

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**FUNZIONI  $BV$  E  
DISUGUAGLIANZE  
ISOPERIMETRICHE**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Bruno Franchi

Presentata da:  
Nicolò Forcillo

Sessione Autunnale  
Anno Accademico 2015-2016



*A tutte le persone che hanno creduto in me,  
che mi hanno dato fiducia e che mi hanno  
permesso di crescere e maturare per  
affrontare questo percorso ...*



# Introduzione

All'interno della mia tesi, verrà introdotta la teoria delle funzioni in  $\mathbb{R}^n$  a *variazione limitata* ( $BV$ ), seguendo le presentazioni di Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy nel libro **Measure Theory and Fine Properties of Functions** e di Enrico Giusti nell'opera **Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation**. Le funzioni  $BV$  sono funzioni le cui derivate prime deboli sono misure di Radon, ossia misure di Borel regolari finite sui compatti. In particolare verranno anche analizzati gli insiemi  $E$  che hanno *perimetro finito*, ossia tali che la funzione indicatrice  $\chi_E$  sia una funzione  $BV$ .

Nello specifico, nel primo capitolo verranno date le definizioni di funzioni  $BV$  e insiemi di perimetro finito, sia in una versione globale che in una locale, verrà enunciato un primo importante teorema per le funzioni  $BV$  e verrà analizzata la relazione tra funzioni di Sobolev e funzioni  $BV$ . Nel secondo capitolo, invece, verranno analizzate la semicontinuità inferiore, l'approssimazione con funzioni lisce e la compattezza di funzioni  $BV$ , mentre nel terzo capitolo verranno elencati alcuni risultati sulle funzioni  $BV$  riguardanti la Traccia, l'Estensione e la formula di Coarea. Infine, nel quarto ed ultimo capitolo, verranno studiate le disuguaglianze di Sobolev e Poincaré e le disuguaglianze isoperimetriche per funzioni  $BV$ .



# Indice

Introduzione	i
<b>1 Definizioni, Teorema di Struttura</b>	<b>1</b>
<b>2 Approssimazione e compattezza</b>	<b>11</b>
2.1 Semicontinuità inferiore . . . . .	11
2.2 Approssimazione con funzioni lisce . . . . .	12
2.3 Compattezza . . . . .	26
<b>3 Alcuni risultati sulle funzioni <math>BV</math></b>	<b>29</b>
<b>4 Disuguaglianze isoperimetriche</b>	<b>33</b>
4.1 Disuguaglianze di Sobolev e Poincaré per funzioni $BV$ . . . . .	33
4.2 Disuguaglianze isoperimetriche . . . . .	36
<b>A Risultati utilizzati nella tesi</b>	<b>41</b>
<b>B Misure</b>	<b>49</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>





# Capitolo 1

## Definizioni, Teorema di Struttura

D'ora in avanti,  $U$  denoterà sempre un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.1.**

(i) Una funzione  $f \in L^1(U)$  ha **variazione limitata** in  $U$  se

$$\sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Scriviamo

$$BV(U)$$

per denotare lo spazio delle funzioni a variazione limitata in  $U$ . Non identifichiamo due funzioni  $BV$  che sono uguali quasi ovunque (q.o.) secondo la misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale.

Con  $C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$  denotiamo lo spazio delle funzioni  $C^1$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  con supporto compatto in  $U$ , dove intendiamo per supporto di una funzione  $f$

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

e con  $\operatorname{div} \phi$  indichiamo

$$\operatorname{div} \phi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j}$$

per  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ .

(ii) Un sottoinsieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha **perimetro finito** in  $U$  se

$$\chi_E \in BV(U)$$

dove con  $\chi_E$  indichiamo

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{in } E \\ 0 & \text{in } \mathbb{R}^n - E. \end{cases}$$

È conveniente introdurre anche versioni locali di questi concetti.

**Definizione 1.2.**

(i) Una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$  ha **variazione localmente limitata** in  $U$  se per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$ ,

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C^1_c(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Scriviamo

$$BV_{\text{loc}}(U)$$

per denotare lo spazio di queste funzioni.

(ii) Un sottoinsieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha **perimetro localmente finito** in  $U$  se

$$\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U).$$

$V \subset\subset U$  significa  $V$  a chiusura compatta in  $U$ .

**Teorema 1.1 (Teorema di Struttura per funzioni  $BV_{\text{loc}}$ ).** *Assumiamo che  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ .*

*Allora esistono una misura di Radon  $\mu$  su  $U$  e una funzione  $\mu$ -misurabile*

$$\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*tali che*

(i)  $|\sigma(x)| = 1$   $\mu$ -q.o. e

(ii) per ogni  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ , abbiamo

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_U \phi \cdot \sigma \, d\mu.$$

**Dimostrazione.** 1. Definiamo il funzionale lineare  $L : C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  attraverso

$$L(\phi) := - \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx$$

per  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ . Poiché  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , abbiamo

$$\sup \{L(\phi) \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1\} =: C(V) < \infty$$

per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$ .

Infatti se  $\phi$  è tale che  $|\phi| \leq 1$  anche  $|\phi| \leq 1$  e viceversa; la divergenza è un operatore lineare per cui  $\int_V f \operatorname{div} (-\phi) \, dx = - \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx$ . Dunque i due insiemi

$$\left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\},$$

$$\left\{ - \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}$$

sono uguali e anche il sup è lo stesso.

Di conseguenza, poiché sia  $\int_V f \operatorname{div} \phi \, dx$  che  $-\int_V f \operatorname{div} \phi \, dx$  appartengono all'insieme  $\left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}$ , anche il modulo di questo integrale vi appartiene. Inoltre  $\frac{\phi}{\|\phi\|_{L^\infty}}$  è tale che  $\left| \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^\infty}} \right| \leq 1$  per definizione di  $\|\phi\|_{L^\infty}$  e appartiene a  $C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$  poiché  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , per cui  $\left| L \left( \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^\infty}} \right) \right| \leq C(V)$  per definizione di  $C(V)$ , ma per linearità di  $L$  questo è equivalente a dire

$$|L(\phi)| \leq C(V) \|\phi\|_{L^\infty} \quad (\star)$$

per  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ . Essendo  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , con  $\|\phi\|_{L^\infty}$  intendiamo

$$\|\phi\|_{L^\infty} = \sup_{\operatorname{supp}(\phi)} |\phi|.$$

2. Prendiamo un qualsiasi compatto  $K \subset U$  e scegliamo un insieme aperto  $V$  tale che  $K \subset V \subset\subset U$ . Per ogni  $\phi \in C_c(U; \mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp}(\phi) \subseteq K$ , scegliamo  $\phi_k \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) tale che  $\phi_k \rightarrow \phi$  uniformemente su  $V$ .

Definiamo

$$\bar{L}(\phi) := \lim_{k \rightarrow \infty} L(\phi_k);$$

dove  $L(\phi_k)$  è ben definito poiché  $\phi_k \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n) \subset C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . In accordo a  $(\star)$  questo limite esiste ed è indipendente dalla scelta della successione  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  che converge a  $\phi$ . Infatti per  $(\star)$  abbiamo che

$$|L(\phi_k) - L(\phi_h)| = |L(\phi_k - \phi_h)| \leq C(V) \|\phi_k - \phi_h\|_{L^\infty},$$

per linearità di  $L$ . Per cui essendo  $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$  di Cauchy rispetto alla norma uniforme ( $\phi_k \rightarrow \phi$  uniformemente su  $V$ ), per confronto  $L(\phi_k)$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$  e quindi converge, poiché  $\mathbb{R}$  è completo. Dunque  $L$  si estende univocamente a un funzionale lineare

$$\bar{L} : C_c(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\sup \{ \bar{L}(\phi) \mid \phi \in C_c(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1, \text{supp}(\phi) \subseteq K \} < \infty$$

per ogni compatto  $K \subset U$ , poichè  $\bar{L}(\phi) \leq C(V) \|\phi\|_{L^\infty} \leq C(V) < \infty$   $\forall \phi \in C_c(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1, \text{supp}(\phi) \subseteq K$ , per cui anche il sup, poiché  $C(V)$  maggiorante e il sup è il più piccolo maggiorante. Utilizzando il **Teorema A.1** con  $\phi$  al posto di  $f$  e  $\bar{L}(\phi) = - \int_U f \text{div} \phi dx$  per  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ , si ottiene il Teorema di Struttura.  $\square$

## Notazioni

- (i) Se  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , d'ora in avanti scriveremo

$$\|Df\|$$

per la misura  $\mu$ , e

$$[Df] := \|Df\| \llcorner \sigma,$$

ossia  $[Df]$  è una misura vettoriale con segno con densità  $\sigma$  rispetto a  $\|Df\|$ .

Dunque l'affermazione (ii) nel **Teorema 1.1** si legge come

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_U \phi \cdot \sigma \, d\|Df\| = - \int_U \phi \cdot d[Df]$$

per tutte le funzioni  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ , poiché  $\sigma = D_\mu[Df]$  e dunque come notazione  $\frac{d[Df]}{d\|Df\|} = \sigma$ , ossia  $\sigma \, d\|Df\| = d[Df]$ .

- (ii) Similmente, se  $f = \chi_E$  e  $E$  è un insieme di perimetro localmente finito in  $U$ , d'ora in poi scriveremo

$$\|\partial E\|$$

per la misura  $\mu$ , e

$$\nu_E := -\sigma.$$

Di conseguenza,

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, dx = \int_U \phi \cdot \nu_E \, d\|\partial E\|$$

per ogni  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ .

**Altre notazioni** Se  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , scriviamo

$$\mu^i = \|Df\| \llcorner \sigma^i \quad (i = 1, \dots, n)$$

per  $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ . Per il **Teorema A.2**, possiamo scrivere

$$\mu^i = \mu_{ac}^i + \mu_s^i,$$

dove

$$\mu_{ac}^i \ll \mathcal{L}^n, \quad \mu_s^i \perp \mathcal{L}^n$$

poiché  $\mu^i$  e  $\mathcal{L}^n$  sono due misure di Radon.

Allora

$$\mu_{ac}^i = \mathcal{L}^n \llcorner f_i$$

per funzioni  $f_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Scriviamo

$$\begin{aligned} f_{x_i} &:= f_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ Df &:= (f_{x_1}, \dots, f_{x_n}), \\ [Df]_{ac} &:= (\mu_{ac}^1, \dots, \mu_{ac}^n) = \mathcal{L}^n \llcorner Df, \\ [Df]_s &:= (\mu_s^1, \dots, \mu_s^n). \end{aligned}$$

Quindi

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s = \mathcal{L}^n \llcorner Df + [Df]_s;$$

così che  $Df \in L^1_{\text{loc}}(U; \mathbb{R}^n)$  è la densità della parte assolutamente continua di  $[Df]$ .

