ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
EMANUELA CALICETI

Presentata da:
MARCO ASSIRELLI

Sessione II
Anno Accademico 2015-2016

Introduzione

Questa tesi tratta di uno dei metodi principali per la ricerca delle condizioni di equilibrio di un sistema meccanico: il principio dei lavori virtuali.

Il primo capitolo presenta un'introduzione alle nozioni di base della meccanica che serviranno per la trattazione del tema centrale sviluppato nei capitoli successivi. In particolare vengono introdotte le nozioni di vincolo, spostamento infinitesimo di un punto, lavoro elementare di una forza, forze conservative. Per questi richiami ci si è basati soprattutto sui trattati [1, A.Strumia] e [3, D.Graffi], e, limitatamente all'approfondimento di qualche definizione, si è consultato anche [4, L.Battaia].

Nel secondo capitolo, viene innanzitutto illustrato il principio delle reazioni vincolari che sostanzialmente caratterizza i vincoli lisci. A partire da questo si enuncia e si dimostra, nel caso di forza attive posizionali, il principio dei lavori virtuali che rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un qualunque sistema meccanico. Infine vengono illustrate alcune applicazioni, in particolare al caso del corpo rigido soggetto all'azione di diversi tipi di vincoli. Anche per questa parte dalla tesi ci si è basati sui trattati [1, A.Strumia] e [3, D.Graffi].

Nel terzo capitolo viene illustrata una formulazione alternativa del principio dei lavori virtuali, di notevole interesse e rilievo, anche dal punto di vista storico, ossia il principio di D'Alembert: introducendo la nozione di *forze perdute* è possibile ricondurre ogni problema di dinamica ad uno equivalente problema di statica. Si perviene in questo modo alla *relazione simbolica della dinamica*, a partire dalla quale si possono ottenere le equazioni di Lagrange che risolvono il problema del moto di un qualunque sistema meccanico, noto il sistema di forze attive che agiscono su di esso. Per l'esposizione di questo ultimo capitolo ci si è riferiti principalmente ai trattati [2, A.Strumia] e [3, D.Graffi]

Indice

Capitolo 1

Premesse

In questo capitolo saranno riportate alcune definizioni fondamentali nell'ambito della meccanica dei sistemi di punti materiali. Per la presentazione di queste nozioni cui si è riferiti principalmente al trattato [1, A.Strumia].

1.1 Nozioni di base

I vettori sono grandezze che necessitano oltre al numero che misura la loro *intensità*, anche di una *direzione* e di un *verso* nello spazio.
Alcuni esempi possono essere lo spostamento di un punto, la velocità, la forza, che si possono descrivere geometricamente mediante dei segmenti orientati.
Non tutte le grandezze dotate di intensità (o modulo), direzione e verso però sono vettori, ma solo quelle per le quali si può dare come regola di somma (composizione) la cosidetta regola del parallelogramma.
Per cui l'effetto complessivo di due grandezze vettoriali risulta avere direzione, verso e modulo dati dal vettore posto lungo la diagonale del parallelogrammo i cui lati sono i vettori relativi alle grandezze da comporre.
Una grandezza dotata di modulo, direzione e verso si dice **vettore** se obbedisce alla regola di somma del parallelogrammo. In generale un vettore sarà indicato mediante una lettera sormontata da una freccia.
Il modulo di un vettore $\vec{v}$ sarà indicato con: $|\vec{v}|$.
Un vettore $\vec{v}$ può essere identificato con la classe di equivalenza di segmenti orientati aventi stessa lunghezza, direzione e verso. Siano A e B gli estremi di un tale segmento, con origine in A e secondo estremo in B (corrispondente alla freccia), allora scriveremo:

$$\vec{v} = \vec{AB} = B - A.$$

Il prodotto scalare fra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sarò denotato col simbolo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \tag{1.1}$$

e il prodotto vettoriale con:

$$\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Se indichiamo con $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base ortonormale canonica in $\mathbb{R}^3$ sia $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ e $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Si ha allora:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Inoltre:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

e $|\vec{u} \wedge \vec{u}| = |\vec{u}||\vec{v}|\ sin\,\alpha$, essendo α l'angolo compreso fra i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Definizione 1.1. *Un **vettore applicato** è un ente a sei parametri, dei quali tre sono le coordinate del punto di applicazion e tre sono le componenti del vettore. Simbolicamente un vettore applicato si denota con una coppia ordinata di elementi dei quali il primo è il punto di applicazione, un punto dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ e il secondo è il vettore: (A,$\vec{v}$)*

Definizione 1.2. *Dato un vettore applicato (A,$\vec{v}$) e un punto Q nello spazio, si dice **momento polare** di $\vec{v}$ rispetto al polo Q, la quantità:*

$$\vec{M}_Q = \vec{v} \wedge (Q - A) = \vec{QA} \wedge \vec{v},$$

dove l'indice al piede del vettore momento denota il polo di riduzione.

Ricordiamo anche la definizione di un terzo tipo di prodotto fra vettori che sarà utile di seguito.

Prodotto misto: Dati tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ il loro prodotto misto è definito come:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

In termini di componenti, il prodotto misto dei tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ si può calcolare con il seguente determinante:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Tenendo conto delle proprietà dei determinanti, in particolare relativamente allo scambio di righe, si deduce che:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

ovvero che si possono scambiare i simboli di prodotto scalare e vettoriale. Indichiamo con:

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow P = P(t) \in \mathbb{R}^3$$

la funzione che rappresenta la posizione nello spazio di un punto materiale P in moto al generico istante di tempo $t \in \mathbb{R}$. Ricordiamo le mozioni di velocità e accelerazione di P.

Definizione 1.3. *La velocità e l'accelerazione di P sono date dalle seguenti derivate:*

$$\vec{v} = \vec{v}(P) = \frac{dP(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h},$$

$$\vec{a} = \vec{a}(P) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 P(t)}{dt^2}.$$

Se rispetto ad un sistema cartesiano (O, x, y, z) si ha $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, allora si ha:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

dove $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ e analogamente per le altre componenti.

Diamo ora una definizione che sarà fondamentale per la trattazione della sezione successiva:

Definizione 1.4. *Un **corpo** si dice **rigido** quando la distanza di due punti qualsiasi del corpo si mantiene indefinitamente costante nel tempo.*
Si dice, inoltre condizione di rigidità tale condizione di invariabilità della distanza fra due punti qualsiasi del corpo

Osservazione 1.5. Un corpo (o sistema, come spesso lo si denomina) rigido si può pensare come un insieme discreto di punti (particelle) che soddisfano la condizione di rigidità.
Fisicamente lo schema discreto o particellare nasce dall'idea di pensare il corpo come costituito di particelle (atomi, molecole, ecc).

Pensando il corpo rigido come un insieme discreto di punti definito da:

$$\mathscr{C} = \left\{ P_s \in \mathbb{R}^3;\ s = 1, 2, ..., N \right\}$$

la condizione di rigidità si traduce matematicamente nella condizione:

$$|P_r P_s| = costante, \qquad \forall\, r, s = 1, 2, ..., N$$

Se il numero dei punti del sistema rigido è molto elevato e le distanze dei punti tra loro più vicini sono molto piccole rispetto alle dimensioni lineari del corpo, tanto da poterle trascurare, come accade per i corpi macroscopici, è conveniente, invece, adottare lo schema continuo.
In questo caso l'insieme dei punti che costituiscono il corpo rigido si rappresenta con un sottoinsieme di R^3 avente la potenza del continuo.

La condizione di rigidità si esprime allora nella forma:

$$|PQ| = costante, \qquad \forall\, P, Q \in \mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3$$

1.2 Cinematica dei sistemi

Quando si considera un sistema di punti la conoscenza del moto del sistema equivale, per definizione, alla conoscenza del moto di ogni punto del sistema.

Perciò se si considera, ad esempio un sistema costituito da N particelle nello spazio, occorrono $3n$ funzioni, date dalle coordinate delle particelle in funzione del tempo.

Se si ha un sistema continuo, occorrono, in linea di principio, infinite funzioni, 3 coordinate per ogni punto del continuo.

Fissato un istante del tempo t, le $3N$ coordinate (nel caso del continuo le infinite coordinate) rappresentano la configurazione del sistema all'istante t.
Un sistema di questo tipo in cui tutte le coordinate dei punti sono necessarie per individuarne la configurazione si dice *sistema libero*.

In molti casi, però, accade che non è necessario un numero di parametri pari al numero delle coordinate di tutti i punti del sistema per identificarne la configurazione, ma basta un numero di variabili meno elevato. Ad esempio nel caso di un corpo rigido: per individuare le coordinate di ognuno dei suoi punti bastano sei parametri.

Questa circostanza si verifica perchè vi sono delle relazioni fra le coordinate dei punti che ne limitano l'arbitrarietà, riducendo il numero di variabili indipendenti che caratterizzano il problema.

Tali relazioni prendono il nome di *vincoli*.

