chiara quando si vedrà come le varietà toriche proiettive sono costruite a partire da pezzi affini.

**Esempio 2.6.3.** Sia  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Grazie a risultati di combinatoria si ottiene che i vettori normali alle facce (che puntano verso l'interno del cono) sono i generatori del duale  $\sigma^\vee$ . In questo modo i vettori generatori del cono duale sono  $m_1 = (1, 0, 0), m_2 = (0, 1, 0), m_3 = (0, 0, 1), m_4 = (1, 1, -1)$  e questi sono anche i generatori del semigrupp affine  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^3$ . Quindi  $S_\sigma = \mathbb{N}(m_1, m_2, m_3, m_4) = \{a_{m_1}m_1 + a_{m_2}m_2 + a_{m_3}m_3 + a_{m_4}m_4\}$ . Per descrivere  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  usiamo un omomorfismo di  $\mathbb{C}$  algebre così:

$$\alpha : \mathbb{C}[x, y, z, w] \longrightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$$

dove  $x \mapsto t^{m_1}$ ,  $y \mapsto t^{m_2}$ ,  $z \mapsto t^{m_3}$ ,  $w \mapsto t^{m_4}$ . Siccome  $t^{m_1+m_2} - t^{m_3+m_4} = 0$ , allora  $xy - zw \mapsto 0$ . Si deduce quindi che  $\langle xy - zw \rangle \subseteq \text{Ker}\alpha$ ; si può vedere che d'altra parte vale che  $\text{Ker}\alpha \subseteq \langle xy - zw \rangle$ . Dunque  $\text{ker}\alpha = \langle xy - zw \rangle$ . Dunque risulta che  $\mathbb{C}[x, y, z, w]/\langle xy - zw \rangle \cong \mathbb{C}[S_\sigma]$ . Per quanto detto a proposito di  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$  risulta che

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \mathbf{V}(xy - zw) = U_\sigma$$

che è una varietà affine dal teorema ??.

Saremmo potuti arrivare alla stessa conclusione sfruttando il teorema ??. Preso

$\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3\} \subseteq \mathbb{Z}^3$ , allora la chiusura di Zariski di  $\phi_{\mathcal{A}}(T_3)$  è proprio  $\mathbf{V}(xy - zw)$  ed è una varietà torica affine che coincide proprio con  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ . Effettivamente

$$\phi_{\mathcal{A}} : T_3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

manda  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1})$  dunque la chiusura di Zariski di  $\phi_{\mathcal{A}}(T_3) = \{(x, y, z, w) \mid xy = zw\} = \mathbf{V}(xy - zw)$  che è dunque una varietà torica affine.

Quando  $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$  ha dimensione massimale, il semigruppone  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$  ha un unico insieme generatore minimale costruito come segue. Diciamo che un elemento  $m \neq 0$  di  $S_\sigma$  è irriducibile se  $m = m' + m''$  per  $m', m'' \in S_\sigma$  implica che  $m' = 0$  o  $m'' = 0$ .

**Proposizione 2.6.4.** *Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$  un cono poliedrale razionale strettamente convesso di dimensione massimale e poniamo  $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ . Allora*

$$\mathcal{H} = \{m \in S_\sigma \mid m \text{ irriducibile}\}$$

ha le seguenti proprietà:

- (a)  $\mathcal{H}$  è finito e genera  $S_\sigma$ .
- (b)  $\mathcal{H}$  è finito e contiene i raggi generatori dei lati di  $S_\sigma$
- (c)  $\mathcal{H}$  è l'insieme generatore minimale di  $S_\sigma$  rispetto all'inclusione.

*Dimostrazione.* Ci limitiamo a dare la dimostrazione della parte (a) della proposizione. La proposizione ?? implica che  $\sigma^\vee$  è strettamente convesso, così possiamo trovare un elemento  $u \in \sigma \cap N \setminus 0$  tale che  $\langle m, u \rangle \in \mathbb{N}$  per tutti gli  $m \in S_\sigma$  e  $\langle m, u \rangle = 0$  se e solo se  $m = 0$ .

Adesso supponiamo che  $m \in S_\sigma$  non sia irriducibile. Allora  $m = m' + m''$  dove  $m'$  e  $m''$  sono elementi non nulli di  $S_\sigma$ . Segue che

$$\langle m, u \rangle = \langle m', u \rangle + \langle m'', u \rangle$$

con  $\langle m', u \rangle, \langle m'', u \rangle \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , così che

$$\langle m', u \rangle < \langle m, u \rangle \text{ e } \langle m'', u \rangle < \langle m, u \rangle.$$

Usando l'induzione su  $\langle m, u \rangle$ , concludiamo che ogni elemento di  $S_\sigma$  è una somma di elementi irriducibili, così che  $\mathcal{H}$  genera  $S_\sigma$ . Inoltre, usando un insieme di generatori finito per  $S_\sigma$  si può vedere che  $\mathcal{H}$  è finito. Questo prova la parte (a).  $\square$

L'insieme  $\mathcal{H} \subseteq S_\sigma$  è chiamato *base di Hilbert* di  $S_\sigma$  e i suoi elementi sono i generatori minimali di  $S_\sigma$ . Più genericamente, la proposizione ?? vale per ogni semigruppò affine  $S$  che soddisfi  $S \cap (-S) = \{0\}$ .



## Capitolo 3

# Varietà toriche proiettive a partire da politopi e fan

Si assumono come noti alcuni concetti di base riguardanti le varietà proiettive. Ricordiamo che

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1})/\mathbb{C}^*$$

dove  $\mathbb{C}^*$  agisce per omotetie ovvero  $\lambda(a_0, \dots, a_n) = (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n)$  per  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ . Risulta dunque che  $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.c. } b_i = \lambda a_i \forall i = 0, \dots, n$ . Quindi  $(a_0, \dots, a_n)$  sono coordinate omogenee di un punto di  $\mathbb{P}^n$  e sono ben definite grazie all'omotetia.

Lo scopo di questo capitolo è quello di usare reticoli e politopi per creare varietà toriche che giacciono in  $\mathbb{P}^n$ . Useremo semigrupp affini e coni poliedrali introdotti nel capitolo 1 per descrivere la struttura locale di una varietà torica proiettiva.

*Osservazione 1.* Nel contesto proiettivo ha senso parlare solo di polinomi omogenei cioè polinomi  $f = f(x_1, \dots, x_n, 1)$  tali che  $\lambda f(x_1, \dots, x_n, 1) = f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \lambda)$ . Inoltre, sempre nel contesto proiettivo, non ha senso chiedersi il valore di una funzione ma solo il suo annullarsi o meno.

### 3.1 Anello delle coordinate omogenee

Una varietà proiettiva  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  è definita dall'annullarsi di un numero finito di polinomi omogenei nell'anello dei polinomi  $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . L'anello delle coordinate di  $V$  è l'anello quoziente

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V).$$

$\mathbf{I}(V)$  è l'anello generato da tutti i polinomi omogenei nelle variabili  $x_0, \dots, x_n$  che si annullano su  $V$ , cioè  $\mathbf{I}(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \text{ per ogni } p \in V\}$ . L'anello polinomiale  $S$  è graduato ponendo  $\deg(x_i) = 1$ . Questo ci dà la decomposizione  $S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$  dove  $S_d$  è lo spazio dei polinomi omogenei di grado  $d$ . Ideali omogenei si decompongono similmente, e l'anello delle coordinate sopra citato cioè  $\mathbb{C}[V]$  eredita una graduazione, cioè:

$$\mathbb{C}[V]_d = S_d / \mathbf{I}(V)_d.$$

L'ideale  $\mathbf{I}(V) \subseteq S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  definisce una varietà affine  $\widehat{V} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  chiamato il cono affine di  $V$  dove

$$V = (\widehat{V} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

e il suo anello delle coordinate è l'anello delle coordinate omogenee di  $V$  cioè

$$\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[\widehat{V}].$$

**Esempio 3.1.1.** *La varietà torica affine  $\mathbf{V}(xy - zw) \subseteq \mathbb{C}^4$  studiata nel secondo capitolo è un cono affine di una superficie proiettiva  $V = \mathbf{V}(xy - zw) \subseteq \mathbb{P}^3$  tramite l'embedding di Segre dato da*

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

dove  $(s, t, u, v) \longmapsto (su, tv, sv, tu)$ . Vedremo più avanti che  $V \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  è la varietà torica proiettiva che proviene da un particolare politopo cioè un quadrato nel piano.

## 3.2 Componenti affini di varietà toriche proiettive

Una varietà proiettiva  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  è una unione di insiemi aperti per Zariski che sono varietà affini. Per capire il motivo di questo, poniamo  $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(x_i)$ . Allora  $U_i \simeq \mathbb{C}^n$  tramite la mappa

$$(a_0, \dots, a_n) \longmapsto \left( \frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right) \quad (3.1)$$

così dalle notazioni dei capitoli precedenti abbiamo che

$$U_i = \text{Spec} \left( \mathbb{C} \left[ \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right] \right).$$

Allora  $V \cap U_i$  è un sottoinsieme aperto per Zariski di  $V$  che viene mandato tramite ?? nella varietà affine di  $\mathbb{C}^n$  definita dalle equazioni

$$f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) = 0$$

dove  $f$  varia in tutti i polinomi omogenei di  $\mathbf{I}(V)$ . Chiamiamo  $V \cap U_i$  una componente affine di  $V$ . Queste componenti affini coprono  $V$  dal momento che gli  $U_i$  coprono  $\mathbb{P}^n$ .

### 3.3 Punti interi e varietà toriche proiettive

Osserviamo prima di tutto che  $\mathbb{P}^n$  è una varietà torica proiettiva con toro

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{P}^n} &= \mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(x_0 \cdots x_n) = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^n \mid a_0 \cdots a_n \neq 0\} \\ &= \{(1, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}^n \mid t_1, \dots, t_n \in \mathbb{C}^*\} \simeq (\mathbb{C}^*)^n. \end{aligned}$$

L'azione di  $T_{\mathbb{P}^n}$  su se stesso chiaramente si estende ad un'azione su  $\mathbb{P}^n$ , rendendo  $\mathbb{P}^n$  una varietà torica. Per descrivere i reticoli associati a  $T_{\mathbb{P}^n}$  usiamo la sequenza esatta di tori

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 1$$

che viene dalla definizione iniziale di  $\mathbb{P}^n$ . Il reticolo dei caratteri di  $T_{\mathbb{P}^n}$  è

$$\mathcal{M}_n = \{(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n a_i = 0\}.$$

Vediamo perché.

Come già ampiamente spiegato nei capitoli precedenti un carattere è un omomorfismo di  $T_{\mathbb{P}^n}$  in  $\mathbb{C}^*$ . Se si ha un carattere, cioè un omomorfismo  $T_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , lo si può vedere come un omomorfismo da  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  a  $\mathbb{C}^*$  cioè considerare

$$(\mathbb{C}^*)^{n+1} \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$$

dove risulta che  $(t_0, \dots, t_n) \mapsto t_0^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$ . D'altra parte ha senso chiedersi quando un carattere su  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  passa a un carattere su  $T_{\mathbb{P}^n}$ .

Preso un carattere da  $(\mathbb{C}^*)^n \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^*$  allora si ha che questo carattere  $\chi$  "scende" a un carattere su  $T_{\mathbb{P}^n}$  cioè a  $T_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathbb{C}^*$  se  $\chi$  è banale sul sottogruppo  $\mathbb{C}^*$  cioè se il carattere  $\chi$  calcolato sugli elementi diagonali cioè del tipo  $(\lambda, \dots, \lambda)$  è identicamente 0. E' sottinteso l'isomorfismo tra  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  e  $\mathbb{C}^*$  dove  $(\lambda, \dots, \lambda) \simeq \lambda \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ . Il diagramma è il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^*)^{n+1} & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^* \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 T_{\mathbb{P}^n} \cong (\mathbb{C}^*)^{n+1}/\mathbb{C}^* & & 
 \end{array}$$

Quindi si deve avere che

$$\chi((t, \dots, t)) = t^{a_1} \dots t^{a_n} = t^{\sum a_i} = 1 \Leftrightarrow \sum a_i = 0$$

e questo spiega la definizione di  $\mathcal{M}_n$ . D' altra parte per dualità il reticolo dei sottogruppi a un parametro  $\mathcal{N}_n$  è il quoziente

$$\mathcal{N}_n = \mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1).$$

Un omomorfismo a un parametro nel caso affine è un omomorfismo  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ . Nel caso proiettivo risulta che questa mappa  $\lambda$  deve essere composta con la proiezione  $\pi : (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow T_{\mathbb{P}^n}$ . Vi è dunque una mappa tra i sottogruppi a un parametro di  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  e quelli di  $T_{\mathbb{P}^n}$ . Ora ci si deve chiedere quali sono, tra gli omomorfismo da  $\mathbb{C}^*$  a  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ , quelli che dopo essere stati composti con  $\pi$  risultano l'omomorfismo banale.