**Osservazione.**

- (i)  $\|Df\|$  è la **misura variazione** di  $f$ , poiché è detta così la misura di Radon del **Teorema A.1**, identificando  $f$  con il funzionale lineare  $\bar{L}$  utilizzato nella dimostrazione del **Teorema 1.1**;  $\|\partial E\|$  è la **misura perimetro** di  $E$ ; e  $\|\partial E\|(U)$  è il **perimetro di  $E$  in  $U$** .
- (ii) Se  $f \in BV_{\text{loc}}(U) \cap L^1(U)$ , allora  $f \in BV(U)$  se e solo se  $\|Df\|(U) < \infty$ . In questo caso definiamo

$$\|f\|_{BV(U)} := \|f\|_{L^1(U)} + \|Df\|(U).$$

- (iii) Dalla dimostrazione del **Teorema A.1**, vediamo che

$$\begin{aligned} \|Df\|(V) &= \sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}, \\ \|\partial E\|(V) &= \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

per ogni aperto  $V \subset\subset U$ .

□

**Esempio.** Assumiamo  $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$ , ossia che  $f \in L^1(V)$  e che le sue derivate deboli  $f_{x_i}$  esistano e appartengano a  $L^1(V)$  per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$ . Allora per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$  e per ogni  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , con  $|\phi| \leq 1$ , abbiamo

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_U Df \cdot \phi \, dx \leq \int_V |Df| \, dx < \infty.$$

Infatti abbiamo che  $\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = \int_U \operatorname{div} f \phi \, dx - \int_U Df \cdot \phi \, dx$ , ma per definizione di derivata debole, essendo  $\phi$  a supporto compatto in  $V \subset\subset U$ ,  $\int_U \operatorname{div} f \phi \, dx$  è 0. Poiché  $\phi$  è a supporto compatto in  $V \subset\subset U$ ,  $-\int_U Df \cdot \phi \, dx = -\int_V Df \cdot \phi \, dx$  e l'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che  $|f f| \leq \int |f|$  con  $f$  generica, dal **Teorema A.14** e da  $|\phi| \leq 1$  e l'ultimo integrale è finito poichè  $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$ .

Quindi  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , poichè se  $\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx \leq \int_V |Df| \, dx < \infty$  per ogni  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , con  $|\phi| \leq 1$ , vale anche

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx, \phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} \leq \int_V |Df| \, dx < \infty$$

per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$ , dove l'uguaglianza  $\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = \int_V f \operatorname{div} \phi \, dx$  vale poichè  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ .

In aggiunta,

$$\|Df\| = \mathcal{L}^n \llcorner |Df|$$

e  $\mathcal{L}^n - q.o.$  abbiamo

$$\sigma = \begin{cases} \frac{Df}{|Df|} & \text{se } Df \neq 0 \\ 0 & \text{se } Df = 0. \end{cases}$$

Infatti se  $Df \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx &= - \int_U Df \cdot \phi \, dx \\ &= - \int_U \frac{Df}{|Df|} \cdot \phi |Df| \, dx \\ &= - \int_U \sigma \cdot \phi \, d\mu \end{aligned}$$

poiché  $\|Df\| = \mathcal{L}^n \llcorner |Df|$  e  $\|Df\| = \mu$ . Con invece  $Df = 0$ ,  $\sigma = 0$ .

Quindi

$$W_{\text{loc}}^{1,1}(U) \subset BV_{\text{loc}}(U),$$

e similmente

$$W^{1,1}(U) \subset BV(U)$$

(dimostrazione analoga a quella di prima senza bisogno di passare da  $V$ ).

In particolare,

$$W_{\text{loc}}^{1,p}(U) \subset BV_{\text{loc}}(U) \quad \text{per } 1 \leq p \leq \infty$$

poiché  $W_{\text{loc}}^{1,p}(U) \subset W_{\text{loc}}^{1,1}(U) \subset BV_{\text{loc}}(U)$  con  $p > 1$ .

Dunque, *ogni funzione di Sobolev ha variazione localmente limitata*.

**Esempio.** Assumiamo che  $E$  sia un sottoinsieme liscio, aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K) < \infty$  per ogni compatto  $K \subset U$ . Allora per  $V \subset\subset U$  aperto e per ogni  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ , con  $|\phi| \leq 1$ ,

$$\int_E \text{div } \phi \, dx = \int_{\partial E} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

per il **Teorema A.13**, con  $\nu$  che denota la normale unitaria esterna lungo  $\partial E$  e dove  $\mathcal{H}^{n-1}$  è la misura di Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionale.

Quindi

$$\int_E \text{div } \phi \, dx = \int_{\partial E \cap V} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap V) < \infty$$

dove la disuguaglianza è dovuta al **Teorema A.14** poiché  $|\phi| \leq 1$  e  $|\nu| = 1$  e al fatto che  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap V) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \bar{V}) < \infty$ , poiché  $V$  è a chiusura compatta in  $U$  e dove

$$\int_{\partial E \cap V} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

poiché  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ .

Dunque  $E$  ha perimetro localmente finito in  $U$  poiché se vale

$$\int_E \text{div } \phi \, dx \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap V) < \infty$$



per ogni  $\phi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$  tale che  $|\phi| \leq 1$  vale anche per il sup, ossia, poiché vale per ogni aperto  $V \subset\subset U$ ,  $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U)$ . In aggiunta,

$$\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$$

e

$$\nu_E = \nu \quad \mathcal{H}^{n-1} - q.o. \quad \text{in } \partial E \cap U.$$

Infatti per quello appena dimostrato,

$$\|\partial E\|(U) = \sup \left\{ \int_U \chi_E \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$$

ma noi sappiamo anche che  $E$  è liscio, per cui la frontiera è  $C^2$ .

Dunque se la frontiera è  $C^2$ ,  $\nu(x)$  sarà una funzione di classe  $C^1$  (è il gradiente della parametrizzazione di  $\partial E$ ) con  $|\nu(x)| = 1$  per ogni  $x$  in  $\partial E$ , così possiamo estenderla ad una funzione  $N$  definita su tutto  $\mathbb{R}^n$  tale che  $N \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  e  $|N(x)| \leq 1$  per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ . Siano ora  $\eta \in C_c^\infty(U)$ , con  $|\eta| \leq 1$  e  $\phi = N\eta$ ;  $\phi$  così definita è tale che  $|\phi| \leq 1$  e inoltre  $\phi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$ ; si ha

$$\int_E \operatorname{div} \phi \, dx = \int_{\partial E} \phi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \eta(N \cdot \nu) \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \eta \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

poiché  $N \cdot \nu = \|\nu\|^2 = 1$  su  $\partial E$ .

Quindi

$$\sup_{\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1} \int_{E \cap U} \operatorname{div} \phi \, dx \geq \sup_{\eta \in C_c^\infty(U), |\eta| \leq 1} \int_{\partial E \cap U} \eta \, d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U),$$

in quanto essendo  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$  e  $\eta \in C_c^\infty(U)$ , integrare su  $E \cap U$  e  $\partial E \cap U$  è uguale a integrare su  $E$  e  $\partial E$ .

Per cui

$$\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U).$$

Dunque  $\|\partial E\|(U)$  misura la “taglia” di  $\partial E$  in  $U$ . Poiché  $\chi_E \notin W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$  (in accordo, ad esempio, al **Teorema A.3**), vediamo che

$$W_{\text{loc}}^{1,1}(U) \subsetneq BV_{\text{loc}}(U), \quad W^{1,1}(U) \subsetneq BV(U).$$

Così, *non tutte le funzioni a variazione localmente limitata sono funzioni di Sobolev.*

**Osservazione.** Quindi, se  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , possiamo scrivere come sopra

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s = \mathcal{L}^n \llcorner Df + [Df]_s.$$

Di conseguenza,  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$  appartiene a  $W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$  se e solo se

$$f \in L_{\text{loc}}^p(U), \quad [Df]_s = 0, \quad Df \in L_{\text{loc}}^p(U).$$

□

# Capitolo 2

## Approssimazione e compattezza

### 2.1 Semicontinuità inferiore

**Teorema 2.1** (Semicontinuità inferiore della misura variazione).

Supponiamo  $f_k \in BV(U)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) e

$$f_k \rightarrow f \text{ in } L^1_{\text{loc}}(U).$$

Allora

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U).$$

**Dimostrazione.** Sia  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\phi| \leq 1$ . Allora

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k \operatorname{div} \phi \, dx$$

poiché

$$\begin{aligned} \left| \int_U (f_k - f) \operatorname{div} \phi \, dx \right| &= \left| \int_{\operatorname{supp}(\phi)} (f_k - f) \operatorname{div} \phi \, dx \right| \\ &\leq \|\operatorname{div} \phi\|_{L^\infty} \int_{\operatorname{supp}(\phi)} |f_k - f| \, dx \end{aligned}$$

dove qui

$$\|\operatorname{div} \phi\|_{L^\infty} = \sup_{\operatorname{supp}(\phi)} |\operatorname{div} \phi|$$

poiché  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$  e il limite è 0 con  $k \rightarrow \infty$  poiché  $f_k \rightarrow f$  in  $L_{loc}^1(U)$  e  $\text{supp}(\phi)$  è un compatto di  $U$ .

Per cui

$$\begin{aligned} \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k \operatorname{div} \phi \, dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \phi \cdot \sigma_k \, d\|Df_k\| \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_U d\|Df_k\| \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U) \end{aligned}$$

dove la disuguaglianza è dovuta al fatto che  $|\phi| \leq 1$ ,  $|\sigma_k| = 1$   $\mu - q.o.$  per il **Teorema 1.1** e dunque per il **Teorema A.14**  $-\phi \cdot \sigma_k \leq 1$  e alla definizione di  $\liminf$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U) := \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf_{m \geq k} \|Df_m\|(U)).$$

Quindi poiché vale per tutte le  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\phi| \leq 1$ , vale anche per il  $\sup$ , ossia

$$\begin{aligned} \|Df\|(U) &= \sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx \mid \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U). \end{aligned}$$

□

## 2.2 Approssimazione con funzioni lisce

**Teorema 2.2** (Approssimazione locale con funzioni lisce).

Assumiamo  $f \in BV(U)$ .

Allora esistono funzioni  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$  tali che

- (i)  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1(U)$  e
- (ii)  $\|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U)$  con  $k \rightarrow \infty$ .

