Università degli Studi di Bologna, Alma Mater Studiorum

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di laurea magistrale

Applicazione ai Gruppi di Lie della Prolungabilità per Equazioni Differenziali Ordinarie

Candidato:
Sara Chiappelli
Matricola 0000733822

Relatore:
Bonfiglioli Andrea

Anno Accademico 2015-2016

A chi ha sempre creduto in me
ieri, oggi, domani.

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è studiare in dettaglio l'articolo "A Completeness Result for Time-Dependent Vector Fields and Applications" di Stefano Biagi e Andrea Bonfiglioli [1], dove si ottiene una condizione sufficiente per la completezza di un campo vettoriale (dipendente dal tempo) in $\mathbb{R}^N$, che generalizza la ben nota condizione di invarianza a sinistra per i gruppi di Lie. Tale risultato di EDO (Equazioni Differenziali Ordinarie) viene poi utilizzato per costruire un gruppo di Lie associato ad ogni famiglia di campi vettoriali soddisfacenti alcune (minimali) condizioni. Quest'ultimo risultato è fortemente legato al cosiddetto Terzo Teorema di Lie.

Richiamiamo ora risultati e definizioni.

Un campo vettoriale X, nell'algebra di Lie del gruppo di Lie $\mathbb{G}$, è completo grazie alla condizione di invarianza a sinistra, cioè:

$$X(\tau_x(y)) = (d\tau_x)X(y), \ \forall\ x, y \in \mathbb{G} \qquad \text{(con } \tau_x\text{=traslazione sinistra)},$$

dove, un campo vettoriale si dice completo se le sue curve integrali massimali sono definite su $\mathbb{R}$.

Generalizzando la condizione di invaranza sinistra, in questa tesi, si ottiene una condizione sufficiente affinché un campo vettoriale X sia completo.

I campi vettoriali dipendenti dal tempo saranno della forma:

$$X = a_1(t)X_1(x) + ... + a_n(t)X_n(x),$$

con: $X_1, .., X_n$ campi vettoriali localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^N$ e $a_1, ..., a_n$ funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Data una funzione differenziabile $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, denoteremo la matrice Jacobiana di f in x con: $\mathcal{J}_f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$.

Inoltre, dato il campo vettoriale in $\mathbb{R}^N$: $X = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (letto come un operatore differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^N$), scriveremo $X(x)$ per $(\alpha_1(x)...\alpha_N(x))^T$.

Il principale risultato sulla teoria delle EDO sarà il seguente:

Teorema 1.2.1. *Siano $X_1, ..., X_n$ campi vettoriali, localmente Lipschitziani, definiti in $\mathbb{R}^N$, tali per cui: esiste U aperto, intorno di 0 in $\mathbb{R}^N$ ed una funzione $m : \mathbb{R}^N \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 tale che:*

$$\begin{cases} m(x,0) = x & \forall\ x \in \mathbb{R}^N \\ X_j(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)X_j(y) & \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ y \in U;\ \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Siano poi: $a_1, ..., a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue; allora per ogni ξ fissato in $\mathbb{R}^N$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale $\gamma(t)$ del Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t)X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(t_0) = \xi \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè il campo vettoriale, dipendente dal tempo $\sum_{j=1}^n a_j(t)X_j(x)$ è completo.

Proveremo questo teorema nella Sezione 1.2 e, nel seguito della tesi, forniremo le condizioni affinché tale mappa m possa essere sempre costruita.

Più precisamente, considereremo il seguente problema:

(P): *Dati i campi vettoriali $X_1, ..., X_n \in \mathbb{R}^N$, si vogliono trovare condizioni indipendenti necessarie e sufficienti, affinché $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$ coincida con l'algebra di Lie $Lie(\mathbb{G})$, del gruppo di Lie analitico $\mathbb{G}$, la cui varietà sottostante sia $\mathbb{R}^N$. Ricordiamo che con $\mathrm{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$ si denota la più piccola sotto-algebra di Lie dei campi vettoriali analitici di $\mathbb{R}^N$ contenente $X_1, ..., X_n$.*

Condizioni su $\mathrm{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$ necessarie affinché (P) abbia una soluzione, sono le seguenti:

Definizione 2.1 (Le Ipotesi (C), (H), (ND)). Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$ si dice che:

- $\mathfrak{g}$ soddisfa (C) se: ogni elemento di $\mathfrak{g}$ è un campo vettoriale completo;
- $\mathfrak{g}$ soddisfa (H) se: $dim(\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in \mathfrak{g}\}) = N$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (cioè se vale la condizione del rango di Hörmander);
- $\mathfrak{g}$ soddisfa (ND) se: $dim(\mathfrak{g}) = N$, dove $\mathfrak{g}$ è inteso come sottospazio lineare dell'insieme dei campi vettoriali C^∞ di $\mathbb{R}^N$.

Ritornando al problema (P), sfruttando alcuni risultati di Palais [5], si può dimostrare che se $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}\{X_1, \dots, X_n\}$ soddisfa le condizioni (C), (H) e (ND), allora il problema (P) ha una soluzione.

Infatti, poiché $\mathfrak{g}$ è finito dimensionale, si può sfruttare il Terzo Teorema di Lie, per cui esiste un unico (a meno di isomorfismi) gruppo di Lie G connesso e semplicemente connesso, la cui algebra di Lie sia isomorfa a $\mathfrak{g}$. Procedendo come in [5], la condizione (C) garantisce che G agisce globalmente su $\mathbb{R}^N$, la condizione (H) mostra l'esistenza di una sola orbita coincidente con $\mathbb{R}^N$ e la condizione (ND) infine mostra come questa orbita possa essere coperta da G e identificata con G stesso.

Lo scopo della Sezione 2 è di mostrare come il problema (P) sia risolubile sotto le ipotesi (C), (H), (ND), senza fare uso né del Terzo Teorema di Lie né dei risultati di Palais, ma sfruttando il Teorema 1.2.1 e il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin.

Risolvere (P) vuol dire munire $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie tale che Lie($\mathbb{G}$) sia uguale a $\mathrm{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$.