1.2.1 Vincoli

Un vincolo è qualsiasi condizione che limita il moto di un corpo. In meccanica, essendo solo le forze capaci di modificare lo stato di quiete o di moto di un sistema, l'azione dei vincoli si esplica attraverso un insieme di forze dette **forze vincolari** o **reazioni vincolari** che agiscono sui punti del sistema, limitandone il moto.
I vincoli possono essere di varia natura e possono essere identificati e classificati in diversi modi. Vediamo alcune di queste classificazioni che si dimostrano particolarmente utili nella trattazione dei sistemi vincolati.

Vincoli esterni ed interni Questa classificazione nasce dall'esigenza di distinguere fra i vincoli che nascono in forza della mutua interazione fra le particelle di un sistema (come il vincolo di rigidità in un corpo rigido o il vincolo di incomprimibilità in un fluido incomprimibile) e i vincoli che nascono dall'interazione fra il sistema e l'ambiente ad esso esterno.

Vincoli olonomi e anolonomi Questa è una delle classificazioni più importanti, se non la più importante, perchè fornisce una classificazione analitica del vincolo.

- **vincolo olonomo**: vincolo fra le coordinate dei punti di un sistema che è caratterizzabile mediante equazioni e disequazioni in termini finiti

Ad esempio, la condizione di appartenenza di un punto P ad una superficie di equazione cartesiana:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

rappresenta un vincolo olonomo per le coordinate x_1, x_2, x_3 del punto P.

Anche un vincolo esprimibile mediante una disequazione in termini finiti è un vincolo olonomo. Per esempio la condizione:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq R^2$$

per le coordinate di un punto nel piano x_1x_2 vincola il punto a non entrare nella regione di piano rappresentata dal disco circolare di raggio R avente centro nell'origine.

In base a quanto detto finora si può affermare che i vincoli olonomi rappresentano dei vincoli per le posizioni del punto.
Possiamo dire che un vincolo olonomo, vincolando le coordinate dei punti del sistema, rappresenta una limitazione per le configurazioni permesse al sistema.

- **vincolo anolonomo**: vincolo che si presenta come una forma differenziale non esatta, cioè in termini differenziali non integrabili

In questo caso il vincolo rappresenta un vincolo per gli spostamenti del sistema, ma non per le posizioni, perchè non essendo possibile integrare la forma differenziale che lo esprime, non si può risalire ad una condizione in termini finiti, la quale vincolerebbe le posizioni.

Un vincolo si dice **bilaterale** se è esprimibile mediante sole relazioni di uguaglianza.

Un vincolo si dice **unilaterale** se nella sua formulazione contiene almeno una relazione di disuguaglianza.

Un vincolo si dice **scleronomo** quando nella sua formulazione analitica non compare la dipendenza esplicita dal tempo.

Un vincolo si dice **reonomo** quando nella sua formulazione analitica compare la dipendenza esplicita dal tempo.

Un'ulteriore classificazione dei vincoli fondamentale nella meccanica è quella che distingue i vincoli in **lisci** e **scabri**: questa distinzione però richiede il concetto di forza e perciò dobbiamo rimandarla ai capitoli successivi.

Definizione 1.6. *Si chiama grado di libertà di un sistema meccanico (o corpo) il numero $n \in \mathbb{N}$ di parametri necessari e sufficienti a individuare in ogni istante la configurazione di ogni punto del corpo. I parametri di volta in volta scelti a tale scopo vengono detti parametri lagrangiani e si indicano con $q_1, q_2, ..., q_n$. La generica configurazione del corpo sarà dunque data dalla n-pla $q = (q_1, q_1, ..., q_n)$.*

1.2.2 Spostamenti

Dato un sistema di punti, possiamo considerare diversi tipi di spostamenti infinitesimi.
Matematicamente tali spostamenti si ottengono differenziando in maniera opportuna i vettori $\vec{OP}_s$ che identificano i punti del sistema.

- **spostamento possibile**: spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale dipendenza dal tempo (nel caso che i vincoli siano reonomi)

  Si ottiene differenziando la:
  $$\vec{OP_s} = \vec{OP_s}(q_1, q_2, ..., q_n, t), \qquad s = 1, 2, ..., N$$
  e lo indichiamo con il simbolo ∂P_s.
  Si caratterizza come:
  $$\partial P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\, \partial q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}\, \partial t$$
  se n è il grado di libertà del sistema.

- **spostamento virtuale**: spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli, ma non della loro eventuale dipendenza dal tempo Il tempo viene pensato come fissato al valore che ha all'inizio dello spostamento e mantenuto costante durante lo spostamento. Si può anche pensare lo spostamento virtuale come uno spostamento istantaneo, cioè uno spostamento che avviene con velocità infinita in un intervallo di tempo nullo.
  Evidentemente si tratta di uno spostamento che noi immaginiamo di far compiere idealmente al sistema. Indichiamo lo spostamento virtuale con δP_s. Poichè t è fissato durante lo spostamento virtuale, esso risulta caratterizzato come:
  $$\delta P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\, \delta q_h$$

Sottolineiamo che sia gli spostamenti possibili che quelli virtuali sono spostamenti ideali che noi immaginiamo di far compiere al sistema e non vanno confusi con lo spostamento fisico che il sistema effettivamente compie sotto l'azione di forze che lo sollecitano, a partire da determinate condizioni iniziali.

Nel caso di *vincoli unitalerali*, vi è un ulteriore distinzione nella classificazione degli spostamenti: si tratta della distinzione fra spostamenti *reversibili* e spostamenti *irreversibili*:

- **spostamento reversibile**: è uno spostamento possibile (o rispettivamente virtuale) che ha uno spostamento opposto a partire dalla stessa configurazione che è possibile (o rispettivamente virtuale).

- **spostamento irreversibile**: lo spostamento opposto non è possibile.

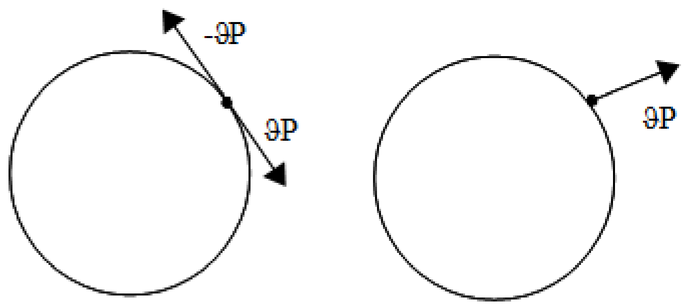

Figura 1.1: spostamento reversibile (a sinistra) e spostamento irreversibile (a destra)

1.3 Lavoro

Prima di introdurre il concetto di lavoro occorre introdurre un nuovo concetto che assumiamo come primitivo della fisica: è il concetto di **forza**. Prima ci occuperemo della singola forza applicata ad un punto per poi estenderla a sistemi di forze applicate in più punti.

Definizione 1.7. *In fisica una forza è un ente in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo, ovvero di produrre un'accelerazione. In matematica una forza è rappresentata da un vettore applicato* $(P, \vec{F})$ *dove* P *è il punto di applicazione a* $\vec{F}$ *il vettore della forza.*

L'esperienza stabilisce che il vettore $\vec{F}$ di una forza agente su un punto materiale, è una funzione della *posizione* del punto P al quale è applicata, cioè delle sue coordinate, della *velocità* del punto P e del tempo:

$$\vec{F} = \vec{F}(P, v, t)$$

ovvero in termini di coordinate cartesiane, se

$$\vec{OP} \equiv (x, y, z)$$

e

$$\vec{v} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

si ha

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Denoteremo, indifferentemente, con F_i, i = 1, 2, 3 o con F_x, F_y, F_z le componenti del vettore $\vec{F}$ della forza rispetto al sistema di assi cartesiani prescelto.

Definizione 1.8. *Una **forza** si dice **posizionale** se il vettore* $\vec{F}$ *non dipende nè dal tempo, nè dalla velocità, ma solo dalla posizione del punto* P*:*

$$\vec{F} = \vec{F}(P) = \vec{F}(x, y, z)$$

1.3.1 Lavoro di una forza

Introduciamo ora il concetto di **lavoro** di una forza applicata ad un punto.

Definizione 1.9. *Il* ***lavoro infinitesimo*** *di una forza* $(P, \vec{F})$ *è una forma differenziale lineare ottenuta prendendo il prodotto scalare del vettore della forza per uno spostamento infinitesimo del suo punto di applicazione.*

Dal momento che, come abbiamo visto, distinguiamo due tipi di spostamenti infinitesimi, di conseguenza distinguiamo due tipi di lavoro infinitesimo:

- **lavoro possibile:** definito come il prodotto scalare del vettore della forza per lo spostamento possibile del punto di applicazione:

$$\partial L = \vec{F} \cdot \partial P = F_x \, \partial x + F_y \, \partial y + F_z \, \partial z$$

- **lavoro virtuale:** definito come il prodotto scalare del vettore della forza per lo spostamento virtuale del punto di applicazione:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta P = F_x \, \delta x + F_y \, \delta y + F_z \, \delta z$$

In generale, quando non è necessario distinguere fra lavoro possibile e lavoro virtuale, il lavoro infinitesimo verrà indicato con

$$dL = \vec{F} \cdot dP$$

dove dP indica lo spostamento fisico compiuto dal punto sotto l'azione della forza $(P, \vec{F})$.