**Osservazione.** Notiamo attentamente che non stiamo affermando che

$$\|D(f_k - f)\|(U) \rightarrow 0.$$

□

**Dimostrazione.** 1. Fissiamo  $\epsilon > 0$ . Dato un intero positivo  $m$ , definiamo per  $k \in \mathbb{N}$  gli insiemi aperti

$$U_k := \left\{ x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k} \right\} \cap B^0(0, k+m).$$

Questi insiemi sono aperti, poiché sono intersezioni di aperti. Infatti con  $B^0(0, k+m)$  denotiamo la palla aperta di centro 0 e raggio  $k+m$ , ossia

$$B^0(0, k+m) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| < k+m\}$$

e

$$\left\{ x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k} \right\}$$

è un aperto per ogni  $k$ , poiché la funzione distanza da un insieme è continua e la controimmagine continua di un aperto è aperta.

In seguito, scegliamo  $m$  così grande che

$$\|Df\|(U - U_1) < \epsilon. \quad (\star)$$

Poniamo  $U_0 := \emptyset$  e definiamo

$$V_k := U_{k+1} - \bar{U}_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Sia  $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  una successione di funzioni lisce tale che

$$\zeta_k \in C_c^\infty(V_k), \quad 0 \leq \zeta_k \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \equiv 1 \text{ su } U.$$

Questa successione non è altro che la partizione dell'unità di  $U$  subordinata al ricoprimento  $\{V_k\}$ , ossia una famiglia di funzioni che soddisfa le proprietà già citate e in più tale che in ogni punto solo un numero finito di funzioni ha valore non nullo, per cui la somma  $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \equiv 1$  è finita in ogni punto (definizione indipendente dal concetto di somma

infinita).

Fissiamo il mollificatore  $\eta_\epsilon$ , determinato in questo modo.

Definiamo la funzione  $C^\infty \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$\eta(x) := \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

La costante  $c > 0$  aggiustata in modo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1.$$

Scriviamo

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (\epsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

Allora per ogni  $k$ , prendiamo  $\epsilon_k > 0$  così piccolo che

$$\begin{cases} \text{supp}(\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k)) \subseteq V_k \\ \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| dx < \frac{\epsilon}{2^k}, \\ \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (fD\zeta_k) - fD\zeta_k| dx < \frac{\epsilon}{2^k}. \end{cases} \quad (**)$$

Questo vale per la seguente proposizione.

**Proposizione 2.3.** *Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Valgono i seguenti fatti:*

- (a)  $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f_\epsilon \rightarrow f$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  e se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora  $f_\epsilon \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ;
- (b) se  $A \leq f(x) \leq B$  per ogni  $x$ , allora  $A \leq f_\epsilon(x) \leq B$  per ogni  $x$ ;
- (c) se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora  $\int_{\mathbb{R}^n} f g_\epsilon dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon g dx$ ;
- (d) se  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , allora  $\frac{\partial f_\epsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_\epsilon$ ;
- (e) se  $\text{supp}(f) \subset A$ , allora  $\text{supp}(f_\epsilon) \subset A_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, A) \leq \epsilon\}$ .

Per  $f_\epsilon$  intendiamo nella proposizione  $f_\epsilon := \eta_\epsilon * f$ , ossia

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon(x-y)f(y) dy.$$

Il punto (a) e il punto (e) mi garantiscono che valgono le proprietà elencate sopra. Infatti sia le funzioni  $f\zeta_k$  che le  $fD\zeta_k$  sono  $L^1(U)$ , poichè  $\zeta_k \in C_c^\infty(V_k \subseteq U)$  e  $f \in L^1(U)$ , per cui  $\eta_\epsilon * f\zeta_k \rightarrow f\zeta_k$  in  $L^1(U)$  e  $\eta_\epsilon * fD\zeta_k \rightarrow fD\zeta_k$  in  $L^1(U)$  per il punto (a). Inoltre  $\text{supp}(f\zeta_k) \subseteq V_k$ , per cui per il punto (e) possiamo prendere  $\epsilon_k > 0$  così piccolo che  $\text{supp}(\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k)) \subseteq V_k$ .

Definiamo infine

$$f_\epsilon := \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k).$$

Dalla definizione dei  $V_k$  (la successione degli insiemi  $U_k$  è crescente e dunque abbiamo che  $\forall k \ V_k \cap V_h = \emptyset \ \forall h \geq k+3$ ), dal fatto che i  $V_k$  sono un ricoprimento di  $U$  e dalla condizione  $\text{supp}(\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k)) \subseteq V_k$ , segue che in un intorno di ogni punto  $x \in U$  ci sono solo un numero finito di termini non nulli in questa somma, poichè ogni  $x \in U$  appartiene al massimo a tre degli insiemi  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Quindi  $f_\epsilon \in C^\infty(U)$ , poichè somma finita di funzioni  $C^\infty$  in ogni intorno di ogni  $x \in U$ , in quanto le  $\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k)$  appartengono a  $C^\infty(U)$  per il punto (a) della **Proposizione 2.3**, essendo  $f\zeta_k \in L^1(U) \supset L^1_{\text{loc}}(U)$  per ogni  $k$ .

2. Poichè anche

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k \quad \left( \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = 1 \right)$$

( $\star\star$ ) implica che

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - f\|_{L^1(U)} &= \int_U \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k) \right| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| dx < \epsilon \quad \left( \text{infatti } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la disuguaglianza triangolare del modulo e dove abbiamo portato fuori dall'integrale la somma per il **Teorema A.12**, in quanto la successione delle somme parziali di  $|\eta_{\epsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k|$  è una successione monotona crescente e ho convergenza puntuale poichè

somma finita in un intorno di ogni  $x \in U$ .

Di conseguenza,  $f_\epsilon \rightarrow f$  in  $L^1(U)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ; e dunque il **Teorema 2.1** implica che

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|Df_\epsilon\|(U) \quad (\star \star \star)$$

dato che se  $f_\epsilon \rightarrow f$  in  $L^1(U)$ , allora  $f_\epsilon \rightarrow f$  anche in  $L^1_{\text{loc}}(U)$ .

3. Sia ora  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\phi| \leq 1$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi \, dx &= \int_U \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\epsilon_k} * (f \zeta_k) \operatorname{div} \phi \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \eta_{\epsilon_k} * (f \zeta_k) \operatorname{div} \phi \, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(x-y) f(y) \zeta_k(y) \operatorname{div} \phi(x) \, dy \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_U \eta_{\epsilon_k}(y-x) \operatorname{div} \phi(x) \, dx \right] f(y) \zeta_k(y) \, dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_U \eta_{\epsilon_k}(x-y) \operatorname{div} \phi(x) \, dx \right] f(y) \zeta_k(y) \, dy \end{aligned}$$

dove abbiamo portato fuori dall'integrale la somma poiché per ogni  $x$  in  $U$  esiste un intorno in cui abbiamo solo un numero finito di termini non nulli. Quindi suddividendo  $U$  in questi intorni e sfruttando additività e linearità dell'integrale, riusciamo a portare fuori la somma. Nella penultima uguaglianza, invece, abbiamo utilizzato il **Teorema A.10**. Adesso, visto che  $\phi$  è 0 fuori da  $U$ , il mollificatore  $\eta_{\epsilon_k}$  è simmetrico ( $\eta_{\epsilon_k}(x-y) = \eta_{\epsilon_k}(y-x)$ ) e considerando i supporti delle funzioni in gioco ( $\operatorname{supp}(\eta_{\epsilon_k}) \subseteq (B(0, \epsilon_k))$ ,  $\operatorname{supp}(\phi) \subseteq U$  e  $\operatorname{supp}(\zeta_k) \subseteq (V_k) \subseteq U$ ), possiamo “scambiare” gli insiemi di integrazione, dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_U \eta_{\epsilon_k}(x-y) \operatorname{div} \phi(x) \, dx \right] f(y) \zeta_k(y) \, dy$$

diventa

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \int_U f(y) \zeta_k(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(y-x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j}(x) \, dx \right] dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f(y) \zeta_k(y) (\eta_{\epsilon_k} * \operatorname{div} \phi)(y) \, dy. \end{aligned}$$



Inoltre possiamo sfruttare la proprietà della convoluzione di scaricare la derivata, in quanto  $\phi$  è una funzione  $C^1$  a supporto compatto. Così

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U f(y) \zeta_k(y) (\eta_{\epsilon_k} * \operatorname{div} \phi)(y) dy$$

si può riscrivere come

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \zeta_k \operatorname{div} (\eta_{\epsilon_k} * \phi) dx.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \zeta_k \operatorname{div} (\eta_{\epsilon_k} * \phi) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div} (\zeta_k (\eta_{\epsilon_k} * \phi)) dx \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f D\zeta_k \cdot (\eta_{\epsilon_k} * \phi) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div} (\zeta_k (\eta_{\epsilon_k} * \phi)) dx \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \phi \cdot (\eta_{\epsilon_k} * (f D\zeta_k)) - f D\zeta_k dx \\ &=: I_1^\epsilon + I_2^\epsilon. \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato nella seconda uguaglianza la seguente formula

$$\operatorname{div}(\phi F) = \nabla \phi \cdot F + \phi \operatorname{div}(F)$$

in cui  $\phi$  è una funzione a valori in un campo di scalari e dove  $F$  è un campo vettoriale.

Nella penultima uguaglianza abbiamo sfruttato invece

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f D\zeta_k \cdot (\eta_{\epsilon_k} * \phi) dx = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}(x) \eta_{\epsilon_k}(x-y) \phi_j(y) dy dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \int_U f(x) \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}(x) \eta_{\epsilon_k}(x-y) \phi_j(y) dx dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f(-z+y) \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}(-z+y) \eta_{\epsilon_k}(-z) \phi_j(y) dz dy
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto un cambio di variabile  $x = y - z$  e abbiamo sfruttato il fatto che, essendo una traslazione, il modulo del determinante dello Jacobiano è 1 e dunque  $dx = dz$ .

Di conseguenza, poiché  $\eta_{\epsilon_k}(-z) = \eta_{\epsilon_k}(z)$ , essendo  $\eta_{\epsilon_k}$  mollificatore simmetrico,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f(-z+y) \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j}(-z+y) \eta_{\epsilon_k}(-z) \phi_j(y) dz dy$$

diventa

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \left[ f \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} * \eta_{\epsilon_k} \right] (y) \phi_j(y) dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [f D\zeta_k * \eta_{\epsilon_k}] (y) \cdot \phi(y) dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [f D\zeta_k * \eta_{\epsilon_k}] (y) \cdot \phi(y) dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k] (y) \cdot \phi(y) dy
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale poiché  $\phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$  e  $\zeta_k \in C_c^\infty(V_k)$ , per cui integrare in  $U$  o in  $\mathbb{R}^n$  non cambia, in quanto in entrambi i casi l'integrale rimane esteso a  $\text{supp}(\phi) \cap \text{supp}(\zeta_k)$ . Invece l'ultima uguaglianza è vera perché  $f D\zeta_k * \eta_{\epsilon_k} = \eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k$ .