Questo sarà ottenuto nella Sezione 2, usando una tecnica semplice e naturale sfruttando alcuni risultati sulla teoria delle EDO e il teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin, indipendentemente dal Terzo Teorema di Lie. Si otterrà quindi il seguente risultato:

Teorema 2.2.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$; allora un insieme di condizioni necessarie e sufficienti per risolvere (P) è: $\{(C), (H), (ND)\}$.*

Inoltre, dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, esiste un solo gruppo $\mathbb{G}$ che risolve (P) il cui elemento neutro sia x_0.

L'indipendenza di queste tre condizioni verrà ripresa nell'Osservazione 2.

Il problema (P) è già stato studiato in precedenza in [4], dove erano assunte le tre ipotesi di cui sopra assieme ad una ipotesi di prolungamento sul gruppo di Lie locale, associato a $\mathfrak{g}$.

In questa tesi si mostra come questa ultima assunzione sia garantita dalla validità delle tre ipotesi: (C), (H), (ND).

Capitolo 1

Premesse di EDO

1.1 Un risultato di prolungabilità

Introduciamo alcune notazioni che verranno usate nel corso della tesi:

- $\|\cdot\|$ denoterà la norma Euclidea in $\mathbb{R}^N$;
- i campi vettoriali dipendenti dal tempo, saranno della forma:
$$X = a_1(t)X_1(x) + ... + a_n(t)X_n(x),$$
con: $X_1, .., X_n$ campi vettoriali localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^N$ e $a_1, ..., a_n$ funzioni continue su $\mathbb{R}$;
- data una funzione differenziabile $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, denoteremo la matrice Jacobiana di f in x con: $\mathcal{J}_f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$;
- dato il campo vettoriale in $\mathbb{R}^N$: $X = \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (letto come un operatore differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^N$), scriveremo $X(x)$ per $(\alpha_1(x)...\alpha_N(x))^T$.

Saranno utili alcuni importanti risultati della teoria delle EDO.

Lemma 1.1.1. *Siano $X_1, ..., X_n$ campi vettoriali definiti in $\mathbb{R}^N$, localmente Lipschitziani e $a_1, ..., a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora per ogni K compatto di $\mathbb{R}$ e per ogni $h > 0$, esiste $\epsilon > 0$ (dipendente da K, h ma non da $t_1 \in K$) tale che il Problema di Cauchy parametrico:*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t + t_1)X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

ammette una soluzione massimale: $t \mapsto \varphi_{t_1}(t)$ *su* $[-\epsilon, \epsilon]$*, uniformemente per* $t_1 \in K$ *e per cui vale anche:*

$$\|\varphi_{t_1}(t)\| \leq h \ \forall\ t \in [-\epsilon, \epsilon], \ \textit{uniformemente per } t_1 \in K. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Fissiamo innanzitutto alcuni elementi: sia K compatto in $\mathbb{R}$, h numero reale posititvo, f come segue

$$f := f(t, x; t_1) := \sum_{j=1}^{n} a_j(t + t_1) X_j(x), \quad \text{con } (t, x; t_1) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times K),$$

e consideriamo il cilindro chiuso $C(T, h) := [-T, T] \times \{x \in \mathbb{R}^N :\| x \|\leq h\}$ per $T > 0$.

Sia ora: $0 < \epsilon \leq 1$ e $M := M(f, h, K) := 1 + \max_{(t,x;t_1)\in(C(1,h)xK)} \| f \|$; per la scelta di ϵ e dalla definizione di M viene che:

$$\epsilon \max_{(t,x)\in C(\epsilon,h)} \| f \|\leq \max_{(t,x)\in C(1,h)} \| f \|\leq \epsilon M.$$

Per la continuità di f, M è finito ed inoltre $M > 0$; ma allora scegliendo opportunamente: $\epsilon = \epsilon(f, h, K) := \min\{1, \frac{h}{M(f,h,K)}\}$ risulta:

$$\epsilon \max_{(t,x)\in C(\epsilon,h)} \| f \|\leq h \quad \text{e questo vale } \forall\ t_1 \in K. \tag{1.3}$$

Ne verrà quindi l'asserto usando i ben noti risultati di EDO [3]; la stima viene soddisfatta e il dominio della soluzione massimale di questo problema di Cauchy contiene l'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$. □

1.2 Applicazione: un risultato di prolungabilità

Teorema 1.2.1. *Siano* $X_1, ..., X_n$ *campi vettoriali, localmente Lipschitziani, definiti in* $\mathbb{R}^N$*, tali per cui: esiste* U *aperto, intorno di 0 in* $\mathbb{R}^n$ *ed una funzione* $m : \mathbb{R}^N \times U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *di classe* C^1 *tale che:*

$$\begin{cases} m(x, 0) = x & \forall\ x \in \mathbb{R}^N \\ X_j(m(x, y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, y) X_j(y) & \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ y \in U;\ \forall\ j = 1, ..., n \end{cases} \tag{1.4}$$

Siano poi: $a_1, ..., a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funzioni continue; allora per ogni* ξ *fissato in* $\mathbb{R}^N$ *e* $t_0 \in \mathbb{R}$*, la soluzione massimale* $\gamma(t)$ *del Problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(t_0) = \xi \end{cases} \tag{1.5}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$, cioè il campo vettoriale, dipendente dal tempo

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(x)$$

è completo.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ per cui il secondo estremo del dominio della soluzione massimale γ di (1.5) sia finito, $T > t_0$.

Definiamo il compatto $K = [t_0, T]$, $h > 0$ tale che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^N : \| x \| \leq h\}$$

sia contenuto in U, sfruttando le notazioni dell'enunciato del teorema per m e U. Sia poi (PC,t_1):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t + t_1) X_j(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Dal lemma precedente risulta che possiamo trovare $\epsilon > 0$ per cui (PC,t_1) ha una soluzione massimale $t \mapsto \varphi_{t_1}(t)$ definita su $[-\epsilon, \epsilon]$, uniformemente per $t_1 \in K$ e tale per cui: $\|\varphi_{t_1}(t)\| \leq h \ \forall \ t \in [-\epsilon, \epsilon]$, uniformemente per $t_1 \in K$.