Vediamo ora come cambia il lavoro nel caso di una forza conservativa.

1.3.2 Forza conservativa e potenziale

Definizione 1.10. *Una forza posizionale si dice* ***conservativa*** *quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto.*

Ricordiamo che una forma differenziale lineare si dice esatta quando esiste una funzione U a un sol valore, regolare, tale che il suo differenziale totale è uguale alla forma differenziale esaminata; la funzione U si dice potenziale.

Nel nostro caso il lavoro di una forza è una forma differenziale del tipo:

$$dL = F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz$$

e risulta essere una forma differenziale esatta se esiste una funzione regolare a un sol valore:

$$U = U(x, y, z)$$

tale che:

$$dL = dU.$$

Deve perciò sussistere l'identificazione fra il differenziale della funzione U e la forma differenziale del lavoro:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz$$

Ne consegue allora l'identificazione delle componenti della forza con le derivate parziali della funzione U:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z).$$

In termini di vettori:

$$\vec{F} = \nabla U,$$

cioè il vettore della forza è il gradiente del potenziale. La funzione U è detta **potenziale** della forza F(P). Perciò si dice anche che una forza è conservativa quando ammette potenziale.

Definizione 1.11. *Il lavoro finito di una forza $(P, \vec{F})$ lungo una curva regolare γ di estremi P_1 e P_2 è dato dal seguente integrale curvilineo*

$$L := \int_\gamma dL = \int_\gamma \vec{F} \cdot dP = \int_\gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Nel caso di una forza conservativa si ha

$$\int_\gamma dL = \int_\gamma dU = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_2) - U(P_1).$$

Dunque quando la forza è conservativa il lavoro è dato dalla differenza del potenziale calcolato nei punti estremi del cammino d'integrazione γ:

$$L = U(P_2) - U(P_1)$$

Affermiamo quindi che:

Il lavoro di una **forza conservativa** lungo un cammino finito non dipende nè dalla forma della traiettoria, nè dalla legge oraria con cui si muove il punto di applicazione, ma solo dai punti estremi della traiettoria.

Se prendiamo P_1 e P_2 coincidenti (curva chiusa) si ha:

$$U(P_2) = U(P_1)$$

e quindi:

$$L = 0$$

cioè il lavoro lungo una curva chiusa è nullo. In altre parole, una forza conservativa non compie lavoro lungo una curva chiusa.

1.3.3 Lavoro di un sistema di forze

Abbiamo visto il lavoro di una singola forza applicata ad un punto, ora vediamo il lavoro di un sistema di forze applicate in più punti.

Dato un sistema discreto di N forze applicate in N punti:

$$\mathscr{F} = \{(P_s, \vec{F}_s), \quad s = 1, 2, ..., N\}$$

definiamo *lavoro del sistema di forze*, la somma dei lavori di tutte le forze al variare dei rispettivi punti di applicazione.
In particolare, come per il lavoro di una sola forza si distinguono:

- **lavoro possibile:**

$$\partial L = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \partial P_s$$

- **lavoro virtuale:**

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \tag{1.2}$$

Nella pratica, nei casi in cui non c'è ambiguità di interpretazione si usa generalmente il simbolo d, scrivendo:

$$dL = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot dP_s$$

1.3.4 Lavoro di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido

Innanzitutto ricordiamo la legge fondamentale della cinematica del corpo rigido. Sia dunque $\mathscr{C}$ un corpo rigido, P un suo generico punto e O_1 un altro punto di $\mathscr{C}$ fiddato arbitrariamente. Indicando con $\vec{v}(P) = \frac{dP}{dt}$ e $\vec{v}(O_1) = \frac{dO_1}{dt}$ le velocità di P e di O_1 rispettivamente, si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{w} \wedge (P - O_1), \tag{1.3}$$

dove $\vec{w} = \frac{d\phi}{dt}\vec{k}$ è la velocità angolare di $\mathscr{C}$ (o vettore di Poisson); in particolare ϕ denota l'angolo di rototraslazione di $\vec{k}$ e il versore diretto come l'asse di rototraslazione. Dalla (1.3) otteniamo la seguente *legge di distribuzione degli spostamenti*:

$$dP = dO_1 + d\phi\,\vec{k} \wedge (P - O_1), \qquad \forall\, P \in \mathscr{C}$$

Prendiamo ora un sistema discreto di N forze applicate ad N punti del corpo rigido: in questo caso il lavoro possibile e il lavoro virtuale acquistano una caratterizzazione particolare poichè i punti del corpo non possono muoversi arbitrariamente, ma gli spostamenti sono del tipo:

$$\partial P_s = \partial O_1 + \partial\phi\,\vec{k} \wedge (P_s - O_1)$$

per quanto riguarda gli spostamenti possibili e:

$$\delta P_s = \delta O_1 + \delta\phi\,\vec{k} \wedge (P_s - O_1) \tag{1.4}$$

per gli spostamenti virtuali.
Se non ci fosse il vincolo di rigidità, ovvero il corpo rigido fosse libero, allora gli spostamenti virtuali e possibili coinciderebbero. Se il corpo rigido è soggetto anche a vincoli esterni gli spostamenti non coincideranno se i vincoli esterni dipendono dal tempo.

Introducendo la (1.4) nella definizione (1.2) di lavoro di un sistema di forze, otteniamo, per il lavoro virtuale:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot (\delta O_1 + \delta\phi\,\vec{k} \wedge (P_s - O_1)) = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta O_1 + \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta\phi\,\vec{k} \wedge (P_s - O_1)$$

Raccogliamo a fattor comune δO_1 nella prima sommatoria a secondo membro della relazione precedente:

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta O_1 = \left(\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s\right) \cdot \delta O_1 = \vec{R} \cdot \delta O_1$$

avendo introdotto il vettore risultante delle forze applicate:

$$\vec{R} := \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s.$$

Utilizzando la proprietà commutativa del prodotto scalare, possiamo scrivere:

$$\vec{F}_s \cdot \delta\phi\, \vec{k} \wedge (P_s - O_1) = \delta\phi\, \vec{k} \wedge (P_s - O_1) \cdot \vec{F}_s$$

Infine per le proprietà del prodotto misto possiamo scambiare gli operatori $\wedge$ e $\cdot$ ottenendo:

$$\delta\phi\, \vec{k} \wedge (P_s - O_1) \cdot \vec{F}_s = \delta\phi\, \vec{k} \cdot (P_s - O_1) \wedge \vec{F}_s$$

Scrivendo ora la seconda sommatoria che compare nell'espressione del lavoro prima calcolata raccogliamo $\delta\phi\, \vec{k})$ a fattor comune:

$$\sum_{s=1}^{N} \delta\phi\, \vec{k} \cdot (P_s - O_1) \wedge \vec{F}_s = \delta\phi\, \vec{k} \cdot \left(\sum_{s=1}^{N} (P_s - O_1) \wedge \vec{F}_s \right) = \vec{M}_{O_1} \cdot \delta\phi\, \vec{k}$$

avendo introdotto il vettore momento risultante delle forze applicate rispetto al polo O_1:

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \wedge (O_1 - P_s).$$

Introducendo questi risultati nell'espressione del lavoro abbiamo che il lavoro virtuale di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido si esprime mediante la relazione:

$$\delta L = \vec{R} \cdot \delta O_1 + \vec{M}_{O_1} \cdot \delta\phi\, \vec{k}. \tag{1.5}$$

Lo stesso risultato si ha per il lavoro possibile.

Esempio 1.12. Prendiamo in esame il lavoro di una coppia applicata ad un corpo rigido avente momento $\vec{M}$ il cui valore è, com'è noto indipendente dal polo.
Poichè per una coppia il vettore risultante è nullo, abbiamo nella formula del lavoro (1.5):

$$\delta L_{coppia} = \vec{M} \cdot \delta\phi\, \vec{k}$$

Osservazione 1.13. Poichè il lavoro di un sistema di forze applicate ai punti di un corpo rigido dipende solo dal risultante e dal momento risultante delle forze, ne consegue che il lavoro non è alterato se si compiono delle operazioni

elementari sul sistema di vettori applicati delle forze, dal momento che tali operazioni non alterano nè il risultante nè momento risultante.
In mancanza della condizione di rigidità ciò non è più vero, perchè il lavoro viene a dipendere da ogni sinsola forza applicata e dai singoli spostamenti dei punti di applicazione.

Capitolo 2

Principio dei lavori virtuali

In questo capitolo verrà trattato l'argomento principiale della tesi, il principio dei lavori virtuali.
Occorre anzitutto dare la definizione di equilibrio per un punto materiale, per poi estenderla al caso di un sistema di punti.