Questi sono quegli omomorfismi che agiscono diagonalmente ovvero  $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$  che mandano  $t \mapsto (t, \dots, t)$ . Quindi se i sottogruppi a un parametro di  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  sono identificati con  $\mathbb{Z}^{n+1}$  allora il Ker della mappa viene identificato con  $(1, \dots, 1)$ . Abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \text{sottogr a un par di } (\mathbb{C}^*)^{n+1} & \longrightarrow & \text{sottogr a un par di } T_{\mathbb{P}^n} \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 \text{sottogr a un par di } (\mathbb{C}^*)^{n+1}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1) & & 
 \end{array}$$

Da qui risulta evidente che i sottogruppi a un parametro di  $T_{\mathbb{P}^n}$  sono isomorfi a  $\mathbb{Z}^{n+1}/\mathbb{Z}(1, \dots, 1)$ .

### 3.3.1 Varietà toriche proiettive

Sia  $T_N$  un toro con reticoli  $M$  e  $N$ . Nel secondo capitolo abbiamo usato un insieme finito di punti interi  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$  per creare una varietà torica affine  $Y_{\mathcal{A}}$  come chiusura di Zariski dell'immagine della mappa

$$\phi_{\mathcal{A}} : T_N \rightarrow \mathbb{C}^s, t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$



Per ottenere una varietà proiettiva, rivediamo  $\phi_{\mathcal{A}}$  come una mappa a  $(\mathbb{C}^*)^s$  e la componiamo con l'omomorfismo  $\pi : (\mathbb{C}^*)^s \rightarrow T_{\mathbb{P}^{s-1}}$  e dunque abbiamo

$$T_N \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}}} \mathbb{C}^s \xrightarrow{\pi} T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}. \quad (3.2)$$

**Definizione 3.1.** Dato un insieme finito  $\mathcal{A} \subseteq M$ , la **varietà torica proiettiva**  $X_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski in  $\mathbb{P}^{s-1}$  dell'immagine della mappa  $\pi \circ \phi_{\mathcal{A}}$  da ??.

**Proposizione 3.3.1.**  $X_{\mathcal{A}}$  è una varietà torica di dimensione uguale alla dimensione del più piccolo sottospazio affine di  $M_{\mathbb{R}}$  contenente  $\mathcal{A}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione che  $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$  è una varietà torica è simile alla prova data nella proposizione ?? nel capitolo 2 del fatto che  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$  è una varietà torica. L'asserzione che concerne la dimensione di  $X_{\mathcal{A}}$  segue da una proposizione che dobbiamo ancora enunciare.  $\square$

Più concretamente,  $X_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

data dai caratteri che provengono da  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$ , allora  $\chi^{m_i}$  è il monomio di Laurent  $t^{m_i}$  e  $X_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine di

$$T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}, t \mapsto (t^{m_1}, \dots, t^{m_s}).$$

In letteratura  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^n$  è spesso dato come una matrice  $n \times s$   $A$  con entrate intere, così che gli elementi di  $\mathcal{A}$  sono le colonne di  $A$ .

### 3.3.2 Il cono affine di una varietà torica proiettiva

La varietà proiettiva  $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$  ha un cono affine  $\widehat{X}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$ . Che relazione sussiste tra  $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$  e la varietà torica affine  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{C}^s$  costruita nel capitolo precedente? Ricordiamo dal capitolo precedente che quando abbiamo  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ , la mappa  $e_i \mapsto m_i$  induce una sequenza esatta

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \rightarrow M \quad (3.3)$$

e che l'ideale di  $Y_{\mathcal{A}}$  è l'ideale torico

$$I_L = \langle x^\alpha - x^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ e } \alpha - \beta \in L \rangle$$

Abbiamo quindi il seguente risultato

**Proposizione 3.3.2.** *Dati  $Y_{\mathcal{A}}, X_{\mathcal{A}}$  e  $I_L$  come sopra, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (a)  $Y_{\mathcal{A}}$  è il cono affine  $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$  di  $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ .
- (b)  $I_L = \mathbf{I}(X_{\mathcal{A}})$ .
- (c)  $I_L$  è omogeneo.
- (d) Vi è  $u \in N$  e  $k > 0$  in  $\mathbb{N}$  tale che  $\langle m_i, u \rangle = k$  per  $i = 1, \dots, s$ .

*Dimostrazione.* Le equivalenze (a)  $\Leftrightarrow$  (b) seguono dalle uguaglianze  $\mathbf{I}(X_{\mathcal{A}}) = \mathbf{I}(\widehat{X}_{\mathcal{A}})$  e  $I_L = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$ , e l'implicazione (b)  $\Rightarrow$  (c) è ovvia.

Per (c)  $\Rightarrow$  (d) assumiamo che  $I_L$  sia un ideale omogeneo e prendiamo  $x^\alpha - x^\beta \in I_L$  per  $\alpha - \beta \in L$ . Se  $x^\alpha$  e  $x^\beta$  sono di gradi diversi, allora  $x^\alpha, x^\beta \in I_L = \mathbf{I}(Y_{\mathcal{A}})$  si annulla su  $Y_{\mathcal{A}}$ . Questo è impossibile dato che  $(1, \dots, 1) \in Y_{\mathcal{A}}$  dalla ???. Quindi  $x^\alpha$  e  $x^\beta$  devono avere lo stesso grado e questo implica che  $l \cdot (1, \dots, 1) = 0$  per ogni  $l \in L$ . Ora tensorizziamo la ??? con  $\mathbb{Q}$  e prendiamone il duale: otteniamo una sequenza esatta

$$N_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}^s \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

L'argomento sopra mostra che  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{Q}^s$  viene mappato nello zero degli  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(L_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$  e proviene da un elemento  $\tilde{u} \in N_{\mathbb{Q}}$ . In altre parole,  $\langle m_i, \tilde{u} \rangle = 1$  per ogni  $i$ . Riadattando i denominatori si ottiene il desiderato  $u \in N$  e  $k > 0$  in  $\mathbb{N}$ .

Infine, proviamo (d)  $\Rightarrow$  (a). Siccome  $Y_{\mathcal{A}} \subseteq \widehat{X}_{\mathcal{A}}$  e  $\widehat{X}_{\mathcal{A}}$  è irriducibile, è sufficiente provare che

$$\widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s \subseteq Y_{\mathcal{A}}.$$

Sia  $p \in \widehat{X}_{\mathcal{A}} \cap (\mathbb{C}^*)^s$ . Siccome  $X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}}$  è il toro di  $X_{\mathcal{A}}$ , segue che

$$p = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t))$$

per alcuni  $\mu \in \mathbb{C}^*$  e per  $t \in T_N$ . L'elemento  $u \in N$  dalla parte (d) costituisce un sottogruppo a un parametro di  $T_N$ , che scriviamo come  $\tau \mapsto \lambda^u(\tau)$  per  $\tau \in \mathbb{C}^*$ . Inoltre  $\lambda^u(\tau)t$  viene mandato nel punto  $q \in Y_{\mathcal{A}}$  in questo modo

$$q = (\chi^{m_1}(\lambda^u(\tau)t), \dots, \chi^{m_s}(\lambda^u(\tau)t)) = (\tau^{\langle m_1, u \rangle} \chi^{m_1}(t), \dots, \tau^{\langle m_s, u \rangle} \chi^{m_s}(t)),$$

dove vale  $\chi^m(\lambda^u(\tau)) = \tau^{\langle m, u \rangle}$ . L'ipotesi della parte (d) ci consente di riscrivere  $q$  così:

$$q = \tau^k \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)).$$

Usando il fatto che  $k > 0$ , possiamo scegliere  $\tau$  in modo che  $p = q \in Y_{\mathcal{A}}$  e questo completa la dimostrazione.  $\square$

La condizione  $\langle m_i, u \rangle = k$ ,  $i = 1, \dots, s$ , per alcuni  $u \in N$  e per  $k > 0$  in  $\mathbb{N}$  significa che  $\mathcal{A}$  giace in un iperpiano affine di  $M_{\mathbb{Q}}$  che non contiene l'origine. Quando  $M = \mathbb{Z}^n$  e  $\mathcal{A}$  consiste nelle colonne di una matrice intera  $A$ , di dimensioni  $n \times s$ , questo è equivalente a dire che  $(1, \dots, 1)$  giace nello spazio delle righe di  $A$ .

Dato  $\mathcal{A} \subseteq M$ , c'è un modo standard di modificare  $\mathcal{A}$  così che le condizioni della proposizione ?? siano verificate : indichiamo  $\mathcal{A} \times \{1\} \subseteq M \oplus \mathbb{Z}$ . Il reticolo corrisponde al toro  $T_n \times \mathbb{C}^*$ , e siccome

$$\Phi_{\mathcal{A} \times \{1\}}(t, \mu) = (\chi^{m_1}(t)\mu, \dots, \chi^{m_s}(t)\mu) = \mu \cdot (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)), \quad (3.4)$$

segue immediatamente che  $X_{\mathcal{A} \times 1} = X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ . Siccome  $\mathcal{A} \times \{1\}$  giace in un iperpiano affine che non contiene l'origine, la proposizione ?? implica che  $X_{\mathcal{A}}$  ha un cono affine  $Y_{\mathcal{A} \times 1} = \widehat{X}_{\mathcal{A}}$ . Quando  $M = \mathbb{Z}^n$  e  $\mathcal{A}$  è rappresentato dalle colonne di una matrice intera  $A$   $n \times s$ , otteniamo  $\mathcal{A} \times 1$  aggiungendo la riga  $(1, \dots, 1)$  ad  $A$ .

### 3.3.3 Il toro di una varietà torica proiettiva

Il prossimo obiettivo è quello di determinare il toro di  $X_{\mathcal{A}}$ . Faremo questo prima di tutto analizzando il suo reticolo dei caratteri. Questo ci dirà anche le dimensioni di  $X_{\mathcal{A}}$ . Dato  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ , poniamo

$$\mathbb{Z}'\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^s a_i m_i \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^s a_i = 0 \right\}.$$

Il rango di  $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$  è la dimensione del più piccolo sottospazio affine di  $M_{\mathbb{R}}$  contenente l'insieme  $\mathcal{A}$ .

**Proposizione 3.3.3.** *Sia  $X_{\mathcal{A}}$  la varietà torica proiettiva di  $\mathcal{A} \subseteq M$ . Allora:*

- (a) *Il reticolo  $\mathbb{Z}'\mathcal{A}$  è il reticolo dei caratteri del toro di  $X_{\mathcal{A}}$ .*

(b) La dimensione di  $X_{\mathcal{A}}$  è la dimensione del più piccolo sottospazio affine di  $M_{\mathbb{R}}$  contenente  $\mathcal{A}$ . In particolare,

$$\dim X_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \text{rango } \mathbb{Z}\mathcal{A} - 1 & \text{se } \mathcal{A} \text{ soddisfa le condizioni della proposizione ??} \\ \text{rango } \mathbb{Z}\mathcal{A} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

### 3.3.4 Componenti affini di una varietà torica proiettiva

Abbiamo parlato finora di varietà toriche proiettive facendo uso di punti interi e ideali torici. In quale modo i semigruppri entrano in gioco nella trattazione delle varietà toriche proiettive? Ci sono molti semigruppri effettivamente, uno per ogni componente affine  $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$ .

L'insieme affine aperto  $U_i = \mathbb{P}^{s-1} \setminus \mathbf{V}(x_i)$  contiene il toro  $T_{\mathbb{P}^{s-1}}$ . Quindi

$$T_{X_{\mathcal{A}}} = X_{\mathcal{A}} \cap T_{\mathbb{P}^{s-1}} \subseteq X_{\mathcal{A}} \cap U_i.$$

Siccome  $X_{\mathcal{A}}$  è la chiusura di Zariski di  $T_{X_{\mathcal{A}}}$  in  $\mathbb{P}^{s-1}$ , segue che  $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$  è la chiusura di Zariski di  $T_{X_{\mathcal{A}}}$  in  $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$ . Quindi  $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$  è una varietà torica affine.