Inoltre  $\sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k \equiv 0$  in  $U$  poichè  $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \equiv 1$  e possiamo portare dentro la somma il segno di derivata, poichè abbiamo una somma finita in un intorno di ogni  $x$  in  $U$  e quindi possiamo utilizzare la linearità della derivata.

Per cui infine

$$\begin{aligned}
& \int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi \, dx = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)) \, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k](y) \cdot \phi(y) \, dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)) \, dx \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k](y) \cdot \phi(y) - f \sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k(y) \cdot \phi(y) \, dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)) \, dx \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k - f D\zeta_k](y) \cdot \phi(y) \, dy \\
&= \int_U f \operatorname{div}(\zeta_1(\eta_{\epsilon_1} * \phi)) \, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)) \, dx \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k - f D\zeta_k](y) \cdot \phi(y) \, dy \\
&=: I_1^\epsilon + I_2^\epsilon
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la linearità del prodotto scalare e il fatto che il prodotto scalare con l'elemento nullo è sempre 0 e dove abbiamo portato fuori dall'integrale la somma  $\sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k$  poichè somma finita in un intorno di ogni  $x \in U$ .

4. Notiamo che

$$|\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)| \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

poiché  $0 \leq \zeta_k \leq 1$  e

$$|\eta_{\epsilon_k} * \phi| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(x-y) \phi(y) dy \right| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(x-y) dx \leq 1$$

in quanto  $\|\phi\|_{L^\infty} = \sup_{\text{supp}(\phi)} |\phi| \leq 1$  e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(x-y) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon_k^n} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon_k}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta(z) dz = 1 \end{aligned}$$

avendo fatto il cambio di variabile  $\frac{x-y}{\epsilon_k} = z$ , dove il modulo del determinante dello Jacobiano è  $\epsilon_k^n$  e dunque  $dx = \epsilon_k^n dz$ .

Notiamo inoltre, che ogni punto in  $U$  appartiene al massimo a tre degli insiemi  $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ .

Quindi

$$\begin{aligned} |I_1^\epsilon| &= \left| \int_U f \operatorname{div}(\zeta_1(\eta_{\epsilon_1} * \phi)) dx + \sum_{k=2}^\infty \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)) dx \right| \\ &\leq |Df|(U) + \sum_{k=2}^\infty |Df|(V_k) \\ &\leq |Df|(U) + 3|Df|(U - U_1) \\ &\leq |Df|(U) + 3\epsilon \quad \text{da } (\star) \end{aligned}$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla definizione di  $|Df|(U)$  e  $|Df|(V_k)$ , dal fatto che  $|\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi)| \leq 1$ ,  $\zeta_1(\eta_{\epsilon_1} * \phi) \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^n) \subset C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$  e  $\zeta_k(\eta_{\epsilon_k} * \phi) \in C_c^\infty(V_k, \mathbb{R}^n) \subset C_c^1(V_k, \mathbb{R}^n)$  e la seconda dal fatto che ogni punto in  $U$  appartiene al massimo a tre degli insiemi

$\{V_k\}_{k=1}^\infty$ . Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} |Df|(V_k) &= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{V_k} d\mu \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{U-U_1} \chi_{V_k} d\mu \\ &= \int_{U-U_1} \sum_{k=2}^{\infty} \chi_{V_k} d\mu \\ &\leq 3 \int_{U-U_1} d\mu \\ &= 3|Df|(U-U_1) \end{aligned}$$

dove possiamo portare dentro l'integrale la somma poiché per ogni punto in  $U$  esiste un intorno in cui abbiamo solo un numero finito di termini non nulli e dove abbiamo maggiorato  $\sum_{k=2}^{\infty} \chi_{V_k}$  con 3, dal momento che ogni punto in  $U$  appartiene al massimo a tre degli insiemi  $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ . Inoltre abbiamo sfruttato il fatto che  $V_k \subseteq U - U_1$  per ogni  $k \geq 2$ . D'altro canto,  $(\star\star)$  implica

$$|I_2^\epsilon| < \epsilon.$$

Infatti

$$\begin{aligned} |I_2^\epsilon| &= \left| - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \phi \cdot (\eta_{\epsilon_k} * (f D\zeta_k) - f D\zeta_k) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |\eta_{\epsilon_k} * (f D\zeta_k) - f D\zeta_k| dx \\ &< \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \epsilon \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza triangolare del modulo, la relazione  $|\int f| \leq \int |f|$  con  $f$  generica e il **Teorema A.14** applicato a  $\phi \cdot [\eta_{\epsilon_k} * f D\zeta_k - f D\zeta_k]$ , con  $|\phi| \leq 1$ .

Dunque

$$\int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi dx \leq \|Df\|(U) + 4\epsilon$$

e quindi

$$\|Df_\epsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 4\epsilon$$

dato che  $\|Df\|(U) + 4\epsilon$  è maggiorante dell'insieme

$$\left\{ \int_U f_\epsilon \operatorname{div} \phi \, dx, \phi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\}$$

mentre  $\|Df_\epsilon\|(U)$  è il sup (questo ci dice anche le funzioni  $f_\epsilon \in BV(U)$  e dunque  $f_\epsilon \in BV(U) \cap C^\infty(U)$ ). Mettendo insieme questa stima e (\*\*\*) otteniamo che

$$\|Df_\epsilon\|(U) \rightarrow \|Df\|(U) \quad \text{con } \epsilon \rightarrow 0.$$

□

**Teorema 2.4 (Approssimazione debole di derivate).** Per  $f_k$  dell'enunciato del **Teorema 2.2**, definiamo la misura vettoriale di Radon

$$\mu_k(B) := \int_{B \cap U} Df_k \, dx$$

per ogni insieme di Borel  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Poniamo anche

$$\mu(B) := \int_{B \cap U} d[DF].$$

Allora

$$\mu_k \rightharpoonup \mu$$

debolmente nel senso delle misure vettoriali di Radon in  $\mathbb{R}^n$ , ossia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

**Dimostrazione.** Fissiamo  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  e  $\epsilon > 0$ . Definiamo  $U_1 \subset\subset U$  come

$$U_1 = \left\{ x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+1} \right\} \cap B^0(0, 1+m)$$

con  $m$  intero positivo. Scegliamo poi una funzione liscia di cutoff  $\zeta$  che soddisfa

$$\zeta \equiv 1 \text{ in } U_1, \quad \operatorname{supp}(\zeta) \subset U, \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\mu_k &= \int_U \phi \cdot Df_k \, dx \\
&= \int_U \zeta \phi \cdot Df_k \, dx + \int_U (1 - \zeta) \phi \cdot Df_k \, dx \quad (\star) \\
&= - \int_U \operatorname{div}(\zeta \phi) f_k \, dx + \int_U (1 - \zeta) \phi \cdot Df_k \, dx
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'uguaglianza  $\int_U \zeta \phi \cdot Df_k \, dx = \int_U \operatorname{div}((\zeta \phi) f_k) \, dx - \int_U \operatorname{div}(\zeta \phi) f_k \, dx$ , ma per definizione di derivata debole, essendo  $\zeta$  a supporto compatto in  $U$ ,  $\int_U \operatorname{div}((\zeta \phi) f_k) \, dx = 0$ .

Poiché  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1(U)$  e dunque  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1_{\text{loc}}(U)$ , abbiamo che

$$\begin{aligned}
\left| \int_U (f_k - f) \operatorname{div}(\zeta \phi) \, dx \right| &= \left| \int_{\operatorname{supp}(\zeta \phi)} (f_k - f) \operatorname{div}(\zeta \phi) \, dx \right| \\
&\leq \|\operatorname{div}(\zeta \phi)\|_{L^\infty} \int_{\operatorname{supp}(\zeta \phi)} |f_k - f| \, dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

poiché  $\operatorname{supp}(\zeta \phi)$  è un compatto di  $U$ , per cui il primo termine in  $(\star)$  converge a

$$\begin{aligned}
- \int_U \operatorname{div}(\zeta \phi) f \, dx &= \int_U \zeta \phi \cdot d[DF] \\
&= \int_U \phi \cdot d[DF] + \int_U (\zeta - 1) \phi \cdot d[DF] \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza segue dalla definizione di  $[DF] = \|DF\|_{L^\sigma}$ , essendo  $\zeta \phi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$  e dunque vale per  $\zeta \phi$  la (ii) del **Teorema 1.1**.

L'ultimo termine in  $(\star\star)$  è stimato da

$$\|\phi\|_{L^\infty} \|DF\|(U - U_1) \leq C\epsilon.$$

Infatti in  $U_1$   $\zeta$  è costantemente 1 e dunque l'integrale rimane solo esteso a  $U - U_1$ . Ora

$$\int_{U - U_1} (\zeta - 1) \phi \cdot d[DF] = \int_{U - U_1} (\zeta - 1) \phi \cdot \sigma d\|DF\| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \|DF\|(U - U_1)$$

poiché  $|\zeta - 1| \leq 1$  e  $|\phi| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$ .

Dal **Teorema 2.2** risulta  $\|Df\|(U - U_1) \leq \epsilon$  e  $\|\phi\|_{L^\infty} \leq C$  poichè  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ .

Utilizzando il **Teorema 2.2**, vediamo che per  $k$  abbastanza grande, possiamo controllare l'ultimo termine in  $(\star)$  con

$$\|\phi\|_{L^\infty} \|Df_k\|(U - U_1) \leq C\epsilon.$$

Infatti nel **Teorema 2.2** abbiamo che  $\|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U)$  con  $k \rightarrow \infty$ , ma essendo  $U_1 \subset U$ ,  $\|Df_k\|(U - U_1) = \|Df_k\|(U) - \|Df_k\|(U_1)$ . Inoltre  $U_1$  è aperto, dunque per il **Teorema 2.2**  $\|Df_k\|(U_1) \rightarrow \|Df\|(U_1)$  e quindi anche  $\|Df_k\|(U - U_1) \rightarrow \|Df\|(U - U_1)$ , per cui

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq \| \|Df_k\|(U - U_1) - \|Df\|(U - U_1) \| \\ &\geq \|Df_k\|(U - U_1) - \|Df\|(U - U_1) \\ &\geq \|Df_k\|(U - U_1) - \epsilon \end{aligned}$$

ossia con  $\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$  otteniamo

$$\|Df_k\|(U - U_1) \leq \epsilon.$$

Dunque

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu \right| = \\ &= \left| - \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f_k dx + \int_U (1 - \zeta)\phi \cdot Df_k dx + \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f dx + \int_U (\zeta - 1)\phi \cdot d[Df] \right| \\ &\leq \left| - \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f_k dx + \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f dx \right| + \left| \int_U (1 - \zeta)\phi \cdot Df_k dx \right| + \left| \int_U (\zeta - 1)\phi \cdot d[Df] \right| \\ &\leq C\epsilon \end{aligned}$$

per ogni  $k$  sufficientemente grande.