Definizione 2.1. *Una configurazione $P_0 \in \mathbb{R}^3$ si dice di equilibrio per un punto P se, posto P in P_0 all'istante iniziale, ivi resta ad ogni istante successivo.*

Questa definizione può essere tradotta nel linguaggio delle equazioni differenziali, applicando il *teorema di Cauchy*, con riferimento alla legge fondamentale della dinamica del punto (Legge di Newton) che ora ricordiamo.

Legge fondamentale della dinamica: Se su un punto P, di massa m, agisce un sistema di forze di vettore risultante $\vec{F}$, l'accelerazione $\vec{a}$ di P che ne consegue è data dalla relazione

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

Supponendo che la funzione $\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t)$ sia di classe $C^{(\infty)}$, la (2.1), riscritta come equazione differenziale

$$m\frac{d^2P}{dt^2} = \vec{F}(P, \frac{dP}{dt}, t), \tag{2.2}$$

ammette una ed una sola soluzione ogni volta che viene fissata una condizione iniziale del tipo:

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \frac{dP}{dt}(t_0) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

con $P_0, \vec{v}_0 \in \mathbb{R}$.

Osservazione 2.2. Dalla definizione (2.1) segue che P_0 è una configurazione di equilibrio se e solo se $P(t) = P_0$ è la soluzione di (2.2) corrispondente al dato iniziale

$$\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \vec{v}(t_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto si può facilmente dimostrare il seguente teorema, che rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibirio, a volte assunta come definizione equivalente di equilibrio. Per la dimostrazione si rinvia al trattato [1, A.Strumia]

Teorema 2.3. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $P_0 \in \mathbb{R}^3$ sia una configurazione di equilibirio per P è che sia

$$\vec{F}(P_0, 0, t) = 0, \qquad \forall\, t \geq t_0. \tag{2.3}$$

Definizione 2.4. *Si dice che un* ***sistema di punti materiali*** *è in equlibrio se e sole se ogni suo punto è in equilibrio. Più precisamente , una configurazione* $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ *è di equilibrio per un sistema meccanico a* n *gradi di libertà se lo è per ogni punto del corpo*

Quando consideriamo un sistema di punti materiali S (che esemplificativamente consideriamo discreto), in cui possono essere presenti vincoli, conviene considerare due sottoinsiemi: il primo che che comprende i *punti liberi*, che chiamiamo S_l, cioè *non vincolati*, e il secondo comprendente i *punti vincolati* che denotiamo con S_v, cosicchè risulta:

$$S = S_l \cup S_v, \qquad S_l \cap S_v = \emptyset$$

Indichiamo con $\vec{F}_s$ il vettore risultante delle forze attive agenti in $P_s, \forall\, P_s \in S$ e con $\vec{\Phi}$ il vettore risultante delle reazioni vincolare agenti in $P_s, \forall\, P_s \in S_v$. Supponiamo da questo momento in poi che le forze agenti sul corpo siano posizionali.
Allora dire che l'intero sistema è in equilibrio equivale a dire che sussistono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \vec{F}_s = 0, \quad \forall P_s \in S_l \\ \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0, \quad \forall P_s \in S_v \end{cases} \tag{2.4}$$

A questo punto, introdotta la nozione di equilibrio di un sistema di punti, possiamo introdurre un metodo per la ricerca delle condizioni di equilibrio: Il principio dei lavori virtuali. Rispetto all'altro metodo classico dato dalle *equazioni cardinali della statica*, che qui non tratteremo, offre il vantaggio di non fare intervenire le reazioni vincolari, che in generale sono delle incognite aggiuntive rispetto al problema dell'equilibrio. Tuttavia esso presenta la limitazione di richiedere l'ipotesi che i **vincoli** siano **lisci** ai fini della determinazione di tutte le configurazioni di equilibrio di un sistema.

Principio delle reazioni vincolari: Questo principio rappresenta la definizione di una classe speciale di vincoli nota col nome di *vincoli lisci* e si enuncia nella maniera seguente:

Definizione 2.5. *Si dicono* ***lisci*** *quei vincoli che sono capaci di esplicare tutte e solamente quelle forze (che sono le reazioni vincolari) il cui lavoro virtuale risulta non negativo, per ogni spostamento virtuale.*

Indicando con $(P_s, \vec{\Phi}_s)$, $s = 1, 2, ..., N$ il sistema di reazioni vincolari che rappresentano un vincolo liscio, e con $\delta L^{(v)}$ il lavoro virtuale del sistema, in formula si ha

$$\delta L^{(v)} = \sum_{s=1}^{N} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s \geq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \tag{2.5}$$

In presenza di vincoli lisci, solamente le reazioni vincolari possono esplicare un lavoro non negativo per ogni spostamento virtuale: quindi, se si trovano delle forze che soddisfano tale condizione, esse sono necessariamente delle reazioni vincolari.

Nella classe dei vincoli lisci, così definiti vengono a trovarsi tutti i vincoli privi di attrito, perciò la classe dei vincoli lisci definiti dal principio delle reazioni vincolari, è più generale della classe dei vincoli privi di attrito.

2.1 Enunciato del principio

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema meccanico a vincoli lisci sia in equilibrio in una configurazione $q*$ è che il lavoro virtuale delle forze attive sia non positivo per ogni spostamento virtuale compiuto a partire da $q*$. In particolare il lavoro risulterà nullo per tutti gli spostamenti reversibili effettuati a partire da $q*$.

In formule, indicato con $\delta L^{(a)}$ il lavoro virtuale delle forze attive:

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \qquad \forall\, \delta P_s. \tag{2.6}$$

In particolare risulterà:

$$\delta L^{(a)} = 0, \qquad \forall\, \delta P_s \quad reversibili \tag{2.7}$$

dove il lavoro della forze attive, è per definizione:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s,$$

se $(P_s, \vec{F}_s)$ e $s = 1, 2, ..., N$ è il sistema delle forze attive agenti nel corpo. Notiamo che la condizione (2.7) sul lavoro relativo agli spostamenti reversibili è una conseguenza della condizione generale(2.6) e della definizione di spostamento reversibile. Sappiamo infatti che negli spostamenti reversibili sono ammessi anche gli spostamenti opposti, perciò la condizione (2.6) all'equbilibrio, è soddisfatta anche dagli spostamenti opposti poichè vale per tutti gli spostamenti virtuali. Devono quindi sussistere insieme le condizioni:

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \leq 0$$

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \geq 0$$

in quanto il lavoro per gli spostamenti opposti è:

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot (-\delta P_s) = -\sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s$$

Naturalmente il sistema delle disuguaglianze precedenti può essere soddisfatto se e solo se risulta verifica la (2.7).

Passiamo ora alla dimostrazione del principio dei lavori virtuali

2.2 Dimostrazione del principio

2.2.1 Condizione necessaria

Dire che la condizione (2.6) è necessaria per l'equilibrio di un sistema a vincoli lisci in una configurazione $q*$ equivale a dire che: se c'è l'equilibrio *necessariamente* segue la conseguenza (2.6). Dunque la dimostrazione della condizione necessaria equivale alla dimostrazone del teorema:

$$equilibrio \quad \Longrightarrow \quad \delta L^{(a)} \leq 0 \quad \forall\, \delta P_s.$$

Cioè, in base alla definizione di equilibrio di un sistema di punti materiali (2.4):

$$\begin{cases} \vec{F}_s = 0, & \forall\, P_s \in S_l \\ \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0 & \forall\, \delta P_s \in S_v \end{cases} \implies \quad \delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall\, P_s$$

dove S_l è l'insieme dei punti liberi e S_v è l'insieme dei punti vincolati.

Il lavoro delle forze attive si può pensare come dovuto a due contributi: uno dato dalle forze applicate ai punti non vincolati $P_s \in S_l$ e il secondo dato dalle forze applicate ai punti vincolati $P_s \in S_v$. Così possiamo scrivere:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = \sum_{P_s \in S_l} \vec{F}_s \cdot \delta P_s + \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s$$

Dal momento che per ipotesi i punti liberi sono in equilibrio, cioè:

$$\vec{F}_s = 0, \qquad \forall\, P_s \in S_l$$

allora:

$$\sum_{P_s \in S_l} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = 0.$$

Perciò rimane solo il contributo dato dalle forze applicate ai punti vincolati $P_s \in S_v$, cioè:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s$$

Usando l'ipotesi (2.4) relativa all'equilibrio dei punti vincolati:

$$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0 \qquad \iff \qquad \vec{F}_s = -\vec{\Phi}_s, \qquad \forall\, P_s \in S_v$$

risulta che:

$$\delta L^{(a)} = -\sum_{P_s \in S_l} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s = -\delta L^{(v)}$$

Perciò:

$$\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)}, \qquad \forall\, \delta P_s$$

essendo $\delta L^{(v)}$ il lavoro delle reazioni vincolari, dal momento che solo nei punti $P_s \in S_v$ sono presenti le reazioni vincolari. Ma il sistema meccanico che stiamo considerando è un sistema a vincoli lisci e quindi, per esso vale il principio delle reazioni vincolari che assicura che:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

In conclusione:

$$\delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)} \leq 0, \qquad \forall \delta P_s$$

e risulta verificata la tesi.