Dato  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ , il semigruppri affine associato a  $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$  è facile da determinare. Si ricordi che l'isomorfismo  $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$  è dato da

$$(a_1, \dots, a_s) \mapsto (a_1/a_i, \dots, a_{i-1}/a_i, a_{i+1}/a_i, \dots, a_s/a_i).$$

Combinando questo e il fatto che  $\chi^{m_j}/\chi^{m_i} = \chi^{m_j - m_i}$  con la mappa ??, vediamo che  $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$  è la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa

$$T_N \longrightarrow \mathbb{C}^{s-1}$$

dato da

$$t \mapsto (\chi^{m_1 - m_i}(t), \dots, \chi^{m_{i-1} - m_i}(t), \chi^{m_{i+1} - m_i}(t), \dots, \chi^{m_s - m_i}(t)). \quad (3.5)$$

Se poniamo  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i = \{m_j - m_i \mid j \neq i\}$ , segue che

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i = Y_{\mathcal{A}_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i]),$$

dove  $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$  è il semigruppri affine generato da  $\mathcal{A}_i$ . Abbiamo provato il seguente risultato.

**Proposizione 3.3.4.** Sia  $X_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$  per  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ . Allora la componente affine  $X_{\mathcal{A}} \cap U_i$  è la varietà torica affine

$$X_{\mathcal{A}} \cap U_i = Y_{\mathcal{A}_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i])$$

dove  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - m_i$  e  $S_i = \mathbb{N}\mathcal{A}_i$ .

**Proposizione 3.3.5.** Dato  $\mathcal{A} = \{m_1, \dots, m_s\} \subseteq M$ , poniamo  $P = \text{Conv}(\mathcal{A}) \subseteq M_{\mathbb{R}}$  e  $J = \{j \in \{1, \dots, s\} \mid m_j \text{ un vertice di } P\}$ . Allora

$$X_{\mathcal{A}} = \bigcup_{j \in J} X_{\mathcal{A}} \cap U_j.$$

## 3.4 Punti interi e politopi

Prima di esporre la ricca connessione tra le varietà toriche proiettive e i politopi, abbiamo bisogno di studiare i politopi e i loro reticoli.

### 3.4.1 Politopi

Ricordiamo dal capitolo 1 che un politopo è l'involuppo convesso di un sottoinsieme finito  $S \subseteq M_{\mathbb{R}}$  cioè  $P = \text{Conv}(S)$ .

La dimensione di un politopo  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è la dimensione del più piccolo sottospazio affine di  $M_{\mathbb{R}}$  contenente  $P$ . Dato un vettore non nullo  $u$  nello spazio duale  $N_{\mathbb{R}}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , otteniamo l'iperpiano affine  $H_{u,b}$  e il semispazio chiuso  $U_{u,b}^+$  definiti da

$$H_{u,b} = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle = b\} \text{ e } H_{u,b}^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq b\}.$$

Un sottoinsieme  $Q \subseteq P$  è una faccia di  $P$ , scritto  $Q \preceq P$ , se ci sono  $u \in N_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  tali che

$$Q = H_{u,b} \cap P \text{ e } P \subseteq H_{u,b}^+.$$

In questa situazione si dice che  $H_{u,b}$  è un iperpiano affine di supporto. La figura seguente mostra un poligono con le rette di supporto delle sue facce 1-dimensionali. Le frecce nella figura rappresentano i vettori  $u$ .

Vediamo anche  $P$  come faccia di se stesso. Ogni faccia di  $P$  è ancora un politopo e se  $P = \text{Conv}(S)$  e  $Q = H_{u,b} \cap P$  come sopra, allora  $Q = \text{Conv}(S \cap H_{u,b})$ . Le facce di  $P$  di particolare interesse sono le *facet*, i *lati* e i *vertici*, che sono le facce di dimensione  $\dim P - 1$ ,  $\dim 1$ ,  $\dim 0$  rispettivamente. La *facet* vengono solitamente denotate con la lettera  $F$ . Qui ci sono alcune proprietà delle *facet*.

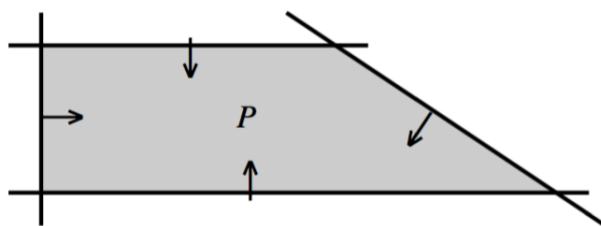


Figura 3.1: Un poligono  $P$  e quattro sue rette di supporto

**Proposizione 3.4.1.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo. Allora:*

- (a)  $P$  è l'involuppo convesso dei suoi vertici.
- (b) Se  $P = \text{Conv}(S)$ , allora ogni vertice di  $P$  giace in  $S$ .
- (c) Se  $Q$  è una faccia di  $P$ , allora le facce di  $Q$  sono precisamente le facce di  $P$  che giacciono in  $Q$ .
- (d) Ogni faccia propria  $Q \preceq P$  è l'intersezione delle facce di  $F$  che contengono  $Q$ .

Un politopo  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  può anche essere scritto come intersezione finita di semispazi chiusi. In altre parole, se un' intersezione

$$P = \bigcap_{i=1}^s H_{u_i, b_i}^+$$

è finita, allora  $P$  è un politopo.

Quando  $P$  è di dimensione massima cioè  $\dim P = M_{\mathbb{R}}$ , la sua presentazione come intersezione di semispazi chiusi ha una forma particolarmente interessante poichè ogni facet  $F$  ha un *unico* iperpiano affine di supporto. Scriviamo l'iperpiano affine di supporto e il corrispondente semispazio chiuso come

$$H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle = -a_F\} \text{ e } H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\},$$

dove  $(u_F, a_F) \in N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$  è unico a meno di moltiplicazione per un numero reale positivo. Chiamiamo  $u_F$  una *facet normale che punta verso l'interno* delle facce di  $F$ . Segue che

$$P = \bigcap_{F \text{ facet}} H_F^+ = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ per ogni facet, } F \prec P\}. \quad (3.6)$$

Nella figura ?? le rette di supporto e le frecce determinano i semipiani di supporto le cui intersezioni determinano il poligono  $P$ . Scriviamo il segno meno nella formula precedente per semplificare le formule che useremo più avanti. Vengono qui elencate alcune classi importanti di politopi.

**Definizione 3.2.** Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo di dimensione  $d$ .

- (a)  $P$  è un **simplesso** o un **d-simplesso** se ha  $d + 1$  vertici.
- (b)  $P$  è **simpliciale** se ogni faccia di  $P$  è un semplice.
- (c)  $P$  è **semplice** se ogni vertice è l'intersezione di esattamente  $d$  facet.

Esempi includono i solidi platonici in  $\mathbb{R}^3$ :

- Un tetraedro è un 3-simplesso.
- Un ottaedro e un icosaedro sono simpliciali dal momento che le loro facet sono triangoli.
- Il cubo e il dodecaedro sono semplici dal momento che tre facet si incontrano in ogni vertice.

I politopi  $P_1$  e  $P_2$  sono *combinatoriamente equivalenti* se esiste una biezione

$$\{\text{facets di } P_1\} \simeq \{\text{facets di } P_2\}$$

che preserva la dimensioni, le intersezioni, e le relazioni tra le facet  $\preceq$ . Per esempio simplessi della stessa dimensione sono combinatoriamente equivalenti, e nel piano lo stesso vale per poligoni con lo stesso numero di vertici.

### 3.4.2 Somme, multipli e duali

Dato un politopo  $P = \text{Conv}(S)$ , i suoi multipli  $rP = \text{Conv}(rS)$  sono ancora politopi per ogni  $r \geq 0$ . Se  $P$  è definito dalle disuguaglianze

$$\langle m, u_i \rangle \geq -a_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

allora  $rP$  è dato da

$$\langle m, u_i \rangle \geq -ra_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

In particolare quando  $P$  è di dimensione massima, allora  $P$  e  $rP$  hanno le stesse facet normali che puntano verso l'interno.

La *somma di Minkowski* dei sottoinsiemi  $A_1, A_2 \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è

$$A_1 + A_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in A_1, m_2 \in A_2\}.$$

Dati i politopi  $P_1 = \text{Conv}(S_1)$ ,  $P_2 = \text{Conv}(S_2)$ , la loro somma di Minkowski  $P_1 + P_2 = \text{Conv}(S_1 + S_2)$  è ancora un politopo. Risulta valida anche la proprietà distributiva

$$rP + sP = (r + s)P.$$

Quando  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è di dimensione massima e  $0$  è un punto interno di  $P$ , definiamo il *politopo duale o polare*

$$P^\circ = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u \rangle \geq -1 \text{ per ogni } m \in P\} \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

La figura ?? mostra un esempio di un poligono e del suo duale nel piano.

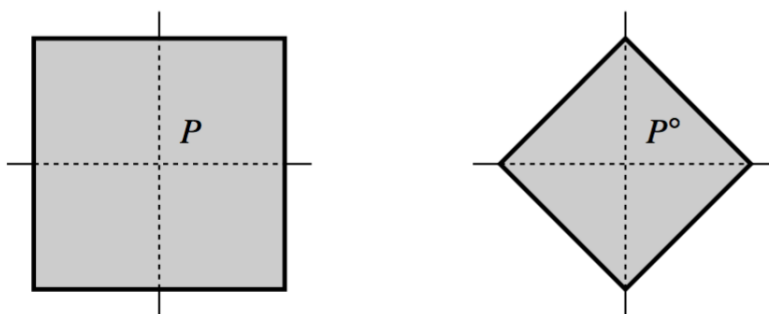


Figura 3.2: Un poligono  $P$  e il suo duale  $P^\circ$  nel piano

Quando scriviamo  $P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F, F \text{ facets}\}$ , abbiamo  $a_F > 0$  per ogni  $F$  poiché  $0$  è interno. Allora  $P^\circ$  è l'involuppo convesso dei vettori  $(1/a_F)u_F \in N_{\mathbb{R}}$ . Abbiamo anche  $(P^\circ)^\circ = P$  in questa situazione.

### 3.4.3 Politopi interi

Ora siano  $M$  e  $N$  reticoli duali con associati spazi vettoriali  $M_{\mathbb{R}}$  e  $N_{\mathbb{R}}$ . Un *politopo intero*  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è l'involuppo convesso di un sottoinsieme finito  $S \subseteq M$ . Segue facilmente che un politopo in  $M_{\mathbb{R}}$  è un politopo intero se e solo se i suoi vertici giacciono in  $M$ .

**Esempio 3.4.2.** *Il simpleso standard  $n$  dimensionale in  $\mathbb{R}^n$  è*

$$\Delta_n = \text{Conv}(0, e_1, \dots, e_n).$$

Un altro simpleso in  $\mathbb{R}^3$  è  $P = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3)$ , mostrato in figura ??.

I politopi interi  $\Delta_3$  e  $P$  sono combinatoriamente equivalenti ma daranno origine a varietà toriche proiettive piuttosto differenti.



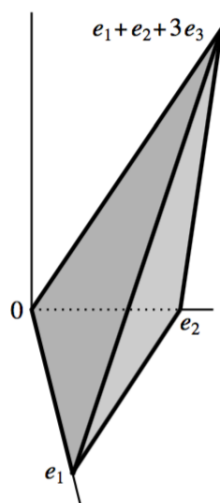


Figura 3.3: Il semplice  $P = \text{Conv}(0, e_1, e_2, e_1 + e_2 + 3e_3)$

Si può mostrare che le facet di un politopo intero sono ancora politopi interi e che la somma di Minkowski e la moltiplicazione intera di politopi interi sono politopi interi. In più, ogni politopo intero è l'intersezione di semispazi chiusi definiti su  $M$ , cioè  $P = \bigcap_{i=1}^s H_{u_i, b_i}^+$  dove  $u_i \in N$  e  $b_i \in \mathbb{Z}$ .

Quando un politopo intero è di dimensione massima la rappresentazione in facet data in ?? ha una forma particolarmente buona. Se  $F$  è una facet di  $P$ , la faccia normale che punta verso l'interno di  $F$  giace su un raggio razionale in  $N_{\mathbb{R}}$ . Supponiamo che  $u_F$  denoti l'unico raggio generatore. Il corrispondente  $a_F$  è intero siccome  $\langle m, u_F \rangle = -a_F$  dove  $m$  è un vertice di  $F$ . Segue che

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ per tutte le facets } F \prec P\} \quad (3.7)$$

è l'unica rappresentazione in facet del politopo intero  $P$ .