Fissiamo ora $\tau \in (t_0, T)$ tale per cui: $|T - \tau| < \epsilon$, e poniamo $x := \gamma(\tau)$, dove γ è la soluzione massimale di (1.5).

Sia poi $\nu(t) := m(x, \varphi_\tau(t))$, $t \in [0, \epsilon]$; dove φ_τ è la soluzione di (1.6) (PC,τ), per cui ricordiamo valere la stima

$$\varphi_\tau([-\epsilon, \epsilon]) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq h\} \subseteq U.$$

Poichè m è di classe C^1, lo sarà anche ν; inoltre mostriamo che ν è soluzione del seguente Problema di Cauchy, sull'intervallo $[0, \epsilon]$:

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t + \tau) X_j(\nu(t)) \\ \nu(0) = x. \end{cases} \tag{1.7}$$

Infatti: la seconda equazione del sistema segue dalla prima ipotesi fatta su m in (1.4) e dalla definizione stessa di ν, cioè:

$$\nu(0) = m(x, \varphi_\tau(0)) = m(x, 0) = x.$$

Inoltre per $t \in [0, \epsilon]$ e sfruttando la seconda ipotesi fatta su m in (1.4):

$$\dot{\nu}(t) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t))\dot{\varphi}_\tau(t) = \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t)) \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau) X_j(\varphi_\tau(t)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau) \frac{\partial m}{\partial y}(x, \varphi_\tau(t)) X_j(\varphi_\tau(t)) = \text{(sfruttando le ipotesi)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau) X_j(m(x, \varphi_\tau(t))) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t+\tau) X_j(\nu(t)).$$

E questo conclude la prova del fatto che ν sia soluzione di (1.7); ora unendo opportunamente γ e ν, si potrà estendere γ al di là del secondo estremo T del dominio massimale, giungendo cioè ad una contraddizione.

Ponendo quindi:

$$\Gamma(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [t_0, \tau] \\ \nu(t-\tau) & \text{per } t \in (\tau, \tau+\epsilon), \end{cases} \tag{1.8}$$

- $\tau + \epsilon > T$ poiché $T - \tau = |T - \tau| < \epsilon$,
- $\Gamma(t_0) = \gamma(t_0) = \xi$,
- Γ è continua poiché $\Gamma(\tau) = \gamma(\tau) = x$ e da (1.7) viene anche che:

  $$\lim_{t \to \tau^-} \gamma(t) = \gamma(\tau) = x, \lim_{t \to \tau^+} \nu(t-\tau) = \nu(0) = x,$$

- Γ è C^1 sull'intervallo $[t_0, \tau+\epsilon)$ poiché per il punto precedente è continua e:

  $$\dot{\Gamma}(t) = \begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(\gamma(t)) & \text{per } t \in [t_0, \tau) \\ \dot{\nu}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t-\tau+\tau) X_j(\nu(t-\tau)) & \text{per } t \in (\tau, \tau+\epsilon) \end{cases}$$

  $$= \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(\Gamma(t)) & \text{per } t \in [t_0, \tau) \\ \sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(\Gamma(t)) & \text{per } t \in (\tau, \tau+\epsilon). \end{cases}$$

  Da cui, con l'incollamento:

  $$\lim_{t \to \tau^-} \dot{\Gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\tau) X_j(\Gamma(\tau)) = \lim_{t \to \tau^+} \dot{\Gamma}(t).$$

Questo prova che Γ è un'altra soluzione di (1.5) con un dominio più grande $[t_0, \tau+\epsilon) \supset [t_0, T]$; ma questo è una contraddizione al fatto che γ sia soluzione massimale, cioè questo prova l'asserto. □

Osservazione 1. Nella prima equazione di (1.4) lo 0 può essere sostituito da qualsiasi altro numero in $\mathbb{R}^N$; ed inoltre la seconda equazione generalizza l'invarianza a sinistra dei gruppi di Lie con $m(x, y)$ al posto di $\tau_x(y)$.

Capitolo 2

Una versione del Terzo Teorema di Lie

Consideriamo il seguente problema:
(P): Dati i campi vettoriali $X_1, ..., X_n \in \mathbb{R}^N$, si vogliono trovare condizioni indipendenti necessarie e sufficienti, affinché $\mathfrak{g} = \text{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$ coincida con l'algebra di Lie $\text{Lie}(\mathbb{G})$, del gruppo di Lie analitico $\mathbb{G}$, la cui varietà sottostante sia $\mathbb{R}^N$. Ricordiamo che con $\text{Lie}\{X_1, ..., X_n\}$ si denota la più piccola sotto-algebra di Lie dei campi vettoriali analitici di $\mathbb{R}^N$ contenente $X_1, ..., X_n$.

Definizione 2.1 (Le Ipotesi (C), (H), (ND))**.** Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$ si dice che:

- $\mathfrak{g}$ soddisfa (C) se: ogni elemento di $\mathfrak{g}$ è un campo vettoriale completo;
- $\mathfrak{g}$ soddisfa (H) se: $dim(\{X(x) \in \mathbb{R}^N : X \in \mathfrak{g}\}) = N$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (cioè se vale la condizione del rango di Hörmander);
- $\mathfrak{g}$ soddisfa (ND) se: $dim(\mathfrak{g}) = N$, dove $\mathfrak{g}$ è inteso come sottospazione lineare dell'insieme dei campi vettoriali C^∞ di $\mathbb{R}^N$.

Vogliamo ora provare che se sono soddisfatte le 3 condizioni (C), (H), (ND), allora il problema (P) è risolubile: per fare questo, non sfrutteremo né il Terzo Teorema di Lie né i risultati di Palais, ma sfrutteremo il Teorema 1.2.1 e il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin.