2.2.2 Condizione sufficiente

Dire che la condizione (2.6) è sufficiente per l'equilibrio di un sistema a vincoli lisci equivale a dire che: è sufficiente che risulti verificata la (2.6) affinchè il sitema sia in equilibrio. Dunque la dimostrazione della condizione sufficiente equivale alla dimostrazione del teorema:

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall\, \delta P_s \quad \Longrightarrow \quad equilibrio$$

cioè:

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall\, \delta P_s \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{F}_s = 0, \quad \forall P_s \in S_l \\ \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0, \quad \forall P_s \in S_v \end{cases}$$

dove, rispetto alla condizione necessaria, l'ipotesi e la tesi sono state scambiate. Dal momento che la (2.6) è soddisfatta, per ipotesi, per tutti gli spostamenti virtuali a partire da una configurazione $q*$, in particolare dovrà risultare verificata per la particolare classe di spostamenti C_0 che lascia inviariati i punti vincolati e sposta arbitrariamente i punti liberi:

$$\begin{cases} \delta P_s \quad arbitrari, \quad \forall P_s \in S_l \\ \delta P_s = 0, \quad \forall P_s \in S_v \end{cases}$$

Questi spostamenti, per come sono stati definiti, sono spostamenti reversibili, dato che i punti liberi, che sono gli unici a poter compiere spostamenti non nulli, possono muoversi liberamente sullo spostamento, quindi anche lo spostamento opposto risulta permesso.
Per questa classe di spostamenti reversibili l'ipotesi (2.6) risulta verificata come uguaglianza:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in S_l} \vec{F}_s \cdot \delta P_s = 0, \quad \forall \delta P_s \in C_0 \tag{2.8}$$

Sapendo che $\delta P_s \in C_0$ è arbitrario per ogni punto libero $P_s \in S_l$, la condizione (2.8), deve valere anche considerando uno spostamento particolare che è arbitrario solo per un punto $P_{\bar{s}}$ tra i punti liberi, mentre lascia invariati tutti i rimanenti; ovvero:

$$\begin{cases} \delta P_{\bar{s}} \quad arbitrario \\ \delta P_s = 0, \quad per\ s \neq \bar{s} \end{cases}$$

Per questo spostamento particolare la condizione sul lavoro delle forze attive (2.8), diventa:

$$\vec{F}_{\bar{s}} \cdot \delta P_{\bar{s}} = 0, \qquad \forall \delta P_{\bar{s}} \Longleftrightarrow \qquad |F_{\bar{s}}||\delta P_{\bar{s}}|\, cos\, \alpha_{\bar{s}} = 0$$

Visto che $\delta P_{\bar{s}}$ è arbitrario, il prodotto scalare si annulla se e solo se

$$\vec{F}_{\bar{s}} = 0, \quad P_{\bar{s}} \in S_l. \tag{2.9}$$

Data l'arbitrarietà nella scelta di $\bar{s}$ abbiamo così ottenuto che tutti i punti non vincolati del sistema sono in equilibrio. Osservando che le forze dipendono dalle posizioni dei punti, ma non dagli spostamenti δP_s, per cui le (2.9) sono valide indipendentemente dagli spostamenti virtuali che si effettuano. Possiamo quindi considerare il lavoro delle forze attive in corrispondenza di qualsiasi spostamento virtuale, e questo risulterà uguale, grazie alle (2.9) al lavoro delle sole forze agenti sui punti vincolati. Di conseguenza in forza dell'ipotesi (2.6), tenendo conto che in generale gli spostamenti possono essere anche irreversibili, abbiamo che:

$$\delta L^{(a)} = \sum_{P_s \in S_v} \vec{F}_s \cdot \delta P_s \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s \tag{2.10}$$

Ora introduciamo i simboli di comodo:

$$\vec{\Phi}_s^* = -\vec{F}_s \tag{2.11}$$

che rappresentano le forze che sarebbero necessarie a mantenere in equilibrio i punti vincolati $P_s \in S_v$ e ci chiediamo se i vincoli del nostro sistema sono in grado di esplicare tali forze. Introduciamo quindi la definizione (2.11) e la sostituiamo nella condizione sui lavori (2.10), ottenendo:

$$\delta L^{(a)} = -\sum_{P_s \in S_v} \Phi_s^* \cdot \delta P_s = -\delta L^* \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

dove δL^* denota il lavoro delle Φ_s^*.
Abbiamo finalmente ottenuto il seguente risultato:

$$\delta L^* \geq 0, \quad \forall \delta\, P_s \tag{2.12}$$

Ma stiamo lavorando con un sistema a *vincoli lisci* e per il *principio delle reazioni vincolari* che definisce i vincoli lisci sappiamo che: se in presenza di vincoli lisci, si incontrano delle forze che esplicano lavoro non negativo, per qualunque spostamento virtuale, queste non possono che essere reazioni vincolari. Di conseguenza la (2.12) comporta che i vincoli esplicano effettivamente le forze necessarie a mantenere in equilibrio i punti vincolati del sistema. Dunque:

$$\vec{\Phi}_s^* = \vec{\Phi}_s,$$

e quindi la (2.11) è effettivamente la condizione di equilibrio:

$$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0, \quad \forall P_s \in S_v$$

Dunque la tesi risulta completamente dimostrata.

Se il vincolo non è liscio ci troviamo certamente in presenza di attrito. Abbiamo già osservato che se non vale il principio delle reazioni vincolari, la *condizione necessaria* del principio dei lavori virtuali non è valida. Fisicamente questo si spiega perchè, come l'esperienza dimostra, l'attrito rende possibili delle configurazioni di equilibrio che non sarebbero tali in presenza di vincoli lisci.
La sufficienza del principio dei lavori virtuali rimane, invece, valida anche in presenza di vincoli non lisci. Infatti essa permette di determinare solo quelle configurazioni che sono di equilibrio quando il vincolo è liscio; ma se il vincolo non è liscio certamente non vi è attrito, e l'esperienza mostra che l'attrito non elimina le configurazioni che sono di equilibrio anche col vincolo liscio, ma ne aggiunge ad esse delle altre. Trattare un vincolo che non è liscio come se fosse tale è allora una *condizione di sicurezza*, perchè la presenza dell'attrito favorisce l'equilibrio e quindi, se vi è l'equilibrio col vincolo liscio, a maggior ragione vi sarà quando il vincolo non è liscio. In conclusione:

Osservazione 2.6. Il principio dei lavori virtuali costituisce una **condizione necessaria** e **sufficiente** per l'equilibrio in presenza di vincoli lisci e una **condizione** solo **sufficiente** se i vincoli non sono lisci.

2.3 Applicazione del principio ai corpi rigidi

Volendoci occupare ora dell'equilibrio di un corpo rigido, facendo uso del principio dei lavori virtuali, dobbiamo verificare anzitutto che il vincolo di rigidità è un vincolo liscio.
Ricordando la (1.2) il lavoro di un qualunque sistema di forze applicate ai punti di un corpo rigido è dato da:

$$dL = \vec{R} \cdot dO_1 + \vec{M}_{O_1} \cdot d\psi \, \vec{k}$$

dove d indica indifferentemente il lavoro virtuale o il lavoro possibile che coincidono dal momento che il vincolo di rigidità non dipende dal tempo. Inoltre R è il vettore risultante delle forze applicate, $d\psi = w dt$ con $\vec{w}$ velocità angolare, $\vec{M}_{O_1} = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O_1) \wedge \vec{F}_s$ è il vettore momento risultante delle forze applicate rispetto al polo O_1.

Dal terzo principio della dinamica, le forze interne (che realizzano il vincolo di rigidità del corpo), costituiscono un sistema di coppie di braccio nullo e quindi hanno risultante e momento risultante nulli:

$$\vec{R}^{(i)} = 0, \qquad \vec{M}^{(i)}_{O_1} = 0$$

Ne viene che il lavoro delle forze interne in un corpo rigido diventa:

$$dL^{(i)} = \vec{R}^{(i)} \cdot dO_1 + \vec{M}^{(i)}_{O_1} \cdot d\psi\, \vec{k} = 0.$$

Risulta quindi verificato anche che il lavoro virtuale delle forze vincolari interne che realizzano il vincolo di rigidità, essendo uguale al lavoro delle forze interne, è nullo e soddisfa dunque il principio delle reazioni vincolari. Quindi il vincolo di rigidità è liscio.
In un corpo rigido le forze attive sono solo le forze interne, poichè le forze interne sono tutte di natura vincolare, di conseguenza:

$$\delta L^{(a)} = \delta L^{(e,a)}.$$

Dunque in un corpo rigido il principio dei lavori virtuali si traduce nella condizione sulle sole forze esterne attive:

$$\vec{R}^{(e,a)} \cdot \delta O_1 + \vec{M}^{(a)}_{O_1} \cdot \delta\psi\, \vec{k} \leq 0, \qquad \forall\, \delta O_1,\ \delta\psi \tag{2.13}$$

In particolare per gli spostamenti reversibili la condizione precedente risulta verificata come uguaglianza.