**Esempio 3.4.3.** Consideriamo il quadrato  $P = \text{Conv}(\pm e_1, \pm e_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Le facet normali di  $P$  sono  $\pm e_1$  e  $\pm e_2$  e la presentazione in facet di  $P$  è data da

$$\langle m, \pm e_1 \rangle \geq -1$$

$$\langle m, \pm e_2 \rangle \geq -1.$$

Siccome  $a_F$  è uguale a 1, segue che  $P^\circ = \text{Conv}(\pm e_1, \pm e_2)$  è ancora un politopo intero. I politopi  $P$  e  $P^\circ$  sono quelli rappresentati in ??.

E' raro che il duale di un politopo intero sia un politopo intero come accade in questo esempio.

Il tipo combinatorio di un politopo è un interessante oggetto di studio. Questo porta alla domanda "ogni politopo è combinatoriamente equivalente a un politopo intero?". Se il politopo dato è simpliciale, la risposta è "si" poiché è sufficiente spostare i vertici per renderli razionali e dividere i denominatori per ottenere un politopo intero. La stessa argomentazione è valida per politopi semplici spostando le facet normali. Questo ci permette di provare risultati su politopi simpliciali o semplici usando le varietà toriche. Comunque la risposta in generale è "no", cioè esistono politopi in ogni dimensione  $\geq 8$  che non sono combinatoriamente equivalenti a nessun politopo intero.

### 3.5 Costruzione di una varietà torica a partire da un politopo

Un politopo intero  $P$  dà un insieme finito di punti interi  $P \cap M$ , che infatti costituisce una varietà torica proiettiva  $X_{P \cap M}$ . Questo è un naturale candidato per la varietà torica di  $P$ . Tuttavia,  $X_{P \cap M}$  può non essere adatto a riflettere le proprietà di  $P$  quando ci sono troppi pochi punti interi, in un certo senso che sarà chiaro più avanti.

**Esempio 3.5.1.** *Consideriamo il semplice standard  $\Delta_3$  cioè quello generato da  $\mathcal{A}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$  e consideriamo il 3-simplesso  $P$  generato dai punti interi dell'insieme  $\mathcal{A}_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 3), (0, 0, 0)\}$ . Entrambi i semplici comprendono quattro punti interi che corrispondono ai loro vertici. Quindi si sta lavorando in  $\mathbb{R}^3$  e si ha che  $s = 4$ . Consideriamo la mappa di cui parlato sopra ovvero*

$$T_3 \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}_1}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3.$$

Grazie a questa mappa  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, t_3, 1) \mapsto [t_1, t_2, t_3, 1]$ .

Ricordando che i punti di  $\mathbb{P}^3$  sono tutti punti del tipo  $\{[a, b, c, 1] \mid a, b, c \in \mathbb{C}\} \cup \{[a, b, c, 0]\}$ , allora è chiaro che la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa  $\pi \circ \phi_{\mathcal{A}_1}$  corrisponde a tutto  $\mathbb{P}^3$ . La chiusura di Zariski dell'immagine di questa mappa è una varietà torica proiettiva, in particolare è proprio  $X_{\mathcal{A}_1} = X_{\Delta_3 \cap \mathbb{Z}^3}$  che dunque coincide con  $\mathbb{P}^3$ .

Analogamente per il caso successivo, la mappa

$$T_3 \xrightarrow{\phi_{\mathcal{A}_2}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3$$

è tale che manda  $(t_1, t_2, t_3) \mapsto (t_1, t_2, 1, t_1 t_2 t_3^3) \mapsto [t_1, t_2, 1, t_1 t_2 t_3^3]$ . Ora consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x_0 = t_1 \\ x_1 = t_2 \\ x_3 = t_1 t_2 t_3^3 = x_0 x_1 t_3^3 \Rightarrow t_3^3 = \frac{x_3}{x_0 x_1} \end{cases} \quad (3.8)$$

Dunque scelti  $x_0, x_1$  arbitrariamente, anche  $\frac{x_3}{x_0 x_1}$  lo posso ottenere arbitrariamente poichè  $x_3$  è un parametro libero. Dunque anche in questo caso ottengo tutto  $\mathbb{P}^3$ . Eppure  $\Delta_3$  e  $P$  sono politopi molto diversi. Per esempio i vertici di  $\Delta_3$  formano una base di  $\mathbb{Z}^3$  mentre questo non è vero per  $P$ .

Vedremo che la costruzione  $P \rightarrow P \cap M \rightarrow X_{P \cap M}$  è efficace quando il politopo intero ha sufficienti punti interi.

Il prossimo obiettivo è dunque capire in quale senso il politopo intero deve avere sufficienti punti.

Questo è un modo per dire che  $P$  ha sufficienti punti interi.

### 3.5.1 Politopi normali

**Definizione 3.3** (Politopi normali). Un politopo intero  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è **normale** se

$$(kP) \cap M + (lP) \cap M = ((k+l)P) \cap M$$

per ogni  $k, l \in \mathbb{N}$ .

L'inclusione  $(kP) \cap M + (lP) \cap M \subseteq ((k+l)P) \cap M$  è automatica. La normalità del politopo significa che tutti i punti interi di  $(k+l)P$  vengono da punti interi di  $kP$  e di  $lP$ . In particolare un politopo intero è normale se e solo se

$$\underbrace{P \cap M \cdots P \cap M}_{k \text{ volte}} = (kP) \cap M.$$

per tutti gli interi  $k \geq 1$ . Così la normalità significa che  $P$  ha sufficienti punti interi per generare i punti interi in tutti i multipli interi di  $P$ . Politopi interi di dimensione 1 sono normali.

**Teorema 3.5.2.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima  $n \geq 2$ . Allora  $kP$  è normale per ogni  $k \geq n - 1$ .*

**Corollario 3.5.3.** *Ogni poligono intero  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  è normale.*

### 3.5.2 Politopi molto ampi

Qui abbiamo una nozione leggermente diversa di cosa significa che un politopo ha sufficienti punti interi.

**Definizione 3.4.** Un politopo intero è **molto ampio** se per ogni vertice  $m \in P$  il semigruppò  $S_{P,m} = \mathbb{N}(P \cap M - m)$  generato dall'insieme  $P \cap M - m = \{m' - m \mid m' \in P \cap M\}$  è saturato in  $M$ .

Il reticolo generato da un politopo  $P$  è  $\mathbb{N}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ , cioè è costituito dalle combinazioni lineari a coefficienti naturali di elementi di  $P \cap \mathbb{Z}^n$ . Dunque, concretamente, un politopo intero  $P$  è molto ampio se tutte le volte che vi è un elemento tale che un suo multiplo intero appartiene a  $\mathbb{N}(P \cap \mathbb{Z}^n)$  allora anche l'elemento stesso appartiene a  $\mathbb{N}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ .

**Teorema 3.5.4.** *Un politopo intero normale  $P$  è molto ampio.*

**Esempio 3.5.5.** *Il politopo  $P$  generato da  $\mathcal{A} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 3)\}$  non è molto ampio perchè la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

*ha determinante 3 cioè non è una matrice invertibile in  $\mathbb{Z}$ . Quindi in  $P$  ci sarà un elemento il cui multiplo è nel reticolo e tale che l'elemento stesso non vi appartiene ad esempio  $2e_1 + 2e_2 + e_1 + e_2 + 3e_3 = 3e_1 + 3e_2 + 3e_3$  è tale che appartiene al reticolo nonostante  $e_1 + e_2 + e_3$  non vi appartenga.*

**Corollario 3.5.6.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un politopo intero di dimenisone massima. Allora:*

(a) *Se  $\dim P \geq 2$ , allora  $kP$  è molto ampio per ogni  $k \geq n - 1$*

(b) *Se  $\dim P = 2$ , allora  $P$  è molto ampio.*

Vedremo presto quindi che il fatto che il politopo intero è molto ampio è una proprietà di cui si ha bisogno per definire una varietà torica di un politopo intero. Il seguente esempio mostra che un politopo molto ampio non deve essere per forza normale, cioè mostra il viceversa della proposizione ??.

**Esempio 3.5.7.** Dato  $1 \leq i \leq j \leq k \leq 6$ , allora  $[ijk]$  denota il vettore in  $\mathbb{Z}^6$  con 1 in posizione  $i, j, k$  e 0 altrove. Allora  $[123] = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ . Allora poniamo

$$\mathcal{A} = \{[123], [124], [135], [146], [156], [236], [245], [256], [345], [346]\} \subseteq \mathbb{Z}^6.$$

Il politopo intero  $P = \text{Conv}(\mathcal{A})$  giace in un iperpiano affine di  $\mathbb{R}^6$  dove le coordinate si sommano a 3. I punti di  $\mathcal{A}$  sono gli unici punti interi di  $P$ . Numeriamo i punti di  $\mathcal{A}$  con  $m_1, \dots, m_{10}$ . Allora

$$(1, 1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{10} m_i = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10} (2m_i)$$

mostra che  $\nu = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \in 2P$ , siccome  $\nu$  non è una somma di punti interi (quando  $[ijk] \in \mathcal{A}$ , il vettore  $\nu - [ijk]$  non è in  $\mathcal{A}$ ), concludiamo che  $P$  non è un politopo normale.

Per mostrare che  $P$  è molto ampio, proviamo che  $\mathcal{A} \times \{1\} \cup \{(\nu, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$  è una base di Hilbert del semigruppone  $C(P) \cap \mathbb{Z}^7$ , dove  $C(P) \subseteq \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$  è il cono su  $P \times \{1\}$ .

Adesso fissiamo  $i$  e poniamo  $S_{P, m_i}$  il semigruppone generato da  $m_j - m_i$  e prendiamo  $m \in \mathbb{Z}^6$  tale che  $km \in S_{P, m_i}$ . (Questo implica che  $m + dm_i \in dP$  per alcuni  $d \in \mathbb{N}$ ). Allora  $(m + dm_i, d) \in C(P) \cap \mathbb{Z}^7$ . Esprimendo questo in termini della base di Hilbert sopra detta si ha che  $m = a(\nu - 2m_i) + \sum_{j=1}^{10} a_j(m_j - m_i)$ ,  $a, a_j \in \mathbb{N}$ . Se riusciamo a mostrare che  $\nu - 2m_i \in S_{P, m_i}$ , allora  $m \in S_{P, m_i}$  segue immediatamente e prova che  $S_{P, m_i}$  è saturato. Quando  $i = 1$ , si può controllare che

$$\nu + [123] = [124] + [135] + [236],$$

che implica che  $\nu - 2m_1 = (m_2 - m_1) + (m_3 - m_1) + (m_6 - m_1) \in S_{P, m_1}$ . Si ottengono formule simili per  $i = 2, \dots, 10$  e questo completa la dimostrazione che  $P$  è molto ampio.

## 3.6 Politopi e varietà toriche proiettive

Il nostro prossimo obiettivo è quello di definire la varietà torica di un politopo intero. Come notato precedentemente quello di cui dobbiamo assicurarci è che la varietà torica abbia sufficienti punti interi. Per questo iniziamo con il considerare politopi molto ampi. I coni poliedrali razionali strettamente convessi avranno un ruolo fondamentale nello sviluppo di questo argomento.

### 3.6.1 Il caso molto ampio

Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo molto ampio di dimensione massima, relativo al reticolo  $M$  e poniamo  $\dim P = n$ . Se  $P \cap M = \{m_1, \dots, m_s\}$ , allora  $X_{P \cap M}$  è la chiusura di Zariski dell'immagine della mappa  $T_N \rightarrow \mathbb{P}^{s-1}$  data da

$$t \mapsto (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_s}(t)) \in \mathbb{P}^{s-1}.$$

Si fissino le coordinate omogenee  $x_1, \dots, x_s$  per  $\mathbb{P}^{s-1}$ .