Alcune precisazioni su (P) sono necessarie; per $\text{Lie}(\mathbb{G})$ si intende l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra associati a $\mathbb{G}$, dove il campo vettoriale invariante a sinistra X, è inteso come un operatore differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^N$: $X = \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, con i coefficienti funzioni analitiche.

Quindi risolvere (P) vuol dire munire $\mathbb{R}^N$ di una struttura di gruppo di Lie tale che Lie($\mathbb{G}$) sia uguale a Lie$\{X_1, ..., X_n\}$.

Denotiamo con $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ lo spazio vettoriale reale dei campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^N$, munito della struttura di algebra di Lie associata alla parentesi di Lie: $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$. Sia poi $A \subseteq \mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$, si denota con Lie$(A)$ la più piccola sotto algebra di Lie in $\mathcal{X}(\mathbb{R}^N)$ contenente A.
(Quanto fatto sopra può essere riscritto in modo analogo con la proprietà di analiticità al posto di C^∞).

Osservazione 2. Le 3 condizioni (C), (H), (ND) sono indipendenti.

Mostriamo alcuni esempi di questa indipendenza:

- $(H) + (ND) \nRightarrow (C)$:
  Sia $X = (1 + x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}$ in $\mathcal{X}^\omega(\mathbb{R}^1)$ e $\mathfrak{g} :=$ span$\{X\}$ che soddisfa (H), (ND) ma non (C).

- $(C) + (ND) \nRightarrow (H)$:
  Sia $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ in $\mathcal{X}^\omega(\mathbb{R}^1)$ e $\mathfrak{g} :=$ span$\{X\}$ che soddisfa (C), (ND) ma non (H).

- $(H) + (C) \nRightarrow (ND)$:
  Sia $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x_1}$ in $\mathcal{X}^\omega(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{g} :=$ Lie$\{X, Y\} =$ span$\{X, Y\}$ che soddisfa (C), (H) ma non (ND).

D'ora in avanti $\mathfrak{g}$ denoterà l'algebra di Lie dei campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$ soddisfacente le 3 ipotesi di cui sopra.

Lemma 2.0.2. *Si può fissare una base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, diciamo $J := \{J_1, ..., J_N\}$, tale che $(J_1(0)...J_N(0))$ è la matrice identità e $(J_1(x)...J_N(x))$ è non singolare per tutti gli x.*

Dimostrazione. Per (ND) possiamo fissare una base $Z = (Z_1, ..., Z_N)$ di $\mathfrak{g}$ come sottospazio lineare di campi vettoriali di $X^\omega(\mathbb{R}^N)$. Dato $x \in \mathbb{R}^N$ e la matrice $Z(x) := (Z_1(x)...Z_N(x))$, proviamo che questa matrice è non singolare.

Poichè vale (H), esisteranno $W_1, ..., W_N \in \mathfrak{g}$ tali che

$$\dim(\text{span}\{W_1, ..., W_N\}) = N;$$

esisterà quindi una matrice $N \times N$ $A = (a_{ij})$ tale per cui $W_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} Z_j$.

Ma allora span$\{W_1(x), ..., W_N(x)\} \subseteq$ span$\{Z_1(x), ..., Z_N(x)\}$ e cioè anche l'ultimo span sarà N dimensionale, provando che la matrice è non singolare.

Ponendo $J_j := \sum_{i=1}^N b_{ij} Z_i$ con $b_{ij} = (Z(0))^{-1}$, questa sarà la base cercata nell'enunciato del teorema. $\square$

Osservazione 3. Il lemma di cui sopra può essere enunciato più precisamente come: se $\mathfrak{g}$ soddisfa (ND), allora soddisfa (H) se e solo se eiste una base J per cui la matrice $(J_1(x), ..., J_N(x))$ è non singolare.

Un risultato di Palais garantisce che $\mathfrak{g}$ soddisfa la condizione (C) se $\mathfrak{g} := \text{Lie}\{X_1, ..., X_m\}$ ha dimensione finita con $X_1, ..., X_m$ campi vettoriali in $\mathcal{X}^\omega(\mathbb{R}^N)$ completi.

Da queste osservazione segue che $\mathfrak{g}$ soddisfa (C), (H), (ND) se e solo se soddisfa (C'), (H'+ND):

- (C'): esistono $X_1, ..., X_m$ campi vettoriali completi per cui $\mathfrak{g} := \text{Lie}\{X_1, ..., X_m\}$;

- (H'+ND): esiste una base J di $\mathfrak{g}$ tale che $J_1(x), ..., J_N(x)$ sono indipendenti per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

In seguito denoteremo sempre con $J = \{J_1, ..., J_N\}$ la base dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di cui sopra, in particolar modo quando necessiteremo di mettere una struttura differenziale su $\mathfrak{g}$.

2.1 Mappe Exp, Log, m e loro proprietà

Dato X, campo vettoriale C^∞ in $\mathbb{R}^N$, un punto x in $\mathbb{R}^N$ e il Problema di Cauchy:

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \ \gamma(0) = x, \tag{2.1}$$

$t \mapsto \gamma(t, X, x)$ sarà l'unica soluzione massimale del problema, e verrà denotata con $\exp(tX)(x)$, definita sull'intervallo aperto $\mathcal{D}(X, x)$.

Con la notazione $\exp(X)(x)$ si sottointenderà $\exp(tX)(x)|_{t=1}$ con 1 in $\mathcal{D}(X, x)$ ed inoltre se vale l'ipotesi (C) con $X \in \mathfrak{g}$, allora l'intervallo $\mathcal{D}(X, x)$ coinciderà con tutto $\mathbb{R}$.

Sarà quindi ben posta la funzione "esponenziale":

$$\text{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^N, \ \text{Exp}(X) := \exp(X)(0). \tag{2.2}$$

Denoteremo con: $E(\xi_1, ..., \xi_n) := \text{Exp}(\xi_1 J_1 + ... + \xi_n J_n)$.