2.3.1 Corpo rigido con punto fisso

Abbiamo appena verificato che il vincolo di rigidità è un vincolo liscio, e anche un punto fisso rappresenta un vincolo liscio per un corpo rigido (si veda [1, A.Strumia] per dettagli in questo punto). Dunque possiamo concludere che un corpo rigido con un punto fisso è soggetto a vincoli lisci.
Scegliendo O_1 coincidente con il punto fisso del corpo l'espressione del lavoro si riduce al solo lavoro del momento risultante e la condizione di equilibrio (2.13), diventa semplicemente:

$$\vec{M}^{(e,a)}_{O_1} \cdot \delta\psi\, \vec{k} = 0 \qquad \forall\, \delta\psi. \tag{2.14}$$

L'uguaglianza è data dal fatto che gli spostamenti sono reversibili, dal momento che sono rotazioni attorno ad un'asse passante per O_1, in quanto il vincolo blocca i parametri di traslazione del corpo, ma non fornisce alcuna

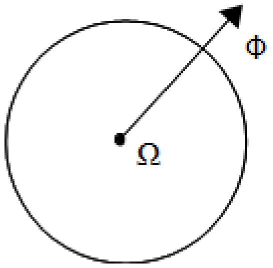

Figura 2.1: corpo rigido con un punto fisso

limitazione sui parametri di rotazione. Data l'arbitrarietà di $\delta\psi$, la (2.14) può essere soddisfatta se e solo se:

$$\vec{M}_{O_1}^{(e,a)} = 0 \tag{2.15}$$

che rappresenta la condizione di equilibrio per un corpo rigido con un punto fisso. In conclusione:
Condizione necessaria e sufficiente affinchè un corpo rigido con un punto fisso sia in equilibrio è che il momento delle forze esterne attive ad esso applicate, calcolato rispetto al punto fisso preso come polo di riduzione, sia nullo.

Esempio 2.7. Prendiamo una singola forza attiva $(P, \vec{F})$ agente sul corpo, affinchè il suo momento rispetto ad O_1 sia nullo, e quindi il corpo sia in equilibrio, deve accadere che:

$$(P - O_1) \wedge \vec{F} = 0$$

cioè la forza deve avere la retta d'azione passante per O_1, in quanto $P - O_1$ risulta parallelo ad F e quest'ultimo vettore è applicato in P.
Ora, per determinare le configurazioni di equilibrio del corpo, si proietta la condizione vettoriale (2.15) su un sistema di assi cartesiani che può essere conveniente scegliere con l'origine nel punto fisso:

$$\begin{cases} M_x^{(e,a)}(\theta, \phi, \psi, t) = 0 \\ M_y^{(e,a)}(\theta, \phi, \psi, t) = 0 \\ M_z^{(e,a)}(\theta, \phi, \psi, t) = 0 \end{cases}$$

Otteniamo così tre equazioni per le tre incognite θ, ϕ, ψ(dette anche angoli di Eulero), costituite dai tre gradi di libertà del corpo rigido con un punto fisso. Le soluzioni del sistema sono le configurazioni di equilibrio cercate.

2.3.2 Corpo rigido con un asse fisso

Prendiamo in esame un corpo rigido con un intera retta solidale fissa (asse fisso). Assumiamo che l'asse fisso non abbia struttura e si possa quindi schematizzare con una retta geometrica, dotata di una sola dimensione. In tal caso il vincolo risulta essere liscio. Infatti le reazioni vincolari sono applicate sulla retta, dove c'è il vincolo, e i loro punti di applicazione sono punti fissi del corpo, di conseguenza il lavoro delle reazioni vincolari è sempre nullo e il principio delle reazioni vincolari risulta verificato. Il *principio dei lavori virtuali* esprime quindi una *condizione necessaria* e *sufficiente* per l'equilibrio e consente di individuare tutte le configurazioni di equilibrio. Scegliendo il punto O_1 sull'asse fisso, possiamo scrivere la condizione di equilibrio (2.13) come:

$$\vec{M}_{O_1}^{(e,a)} \cdot \delta\psi\, \vec{k} = 0, \qquad \forall\, \delta\psi$$

che equivale alla nostra (2.14). Come prima c'è un uguaglianza poichè stiamo

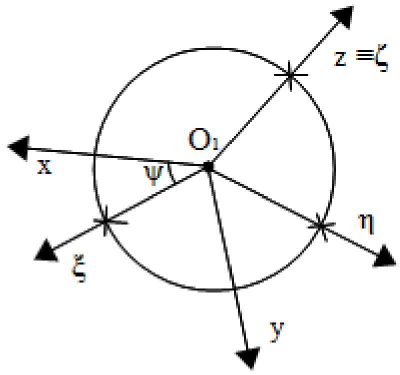

Figura 2.2: equilibrio di un corpo rigido con asse fisso

parlando sempre di rotazioni, in questo caso attorno all'asse fisso e perciò gli spostamenti sono tutti reversibili.
Poichè $\vec{k}$ è il versore dell'asse fisso di rotazione(nella (2.2) rappresentata dall'asse $z \equiv \zeta$) la condizione di equilibrio (2.14) si riscrive allora:

$$M_z^{(e,a)}\, \delta\psi = 0, \qquad \forall\, \delta\psi$$

Essa è soddisfatta se e solo se:

$$M_z^{(e,a)}(\psi, t) = 0, \tag{2.16}$$

con $M_z^{(e,a)}$ il momento assiale delle forze attive, realtivo all'asse fisso z. La condizione (2.16) è una sola equazione per l'unico grado di libertà ψ e le sue

soluzioni rappresentano le configurazioni di equilibrio del corpo. Dunque:
Condizione necessaria *e* ***sufficiente*** *affinchè un corpo rigido con un asse fisso sia in equilibrio è che il momento assiale delle forze esterne attive ad esso applicate, calcolato rispetto all'asse fisso, sia nullo.*

Esempio 2.8. Se consideriamo una forza attiva sola $(P, \vec{F})$, affinchè essa soddisfi la condizione di equilibrio (2.16), deve risultare:

$$(P - Q) \wedge \vec{F} \cdot \vec{k} = 0,$$

perciò i tre vettori $(P - O_1)$, $\vec{F}, \vec{k}$ devono essere complanari, ma O_1 appartiene all'asse fisso e P alla retta d'azione della forza, quindi l'asse fisso e la retta d'azione devono essere complanari. Quindi affinchè il corpo sia in equilibrio sotto l'azione della sola forza esterna attiva, occorre e basta che la retta d'azione della forza sia parallela oppure incidente rispetto all'asse fisso.

2.3.3 Corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

Come terzo caso consideriamo l'equilibrio del corpo rigido che può ruotare e scorrere lungo una semiretta solidale con l'osservatore (semiretta fissa) ma non solidale con il corpo rigido.

Affinchè i vincoli siano lisci assumiamo che siano privi di attrito i cursori sui

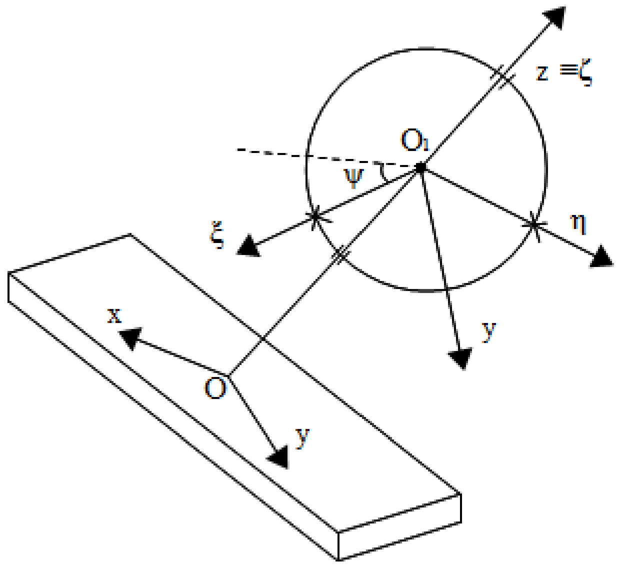

Figura 2.3: Equilibrio di un corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa

quali il corpo scorre lungo la semiretta e sia liscio il *vincolo unilaterale* che limita la traslazione del corpo lungo la semiretta; ad esempio sia costituito da una superficie priva di attrito.

Sotto questa ipotesi il *principio dei lavori virtuali* è *condizione necessaria* e *sufficiente* per determinare tutte le configurazioni di equilibrio del sistema.