Esaminiamo la struttura di  $X_{P \cap M} \subseteq \mathbb{P}^{s-1}$  usando le proposizioni ?? e ?. Per ogni  $m_i \in P \cap M$  consideriamo il semigrupp

$$S_i = \mathbb{N}(P \cap M - m_i)$$

generato da  $m_j - m_i$  per  $m_j \in P \cap M$ . In  $\mathbb{P}^{s-1}$  si ha il sottoinsieme aperto affine  $U_i \simeq \mathbb{C}^{s-1}$  che consiste in quei punti dove  $x_i \neq 0$ . La proposizione ?? mostra che la componente aperta affine  $X_{P \cap M} \cap U_i$  di  $X_{P \cap M}$  è la varietà torica affine

$$X_{P \cap M} \cap U_i \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[S_i]),$$

e la proposizione ?? mostra che

$$X_{P \cap M} = \bigcup_{m_i \text{ vertice di } P} X_{P \cap M} \cap U_i.$$

Il seguente è uno dei maggiori risultati a proposito di  $X_{P \cap M}$ .

**Teorema 3.6.1.** *Sia  $X_{P \cap M}$  una varietà torica proiettiva del politopo molto ampio  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ , e assumiamo che  $P$  sia di dimensione massima con  $\dim P = n$ . Allora:*

- (a) *Per ogni vertice  $m_i \in P \cap M$ , la componente affine  $X_{P \cap M} \cap U_i$  è la varietà torica affine*

$$X_{P \cap M} \cap U_i = U_{\sigma_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^{\vee} \cap M])$$

*dove  $\sigma_i \subseteq N_{\mathbb{R}}$  è un cono poliedrale razionale strettamente convesso duale del cono  $\text{Cone}(P \cap M - m_i) \subseteq M_{\mathbb{R}}$ . Inoltre  $\dim \sigma_i = n$ .*

- (b) *Il toro di  $X_{P \cap M}$  ha reticolo dei caratteri  $M$  e quindi è il toro  $T_N$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $C_i = \text{Cone}(P \cap M - m_i)$ . Siccome  $m_i$  è un vertice, ha un iperpiano di supporto  $H_{u,a}$  tale che  $P \subseteq H_{u,a}^+$  e  $P \cap H_{u,a} = \{m_i\}$ . Segue che  $H_{u,0}$  è un iperpiano di supporto di  $0 \in C_i$  così che  $C_i$  è strettamente convesso. Segue che  $C_i$  e  $\sigma_i = C_i^{\vee}$  sono coni poliedrali razionali strettamente convessi di

dimensione  $n$ .

Abbiamo  $S_i \subseteq C_i \cap M = \sigma_i^\vee \cap M$ . Per ipotesi  $P$  è molto ampio, che significa che  $S_i \subseteq M$  è saturato. Siccome  $S_i$  e  $C_i = \sigma_i^\vee$  sono entrambi generati da  $P \cap M - m_i$ , allora si può vedere che  $S_i = \sigma_i^\vee \cap M$ . La parte (a) del teorema segue da quanto appena detto.

Per la parte (b) il teorema ?? implica che  $T_N$  è il toro di  $U_{\sigma_i}$  dato che  $\sigma_i$  è strettamente convesso. Allora  $T_N \subseteq U_{\sigma_i} = X_{P \cap M} \cap U_i \subseteq X_{P \cap M}$  mostra che  $T_N$  è anche il toro di  $X_{P \cap M}$ .  $\square$

Le parti affini  $X_{P \cap M} \cap U_i$  e  $X_{P \cap M} \cap U_j$  si intersecano in  $X_{P \cap M} \cap U_i \cap U_j$ . Per descrivere accuratamente l'intersezione abbiamo bisogno di capire come i coni  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  si assemblano insieme in  $N_{\mathbb{R}}$ . Questo conduce al prossimo argomento.

### 3.7 Il Fan Normale

I coni  $\sigma_i \subseteq N_{\mathbb{R}}$  che compaiono nel teorema ?? si assemblano insieme in un modo particolarmente interessante, dando origine a una struttura chiamata la *fan normale di  $P$* .

Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima, non necessariamente molto ampio. Le facce, le facet e i vertici di  $P$  sono denotati con  $Q, F$  e  $v$  rispettivamente. Quindi scriviamo la rappresentazione in facce di  $P$  come

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq -a_F \text{ per ogni } F\}. \quad (3.9)$$

Un vertice  $v \in P$  ci permette di ottenere il cono

$$C_v = \text{Cone}(P \cap M - v) \subseteq M_{\mathbb{R}} \text{ e } \sigma_v = C_v^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

(Quando  $v = m_i$ , questi sono i coni  $C_i$  e  $\sigma_i$  studiati sopra). Le facce  $Q \subseteq P$  che contengono il vertice  $v$  corrispondono biettivamente alle facce  $Q_v \subseteq C_v$  tramite le mappe

$$Q \longmapsto Q_v = \text{Cone}(Q \cap M - v) \text{ e } Q_v \longmapsto Q = (Q_v + v) \cap P \quad (3.10)$$

che sono una l'inversa dell'altra. Queste mappe preservano dimensioni, inclusioni e intersezioni, come mostrato nella figura ??.

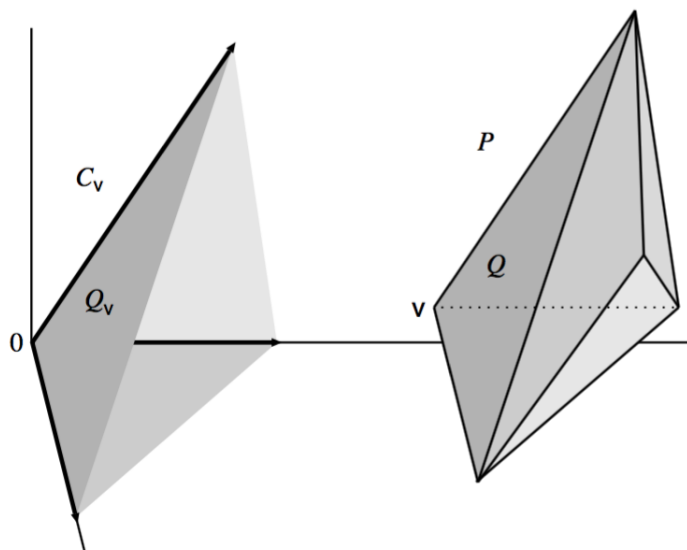


Figura 3.4: Il cono  $C_v$  di un vertice  $v \in P$ .

In particolare tutte le facet di  $C_v$  provengono dalle facets di  $P$  che contengono  $v$ , cos  che

$$C_v = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_F \rangle \geq 0 \text{ per ogni } F \text{ contenente } v\}.$$

Dai risultati di dualit  di cui si   parlato nei capitoli precedenti si deve dedurre che il cono duale   dato da

$$\sigma_v = \text{Cone}(u_F \mid F \text{ contiene } v).$$

Questa costruzione pu  essere generalizzata a facce arbitrarie  $Q \preceq P$  ponendo

$$\sigma_Q = \text{Cone}(u_F \mid F \text{ contenente } Q).$$

Quindi il cono  $\sigma_F$    il raggio generato da  $u_F$ , e  $\sigma_P = \{0\}$  siccome  $\{0\}$    il cono generato dall'insieme vuoto. Qui abbiamo il risultato principale a proposito di questi coni.

**Teorema 3.7.1.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima e poniamo  $\Sigma_P = \{\sigma_Q \mid Q \preceq P\}$ . Allora:*

- (a) *Per ogni  $\sigma_Q \in \Sigma_P$ , ogni faccia di  $\sigma_Q$    anche in  $\Sigma_P$ .*
- (b) *L'intersezione  $\sigma_Q \cap \sigma_{Q'}$  di due coni qualsiasi in  $\Sigma_P$    una faccia di entrambi.*

*Osservazione 2.* Una collezione finita di coni poliedrali razionali strettamente convessi che soddisfa (a) e (b) nel teorema ??   chiamato *fan*. Esistono tipi



differenti di fan, ma dal momento che i coni nel fan  $\Sigma_P$  sono costruiti a partire dai vettori normali che puntano verso l'interno, chiamiamo  $\Sigma_P$  il *fan normale* di  $P$ .

Una varietà torica proiettiva può essere costruita a partire da un fan cioè da un ventaglio di coni. L'idea fondante è che i dati combinatori del fan ci dicono come assemblare insieme le varietà toriche affini che provengono ciascuna da un cono del fan e la struttura del fan dà informazioni su come queste varietà toriche affini devono essere assemblate insieme per ottenere la varietà torica proiettiva.

Diamo un esempio significativo di un politopo e del suo fan normale e di come da esso è possibile ricavare la varietà torica proiettiva associata.

**Esempio 3.7.2.** Consideriamo il politopo molto ampio  $\Delta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$ , allora il fan normale associato  $\Sigma_P$  lo costruiamo così: per ogni vertice  $v_i$  di  $P$ , consideriamo il cono  $\sigma_i = C_{v_i}^\vee$  generato dai vettori normali alle facets contenenti  $v_i$ . I coni riassemblati li vediamo nella figura a destra della figura ?? come  $\Sigma_P$ .

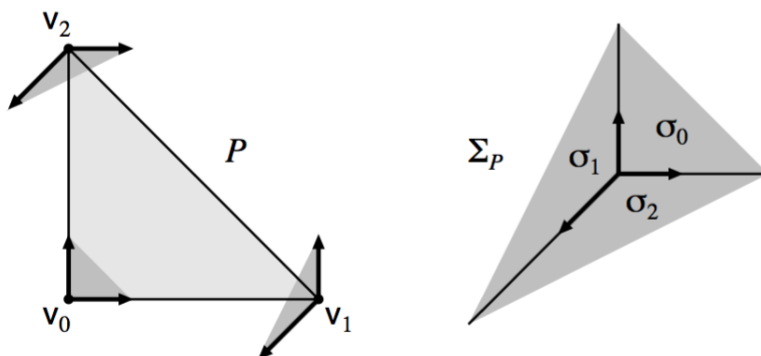


Figura 3.5: Il triangolo  $P = \Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^2$  e il suo fan normale  $\Sigma_P$

Si noti che i coni  $C_{v_i} \subseteq M_{\mathbb{R}}$  non si assemblano bene insieme; piuttosto sono i loro coni duali  $\sigma_i \subseteq N_{\mathbb{R}}$  che permettono di ottenere il fan  $\Sigma_P$ . Questo spiega perchè i coni duali in  $N_{\mathbb{R}}$  hanno un ruolo cruciale nella geometria torica.

Se  $X_{P \cap \mathbb{Z}^2}$  è una varietà torica proiettiva come chiusura di Zariski dell'immagine della mappa  $\pi \circ \phi_{\mathcal{A}}(T_2)$  dove ora  $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, m_3\} \subseteq \mathbb{Z}^2$  e  $P = \text{Conv}(m_1, m_2, m_3)$  allora per ogni  $m_i \in P \cap \mathbb{Z}^2$  la componente affine  $X_{P \cap \mathbb{Z}^2} \cap U_i$  è la varietà torica affine  $U_{\sigma_i} = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap \mathbb{Z}^2])$  dove  $\sigma_i^\vee = \text{Cone}(P \cap \mathbb{Z}^2 - m_i)$ .

In questo caso da questo fan associato al politopo  $\Delta_2$  si ottiene la varietà torica proiettiva  $\mathbb{P}^2$  osservando che, siccome i coni del fan giacciono nel reticolo duale, allora le relazioni di inclusione si rovesciano; ovvero:

$\sigma_0$  corrisponde a  $(0, 0)$

$\sigma_1$  corrisponde a  $(0, 1)$

$\sigma_2$  corrisponde a  $(1, 0)$

le rette del fan corrispondono alle rette del politopo

l'origine del fan corrisponde al politopo

La struttura del fan riflette quindi la geometria delle orbite della varietà torica "rigirata" (ovvero quella che si ottiene guardando i duali).

Precisamente  $U_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}])$ , dove  $S_{\sigma_1} = \sigma_1^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = \text{Cone}(\Delta_2 - m_1) = \text{Cone}(e_1, e_2)$ . Osserviamo che la mappa

$$\mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$$

$$x \longmapsto t^{m_1} = t_1$$

$$y \longmapsto t^{m_2} = t_2$$

è tale che ha Ker banale e questo permette di affermare che, dal teorema fondamentale di omomorfismo,  $\mathbb{C}[x, y]/(0) \simeq \mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$ , dunque  $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]) \cong \mathbf{V}(0) \cong \mathbb{C}^2 \cong U_{\sigma_1}$ . Analogamente si ragiona per  $U_{\sigma_2}$  e  $U_{\sigma_3}$ .

Le tre varietà toriche affini così ottenute,  $U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2}, U_{\sigma_3}$ , sono tutte e tre isomorfe a  $\mathbb{C}^2$  e sono le intersezioni della varietà proiettiva data dal fan, ovvero  $\mathbb{P}^2$ , con la corrispondente carta affine.