Per questa funzione valgono alcune proprietà: $\text{Exp}(0) = 0$, la funzione Exp è reale analitica (segue da risultati sulle EDO poiché $\mathfrak{g}$ è composta da campi vettoriali analitici); inoltre il differenziale di questa mappa in 0 è non singolare, infatti usando lo sviluppo di Taylor: $\mathcal{J}_E(0) = 1_N$, cioè la matrice identità $N \times N$.

Quindi, per il teorema della funzione inversa, si possono trovare: $\mathfrak{U}$ intorno dell'origine in $\mathfrak{g}$ e U intorno dell'origine in $\mathbb{R}^N$ tali per cui $\mathrm{Exp}|_{\mathfrak{U}}$ sia un diffeomorfismo analitico tra questi due intorni con mappa inversa:

$$\mathrm{Log} := (\mathrm{Exp}|_{\mathfrak{U}})^{-1} : U \to \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{g}. \tag{2.3}$$

Si può inoltre supporre che $\mathfrak{U}$ e quindi U siano aperti connessi.

Grazie a queste due funzioni possiamo definire le seguenti mappe:

$$m : \mathbb{R}^N \times U \to \mathbb{R}^N,\ m(x,y) := \exp(\mathrm{Log}(y))(x), \tag{2.4}$$

$$i : U \to \mathbb{R}^N,\ i(y) := \mathrm{Exp}(-\mathrm{Log}(y)). \tag{2.5}$$

Risulta che m è ben posta grazie all'ipotesi (C); inoltre $m,\ i$ sono reali analitiche sui loro domini e rappresentano, rispettivamente, il prodotto e l'inversa del gruppo, con $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di un gruppo di Lie (questo giustifica la notazione $y^{-1} = i(y)$).

Nel seguito abbrevieremo i nomi dei matematici Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin con l'acronimo CBHD.

Teorema 2.1.1 (Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin per ODE)**.** *Siano: $\mathfrak{g}$ algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$ soddisfacente le condizioni (C), (H), (ND); U,$\mathfrak{U}$ e m definiti come sopra. Allora esiste un intorno W dell'origine in $\mathbb{R}^n$ ($W \subseteq U$) e una funzione $\mathcal{E} : W \times W \to \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{g}$ tale che:*

$$m(x,y) = \mathrm{Exp}(\mathcal{E}(x,y)) \ \ \forall\ x{,}y \text{ in } W. \tag{2.6}$$

Più precisamente, la mappa $\mathcal{E}$ può essere definita come segue:

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathrm{Log}\ x\ \diamond\ \mathrm{Log}\ y,\ \forall\ x{,}y \text{ in } W, \tag{2.7}$$

gove $\diamond$ sarà l'operazione di (CBHD) definita sull'algebra di Lie finito-dimensionale $\mathfrak{g}$, come nella dimostrazione di cui sotto.

Dimostrazione. Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$ e poniamo $Z_h := Z_h(X,Y)$:

$$Z_h := \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{h} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_P \frac{(ad\ X)^{i_1}(ad\ Y)^{j_1}...(ad\ X)^{i_k}(ad\ Y)^{j_k-1}(Y)}{i_1!...i_k!j_1!...j_k!},$$

Dove P è l'insieme degli indici:

$$P = \{(i_1 + ... + i_k + j_1 + ... + j_k = h \quad \text{con } (i_1, j_1), ..., (i_k, j_k) \neq (0,0)\}.$$

Dal teorema di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin abbiamo che:

1. per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{h+k=n} \frac{X^h \circ Y^k}{h!k!} = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} \sum_{k_1,\dots,k_h \geq 1, \sum_{i=1}^{h} k_i = n} Z_{k_1}(X,Y) \circ \dots \circ Z_{k_h}(X,Y), \tag{2.8}$$

2. per (ND), la serie $X \diamond Y := \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X,Y)$ è uniformemente convergente in un opportuno intorno dell'origine. Quindi esiste un $\epsilon > 0$ tale per cui questa serie è convergente in $\mathfrak{g}$ quando $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} \leq \varepsilon$,

3. partendo dal punto 1 e sfruttando il fatto che $\mathfrak{g} \in \mathcal{X}^{\omega}(\mathbb{R}^n)$, si può dimostrare che:

$$\exp(Y)(\exp(X)(x)) = \exp(X \diamond Y)(x),\ x \in \mathbb{R}^N, X, Y \in \mathfrak{g}, \|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Possiamo ora definire la mappa del teorema: preso ε come sopra, lo possiamo supporre tanto piccolo tale che: $\{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon\} \subseteq \mathfrak{U}$. Inoltre per continuità possiamo supporre che anche $\sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X,Y) \in \mathfrak{U}$ con $\|X\|_{\mathfrak{g}}, \|Y\|_{\mathfrak{g}} \leq \varepsilon$.

Sempre per le proprietà di continuità possiamo prendere un $\delta > 0$ tale che $\mathrm{Log}(B(0,\delta)) \subseteq \{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon\}$.

Definiamo ora:

$$W := B(0,\delta),\ \mathcal{E} : W \times W \to \mathfrak{U},$$
$$\mathcal{E}(x,y) := \mathrm{Log}\ x\ \diamond\ \mathrm{Log}\ y = \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(\mathrm{Log}\ x, \mathrm{Log}\ y),$$

Proviamo che $m(x,y) = \mathrm{Exp}(\mathcal{E}(x,y)),\ \forall x, y \in W$ e questo concluderà la prova del teorema.

Sfruttando la definizione di m, la costruzione di W e il punto 3 di cui sopra, presi $x, y \in W$ avrò che: $\|\mathrm{Log}\ x\|_{\mathfrak{g}}, \|\mathrm{Log}\ y\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon$ e :

$$m(x,y) := \exp(\mathrm{Log}\ y)(x) = \exp(\mathrm{Log}\ y)(\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\ x)) =$$
$$= \exp(\mathrm{Log}\ y)(\exp(\mathrm{Log}\ x)(0)) = \exp((\mathrm{Log}\ x) \diamond (\mathrm{Log}\ y))(0) = \mathrm{Exp}(\mathcal{E}(x,y)).$$

Questo conclude la prova del teorema. □

Corollario 2.1.2. *Nelle notazioni precedenti, con $W \subseteq \mathbb{R}^N$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^N$ e y, z in W, si ha che*

$$m(y,z) \in U \qquad e \qquad m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z)).$$

Dimostrazione. Sfruttando le notazioni precedenti per $\|\cdot\|_{\mathfrak{g}}$, ε e W, definiamo $\mathfrak{B}_\varepsilon := \{X \in \mathfrak{g} : \|X\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon\}$.