Osservazione 2.9. Essendo presente un vincolo unilaterale, dobbiamo esaminare anche le configurazioni di confine

Scegliamo il punto O_1 del corpo rigido in modo che si trovi sulla retta solidale del corpo che trasla lungo la semiretta fissa e denotiamo con z la sua posizione lungo la semiretta fissa, assumendo che per $z = 0$ il corpo si trovi al confine, mentre con ψ indichiamo il parametro di rotazione del corpo. Il problema ha due gradi di libertà e sussiste la limitazione:

$$z \geq 0$$

che caratterizza la presenza del *vincolo unilaterale.* La condizione di equilibrio (2.13) va specializzata introducendo le informazioni relative al vincolo, cioè al fatto che la semiretta z ha direzione fissa data dal versore $\vec{k}$, perciò:

$$\delta O_1 = \vec{k}\,\delta z.$$

Quindi la condizione di equilibrio diventa:

$$\vec{R}^{(e,a)} \cdot \vec{k}\,\delta z + \vec{M}_{O_1}^{(e,a)} \cdot \vec{k}\,\delta\psi \leq 0, \qquad \forall\,\delta z, \delta\psi$$

Ovvero:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z + M_z^{(e,a)}\,\delta\psi \leq 0, \qquad \forall\,\delta z,\ \delta\psi \tag{2.17}$$

Distinguiamo ora due casi:

- **configurazione ordinaria:** cioè il corpo non è a contatto con la barriera unilaterale

- **configurazione di confine:** cioè il corpo e la barriera unilaterale sono a contatto

a) **configurazioni ordinarie:** $z > 0$

In questa situazione tutti gli spostamenti sono reversibili e la condizione di equilibrio (2.17) si scrive come uguaglianza:

$$R_z^{(e,a)}\delta z + M_z^{(e,a)}\delta\psi = 0, \qquad \forall\,\delta z,\ \delta\psi. \tag{2.18}$$

Scegliendo uno spostamento particolare per il quale risulti $\delta z = 0$ e $\delta\psi$ arbitrario tale condizione comporta:

$$M_z^{(e,a)}\delta\psi = 0, \qquad \forall\, \delta\psi \Longrightarrow M_z^{(e,a)} = 0,$$

che introdotta nella (2.18) fornisce:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z = 0, \qquad \forall\, \delta z \Longrightarrow R_z^{(e,a)} = 0.$$

Pertanto:
Condizione necessaria e **sufficiente** affinchè una configurazione ordinaria sia di equilibrio per il corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa è che:

$$R_z^{(e,a)}(z,\psi,t) = 0, \qquad M_z^{(e,a)}(z,\psi,t) = 0, \qquad z > 0.$$

b) **configurazione di confine:** $z = 0$, $\delta z \geq 0$

Le configurazione di confine sono caratterizzate dal vincolo per le configurazioni $z = 0$ e dal conseguente vincolo per gli spostamenti $\delta z \geq 0$.

Di conseguenza le rotazioni che sono caratterizzate da:

$$\delta z = 0, \qquad\qquad \delta\theta \quad \textit{arbitrario}$$

sono gli unici spostamenti reversibili, mentre gli spostamenti traslatori e rototraslatori sono irreversibili.
Allora la condizione (2.17) nel caso di spostamenti reversibili, cioè puramente rotatori, comporta, come già nel caso precedente, l'annullarsi del momento assiale delle forze esterne attive:

$$M_z^{(e,a)} = 0$$

Questa, introdotta nella (2.17) ci dà:

$$R_z^{(e,a)}\,\delta z \leq 0, \qquad \forall\, \delta z \geq 0.$$

Essendo $\delta z \geq 0$, a causa del vincolo unilaterale, la condizione precedente può essere soddisfatta se e solo se:

$$R_z^{(e,a)} \leq 0.$$

Quindi:
Condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione di confine sia di equilibrio per il corpo rigido scorrevole su una semiretta fissa è che:

$$R_z^{(e,a)}(0,\psi,t) \leq 0, \qquad M_z^{(e,a)}(0,\psi,t) = 0$$

Si noti che al posto della variabili z si è posto il suo valore al confine che è 0.

Esempio 2.10. Prendiamo una sola forza attiva $(P, \vec{F})$ non nulla. Alla condizione dell'annullarsi del momento assiale, determinata nel caso del corpo rigido con un asse fisso, occorre aggiungere la condizione sul vettore risultante.
Quindi affinchè il corpo stia in equilibrio sotto l'azione della forza, oltre a richiedere che la retta d'azione della forza sia complanare con la semiretta fissa, dobbiamo avere, per le configurazioni ordinarie che la forza sia ortogonale alla semiretta, e in configurazioni di confine, che la forza abbia componente z non positiva.
La forza deve in questo caso puntare contro la barriera unilaterale oppure essere normale alla semiretta, per mantenere l'equilibrio.

Capitolo 3

Principio di D'Alembert

Per la statica dei sistemi a vincoli lisci, abbiamo stabilito come condizione necessaria e sufficiente a determinare l'equilibrio, il principio dei lavori virtuali, che costituisce una metodologia molto potente, richiedendo la sola conoscenza delle forze attive, e non coinvolgendo le reazioni vincolari(solitamente incognite) nel problema dell'equilibrio.
Ora ci chiediamo se è possibile dare una versione del principio dei lavori virtuali per la dinamica dei sistemi a vincoli lisci.
A questo scopo osserviamo che il *principio dei lavori virtuali* può essere stabilito in forza del principio delle *reazioni vincolari* che permette di definire in maniera generale i vincoli lisci.
Storicamente quest'ultimo principio è nato nell'ambito della statica, tuttavia viene comunemente ammesso come valido anche in dinamica, in quanto l'esperienza mostra che esso viene rispettato anche in regime dinamico da quei vincoli che lo soddisfano in regime di equilibrio.

Con questa assunzione si può stabilire l'estensione del principio dei lavori virtuali, in modo del tutto analogo a quanto si è visto in statica, anche in dinamica.

3.1 Disuguaglianza variazionale della dinamica

Consideriamo un sistema di punti materiali $S = \{(P_s, m_s) : s = 1, 2, ..., N\}$. Indichiamo con $\vec{F}_s$ e $\vec{\Phi}_s$ rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e quello delle reazioni vincolari agenti sul punto P_s, $\forall\, s = 1, 2..., N$. Per ogni punto materiale del sistema, vale, in dinamica, supposto che l'osservatore del moto sia inerziale, l'equazione fondamentale:

$$m_s\vec{a}_s = \vec{F}_s + \vec{\Phi}_s, \qquad s = 1, 2, ..., N$$

che possiamo riscrivere esplicitando la reazione vincolare:

$$\vec{\Phi}_s = -(\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s)$$

Moltiplicando scalarmente entambi i membri per δP_s e sommando sull'indice s otteniamo:

$$\sum_{s=1}^{N} \vec{\Phi}_s \cdot \delta P_s = -\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s) \cdot \delta P_s$$

dove al primo membro ritroviamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari. Assumendo che i vincoli siano lisci e il principio delle reazioni vincolari sia valido anche in dinamica abbiamo:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \qquad \forall\, \delta P_s$$

Quindi risulta:

$$\sum_{s=1}^{N} (\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s) \cdot \delta P_s \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s. \tag{3.1}$$

Questa condizione rappresenta l'estensione cercata del principio dei lavori virtuali alla dinamica.
Essa prende il nome di disuguaglianza variazionale della dinamica.

3.2 Principio di D'Albembert

Dal risultato ottenuto in precedenza si può osservare che il passaggio dal principio dei lavori virtuali alla disuguaglianza variazionale della dinamica si ottiene con una regola molto semplice: dove nella statica sono presenti le forze attive $\vec{F}_s$ in dinamica troviamo le quantità $\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s$:

Statica	*Dinamica*
$\vec{F}_s$	$\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s$

In particolare applicando questa regola, l'equazione fondamentale del moto del singolo punto del sistema P_s, si può ottenere partendo dalla corrispondente condizione di equilibrio:

Statica	*Dinamica*
$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0$	$(\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s) + \vec{\Phi}_s = 0$

D'Alembert osservò che l'equazione del moto così scritta può essere interpretata come una condizione di equilibrio fra le forze $\vec{F}_s - m_s\vec{a}_s$ e le reazioni vincolari e diede il nome di **forze perdute** alle quantità che rimpiazzano le forze attive:

$$\vec{F}_s^{(p)} = \vec{F}_s - m_s\vec{a}_s.$$

Le $\vec{F}_s^{(p)}$ sono chiamate *forze perdute* in quanto vengono spese contro il vincolo e non sviluppano accelerazione; sono quindi perdute ai fini del moto.
Possiamo quindi dire che:

Durante il moto le forze perdute e le reazioni vincolari si fanno equilibrio

Questo enunciato è noto come il **principio di D'Alembert** ed equivale alla regola di passaggio dalla *statica* alla *dinamica* stabilita in precedenza.