In generale, moltiplicare un politopo per un intero positivo non ha effetti sul suo fan normale, e lo stesso è vero per quanto riguarda la traslazione per un punto intero. Riassumiamo queste proprietà nella seguente proposizione.

**Proposizione 3.7.3.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima. Allora per ogni punto intero  $m \in M$  e per ogni intero  $k \geq 1$ , i politopi  $m + P$  e  $kP$  hanno lo stesso fan normale di  $P$ .*

Prima di passare a parlare delle varietà toriche ottenute da politopi, diamo un altro esempio di costruzione del fan normale di un politopo.

**Esempio 3.7.4.** *La figura ?? mostra un esagono intero  $P$  nel piano insieme al suo fan normale. I vertici di  $P$  sono chiamati  $v_1, \dots, v_6$  con i corrispondenti coni  $\sigma_1, \dots, \sigma_6$  nel fan normale. Nella figura  $P$  è mostrato sulla sinistra e in ogni vertice  $v_i$  sono stati disegnati i vettori normali alle facce contenenti  $v_i$  ed*

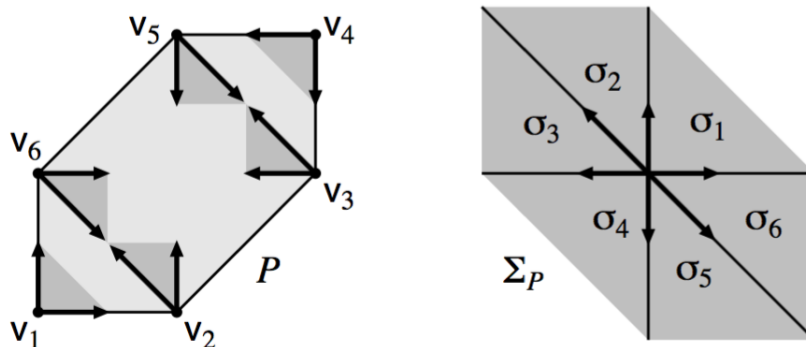


Figura 3.6: Un poligono intero  $P$  e il suo fan normale  $\Sigma_P$

è stato scurito il cono  $\sigma_i$  che generano. Sulla destra questi coni sono assemblati all'origine per costruire il fan normale.

Notiamo come è possibile conoscere la struttura di  $P$  dal fan normale. Per esempio, due coni  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  hanno un raggio in comune in  $\Sigma_P$  se e solo se i vertici  $v_i$  e  $v_j$  giacciono su uno stesso lato di  $P$ .

### 3.8 La varietà torica di un politopo

Possiamo ora dare la definizione generale di varietà torica di un politopo.

**Definizione 3.5.** Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima. Allora definiamo la *varietà torica di  $P$*  come

$$X_P = X_{(kP) \cap M}$$

dove  $k$  è un intero positivo tale che  $kP$  è molto ampio.

Tali interi esistono dal corollario ?? e se  $k$  e  $l$  sono due tali interi, allora  $kP$  e  $lP$  hanno lo stesso fan normale dalla proposizione ??, chiamato  $\Sigma_{kP} = \Sigma_{lP} = \Sigma_P$ . Segue che  $X_{(kP) \cap M}$  e  $X_{(lP) \cap M}$  giacciono in spazi proiettivi differenti, sono costruiti dalle varietà toriche affini  $U_{\sigma_v}$  e sono assemblati insieme come visto nell'esempio ??.

Spesso si parla di  $X_P$  senza preoccuparsi del modo in cui questa varietà è immersa nel proiettivo. Quando vogliamo usare un'immersione specifica, diremo che " $X_P$  è immersa usando  $kP$ ", dove assumiamo che  $kP$  è un politopo molto ampio.

**Esempio 3.8.1.** Per capire quanto detto sopra osseviamo che esistono varietà toriche proiettive che sono isomorfe ma che sono immerse in maniera diversa in uno spazio proiettivo. Un esempio semplice riguarda  $\mathbb{P}^1$ .  $\mathbb{P}^1$  può essere immerso normalmente in  $\mathbb{P}^1$  con l'identità. Oppure  $\mathbb{P}^1$  può essere per esempio immerso in  $\mathbb{P}^2$  usando la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [t_0, t_1] &\longmapsto [t_0^2, t_0 t_1, t_1^2]. \end{aligned}$$

L'immagine di questa mappa è la quadrica  $x_2 x_0 = x_1^2$ . E analogamente si può fare per  $\mathbb{P}^3$  e per  $\mathbb{P}^n$  in generale.

Più interessante è il seguente esempio in cui si illustra la differenza tra  $X_P$  come varietà astratta e  $X_P$  che giace in un particolare spazio proiettivo.

**Esempio 3.8.2.** Consideriamo l' $n$ -simpleso  $\Delta_n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Possiamo definire  $X_{\Delta_n}$  usando  $k\Delta_n$  per un intero  $k \geq 1$  dato che  $\Delta_n$  è normale e quindi molto ampio. I punti interi in  $k\Delta_n$  corrispondono a  $s_k = \frac{(n+k)!}{k!((n+k)-k)!}$  monomi di  $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$  di grado totale  $\leq k$ . Questo permette di avere un'immersione  $X_{\Delta_n} \subseteq \mathbb{P}^{s_k-1}$ . Quando  $k = 1$ ,  $\Delta_n \cap \mathbb{Z}^n = \{0, e_1, \dots, e_n\}$  implica che

$$X_{\Delta_n} = \mathbb{P}^n.$$

Il fan normale di  $\Delta_n$  è esattamente costituito dai Cone( $S$ ) per  $S \subseteq \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ , dove  $e_0 = -\sum_{i=1}^n e_i$ . Per un arbitrario  $k \geq 1$ , possiamo vedere  $X_{\Delta_n} \subseteq \mathbb{P}^{s_k-1}$  come immagine della mappa

$$\nu_k : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{s_k-1}$$

definita usando i monomi di grado totale  $k$  in  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Segue dunque che la mappa è un'immersione chiamata l'immersione di Veronese. Ma quando si dimentica l'immersione la varietà torica è semplicemente  $\mathbb{P}^n$ . L'immersione di Veronese permette di costruire interessanti sottoinsiemi aperti affini che siano diversi da quelli più noti ovvero dai soliti  $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(x_i)$  considerati spesso nei capitoli precedenti. Sia  $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  un polinomio omogeneo non nullo di grado  $k$  e scriviamo  $f = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$ . Scriviamo le coordinate omogenee in  $\mathbb{P}^{s_k-1}$  come  $y_\alpha$  per  $|\alpha| = k$ . Allora  $L = \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y_\alpha$  è una forma lineare nelle variabili  $y_\alpha$ , così che  $\mathbb{P}^{s_k-1} \setminus \mathbf{V}(L)$  sia una copia di  $\mathbb{C}^{s_k-1}$ . Segue che

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathbf{V}(f) \simeq \nu_k(\mathbb{P}^n) \cap (\mathbb{P}^{s_k-1} \setminus \mathbf{V}(L))$$

è una varietà affine (solitamente non torica).

### 3.9 Prodotto di varietà toriche proiettive

Per concludere si prenderà in esame la varietà torica del prodotto di politopi. Sia  $P_i \subseteq (M_i)_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{n_i}$  un politopo intero con  $\dim P_i = n_i$  per  $i = 1, 2$ . Questo costituisce il politopo intero  $P_1 \times P_2 \subseteq (M_1 \times M_2)_{\mathbb{R}}$  di dimensione  $n_1 + n_2$ . Sostituendo  $P_1$  e  $P_2$  con multipli adatti, possiamo assumere che  $P_1$  e  $P_2$  siano molto ampi. Questo fornisce l'immersione proiettiva

$$X_{P_i} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s_i-1}, \quad s_i = |P_i \cap M_i|.$$

Siccome da risultati classici sugli spazi prodotto si ha che se  $V \subseteq \mathbb{P}^n$  e se  $W \subseteq \mathbb{P}^m$  allora il prodotto  $V \times W$  è una sottovarietà di  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ , possiamo quindi affermare che  $X_{P_1} \times X_{P_2}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{P}^{s_1-1} \times \mathbb{P}^{s_2-1}$ . Quindi con l'immersione di Segre si ha

$$\mathbb{P}^{s_1-1} \times \mathbb{P}^{s_2-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s-1}, \quad s = s_1 s_2,$$

otteniamo un'immersione

$$X_{P_1} \times X_{P_2} \hookrightarrow \mathbb{P}^{s-1}.$$

Possiamo pensare a questa varietà proiettiva  $X_{P_1} \times X_{P_2}$  nel modo espresso dal seguente teorema.

**Teorema 3.9.1.** *Se  $P_1$  e  $P_2$  sono due politopi molto ampi, allora :*

(a)  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \subseteq (M_1 \times M_2)_{\mathbb{R}}$  è un politopo molto ampio con punti interi

$$(P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2) = (P_1 \cap M_1) \times (P_2 \cap M_2).$$

Quindi l'intero  $s$  definito sopra è  $s = |(P_1 \times P_2) \cap (M_1 \times M_2)|$ .

(b)  $X_{P_1 \times P_2} \simeq X_{P_1} \times X_{P_2}$ .

**Esempio 3.9.2.** *Siccome  $\mathbb{P}^n$  è la varietà torica del  $n$ -simplex standard  $\Delta_n$ , allora segue che  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$  è la varietà torica di  $\Delta_n \times \Delta_m$ .*

*Questo funziona anche per più di due fattori. Quindi  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  è la varietà torica del cubo rappresentato nella figura ??.*

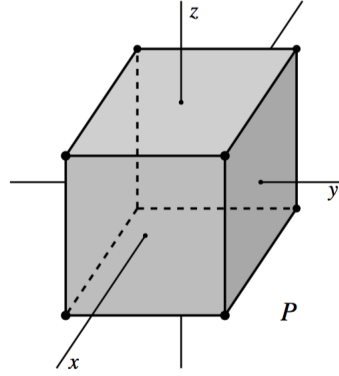


Figura 3.7: Politopo associato alla varietà torica  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

**Proposizione 3.9.3.** *Siano  $P_i \subseteq (M_i)_{\mathbb{R}}$  dei politopi interi di dimensione massima per  $i = 1, 2$ . Allora*

$$\Sigma_{P_1 \times P_2} = \Sigma_{P_1} \times \Sigma_{P_2}.$$

Prima di dare l'esempio 3.9.5 che è un semplice esempio di questa proposizione, si dà un'idea di cosa significa  $X_{\Sigma}$ , cioè varietà torica associata al fan.

**Esempio 3.9.4.** *Consideriamo un fan costituito da due coni adiacenti  $\sigma_1, \sigma_2$ . Dato il fan  $\Sigma \subseteq N$  considero le due componenti affini  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_1^{\vee} \cap M])$  e  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_2^{\vee} \cap M])$ . Se i coni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  hanno una faccia  $\tau$  in comune, allora  $\tau^{\vee} \supseteq \sigma_1^{\vee} \cap \sigma_2^{\vee}$ , quindi*

$$\mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M] \supseteq \mathbb{C}[\sigma_1^{\vee} \cap M]$$

$$\mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M] \supseteq \mathbb{C}[\sigma_2^{\vee} \cap M]$$

dunque

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M]) \subseteq \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_1^{\vee} \cap M])$$

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M]) \subseteq \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_2^{\vee} \cap M]).$$

Ora  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^{\vee} \cap M])$  è un sottoinsieme aperto di  $\sigma_1$  e anche di  $\sigma_2$ , dunque è tramite esso che avviene l'incollamento delle due componenti affini che danno origine alla varietà torica  $X_{\Sigma}$ . Sono stati omessi molti dettagli, come per esempio il fatto che il quoziente che permette l'incollamento dà origine ad uno spazio Hausdorff, ma resta comunque chiara l'idea di come ottenere una varietà torica a partire da un fan.