Per come è stato costruito W, per ogni $y, z \in W$, si avrà che $\text{Log}\, y, \text{Log}\, x \in \mathfrak{B}_\varepsilon$; inoltre per come è stato scelto ε, $Y \diamond Z \in \mathfrak{U}$ con $Y, Z \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ da cui $\mathcal{E}(y,z) \in \mathfrak{U}$ con $y, z \in W$.

Abbiamo quindi provato la prima asserzione del teorema, infatti: $m(y,z) = \text{Exp}(\mathcal{E}(y,z)) \in \text{Exp}(\mathfrak{U}) = U$.

In particolar modo, presi x, y, z come da enunciato, la seconda asserzione del teorema è ben posta da entrambi i lati e sfruttando la definizione di m si avrà che, per il lato sinistro:

$$\begin{aligned} m(m(x,y),z) = \exp(\text{Log}\ z)(m(x,y)) = \\ = \exp(\text{Log}\ z)(\exp(\text{Log}\ y)(x)) = \exp(\text{Log}\ y \diamond \text{Log}\ z)(x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Mentre per il lato destro dell'equazione:

$$\begin{aligned} m(x, m(y,z)) = \exp(\text{Log}\ m(y,z))(x) = \\ = \exp(\text{Log}\ \text{Exp}(\text{Log}\ y \diamond \text{Log}\ z)(x) = \exp(\text{Log}\ y \diamond \text{Log}\ z)(x). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ma allora lato destro e sinistro dell'uguaglianza sono uguali e questo conclude la prova del Teorema. □

Questa osservazione ci permette di definire un gruppo di Lie locale: $(\mathbb{R}^N, *)$, grazie all'operazione: $x * y := m(x,y)$ con $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in U$.

Lemma 2.1.3. *Nelle ipotesi e notazione del teorema (CBHD), prendendo $*$ come sopra; la mappa i definita in precedenza fornisce l'inversa locale di $*$ su W con 0 come elemento neutro.*

Dimostrazione. Provare il teorema vuol dire dimostrare che:

$$m(x,0) = m(0,x) = x,\ \forall\ x \in W, \tag{2.12}$$

$$m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x),\ \forall\ x \in W. \tag{2.13}$$

Prendendo $x \in W$, la prima uguaglianza viene dalle definizioni di m e Exp; per quanto riguarda invece la seconda parte sfruttando le notazioni del corollario precedente, $\text{Log}\ x \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ e $\|-\text{Log}\ x\|_{\mathfrak{g}} = \|\text{Log}\ x\|_{\mathfrak{g}} < \varepsilon$, quindi anche $-\text{Log}\ x \in \mathfrak{U}$, da cui:

$$\text{Log}(i(x)) = \text{Log}(\text{Exp}|_{\mathfrak{U}}(-\text{Log}\ x)) = -\text{Log}\ x,\ x \in W$$

Ma allora, sfruttando il fatto che $Z_h(X, -X) = 0$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha:

$$m(x, i(x)) = \exp(\text{Log}(i(x)))(x) = \exp(-\text{Log}\ x)(\exp(\text{Log}\ x)(0)) = 0.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per $m(i(x), x)$, ne verrà che anche questo vale 0, provando il Teorema. □

Teorema 2.1.4 (Invarianza locale sinistra di $\mathfrak{g}$). *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$, soddisfacente le condizioni (C), (H), (ND), sia poi m definita come in precedenza; allora vale la seguente identità:*

$$X(m(x,y)) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,y)X(y), \ \forall X \in \mathfrak{g}, \ x \in \mathbb{R}^N, \ y \in W.$$

Dimostrazione. Sia $X \in \mathfrak{g}$ fissato, proviamo innanzitutto che $\forall \ x \in \mathbb{R}^N$:

$$X(x) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)X(0). \tag{2.14}$$

Grazie a (2.12), questa identità coincide con quella da provare nel teorema, nel caso di $y = 0$.

Siano $x \in \mathbb{R}^N, \ \varepsilon > 0$ tale che: se $|t| < \varepsilon, \ tX \in \mathfrak{U}$ (quindi $\mathrm{Exp}(tX) \in U$), ne verrà che:

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{\exp(tX)(x)\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\{m(x, \mathrm{Exp}(tX))\} = \\ &= \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Exp}(tX) = \frac{\partial m}{\partial y}(x,0)X(0). \end{aligned}$$

E questa è proprio l'identità matriciale che volevamo provare; per dimostrare l'identità dell'enunciato del teorema consideriamo le notazioni dei teoremi precedenti e differenziamo rispetto a z l'identità $m(m(x,y),z) = m(x, m(y,z))$, valutandola in $z = 0$:

$$\mathcal{J}_{m(m(x,y),\cdot)}(0) = \mathcal{J}_{m(x,\cdot)}(m(y,0))\mathcal{J}_{m(y,\cdot)}(0).$$

Moltiplicando per $X(0)$ e usando la notazione per le derivate parziali:

$$\frac{\partial m}{\partial \beta}(m(x,y),0)X(0) = \frac{\partial m}{\partial \beta}(x, m(y,0))\frac{\partial m}{\partial \beta}(y,0)X(0).$$