Infatti  $\int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f_k dx \rightarrow \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f dx$  e dunque

$$\left| - \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f_k dx + \int_U \operatorname{div}(\zeta\phi) f dx \right| \leq C\epsilon.$$



Gli altri due termini sono  $\leq C\epsilon$  per la stima precedente.

Sia ora  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Per convoluzione esiste una successione  $\phi_h$  ( $h \in \mathbb{N}$ ) di funzioni lisce a supporto compatto (un po' più grande del supporto di  $\phi$ ) che converge a  $\phi$  uniformemente su  $\text{supp}(\phi)$ .

Sia  $\epsilon > 0$ . Allora

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\text{supp}(\phi)} \phi d\mu_k - \int_{\text{supp}(\phi)} \phi d\mu \right| \\ & \leq \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) d\mu_k \right| + \left| \int_{\text{supp}(\phi)} \phi_h d\mu_k - \int_{\text{supp}(\phi)} \phi_h d\mu \right| \\ & + \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) d\mu \right| = I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 & = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) d\mu_k \right| = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) \cdot \sigma d\|Df_k\| \right| \\ & \leq \sup_{\text{supp}(\phi)} |\phi - \phi_h| \|Df_k\|(U) \\ & \leq \sup_{\text{supp}(\phi)} |\phi - \phi_h| \|Df\|(U) \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{se } h > h_\epsilon \end{aligned}$$

dove la seconda disuguaglianza vale poiché  $\|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U)$  e l'ultima disuguaglianza poiché  $\phi_h$  converge a  $\phi$  uniformemente su  $\text{supp}(\phi)$ . Fissiamo  $h = h_\epsilon + 1$ . Nello stesso modo trattiamo  $I_3$ .

Infatti

$$\begin{aligned} I_3 & = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) d\mu \right| = \left| \int_{\text{supp}(\phi)} (\phi - \phi_h) \cdot \sigma d\|Df\| \right| \\ & \leq \sup_{\text{supp}(\phi)} |\phi - \phi_h| \|Df\|(U) \\ & \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{se } h > h_\epsilon \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza sfruttiamo sempre il fatto che  $\phi_h$  converge a  $\phi$  uniformemente su  $\text{supp}(\phi)$ .

Ora che  $h$  è fissato applichiamo il risultato ottenuto per funzioni  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

a  $I_2$ , scrivendo

$$\left| \int_{\text{supp}(\phi)} \phi_h d\mu_k - \int_{\text{supp}(\phi)} \phi_h d\mu \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

per  $k > k_\epsilon$ .

Infatti  $I_2 < \frac{\epsilon}{3}$  se  $k$  è maggiore di un  $k$  che dipende da  $\epsilon$  e  $\phi_h$ , poiché abbiamo dimostrato che  $\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$  per ogni  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  e le  $\phi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \subset C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Ma  $\phi_h$  è fissato e dipende solo da  $\epsilon$ . Così è conclusa la prova poiché

$$\left| \int_{\text{supp}(\phi)} \phi d\mu_k - \int_{\text{supp}(\phi)} \phi d\mu \right| < \epsilon$$

per ogni  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  e dunque  $\mu_k \rightarrow \mu$  debolmente nel senso delle misure vettoriali di Radon.  $\square$

## 2.3 Compattezza

**Teorema 2.5 (Compattezza per funzioni BV).** *Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e limitato, con frontiera lipschitziana  $\partial U$ . Assumiamo che  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  sia una successione in  $BV(U)$  che soddisfa*

$$\sup_k \|f_k\|_{BV(U)} < \infty.$$

*Allora esistono una sottosuccessione  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  e una funzione  $f \in BV(U)$  tali che*

$$f_{k_j} \rightarrow f \text{ in } L^1(U)$$

*con  $j \rightarrow \infty$ .*

**Dimostrazione.** Per  $k \in \mathbb{N}$  scegliamo  $g_k \in C^\infty(U)$  tale che

$$\int_U |f_k - g_k| dx < \frac{1}{k}, \quad \sup_k \int_U |Dg_k| dx < \infty; \quad (*)$$

tali funzioni esistono in accordo al **Teorema 2.2**, poiché ogni  $f_k \in BV(U)$  e dunque possiamo trovare una successione  $\{g_l\}_{l=1}^\infty \in BV(U) \cap C^\infty(U)$  tale che  $g_l \rightarrow f_k$  in  $L^1(U)$  e  $\|Dg_l\|(U) \rightarrow \|Df_k\|(U)$ . Per cui per ogni  $k$

possiamo trovare una  $g_k$  tale che  $\int_U |f_k - g_k| dx = \|f_k - g_k\|_{L^1(U)} < \frac{1}{k}$ , per definizione di limite con  $\epsilon = \frac{1}{k}$ . Inoltre  $\sup_k \int_U |Dg_k| dx < \infty$  poiché  $\int_U |Dg_k| dx \leq \sup_k \|f_k\|_{BV(U)} + 2 < \infty$  per ogni  $k$  e quindi anche il sup. Per un'osservazione che segue il **Teorema A.4**, allora esistono una funzione  $f \in L^{1^*}(U)$  e quindi in  $L^1(U)$ , poiché  $U$  è limitato e una sottosuccessione  $\{g_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  tale che  $g_{k_j} \rightarrow f$  in  $L^1(U)$ . Ma allora  $(\star)$  implica che anche  $f_{k_j} \rightarrow f$  in  $L^1(U)$  e dunque in  $L^1_{loc}(U)$ . Per il **Teorema 2.1**, poiché le  $f_{k_j} \in BV(U)$ ,  $f \in BV(U)$ .  $\square$



# Capitolo 3

## Alcuni risultati sulle funzioni

### $BV$

Assumiamo per i risultati sulla traccia di funzioni  $BV$  che  $U$  sia aperto e limitato, con frontiera lipschitziana  $\partial U$ . Osserviamo che, poiché  $\partial U$  è localmente il grafico di una funzione Lipschitz  $\gamma$ , la normale unitaria esterna  $\nu$  esiste  $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ovunque in  $\partial U$ , in accordo al **Teorema A.5**, in quanto la funzione  $\gamma$  è differenziabile quasi ovunque e dunque la normale unitaria esterna, che è il gradiente di  $\gamma$  normalizzato, esiste quasi ovunque.

**Teorema 3.1 (Traccia di funzioni  $BV$ ).** *Assumiamo che  $U$  sia aperto e limitato, con  $\partial U$  Lipschitz. Allora esiste una mappa lineare limitata*

$$T : BV(U) \rightarrow L^1(\partial U; \mathcal{H}^{n-1})$$

*tale che*

$$\int_U f \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_U \phi \cdot d[Df] + \int_{\partial U} (\phi \cdot \nu) T f \, d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\star)$$

*per ogni  $f \in BV(U)$  e  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .*

Il punto importante è che non richiediamo a  $\phi$  di annullarsi vicino a  $\partial U$ .

**Definizione 3.1.** La funzione  $Tf$ , che è univocamente definita a meno di insiemi di misura  $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial U$  ( $\mathcal{H}^{n-1}$  ristretta a  $\partial U$ ) nulla, è chiamata la **traccia** di  $f$  su  $\partial U$ .

Noi interpretiamo  $Tf$  come il “valore sul bordo” di  $f$  su  $\partial U$ .

**Osservazione.** Se  $f \in W^{1,1}(U) \subset BV(U)$ , la definizione di traccia data coincide con quella per le funzioni di Sobolev.  $\square$

**Teorema 3.2 (Proprietà locali della traccia).** *Assumiamo che  $U$  sia aperto, limitato, con  $\partial U$  Lipschitz. Supponiamo anche che  $f \in BV(U)$ . Allora per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni  $x \in \partial U$ ,*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap U} |f - Tf(x)| dy = 0,$$

e così

$$Tf(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap U} f dy.$$

Con  $B(x, r)$  intendiamo

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq r\},$$

ossia la palla chiusa di centro  $x$  e raggio  $r$ .

**Osservazione.** Dunque in particolare se  $f \in BV(U) \cap C(\bar{U})$ , allora

$$Tf = f|_{\partial U} \quad \mathcal{H}^{n-1} - \text{q.o.}$$

$\square$

**Teorema 3.3 (Estensioni di funzioni BV).** *Assumiamo che  $U \subset \mathbb{R}^n$  sia aperto e limitato, con  $\partial U$  Lipschitz. Sia  $f_1 \in BV(U)$ ,  $f_2 \in BV(\mathbb{R}^n - \bar{U})$ .*

*Definiamo*

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in U \\ f_2(x) & x \in \mathbb{R}^n - \bar{U}. \end{cases}$$

*Allora*

$$\bar{f} \in BV(\mathbb{R}^n)$$

*e*

$$\|D\bar{f}\|(\mathbb{R}^n) = \|Df_1\|(U) + \|Df_2\|(\mathbb{R}^n - \bar{U}) + \int_{\partial U} |Tf_1 - Tf_2| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**Osservazione.** In particolare, sotto le precedenti assunzioni per  $U$ , l'estensione

$$Ef := \begin{cases} f & \text{su } U \\ 0 & \text{su } \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

appartiene a  $BV(\mathbb{R}^n)$  ammesso che  $f \in BV(U)$  e l'insieme  $U$  abbia perimetro finito, con  $\|\partial U\|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial U)$ .  $\square$

In seguito metteremo in relazione la misura variazione di  $f$  e il perimetro delle sue curve di livello.  $U$  denota sempre un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Notazione** Per  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , definiamo

$$E_t := \{x \in U \mid f(x) > t\}.$$

**Lemma 3.4.** *Se  $f \in BV(U)$ , la mappa*

$$t \mapsto \|\partial E_t\|(U) \quad (t \in \mathbb{R})$$

*è  $\mathcal{L}^1$ -misurabile.*

**Teorema 3.5 (Formula di coarea per funzioni  $BV$ ).**

(i) *Se  $f \in BV(U)$ , allora  $E_t$  ha perimetro finito per quasi ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e*

$$\|Df\|(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(U) dt.$$

(ii) *Viceversa, se  $f \in L^1(U)$  e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(U) dt < \infty,$$

*allora  $f \in BV(U)$ .*





# Capitolo 4

## Disuguaglianze isoperimetriche

Ora sviluppiamo certe disuguaglianze relative alla  $\mathcal{L}^n$ -misura di un insieme e il suo perimetro.