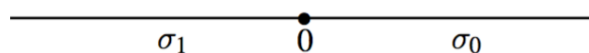


Figura 3.8: *Fan normale dell'intervallo  $[a, b]$  (politopo intero in  $\mathbb{Z}$ )*

**Esempio 3.9.5.** *Il fan normale dell'intervallo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , dove  $a < b$  e  $a, b \in \mathbb{Z}$  (che è un politopo intero in  $\mathbb{Z}$ ), è mostrato nella figura precedente.*

*La corrispondente varietà torica è  $\mathbb{P}^1$ . Il prodotto cartesiano di due intervalli così fatti è un rettangolo intero la cui varietà torica è  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  da teorema ???. Se definiamo  $\sigma_{ij} := \sigma_i \times \sigma_j$ , la proposizione ??? si permette di costruire il fan normale rappresentato nella figura ???.*

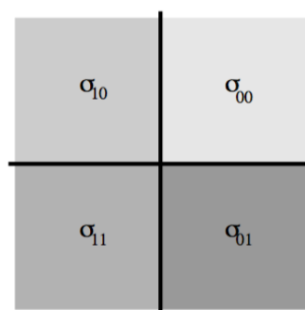


Figura 3.9: *Il fan normale di un rettangolo intero corrisponde alla varietà torica  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*

*Infatti dalla proposizione ???, sappiamo che  $\Sigma_{[a,b]} \times \Sigma_{[a',b']} = \Sigma_{[a,b] \times [a',b']}$  e dal teorema ?? sappiamo che  $X_{[a,b]} \times X_{[a',b']} \simeq X_{[a,b] \times [a',b]}$ , quindi siccome si è visto sopra che  $X_{[a,b]} = \mathbb{P}^1$ , allora si può concludere che  $X_{[a,b] \times [a',b]} \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Non utilizzando i teoremi appena citati si può comunque costruire la varietà torica direttamente dal fan in questo modo.*

*Osserviamo che*

$$\mathbb{C}[S_{\sigma_{00}}] \simeq \mathbb{C}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]/(x^{-1}, y^{-1})$$

*dunque risulta che*

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_{00}}]) \simeq \mathbf{V}((x^{-1}, y^{-1})) \simeq \mathbb{C}[x, y].$$

*Analogamente*

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_{10}}]) \simeq \mathbb{C}[x^{-1}, y]$$

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_{11}}]) \simeq \mathbb{C}[x^{-1}, y^{-1}]$$

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma_{01}}]) \simeq \mathbb{C}[x, y^{-1}]$$

*Si vede dunque che se  $U_0$  e  $U_1$  sono sottoinsiemi aperti affini standard in  $\mathbb{P}^1$ , allora  $U_{\sigma_{ij}}$  è isomorfo a  $U_i \times U_j$  ed è facile vedere che nel complesso  $X_\Sigma = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*



# Capitolo 4

## Proprietà di regolarità e studio delle singolarità delle varietà toriche

### 4.1 Proprietà di regolarità di una varietà torica proiettiva

Una prima domanda che si è soliti farsi quando si parla di varietà algebriche è quella sulle sue proprietà di regolarità. Data la varietà torica  $X_P$  del politopo  $P$  quando questa varietà risulta non singolare? Dai risultati dei capitoli precedenti è abbastanza semplice rispondere a questa domanda; si ha bisogno delle seguenti definizioni.

La prima definizione che diamo è una definizione ad hoc per il campo complesso. Questa definizione potrebbe essere data anche più in generale ma richiede altri strumenti e non verrà discussa.

- **non singolare**, ovvero tale che localmente (rispetto alla topologia Euclidea) è isomorfa a un'aperto di  $\mathbb{C}^n$  (similmente alla nozione di varietà differenziabile complessa).
- **singolare** ovvero tale che localmente non è isomorfa con un aperto di  $\mathbb{C}^n$ .

**Definizione 4.1.** Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero.

- (a) Dato un vertice  $\nu$  di  $P$  e un lato  $E$  contenente  $\nu$ , sia  $w_E$  il primo punto intero di  $E$  diverso da  $\nu$  incontrato quando si percorre  $E$  partendo da  $\nu$ . In altre parole,  $w_E - \nu$  è il raggio generatore del cono (che è poi un raggio),  $Cone(E - \nu)$ .

- (b)  $P$  è **liscio** se per ogni vertice  $\nu$ , i vettori  $w_E - \nu$ , dove  $E$  è un lato di  $P$  contenente  $\nu$ , formano un sottoinsieme di una base di  $M$ . In particolare se  $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$ , i vettori  $w_E - \nu$  formano una base di  $M$ .

Possiamo ora dire quando  $X_P$  è non singolare.

**Teorema 4.1.1.** *Sia  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  un politopo intero di dimensione massima. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

- (a)  $X_P$  è una varietà torica proiettiva non singolare (in senso euclideo).
- (b)  $\Sigma_P$  è un fan liscio, ovvero ogni cono del fan  $\Sigma_P$  è liscio nel senso della definizione ??.
- (c)  $P$  è un politopo liscio.

*Dimostrazione.* L'essere non singolare è una condizione locale, così che una varietà è non singolare se e solo se ogni sua parte locale è non singolare. Quindi  $X_P$  è non singolare se e solo se  $U_{\sigma_v}$  è liscio per ogni vertice  $v$  di  $P$ . Esiste un teorema su cui non ci si soffermerà che afferma che  $U_{\sigma_v}$  è liscio se e solo se  $\sigma_v$  è liscio. Siccome le facce di un cono liscio sono lisce e  $\Sigma_P$  è costituito dai  $\sigma_v$  e le loro facce, l'equivalenza (a)  $\Leftrightarrow$  (b) è provata.

Per (b)  $\Leftrightarrow$  (c), osserviamo prima di tutto che  $\sigma_v$  è liscio se e solo se il suo duale  $C_v = \sigma_v^\vee$  è liscio. Quanto affermato nel teorema ?? consente di concludere facilmente che i raggi generatori di  $C_v$  sono i vettori  $w_E - v$  dalla definizione ??. Segue quindi che  $P$  è liscio se e solo se  $C_v$  è liscio per ogni vertice  $v$ , e siamo giunti alla fine della dimostrazione.  $\square$

Questo teorema permette di verificare quando una varietà torica è non singolare. E' il caso dell'esagono dell'esempio ??.

**Proposizione 4.1.2.** *Ogni politopo intero di dimensione massima  $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$  è molto ampio.*

## 4.2 Singolarità delle varietà toriche

Prima di trattare le singolarità delle varietà toriche, ci si sofferma su considerazioni che mettono in luce l'efficienza degli strumenti combinatori per lo studio di

queste varietà e delle loro caratteristiche.

**Definizione 4.2.** Un vettore si dice **primitivo** se è un vettore a coordinate intere che non è multiplo di un altro vettore intero.

Il risultato cruciale di questa teoria delle singolarità è che, dato il cono associato alla varietà torica affine, questa è non singolare se e solo se preso su ogni lato del cono un vettore primitivo, l'insieme di tali vettori primitivi risulta una base per il reticolo in cui è immerso il cono. Per esempio il cono della figura ?? è corrispondente a una varietà torica affine singolare poiché è un cono a quattro lati in  $\mathbb{Z}^3$  che dunque non possono essere una base.

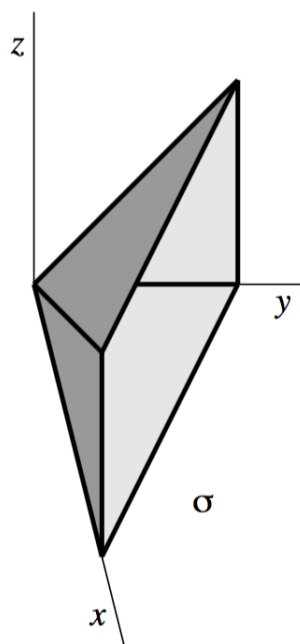


Figura 4.1: *Cono associato a una varietà torica affine singolare*

Questo dipende dal fatto che la sezione del cono sia o meno un oggetto simpliciale. Sicuramente nel cono appena mostrato la sezione non è simpliciale poiché non è un triangolo, dunque non è possibile che la varietà associata al cono sia non singolare.

Tuttavia il fatto che la sezione del cono sia simpliciale è condizione necessaria ma non sufficiente per avere non singolarità della varietà torica affine associata. Si ha dunque bisogno di simplicialità della sezione ma anche di qualcosa di più per

poter avere una varietà non singolare.

Per esempio il cono generato da  $(1, 0)$  e  $(1, 2)$  in  $\mathbb{Z}^2$  non dà origine a una varietà non singolare anche se la sezione è simpliciale poiché  $\{(1, 2), (0, 1)\}$  non è una base di  $\mathbb{Z}^2$ .

E' dunque già evidente da questa prima analisi che esistono tipi differenti di singolarità rilevabili dalla struttura combinatoria del cono associato alla varietà. Una varietà può essere

- **non singolare** se il cono è simpliciale e i vettori primitivi associati ai lati formano una base del reticolo.
- con **singolarità a quoziente finito** che significa che la varietà è localmente isomorfa a  $\mathbb{C}^n/G$  dove  $G$  è un gruppo finito. E' il caso delle varietà associate a coni come quello generato da  $\{(1, 2), (0, 1)\}$  in  $\mathbb{Z}^2$ .
- Singolarità che sono risolubili in maniera differente, per esempio quella della varietà associata al cono della figura ?? che potrà essere "risolta" andando a sezionare il cono in modo da scomporlo in sottoconi che abbiano sezioni simpliciali. Si approfondirà successivamente questo modo di trattare la singolarità.

### 4.3 Singolarità delle superfici toriche e loro risoluzione

In questo paragrafo si focalizza l'attenzione sullo studio della struttura delle superfici toriche ovvero delle varietà 2-dimensionali. Si descriveranno le loro singolarità, introducendo l'idea di risoluzione delle singolarità, fornendo un esempio di come effettuare questo procedimento.

#### 4.3.1 Punti singolari delle superfici toriche

Se  $X_\Sigma$  è la superficie torica del fan  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$ , i generatori minimali dei raggi  $\rho \in \Sigma(1)$  ( $\Sigma(1)$  rappresenta lo scheletro 1-dimensionale del cono) sono primitivi e quindi si estendono a una base di  $N$ . Da risultati omessi in questa trattazione

si può vedere che la superficie torica ottenuta rimuovendo i punti fissi dell'azione del toro (cioè i punti corrispondenti ai coni bidimensionali nella corrispondenza orbita-cono) è non singolare. Vi è dunque un numero finito di punti fissi così fatti. Inoltre i coni bidimensionali sono sempre simpliciali, quindi per quanto detto sopra, ognuno di questi punti singolari è un punto che genera una singolarità a quoziente finito. Questo significa che localmente la varietà è isomorfa a  $\mathbb{C}^2/G$  dove  $G$  è un gruppo abeliano finito.

Si assume che tutti i coni siano poliedrali razionali. Un cono strettamente convesso bidimensionale in  $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$  ha la seguente forma normale che facilita lo studio delle singolarità delle superfici toriche.

**Proposizione 4.3.1.** *Sia  $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^2$  un cono strettamente convesso bidimensionale. Allora esiste una base  $e_1, e_2$  per  $N$  tale che*

$$\sigma = \text{Cone}(e_2, de_1 - ke_2),$$

dove  $d > 0$ ,  $0 \leq k < d$ , e  $\text{mdc}(d, k) = 1$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo bisogno del seguente algoritmo di divisione in una versione modificata.

"Dati gli interi  $l, d > 0$ , ci sono e sono unici gli interi  $s, k$  tali che  $l = sd - k$  e  $0 \leq k < d$ ."

Poniamo  $\sigma = \text{Cone}(u_1, u_2)$ , dove gli  $u_i$  sono vettori primitivi, possiamo prenderli come parte di una base di  $N$ , e possiamo porre  $e_2 = u_1$ . Siccome  $\sigma$  è strettamente convesso, per ogni base  $e'_1, e_2$  di  $N$ , sarà vero che

$$u_2 = de'_1 + le_2$$

per un qualche  $d \neq 0$ . Sostituendo  $e'_1$  con  $-e'_1$  se necessario, possiamo assumere  $d > 0$ . Dalla versione enunciata sopra dell'algoritmo di divisione, ci sono interi  $s, k$  tali che  $l = sd - k$ , dove  $0 \leq k < d$ . Usando questo intero  $s$ , poniamo  $e_1 = e'_1 + se_2$ . Allora  $e_1, e_2$  è ancora una base per  $N$  e

$$u_2 = de_1 + (l - sd)e_2 = de_1 - ke_2.$$

Quindi  $\sigma = \text{Cone}(e_2, de_1 - ke_2)$  come si voleva provare e il fatto che  $\text{mcd}(d, k) = 1$  segue dal fatto che  $u_2$  è primitivo.  $\square$

Chiameremo questi interi  $d, k$  menzionati nella proposizione precedente, i *parametri del cono*  $\sigma$ , e  $\{e_1, e_2\}$  è chiamata *base normalizzata* per  $N$  relativamente a  $\sigma$ . L'unicità di  $d, k$  verrà analizzata in una proposizione successiva.