Ricordando che $m(y,0) = y$ e usando (2.14), questo prova il teorema. □

2.2 Globalizzazione del gruppo di Lie locale

Lo scopo principale di questo paragrafo sarà quello di estendere la mappa m definita in precedenza a tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Corollario 2.2.1. *Sia $\mathfrak{g}$ la solita algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$ soddisfacente le ipotesi (C), (H), (ND) e siano $X_1, ..., X_n \in \mathfrak{g}$, e $a_1, ..., a_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Allora per ogni ξ in $\mathbb{R}^N$, la soluzione massimale $\gamma(t)$ del Problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) X_j(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = \xi \end{cases} \tag{2.15}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia m come da definizione, quindi per il teorema precedente e per (2.12), m soddisfa le ipotesi del Teorema 1.2.1 e questo prova l'asserto. □

Riprendiamo le solite notazioni per cui supponiamo $\mathfrak{g} \subseteq X^\omega(\mathbb{R}^N)$ che soddisfa le condizioni (C), (H), (ND) e fissiamo $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Consideriamo poi la curva: $t \mapsto \gamma_{x,y}(t) := m(x, ty)$ ben definita per piccoli valori di t ($ty \in U$ fino a $t = 1$) poiché $m(x, ty) = \exp(\mathrm{Log}(ty))(x)$ per definizione e Log è definito su U che è un intorno dell'origine.

Si vuole trovare un Problema di Cauchy per questa funzione $\gamma_{x,y}$ e mostrare che esiste una soluzione globale per questo.

Osserviamo innanzitutto che vale:

$$\gamma_{x,y}(0) = m(x, 0) = x,\ \frac{d}{dt}\gamma_{x,y}(t) = \Big(\frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)\Big)y$$

Inoltre possiamo fissare una base di $\mathfrak{g}$: $\{J_1, ..., J_N\}$ come già visto in precedenza e poiché la matrice $J(z) := (J_1(z)...J_N(z))$ è non singolare per ogni $z \in \mathbb{R}^N$; per ogni $t \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere:

$$\gamma = J(ty)\alpha(t, y),\ \alpha(t, y) := (J(ty))^{-1}y. \tag{2.16}$$

E da questo seguirà che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\gamma_{x,y}(t) &= \frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)J(ty)\alpha(t, y) \\ &= \Big(\frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)J_1(ty)...\frac{\partial m}{\partial y}(x, ty)J_n(ty)\Big)\alpha(t, y) = \\ &= (J_1(m(x, ty))...J_n(m(x, ty)))\alpha(t, y) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t, y)J_j(\gamma_{x,y}(t)). \end{aligned}$$

Quindi, una volta fissati $x, y \in \mathbb{R}^N$ e posto $a(t) := \alpha(t, y)$, abbiamo trovato il Problema di Cauchy che ci interessa e lo possiamo scrivere come:

$$\begin{cases} \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) J_j(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = x. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ma allora, per il Corollario 2.2.1, poiche $J_1, .., J_N \in \mathfrak{g}$, la soluzione di questo problema è definita su tutto $\mathbb{R}$ e la denoteremo con $\gamma_{x,y}(t)$.

Ponendo $x * y := \gamma_{x,y}(1),\ x, y \in \mathbb{R}^N$, si possono fare le seguenti osservazioni:

1. per $x \in \mathbb{R}^N, y \in W$ e per come abbiamo definito il Problema di Cauchy di cui sopra, abbiamo una proprietà di prolungamento, per cui: $x * y = m(x, y)$;

2. la funzione $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto x * y \in \mathbb{R}^N$ è reale analitica;

3. dal punto 1 e per il teorema di unicità del prolungamento, possiamo dedurre una proprietà (globale) di associatività:

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^N;$$

4. dalle stesse proposizioni possiamo dedurre anche che:

$$x * 0 = 0 * x = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$
$$x * i(x) = 0 = i(x) * x, \quad \forall\, x \in W.$$

Corollario 2.2.2. *Nelle notazioni precedenti, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, ogni mappa $\tau_x : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,\ \tau_x(y) := x * y$ è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto l'asserto per τ_x definita in un intorno dell'origine; fissiamo $\{J_1, .., J_N\}$ una base per $\mathfrak{g}$ come già fatto in precedenza e sappiamo che la matrice $J(x)$ è non singolare per $x \in \mathbb{R}^N$. Poniamo allora $F(\xi) := \exp(\sum_{k=1}^N \xi_k J_k)(x)$ e sfruttiamo lo sviluppo di Taylor: $F(\xi) = x + J(x)\xi + \mathcal{O}(\|\xi\|^2)$; ma allora per ξ che tende a 0 avrò che $\mathcal{J}_F(0) = J(x)$ e poiché questa ultima è non singolare, per il teorema della Funzione Inversa, avrò che F è un diffeomorfismo locale.

Proviamo ora un risultato più generale; osserviamo innanzitutto che, per $y \in U$ si ha

$$\tau_x(y) = x * y = m(x, y) = \exp(\mathrm{Log}\ y)(x);$$

quindi

$$\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = \mathcal{J}_F(0)\mathcal{J}_L(0),$$

con $L(y) = (L_1(y), ..., L_N(y))$ definita da Log $y = L_1(y)J_1 + ... + L_N(y)J_N$.

Riprendo la notazione di E dalla definizione di Exp, ne viene che L è l'inversa di E in un intorno dell'origine e quindi $J_L(0) = (J_E(0))^{-1}$ è la matrice identità, e questo prova $\mathcal{J}_{\tau_x}(0) = J(x),\ x \in \mathbb{R}^N$. Abbiamo quindi mostrato che per un intorno dell'origine, τ_x è un diffeomorfismo poiché la matrice Jacobiana associata è non singolare.

Infine, per ricondurci ad un intorno qualsiasi possiamo differenziare l'identità dell'associatività di $*$ rispetto a z e valutarla per $z = 0$, ne verrà che:

$$\mathcal{J}_{\tau_{x*y}}(0) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)\mathcal{J}_{\tau_y}(0) \longrightarrow \mathcal{J}_{\tau_x}(y) = J(x * y)(J(y))^{-1},$$

e questa è di nuovo non singolare e conclude la prova del teorema. □

Lemma 2.2.3. *Sempre nelle notazioni precedenti, esiste un intorno W dell'origine in $\mathbb{R}^N$ per cui $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{w_1 * ... * w_n | w_1, ..., w_n \in W\}$*

Dimostrazione. Dal corollario precedente con un argomento di connessione. □

Vogliamo ora trovare una mappa di inversione globale per $*$, estendendo i; dal lemma precedente sappiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ esiste ed è unico $y = \phi(x)$ tale che $x * y = 0$. Per il teorema della Funzione Implicita, ϕ sarà l'estensione di i cercata e sarà analitica.