### 4.1 Disuguaglianze di Sobolev e Poincaré per funzioni $BV$

**Teorema 4.1** (Disuguaglianze per funzioni  $BV$ ).

(i) Esiste una costante  $C_1$  tale che

$$\|f\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^n)$$

per tutte le  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ , dove

$$1^* = \frac{n}{n-1}.$$

(ii) Esiste una costante  $C_2$  tale che

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} \leq C_2 \|Df\|(B^0(x,r))$$

per tutte le palle  $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$  e  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , dove

$$(f)_{x,r} := \int_{B(x,r)} f \, dy.$$

(iii) Per ogni  $0 < \alpha \leq 1$ , esiste una costante  $C_3(\alpha)$  tale che

$$\|f\|_{L^1(B(x,r))} \leq C_3(\alpha) \|Df\|(B^0(x,r))$$

per tutte le palle  $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$  e tutte le  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  che soddisfano

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \geq \alpha.$$

Con  $B^0(x,r)$  denotiamo la palla aperta di centro  $x$  e raggio  $r$ , ossia

$$B^0(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}.$$

**Dimostrazione.** 1. Per il **Teorema 2.2**, poiché  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ , scegliamo  $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) tali che

$$f_k \rightarrow f \text{ in } L^1(\mathbb{R}^n), \quad f_k \rightarrow f \text{ } \mathcal{L}^n - q.o., \quad \|Df_k\|(\mathbb{R}^n) \rightarrow \|Df\|(\mathbb{R}^n)$$

e  $f_k \rightarrow f \text{ } \mathcal{L}^n - q.o.$  poiché se ho una successione che converge in  $L^1$ , esiste una sottosuccessione che converge in maniera dominata e quindi puntualmente  $q.o.$  Allora il **Teorema A.8** e il **Teorema A.7**, applicato qui con  $p = 1$  e a  $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  e dunque in  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , implicano

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} C_1 \|Df_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &= C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Questo prova (i).

2. L'affermazione (ii) segue similmente dal **Teorema A.9**. Per il **Teorema 2.2**, poiché  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , prendiamo  $f_k \in C^\infty(B^0(x,r))$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) tali che

$$\begin{aligned} f_k \rightarrow f \text{ in } L^1(B^0(x,r)), \quad f_k \rightarrow f \text{ } \mathcal{L}^n - q.o., \\ \|Df_k\|(B^0(x,r)) \rightarrow \|Df\|(B^0(x,r)) \end{aligned}$$

Allora il **Teorema A.8** e il **Teorema A.9**, applicato con  $p = 1$  e a  $f_k \in C^\infty(B^0(x, r))$  dunque in  $W^{1,1}(B^0(x, r))$ , implicano

$$\begin{aligned} \|f - (f)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k - (f_k)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} C_2 \|Df_k\|(B^0(x, r)) \\ &= C_2 \|Df\|(B^0(x, r)). \end{aligned}$$

3. Supponiamo

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \geq \alpha > 0. \quad (\star)$$

Allora

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{1^*}(B(x,r))} &= \|f - (f)_{x,r} + (f)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} \\ &\leq \|f - (f)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} + \|(f)_{x,r}\|_{L^{1^*}(B(x,r))} \\ &\leq C_2 \|Df\|(B^0(x, r)) + |(f)_{x,r}| (\mathcal{L}^n(B(x, r)))^{1-\frac{1}{n}} \quad (\star\star) \end{aligned}$$

per la (ii) e poiché

$$\left( \int_{B(x,r)} |(f)_{x,r}|^{1^*} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} = |(f)_{x,r}| \left( \int_{B(x,r)} dx \right)^{\frac{1}{1^*}} = |(f)_{x,r}| (\mathcal{L}^n(B(x, r)))^{1-\frac{1}{n}}.$$

Ma

$$\begin{aligned} &|(f)_{x,r}| (\mathcal{L}^n(B(x, r)))^{1-\frac{1}{n}} \\ &= \left| \int_{B(x,r) \cap \{f \neq 0\}} f dy \right| \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \mathcal{L}^n(B(x, r)) \mathcal{L}^n(B(x, r))^{-\frac{1}{n}} \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))^{\frac{1}{n}}} \int_{B(x,r) \cap \{f \neq 0\}} |f| dy \\ &\leq \left( \int_{B(x,r)} |f|^{1^*} dy \right)^{1-\frac{1}{n}} \left( \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f \neq 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \|f\|_{L^{1^*}(B(x,r))} (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

avendo utilizzato nella penultima disuguaglianza il **Teorema A.15** con le funzioni  $f(x) = |f|$  e  $g(x) = 1$  e con  $\frac{1}{n}$  come coniugato di  $1^*$  e avendo sfruttato  $(\star)$  nell'ultima disuguaglianza, poiché  $B(x, r) \cap$

$\{f \neq 0\}$  è il complementare dell'insieme  $B(x, r) \cap \{f = 0\}$  nella palla  $B(x, r)$ , dunque  $\frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f \neq 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 1 - \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap \{f = 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq 1 - \alpha$ . Inoltre nella prima disuguaglianza abbiamo utilizzato la relazione

$$\left| \int_{B(x, r) \cap \{f \neq 0\}} f \, dy \right| \leq \int_{B(x, r) \cap \{f \neq 0\}} |f| \, dy.$$

A questo punto, inseriamo la stima ottenuta in  $(\star\star)$  per avere

$$\|f\|_{L^{1^*}(B(x, r))} \leq \frac{C_2}{(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}})} \|Df\|(B^0(x, r))$$

e chiamando  $C_3(\alpha) = \frac{C_2}{(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{n}})}$ , otteniamo  $(iii)$ .  $\square$

## 4.2 Disuguaglianze isoperimetriche

**Teorema 4.2 (Disuguaglianze isoperimetriche).** *Sia  $E$  un insieme limitato di perimetro finito in  $\mathbb{R}^n$ .*

(i) Allora

$$\mathcal{L}^n(E)^{1 - \frac{1}{n}} \leq C_1 \|\partial E\|(\mathbb{R}^n),$$

e

(ii) per ogni palla  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \min \{ \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x, r) - E) \}^{1 - \frac{1}{n}} \\ \leq 2C_2 \|\partial E\|(B^0(x, r)). \end{aligned}$$

La costante  $C_1$  è quella che compare nel **Teorema A.7**. La costante  $C_2$  invece è la stessa del **Teorema A.9**.

**Osservazione.** L'affermazione (i) è la **disuguaglianza isoperimetrica** e (ii) è la **disuguaglianza isoperimetrica relativa**.  $\square$

**Dimostrazione.** 1. La (i) è la (i) del **Teorema 4.1** con  $f = \chi_E$ , che appartiene a  $BV(\mathbb{R}^n)$  poiché  $E$  è insieme limitato di perimetro finito in  $\mathbb{R}^n$ . Infatti  $\|\chi_E\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{L}^n(E)^{1 - \frac{1}{n}}$  e  $\|D\chi_E\|(\mathbb{R}^n) = \|\partial E\|(\mathbb{R}^n)$ .

2. Sia  $f = \chi_{B(x,r) \cap E}$  nella (ii) del **Teorema 4.1**, che appartiene a  $BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  poiché  $E$  è insieme limitato di perimetro finito in  $\mathbb{R}^n$ . In questo caso

$$(f)_{x,r} = \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{1^*} dy &= \int_{B(x,r)} |\chi_{B(x,r) \cap E} - (\chi_{B(x,r) \cap E})_{x,r}|^{1^*} dy \\ &= \int_{B(x,r) \cap E} \left| 1 - \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right|^{1^*} dy \\ &+ \int_{B(x,r) - E} \left| -\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right|^{1^*} dy \\ &= \left( \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) - E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right)^{1^*} \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E) \\ &+ \left( \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right)^{1^*} \mathcal{L}^n(B(x,r) - E) \end{aligned}$$

in quanto

$$\chi_{B(x,r) \cap E} = \begin{cases} 1 & \text{in } B(x,r) \cap E \\ 0 & \text{in } B(x,r) - E \end{cases}$$

nella palla  $B(x,r)$ , poiché  $(B(x,r) - E)$  è il complementare di  $(B(x,r) \cap E)$  nella palla  $B(x,r)$  e dunque abbiamo anche che  $\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) - E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 - \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$ . Inoltre, essendo  $\mathcal{L}^n$  una misura positiva,  $\left| -\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right| = \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$ .

Ora se  $\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E) \leq \mathcal{L}^n(B(x,r) - E)$ , allora

$$\begin{aligned} &\left( \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{1^*} dy \right)^{1 - \frac{1}{n}} \\ &\geq \left[ \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) - E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right] \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)^{1 - \frac{1}{n}} \\ &\geq \frac{1}{2} \min \{ \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x,r) - E) \}^{1 - \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

poiché essendo  $\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E) \leq \mathcal{L}^n(B(x,r) - E)$

$$\left[ \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) - E)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \right] \geq \frac{1}{2}.$$

L'altro caso è analogo, con nel secondo passaggio

$$\left[ \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \right] \mathcal{L}^n(B(x, r) - E)^{1-\frac{1}{n}}$$

anziché

$$\left[ \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) - E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \right] \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)^{1-\frac{1}{n}}$$

e l'ultima disuguaglianza rimane uguale poiché con

$$\mathcal{L}^n(B(x, r) - E) \leq \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)$$

$$\left[ \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \right] \geq \frac{1}{2}.$$

Per cui poiché dalla (ii) del **Teorema 4.1** abbiamo che

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^1(B(x,r))} \leq C_2 \|Df\|(B^0(x, r))$$

per tutte le palle  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  e  $f \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  otteniamo con  $f = \chi_{B(x,r) \cap E}$

$$\min \{ \mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E), \mathcal{L}^n(B(x, r) - E) \}^{1-\frac{1}{n}} \leq 2C_2 \|\partial E\|(B^0(x, r))$$

per ogni palla  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Osservazione.** Abbiamo mostrato che la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev implica la disuguaglianza isoperimetrica. In realtà è vero anche il viceversa: la disuguaglianza isoperimetrica implica la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Per mostrare quest'ultima affermazione, assumiamo  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \geq 0$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |Df| dx &= \|Df\|(\mathbb{R}^n) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(\mathbb{R}^n) dt \\ &\geq \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} dt, \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla (i) del **Teorema 3.5** poiché  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset BV(\mathbb{R}^n)$  e la disuguaglianza dalla (i) del **Teorema 4.2**, poiché se  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ ,  $E_t$  ha perimetro finito per quasi ogni  $t \in \mathbb{R}$  e  $E_t$  è limitato per ogni  $t$ , poiché  $E_t \subseteq \text{supp}(f)$  per ogni  $t$  e  $\text{supp}(f)$  è limitato poiché  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ .

Ora poniamo

$$f_t := \min\{t, f\}, \quad \chi(t) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_t^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \quad (t \in (0, \infty)).$$

Allora  $\chi$  è non decrescente su  $(0, \infty)$ , poiché se  $0 < t_1 \leq t_2$ ,  $0 \leq f_{t_1} \leq f_{t_2}$  e dunque  $\chi(t_1) \leq \chi(t_2)$ . Per cui,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}}$$

per il **Teorema A.12**, poiché  $f_t(x) \rightarrow f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$  con  $t \rightarrow \infty$  e  $f_{t_1} \leq f_{t_2} \forall 0 < t_1 \leq t_2$ .

Inoltre, per  $h > 0$ , abbiamo

$$0 \leq \chi(t+h) - \chi(t) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_{t+h} - f_t|^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \leq h \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}}$$

dove nella seconda disuguaglianza sfruttò la relazione

$$\|f_{t+h}\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} - \|f_t\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_{t+h} - f_t\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

L'ultima disuguaglianza vale invece poiché  $|f_{t+h} - f_t| = |f(x) - f(x)| = 0$  se  $f(x) \leq t < t+h$ ,  $|f_{t+h} - f_t| = |f(x) - t| < h$  se  $t < f(x) < t+h$ ,  $|f_{t+h} - f_t| = |t+h-t| = h$  se  $t < t+h \leq f(x)$ . Per cui  $|f_{t+h} - f_t| \neq 0 \leq h$  quando  $f > t$  ossia su  $E_t$ .

Quindi  $\chi$  è localmente Lipschitz e

$$\chi'(t) \leq \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}}$$

per quasi ogni  $t$ , in quanto  $\chi'(t)$  esiste *q.o.* per il **Teorema A.5**. Integrando tra 0 e  $\infty$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} &= \int_0^\infty \chi'(t) dt \\ &\leq \int_0^\infty \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} dt \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} dt \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df| dx \end{aligned}$$

dove nell'uguaglianza abbiamo sfruttato il **Teorema A.11** applicato a  $\chi$  che è Lipschitz e dunque assolutamente continua e le relazioni  $\chi(0) = 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \chi(\infty) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Dunque abbiamo provato la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev con  $p = 1$  per ogni  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \geq 0$ . Per densità di  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$  in  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , estendiamo il risultato ad ogni  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$



# Appendice A

## Risultati utilizzati nella tesi

**Teorema A.1 (Teorema di Rappresentazione di Riesz).** *Sia*

$$L : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$$

*un funzionale lineare che soddisfa*

$$\sup \{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{supp}(f) \subseteq K\} < \infty$$

*per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Allora esistono una misura di Radon  $\mu$  in  $\mathbb{R}^n$  e una funzione  $\mu$ -misurabile  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tali che*

$$|\sigma(x)| = 1 \quad \text{per } \mu\text{-quasi ogni } x$$

*e*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma d\mu$$

*per ogni  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ .*

**Definizione A.1.**

Chiamiamo  $\mu$  la **misura variazione** associata a  $L$ , che è definita per ogni insieme aperto  $V \subset \mathbb{R}^n$  da

$$\mu(V) := \sup \{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \text{supp}(f) \subseteq V\}.$$

**Definizione A.2.**

Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è detta  $\mu$ -misurabile se per ogni insieme aperto  $U \subseteq Y$ , l'insieme

$$f^{-1}(U)$$

è  $\mu$ -misurabile.

**Teorema A.2 (Teorema di Decomposizione di Lebesgue).** *Siano  $\nu$  e  $\mu$  due misure di Radon in  $\mathbb{R}^n$ .*

(i) Allora

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s$$

dove  $\nu_{ac}$  e  $\nu_s$  sono misure di Radon in  $\mathbb{R}^n$  con

$$\nu_{ac} \ll \mu, \quad \nu_s \perp \mu.$$

(ii) In aggiunta,

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac}, \quad D_\mu \nu_s = 0 \quad \mu - q.o.;$$

e di conseguenza

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu d\mu + \nu_s(A)$$

per ogni insieme di Borel  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definizione A.3.**

Chiamiamo  $\nu_{ac}$  la **parte assolutamente continua** e  $\nu_s$  la **parte singolare** di  $\nu$  rispetto a  $\mu$ .

**Teorema A.3 (Funzioni di Sobolev ristrette alle linee).**

(i) Se  $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , allora per ogni  $k = 1, \dots, n$  le funzioni

$$f_k^*(x', t) := f^*(\dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots)$$

sono assolutamente continue in  $t$  nei sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}$ , per quasi ogni punto  $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . In aggiunta,

$$(f_k^*)' \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Viceversa, supponiamo  $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  e  $f = g \mathcal{L}^n - q.o.$ , dove per ogni  $k = 1, \dots, n$  le funzioni

$$g_k(x', t) := g(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

sono assolutamente continue in  $t$  nei sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}$  per quasi ogni punto  $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$  rispetto alla misura  $\mathcal{L}^{n-1}$  e  $g'_k \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definizione A.4.**

Per  $f^*$  si intende

$$f^*(x) := \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} f \, dy & \text{se questo limite esiste} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ .

**Teorema A.4 (Teorema di compattezza per  $W^{1,p}$ ).** *Assumiamo che  $U$  sia aperto, limitato,  $\partial U$  sia Lipschitz,  $1 < p < n$ . Supponiamo che  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  sia una successione in  $W^{1,p}(U)$  che soddisfa*

$$\sup_k \|f_k\|_{W^{1,p}(U)} < \infty.$$

Allora esistono una sottosuccessione  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  e una funzione  $f \in W^{1,p}(U)$  tali che

$$f_{k_j} \rightarrow f \text{ in } L^q(U)$$

per ogni

$$1 \leq q < p^*.$$

Con  $p^*$  denotiamo  $p^* = \frac{pn}{n-p}$ .

**Osservazione.** (Utilizzata nella dimostrazione del **Teorema 2.5**).

Nel caso di  $p = 1$ , il teorema afferma che esistono una sottosuccessione  $\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$  e  $f \in L^{1^*}(U)$  tali che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_{k_j} - f\|_{L^q(U)} = 0$$

per ogni  $1 \leq q < 1^*$ . □

**Teorema A.5 (Teorema di Rademacher).** *Se  $U$  è un sottinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione Lipschitz, allora  $f$  è differenziabile quasi ovunque in  $U$ ; ossia i punti in  $U$  in cui  $f$  non è differenziabile formano un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

**Teorema A.6 (Formula di Coarea per funzioni  $C^1$ ).** *Siano  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni  $C^1$ ,  $n \geq 1$ . Allora per ogni sottoinsieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_A g(x) \|Df\| dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) dy.$$

**Teorema A.7 (La disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev).** *Assumendo*

$$1 \leq p < n,$$

*esiste una costante  $C_1$ , che dipende solo da  $p$  e  $n$ , tale che*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_1 \left( \int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

*per ogni  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Con  $p^*$  denotiamo*

$$p^* = \frac{pn}{n-p}.$$

**Teorema A.8 (Lemma di Fatou).** *Sia  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  una successione di funzioni misurabili a valori in  $\mathbb{R}$  definita su uno spazio di misura  $(S, \Sigma, \mu)$ . Se la successione converge puntualmente a una funzione  $f$  quasi ovunque su  $S$ , allora*

$$\int_S f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_S f_k d\mu.$$

**Teorema A.9 (Disuguaglianza di Poincarè sulle palle).** *Per ogni  $1 \leq p < n$  esiste una costante  $C_2$ , che dipende solo da  $p$  e  $n$ , tale che*

$$\left( \int_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2 r \left( \int_{B(x,r)} |Df|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

*per tutte le palle  $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in W^{1,p}(B^0(x,r))$ .*

*Con  $p^*$  denotiamo*

$$p^* = \frac{pn}{n-p}.$$

Nel caso di  $p = 1$ , utilizzato per dimostrare (ii) del **Teorema 4.1**, sfruttando il fatto che  $\partial B(x, r)$  ha misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale nulla e sapendo che  $\mathcal{L}^n(B(x, r)) = r^n \omega_n$  otteniamo

$$\left( \int_{B(x, r)} |f - (f)_{x, r}|^{1^*} dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq C_2 r \mathcal{L}^n(B(x, r))^{\frac{1}{1^*} - 1} \left( \int_{B^0(x, r)} |Df| dy \right)$$

con  $\frac{1}{1^*} - 1 = -\frac{1}{n}$  e dunque abbiamo

$$\left( \int_{B(x, r)} |f - (f)_{x, r}|^{1^*} dy \right)^{\frac{1}{1^*}} \leq \frac{C_2 r}{r \sqrt[n]{\omega_n}} \left( \int_{B^0(x, r)} |Df| dy \right) = C_2 \left( \int_{B^0(x, r)} |Df| dy \right)$$

per tutte le palle  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in W^{1,1}(B^0(x, r))$ , dove l'ultima costante  $C_2$  è uguale a  $\frac{C_2 r}{r \sqrt[n]{\omega_n}}$ .

**Teorema A.10 (Teorema di Fubini).** *Sia  $f$  una funzione sommabile in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .*

Allora

(i) *la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è sommabile in  $\mathbb{R}^n$  per quasi ogni  $y$  in  $\mathbb{R}^m$ ,*

(ii) *la funzione  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx$  è sommabile in  $\mathbb{R}^m$  e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Teorema A.11 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per funzioni assolutamente continue).** *Una funzione  $f$  è assolutamente continua su  $[a, b]$  se e solo se  $f'$  esiste q.o. in  $[a, b]$ ,  $f'$  è integrabile in  $[a, b]$  e*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

**Definizione A.5.**

Una funzione finita  $f$  su un intervallo finito  $[a, b]$  si dice *assolutamente continua* in  $[a, b]$  se dato  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni collezione  $\{[a_i, b_i]\}$  (finita o no) di sottointervalli disgiunti di  $[a, b]$ ,

$$\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon \quad \text{se} \quad \sum |(b_i - a_i)| < \delta.$$

**Osservazione.** Ogni funzione  $f$  che soddisfa la condizione di Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

per una qualche costante  $C > 0$ , è assolutamente continua.  $\square$

**Teorema A.12 (Teorema di Beppo Levi).** *Se  $(X, \Sigma, \mu)$  è uno spazio di misura e se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  è una successione di funzioni misurabili su  $\Sigma$  tale che*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty \quad \forall x \in X$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

allora  $f$  è misurabile in  $\Sigma$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dove l'integrale è di Lebesgue. Il valore di ogni integrale può essere infinito.