Usando la forma normale descriveremo la struttura locale del punto  $p_\sigma$  nella varietà torica affine  $U_\sigma$ . Ricordiamo che se  $N' \subseteq N$  è il sottoreticolo generato dai raggi generatori di  $\sigma$ , allora  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^2/G$  dove  $G = N/N'$ . In questa situazione,

$$N = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}(de_1 - ke_2) = d\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2,$$

quindi segue facilmente che

$$G = N/N' \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

In particolare, per le singolarità delle superfici toriche, il gruppo finito  $G$  è sempre ciclico. L'azione di  $G$  su  $\mathbb{C}^2$  è determinata dagli interi  $d, k$  come segue. Scriviamo

$$\mu_d = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^d = 1\}$$

per il gruppo delle radici  $d$ -esime dell'unità in  $\mathbb{C}$ . Quindi una scelta di una radice  $d$ -esima primitiva dell'unità definisce un isomorfismo di gruppi  $\mu_d \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 4.3.2.** *Sia  $M'$  il reticolo duale di  $N'$  e poniamo  $m_1, m_2 \in M'$  i duali di  $u_1, u_2$  in  $N'$ . Usando le coordinate  $x = \chi^{m_1}$  e  $y = \chi^{m_2}$  di  $\mathbb{C}^2$ , l'azione di  $\xi \in \mu_d \simeq N/N'$  su  $\mathbb{C}^2$  è data da*

$$\xi \cdot (x, y) = (\xi x, \xi^k y).$$

*Inoltre,  $U_\sigma \simeq \mathbb{C}^2/\mu_d$  rispetto a questa azione.*

### 4.3.2 Risoluzione di singolarità

Sia  $X$  una superficie torica e denotiamo con  $X_{sing}$  l'insieme finito dei punti singolari di  $X$  (può essere anche vuoto).

**Definizione 4.3.** Dati due spazi topologici  $X$  e  $Y$ , una mappa  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa propria in senso topologico se la retroimmagine di un compatto di  $Y$  è un compatto di  $X$ .

**Definizione 4.4.** Data una varietà irriducibile  $X$ , una **risoluzione di singolarità** di  $X$  è un morfismo  $f : X' \rightarrow X$  tale che :

- (a)  $X'$  sia non singolare e irriducibile.

(b)  $f$  sia proprio (rispetto alla definizione ??).

(c)  $f$  induce un isomorfismo di varietà  $f^{-1}(X \setminus X_{sing}) \simeq X \setminus X_{sing}$ .

Inoltre  $f : X' \rightarrow X$  è una **risoluzione proiettiva** se  $f$  è un morfismo proiettivo.

Una mappa di questo tipo modifica  $X$  per produrre una varietà non singolare senza cambiare il luogo  $X \setminus X_{\text{sing}}$ . Uno degli aspetti più interessanti delle varietà toriche è che molte domande che risultano difficili per varietà in generale ammettono semplici e concrete soluzioni nel caso torico. Il problema di trovare le singolarità è un esempio perfetto di questo. Illustriamo questo costruendo esplicitamente la risoluzione di singolarità di una superficie torica che è esattamente quella proveniente dal cono

$$\sigma = \text{Cone}(e_2, de_1 - e_2).$$

**Esempio 4.3.3.** Consideriamo la superficie torica affine  $U_\sigma$  che proviene da  $\sigma = \text{Cone}(e_2, de_1 - e_2)$ , cono normale razionale di grado  $d$ . Sia  $\Sigma$  il fan in figura ?? ottenuto inserendo un nuovo raggio  $\tau = \text{Cone}(e_1)$  suddividendo  $\sigma$  in due coni bidimensionali.

$$\sigma_1 = \text{Cone}(e_2, e_1)$$

$$\sigma_2 = \text{Cone}(e_1, de_1 - e_2).$$

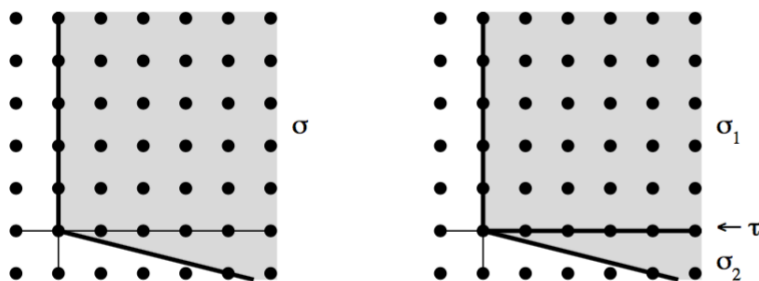


Figura 4.2: Il cono  $\sigma$  e il suo raffinamento dato da  $\sigma_1, \sigma_2, \tau$

Si può vedere che questa suddivisione corrisponde a fare degli scoppamenti di punti singolari.

Enunciamo quindi il seguente teorema che riguarda la risoluzione di singolarità tramite il procedimento di raffinamento appena descritto.

**Teorema 4.3.4.** Sia  $X_\Sigma$  una superficie torica. Allora esiste un fan liscio  $\Sigma'$  che è un raffinamento di  $\Sigma$  tale che il morfismo torico associato  $\phi : X'_{\Sigma'} \rightarrow X_\Sigma$  è una risoluzione torica di singolarità.



## 4.4 Singolarità delle varietà toriche e loro risoluzione

La trattazione completa e accurata della risoluzione delle sigolarità delle varietà toriche necessita di molti strumenti che esulano da quanto esposto in questa tesi, dunque ci si limita ad enunciare alcuni risultati cruciali di questa teoria. In tal modo il lettore potrà quantomeno rendersi conto della portata di essa e di come sia possibile compiere una classificazione completa delle singolarità delle varietà toriche. Il luogo  $X_{sing}$  chè è già stato introdotto, si può dimostrare essere una sottovarietà propria chiusa di  $X$ . Chiamiamo la componente  $X \setminus X_{sing}$  il *luogo liscio* di  $X$ .

Una risoluzione di singolarità modifica  $X$  per renderla non singolare senza cambiare la parte di essa che è già non singolare. Vi è un risultato che dimostra l'esistenza della risoluzione di singolarità su un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0. La risoluzione di singolarità toriche è più semplice rispetto a quella di altre varietà in quanto le varietà toriche non possono avere singolarità arbitrariamente difficili da trattare. L'idea chiave è che dato un fan  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  la risoluzione sarà il morfismo torico

$$\phi : X_{\Sigma'} \longrightarrow X_{\Sigma}$$

che proviene da un raffinamento adatto  $\Sigma'$  di  $\Sigma$ .

### 4.4.1 Suddivisione a stella

Costruiremo il raffinamento del fan  $\Sigma$  in questo modo. Dato il fan  $\Sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  e un elemento primitivo  $v \in |\Sigma| \cap N$ , poniamo  $\Sigma^*(v)$  l'insieme dei seguenti coni:

- (a)  $\sigma$ , dove  $v \notin \sigma \in \Sigma$ .
- (b)  $\text{Cone}(\tau, v)$ , dove  $v \notin \tau \in \Sigma$  e  $\{v\} \cup \tau \subseteq \sigma \in \Sigma$ .

Chiamiamo  $\Sigma^*(v)$  la *suddivisione a stella* di  $\Sigma$  in  $v$ . Questa terminologia è giustificata dalla seguente proposizione.

**Proposizione 4.4.1.**  $\Sigma^*(v)$  è un raffinamento di  $\Sigma$ .

### 4.4.2 Simplicializzazione

Come applicazione della suddivisione a stella, proviamo che ogni fan ha un efficiente raffinamento simpliciale, il che conferma la possibilità di risolvere singolarità. Qui vi è il risultato preciso.

**Proposizione 4.4.2.** *Ogni fan  $\Sigma$  ha un raffinamento  $\Sigma'$  con le seguenti proprietà:*

- (a)  $\Sigma'$  è simpliciale.
- (b)  $\Sigma'(1) = \Sigma(1)$ .
- (c)  $\Sigma'$  contiene ogni cono simpliciale di  $\Sigma$ .
- (d)  $\Sigma'$  è ottenuto da  $\Sigma$  da una sequenza di suddivisioni a stella.
- (e) Il morfismo torico indotto  $X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$  è proiettivo.

Nella figura seguente è mostrato un raffinamento simpliciale di un cono.

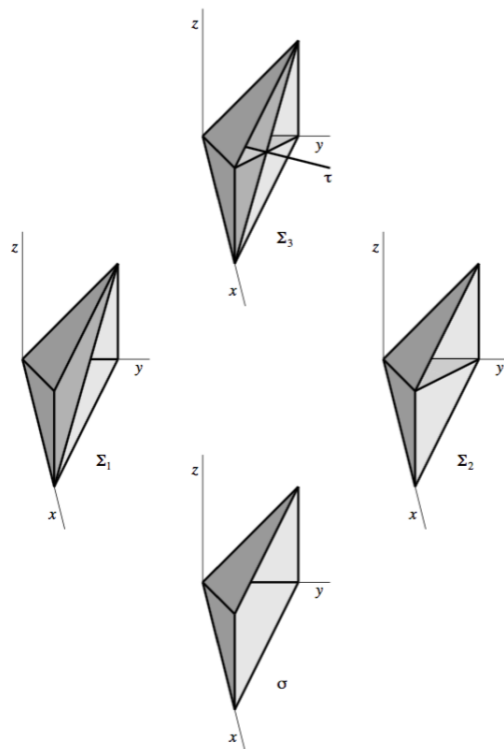


Figura 4.3: Il cono  $\sigma$  con i raffinamenti lisci  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$

# Bibliografia

- [1] Cox, David A, John B. Little, and Henry K. Schenck. Toric varieties. American Mathematical Soc., 2011.
- [2] Fulton, William. Introduction to toric varieties. No. 131. Princeton University Press, 1993.
- [3] Cox, David. "Lectures on toric varieties." CIMPA Lecture Notes (2005).
- [4] Mustața, Mircea. Teaching: Singularities of toric varieties I. November 28, 2004.



# Ringraziamenti

Quando ho iniziato l'Università ero sommersa di dubbi su come sarebbe andata, di paura di non riuscire a farcela, ero contenta di poter fare quello che mi è sempre piaciuto fare, studiare Matematica, ma non ero convinta che sarei riuscita ad arrivare dove sono oggi. Oggi sono qua a presentare la mia tesi che è frutto del mio lavoro e della passione che Luca, forse senza neanche accorgersi, mi trasmette. Ma oggi è un giorno importante soprattutto perchè dopo questo traguardo sarò pronta per iniziare un altro percorso che per me è il realizzarsi di un desiderio, ma che mi pone ancora una volta davanti a dubbi e incertezze. Se c'è una cosa che ho imparato dal primo giorno che sono entrata in questo dipartimento è che solo il confronto con gli altri e la fiducia che gli amici e certi maestri possono trasmettere, è ciò che permette di andare avanti, di credere ogni giorno un pò di più in quello che si fa. Per questo ringrazio il Prof Luca Migliorini, ringrazio i miei amici Nicola e Beatrice che mi fanno ridere di gusto, Giulia che mi fa studiare, Simona che mi dà fiducia, loro che sono stati in questi anni e spero lo saranno ancora nei prossimi, miei compagni di vita. Ringrazio Matteo che ha la forza di starmi accanto tutti i giorni e che mi dà una grande voglia di vivere. Ringrazio Gianmarco che mi dà entusiasmo e mi dà ragione quando voglio averne, Luca, Elsa, Laura, Martina, Giada, Aurora, Vincenzo e Andrea che mi sopportano, mi sostengono sempre e mi vogliono bene. Ringrazio Gabriele che ha sempre creduto in me, mia sorella Giulia perchè per me è un esempio e infine i miei genitori perchè sono due belle persone che farebbero di tutto per la mia felicità. Ringrazio chiunque mi supporta e mi sopporta, chiunque ha avuto voglia di condividere un pò del suo sapere con me. Ringrazio quei professori che hanno voluto dire molto per me e che ho incontrato sia a scuola che in questo dipartimento, persone di cultura e di cuore, persone che con il loro sapere e il loro modo di affrontare la vita, più che con le loro parole, sono esempi e riferimenti.