Sfruttando il teorema (CBHD) e il Teorema 1.2.1 abbiamo ottenuto condizioni per risolvere il problema (P):

Teorema 2.2.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali analitici in $\mathbb{R}^N$; allora un insieme di condizioni necessarie e sufficienti per risolvere (P) è $\{(C),\ (H),\ (ND)\}$.*

Inoltre, dato $x_0 \in \mathbb{R}^N$, esiste un solo gruppo $\mathbb{G}$ che risolve (P) il cui elemento neutro sia x_0.

Più precisamente:

Teorema 2.2.5. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di campi vettoriali reali-analitici in $\mathbb{R}^N$; allora esiste un gruppo di Lie analitico $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, la cui algebra di Lie* Lie($\mathbb{G}$) *coincide con $\mathfrak{g}$ se e solo se $\mathfrak{g}$ soddisfa le condizioni (C), (H), (ND).*

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

1. *ogni coppia tra le 3 condizioni in ipotesi, non implica la rimanente;*

2. *se 0 è l'elemento neutro di $\mathbb{G}$ allora il gruppo di Lie è unico;*

3. *se vale 2, allora $*$ è l'unica estensione analitica della mappa $x * y = m(x, y)$ introdotta con le funzioni* Exp *e* Log*.*
   Inoltre la legge inversa di $\mathbb{G}$ è l'unica estensione analitica della mappa $x \mapsto i(x)$.

4. *qualsiasi altro gruppo di Lie analitico $\mathbb{G}' := (\mathbb{R}^N, \star)$ con un'algebra di Lie uguale a $\mathfrak{g}$ è del tipo: $x \star y = x * i(x_0) * y,\ \ x, y \in \mathbb{R}^n$, dove x_0 è l'elemento neutro di $(\mathbb{R}^n,\star)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il se e solo se:
$\longrightarrow$ già discusso in precedenza;
$\longleftarrow$ di questa implicazione rimane da provare solo che $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$.

La caratterizzazione dell'invarianza sinistra per i gruppi di Lie può essere rappresentata come segue: $X \in Lie(\mathbb{G}) \longleftrightarrow X(x*y) = \mathcal{J}_{\tau_x}(y)X(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Abbiamo già visto che vale questa identità per $x \in \mathbb{R}^N, y$ in un intorno dell'origine; ma allora per il teorema sull'unicità del prolungamento, varrà l'identità per tutti gli $x, y \in \mathbb{R}^N$, da cui $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$. Ma poiché entrambi questi insiemi hanno dimensione N, ne verrà che sono uguali.

Proviamo ora le ultime quattro proprietà:

1. è stato già mostrato in precedenza;

2. sotto queste ipotesi, la mappa esponenziale di $\mathbb{G}$ è la stessa funzione da noi definita come Exp; inoltre la legge di composizione si può definire come: $(x, y) \mapsto \exp(\mathrm{Exp}^{-1}(y))(x)$ che è esattamente $m(x, y)$. Ma allora la composizione in $\mathbb{G}$ è l'unica estensione analitica di m;

3. è parte dell'argomentazione di cui al punto precedente;

4. consideriamo un gruppo di Lie $\mathbb{G}'$ con le proprietà di cui sopra; allora per la caratterizzazione di un algebra di Lie, $X \in Lie(\mathbb{G}')$ se e solo se X è una combinazione lineare dei campi vettoriali associati alle colonne di $\mathcal{J}_{\tau_x^*}(x_0) = \mathcal{J}_{\tau_x^*}(0)\mathcal{J}_{\tau^*_{i(x_0)}}(x_0)$, che sono combinazione lineare delle colonne di $\mathcal{J}_{\tau_x^*}(0)$.
   Viceversa invece, sia $\mathbb{G}'$ il gruppo di Lie analitico con un'algebra di Lie uguale a $\mathfrak{g}$; la sua mappa esponenziale $\mathrm{Exp}_\star : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, data da $\exp(X)(x_0)$; ma allora:

$$\mathrm{Exp}_\star(X) = x_0 * \mathrm{Exp}_*(X),\ \ \mathrm{Log}_\star(x) = \mathrm{Log}_*(i(x_0) * x).$$

Questo si può avere poiché entrambi gli Esponenziali sono definiti sullo stesso dominio; infine per $x \in \mathbb{R}^N,\ y$ vicino a x_0:

$$\begin{aligned} x \star y = \exp(\mathrm{Log}_\star(y))(x) = x * \mathrm{Exp}_*(\mathrm{Log}_\star(y)) = \\ = x * \mathrm{Exp}_*(\mathrm{Log}_*(i(x_0) * y)) = x * i(x_0) * y. \end{aligned}$$

E questo completa la prova del teorema.

□

Questo teorema fornisce la conclusione al problema di trovare condizioni per la completezza dei campi vettoriali.

Osservazione 4. Questa tesi vuole essere un punto di partenza per l'estensione dei precedenti risultati al caso di campi vettoriali $\mathbb{C}^\infty$ e non real analitici.

Bibliografia

[1] S. Biagi, A. Bonfiglioli: *A completeness resul for time-dependent vector fields and applications*, Commun. Contemp. Math. **17**, 1450040 (2015)

[2] S. Biagi, A. Bonfiglioli: *An Introduction to the Geometrical Analysis of sub-Laplace Operators*, preprint (2016)

[3] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica, 2, Prima Parte.* Pitagora Editrice Bologna 2° edizione, 2000.

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli: *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Commun. Pure Appl. Anal., **11**, 1587–1614 (2012)

[5] R.S. Palais: *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Mem. Amer. Math. Soc., **22** (1957)