**Teorema A.13 (Teorema della divergenza).** *Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  un aperto regolare, con  $\nu$  normale unitaria esterna lungo  $\partial U$ . Sia  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) \in C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^n)$ , ossia  $C^1$  su un aperto contenente  $\bar{U}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Allora*

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_{\partial U} F \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$$

dove

$$\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}$$

e  $\mathcal{H}^{n-1}$  è la misura di Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionale.

**Definizione A.6.**

Un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  si dice regolare se

- (i)  $U$  è limitato;
- (ii)  $\operatorname{int}(\bar{U}) = U$
- (iii)  $\partial U$  è una  $(n-1)$ -varietà differenziabile di classe almeno  $C^1$ .

**Teorema A.14 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).** *Sia  $V$  uno spazio prehilbertiano, ossia uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare  $(,)$  definito positivo, o uno spazio vettoriale complesso dotato di un prodotto hermitiano  $(,)$ .*

Allora

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

**Teorema A.15 (Disuguaglianza di Hölder).** *Sia  $\Omega$  uno spazio di misura con misura  $\mu$  e  $p \geq 1$ . Sia  $p' \geq 1$  l'esponente coniugato di  $p$ , ovvero quel numero tale che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

*Si definisce inoltre  $p' = \infty$  se  $p = 1$ .*

*Allora date due funzioni misurabili  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^{p'}(\Omega)$ , si ha che  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

*Esplicitando la norma  $p$ -esima nel caso  $p > 1$  si ottiene la scrittura*

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \left[ \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\Omega} |g|^{p'} d\mu \right]^{\frac{1}{p'}}.$$





# Appendice B

## Misure

**Definizione B.1 (Misura di Borel).**

Una misura  $\mu$  in  $\mathbb{R}^n$  si dice di **Borel** se ogni insieme di Borel è  $\mu$ -misurabile.

**Definizione B.2 (Misura di Borel regolare).**

Una misura  $\mu$  in  $\mathbb{R}^n$  si dice di **Borel regolare** se  $\mu$  è di Borel e per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  esiste un insieme di Borel  $B$  tale che  $A \subseteq B$  e  $\mu(A) = \mu(B)$ .

**Definizione B.3 (Misura di Radon).**

Una misura  $\mu$  in  $\mathbb{R}^n$  si dice di **Radon** se è Borel regolare e se  $\mu(K) < \infty$  per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definizione B.4 (Misura con segno).**

$\nu$  è una **misura con segno** in  $\mathbb{R}^n$  se esistono una misura di Radon  $\mu$  in  $\mathbb{R}^n$  e una funzione localmente  $\mu$ -sommabile  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$  tali che

$$\nu(K) = \int_K f d\mu$$

per ogni insieme compatto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ .

In questo caso scriviamo

$$\nu = \mu \llcorner f$$

e  $f$  è detta densità di  $\nu$  rispetto a  $\mu$ .

**Definizione B.5 (Misura di Hausdorff).**

(i) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq s < \infty$ ,  $0 < \delta \leq \infty$ . Scriviamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam}(C_j)}{2} \right)^s \mid A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam}(C_j) \leq \delta \right\}$$

dove

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

con

$$\Gamma(\frac{s}{2} + 1) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}} e^{-t} dt.$$

(ii) Per  $A$  e  $s$  come sopra, definiamo

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

poiché la funzione  $\delta \rightarrow \mathcal{H}_\delta^s(A)$  è decrescente. Chiamiamo  $\mathcal{H}^s$  la misura  $s$ -dimensionale di Hausdorff in  $\mathbb{R}^n$ .

Abbiamo inoltre  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione B.6 (Misure assolutamente continue).**

Assumiamo che  $\mu$  e  $\nu$  siano due misure di Borel in  $\mathbb{R}^n$ .

La misura  $\nu$  è **assolutamente continua** rispetto a  $\mu$ , in simboli

$$\nu \ll \mu,$$

se  $\mu(A) = 0$  implica  $\nu(A) = 0$  per ogni insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Definizione B.7 (Misure reciprocamente singolari).**

Assumiamo che  $\mu$  e  $\nu$  siano due misure di Borel in  $\mathbb{R}^n$ . Le misure  $\nu$  e  $\mu$  sono **reciprocamente singolari**, in simboli

$$\nu \perp \mu,$$

se esiste un insieme di Borel  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  tale che

$$\mu(\mathbb{R}^n - B) = \nu(B) = 0.$$

**Definizione B.8 (Partizione dell'unità).**

Sia  $X \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $U_\alpha$  un suo ricoprimento aperto. Si definisce **partizione dell'unità subordinata al ricoprimento**  $U_\alpha$ , una successione di funzioni lisce  $\Theta_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti condizioni

1.  $0 \leq \Theta_j \leq 1, \quad \forall j$ ;
2. per ogni  $x \in X$  esiste  $U_x$  tale che solo un numero finito di  $\Theta_j$  non si annulla in esso;
3.  $\sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j(x) = 1$ ;
4. per ogni  $j$ ,  $\text{supp}(\Theta_j) \subset U_\alpha$  per un qualche  $\alpha$ .



# Bibliografia

- [1] Lawrence Craig Evans; Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, 2015
- [2] Richard L. Wheeden; Antoni Zygmund, *Measure and integral. An introduction to real analysis, Second edition*, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2015
- [3] Enrico Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984



# Ringraziamenti

Per prima cosa vorrei ringraziare i miei genitori, che mi hanno sempre sostenuto sia economicamente che moralmente, che, grazie ai loro sacrifici e rinunce, mi hanno permesso di studiare concentrandomi sul mio lavoro, senza dover pensare troppo ad altre cose extrascolastiche. Mi sono sempre stati accanto nei momenti difficili e mi hanno dato la forza per reagire e non abbattermi. Hanno trascorso giorni interi ad ascoltarmi mentre ripetivo. Insomma hanno fatto tutto e anzi anche di più di quello che potevano per aiutarmi e per permettermi di essere qui oggi. Ci sarebbero altre molte, troppe cose da elencare che hanno fatto loro per me e quindi semplicemente mi viene da dire grazie per tutto, grazie per esserci, è anche merito vostro se sono qui!

Vorrei ringraziare anche una persona speciale, mio nonno Oriano, che non c'è più fisicamente, ma è sempre con me. Mi chiedeva sempre come andavo a scuola. Per lui era importantissimo sapere che riuscivo ad andare avanti, mettendoci tutto l'impegno possibile. Nello stesso tempo le sue risate sincere, anche nei momenti di difficoltà, unite alla sua convinzione che nel bene e nel male fossi sempre il migliore (cosa che non è vera ma che non puoi spiegare a un nonno), mi stimolavano a non mollare, a non smettere mai di cercare di migliorarmi. La stima e la fiducia che lui sentiva nei miei confronti sono sempre stati e lo saranno ancora un qualcosa a cui aggrapparsi nei periodi più difficili, una fonte di ispirazione per dare sempre il massimo per realizzare i miei obiettivi e per renderlo fiero e orgoglioso di me. Credo, anzi sono certo, che oggi, ovunque lui sia, mi stia guardando e mi stia sorridendo,

proprio come faceva sempre, dicendomi che lui lo sapeva che ce l'avrei fatta, ma nello stesso tempo ricordandomi di continuare ad impegnarmi al massimo per raggiungere i prossimi traguardi. Grazie per avermi fatto sentire sempre importante, grazie per le tante risate fatte insieme, grazie per la fiducia totale nei miei confronti. Sei stato e sarai sempre un grande, nonno mio!

Ci sarebbero molte altre persone da ringraziare e voglio qui elencarne alcune. Vorrei ringraziare Vincenzo e Maria, gli zii di mia mamma, con i quali trascorrevi molto tempo nelle estati dei primi anni scolastici e che mi hanno trattato come un re. Volevano sapere sempre come era andata la pagella e i miei risultati li rendevano felici ed orgogliosi.

Vorrei ringraziare i miei zii, Dianella e Gabriele, mio cugino Simone e suo figlio Fabio, che sono sempre al mio fianco, che condividono con me le gioie, i risultati e tutte le cose importanti della mia vita. In particolare Fabio che, con la spensieratezza di un bambino, mi fa divertire, tornare indietro nel tempo e alleviare per un po' le fatiche universitarie.

Vorrei ringraziare la mia ragazza Alessia, che frequenta come me la facoltà di Matematica e mi ha dato importanti consigli per la realizzazione della tesi. Nello stesso tempo, mi ha fatto rilassare un po' durante il periodo degli esami e la stesura della tesi ed è stata sempre al mio fianco, supportandomi e mostrando molta pazienza e comprensione quando dovevo studiare.

Vorrei ringraziare tutti i miei amici, da Giuli, mio compagno di liceo, che condivide con me la passione per il golf, che consente ad entrambi di rilassarsi tra un esame e un altro, e che c'è sempre per fare qualcosa insieme nei momenti di stacco reciproco dallo studio, a Simoncino che insieme a Sonia e Matteo, suoi genitori, e Franca e Bruno, suoi nonni, mi sostiene sempre, mi fa divertire con la sua simpatia tutte le volte che ci sentiamo, anche durante i periodi più stressanti, ed è il primo che vuole sapere come è andato un esame, da Frenci, Manu e i genitori Angela e Giacomo che sono stati presenti ad ogni step della mia carriera scolastica e che, con l'umiltà e voglia di sacrificarsi per raggiungere i loro traguardi, sono stati un esempio da seguire, a Giacomino, Pietro e genitori Barbara e Natale che tante domeniche sere



fanno compagnia a me e i miei genitori, facendomi divertire e rilassare, prima della settimana universitaria. Per non dimenticare gli amici del gruppo “Capodano”, gli amici del calcio, di Università e gli altri amici importanti di Imola che non rientrano in questi gruppi.

Infine vorrei ringraziare il professore Bruno Franchi per avermi aiutato a scrivere la tesi con la sua disponibilità e competenza.