Si può allora riscrivere la disuguaglianza variazionale della dinamica nella forma semplice:

$$\delta L^{(p)} \leq 0, \qquad \forall\, \delta P_s. \tag{3.2}$$

Il principio di D'Alembert, ovvero la disuguaglianza (3.2), ammette un'applicazione fondamentale nell'ambito della dinamica dei sistemi meccanici, rappresentati dalle espressioni di Lagrange, che ora andiamo brevemente ad illustrare a conclusione di questa tesi.

3.3 Equazioni di Lagrange

Per poter utilizzare la disuguaglianza variazionale della dinamica (3.2), in modo da ottenere le equazioni del moto di Lagrange, dobbiamo procedere facendo diverse ipotesi:

i) vincoli lisci
ii) vincoli bilaterali
iii) sistema olonomo

L'ipotesi che i vincoli siano *lisci*, comporta che il principio dei lavori virtuali sia una condizione anche necessaria per l'equilibrio di un sistema meccanico, e permette, quindi di determinare tutte le configurazioni di equilibrio di un sistema meccanico. Dal punto di vista dinamico, la condizione che i vincoli siano lisci comporta che la disuguaglianza variazionale della dinamica sia una condizione necessaria, oltre che sufficiente, ai fini della determinazione del moto di un sistema meccanico, e permette, quindi, di determinare tutti i moti del sistema.

L'ipotesi che i vincoli siano *bilaterali* garantisce che tutti gli spostamenti siano reversibili e quindi comporta che la (3.1) risulti valida sotto forma di uguaglianza:

$$\sum_{s=1}^{N}(\vec{F}_s - m_s\,\vec{a}_s)\cdot\delta P_s = 0, \qquad \forall\,\delta P_s. \tag{3.3}$$

A questa condizione si da il nome di *relazione simbolica della dinamica*. Questa condizione è valida anche in presenza di vincoli unilaterali, fino a che il sistema si mantiene in configurazioni ordinarie, mentre perde la sua validità nelle configurazioni di confine.

L'ipotesi che il sistema sia olonomo permette di introdurre i parametri lagrangiani e lo spazio delle configurazioni per descrivere il moto del sistema meccanico. Se il sistema è olonomo, a n gradi di libertà, possiamo identificare i punti del sistema mediante le relazioni:

$$\vec{OP}_s = \vec{OP}_s(q_1, q_2, ..., q_n, t) \tag{3.4}$$

ed esprimere gli spostamenti virtuali come:

$$\delta P_s = \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\delta q_h.$$

Questa informazione, introdotta nella (3.3) comporta:

$$\sum_{s=1}^{N}\vec{F}_s\cdot\frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\delta q_h - \sum_{s=1}^{N} m_s\,\vec{a}_s\cdot\frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\delta q_h = 0, \qquad \forall\,\delta q_h.$$

Possiamo introdurre le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$Q_h = \sum_{s=1}^{N}\vec{F}_s\cdot\frac{\partial P_s}{\partial q_h}, \qquad \forall\, h = 1, 2, ..., n, \tag{3.5}$$

e analogamente le quantità:

$$\tau_s = \sum_{s=1}^{N} m_s\,\vec{a}_s\cdot\frac{\partial P_s}{\partial q_h}, \qquad \forall\, h = 1, 2..., n \tag{3.6}$$

Otteniamo allora la condizione:

$$(Q_h - \tau_h)\,\delta q_h = 0, \qquad \forall\, \delta q_h.$$

Ovvero in termini di vettori nello spazio delle configurazioni:

$$(Q - \tau)\cdot \delta q = 0, \qquad \forall\, \delta q \tag{3.7}$$

essendo:

$$Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_n), \qquad \tau = (\tau_1, \tau_2, ...\tau_n).$$

Se $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ sono due generici vettori di $\mathbb{R}^n$, si è denotato con $a \cdot b := \sum_{h=1}^{n} a_n b_n$ la generalizzazione in $\mathbb{R}^n$ del prodotto scalare di due vettori gia definito in $\mathbb{R}^3$ si veda (1.1)). Dal momento che le forze possono dipendere solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti e al più dal tempo, ma non dagli spostamenti virtuali, si ha:

$$Q = Q(q, \dot{q}, t).$$

Le quantità τ coinvolgendo le accelerazioni dipendono anche dalle derivate seconde, ma comunque non dagli spostamenti virtuali:

$$\tau = \tau(q, \dot{q}, \ddot{q}, t).$$

Allora il prodotto scalare (3.7), grazie all'arbitrarietà degli spostamenti virtuali, può annullarsi solo a condizione che:

$$Q - \tau = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_h - \tau_h = 0, \qquad \forall\, h = 1, 2, ..., n$$

Scritto per esteso il risultato ottenuto rappresenta un sistema di n equazioni differenziali per le n funzioni incognite $q_h(t)$ che descrivono il moto del sistema olonomo:

$$\begin{cases} \tau_1 = Q_1 \\ \tau_2 = Q_2 \\ ... \\ \tau_n = Q_n \end{cases}$$

in cui i termini differenziali compaiono in τ_h. Per rendere utilizzabile praticamente questo sistema di equazioni differenziali dobbiamo esprimere τ_h mediante una grandezza macroscopica, caratteristica del sistema meccanico e che siamo in grado di calcolare.

Mostriamo che sussiste il seguente legame di τ_h con l'energia cinetica del sistema:

$$\tau_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}.$$

Partendo dall'espressione dell'energia cinetica di un sistema di N particelle:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s\, v_s^2$$

abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h}\right).$$

Basta allora dimostrare che:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_h}. \tag{3.8}$$

Esaminiamo il primo termine a primo membro:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_h}\right) = \vec{a}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_h} + \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_h}. \tag{3.9}$$

Ma ricordando la (3.4) la velocità in un sistema olonomo si scrive:

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{P}_s}{dt} = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}.$$

Essendo $\vec{OP}_s$ indipendente da $\dot{q}_h$ derivando rispetto a questa variabile si ha:

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}.$$

Quindi sostituendo in (3.9) si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \vec{a}_s \cdot \frac{\partial P_s}{\partial q_h} + \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_h}. \tag{3.10}$$

Esaminando ora il secondo termine, nel membro di sinistra di (3.8) si ha:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \vec{v}_s \cdot \frac{\partial}{\partial q_h}\frac{dP_s}{dt} = \vec{v}_s \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_h}. \tag{3.11}$$

Nella precedente lo scambio dell'ordine di derivazione risulta legittimo in quanto:

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\frac{dP_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial t} =$$
$$= \left(\dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial P_s}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_h}.$$

Qui si è utilizzato il Teorema di Schwartz sullo scambio dell'ordine di derivazione nel calcolo delle derivate seconde miste:

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial t} = \frac{\partial^2 P_s}{\partial t \partial q_h}.$$

Ma i risultati (3.10) e (3.11) comportano proprio la (3.8).
Dunque le equazioni differenziali del moto di un sistema olonomo a vincoli lisci assumono la forma definitiva:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h, \qquad \forall\, h = 1, 2, ..., n. \tag{3.12}$$

Sono queste le equazioni di Lagrange, che costituiscono un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle n incognite $\dot{q}_h = \dot{q}_h(t), \quad \forall\, h = 1, 2, ..., n$.
Poichè si può dimostrare che il sistema (3.12) può essere portato in forma normale, in virtù del Teorema di Cauchy la soluzione di (3.12) esiste ed è anche unica in corrispondenza ad ogni dato iniziale prefissato:

$$\begin{cases} \dot{q}_h(t_0) = \dot{q}_{ho} \\ \dot{q}_n(t_0) = \dot{q}_{no} \end{cases}, \qquad \forall\, h = 1, 2, ..., n.$$

Tale soluzione fornisce in maniera univoca l'evoluzione temporale del corpo, rappresentando quindi la soluzione del problema del moto per un qualunque sistema meccanico.

Bibliografia

[1] A.Strumia: *Meccanica Razionale Parte Prima*, Edizioni Nautilus, Bologna - 1996

[2] A.Strumia: *Meccanica Razionale Parte Seconda*, Edizioni Nautilus, Bologna - 1996

[3] D.Graffi: *Elementi di Meccanica Razionale*, Patron, Bologna - 1973

[4] L.Battaia: *Appunti ed esercizi di Meccanica Razionale*, $http : //www.batmath.it/fisica/0 - appunti_uni/testo_fis_mat.pdf$

Ringraziamenti

Ringrazio per primi i miei genitori e mio fratello Patrick per il sostegno che mi hanno dato in questi anni, sia nei momenti sereni, che in quelli più difficili, sono stati sempre al mio fianco e mi hanno sempre aiutato nel momento del bisogno.

Non meno importanti sono i ringraziamenti che vorrei offrire ai miei amici Giacomo e Riccardo, che da vicino possono osservare il traguardo da me raggiunto, e anche ai ragazzi del calcio, Matteo, Mattia, Nicholas e tutti gli altri.

Infine un ringraziamento particolare alla professoressa Emanuela Caliceti per la pazienza e disponibilità nei miei confronti durante il periodo di realizzazione della tesi.