

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

L'assioma della scelta e il paradosso di
Banach-Tarski

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERO PLAZZI

Presentata da:
ANNA DI NATALE

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione	1
1 Premesse matematiche	3
1.1 Premesse logiche	3
1.1.1 Modello	3
1.1.2 La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel	4
1.2 La misura di Lebesgue	6
2 L'assioma della scelta	9
2.1 Formulazione dell'assioma della scelta	9
2.2 Gli usi impliciti dell'assioma	11
2.3 La storia	14
2.4 Le reazioni	19
2.5 Varianti dell'assioma della scelta	24
2.6 L'importanza dell'assioma	26
3 Il paradosso di Banach-Tarski e la sua prova	29
3.1 Introduzione al paradosso di Banach-Tarski	29
3.1.1 Geometria elementare	29
3.1.2 Primi paradossi elementari	30
3.2 Il paradosso di Hausdorff	34
3.2.1 L'importanza storica del paradosso di Hausdorff	40
3.3 Il paradosso di Banach-Tarski	42
Bibliografia	45

Elenco delle figure

3.1	Un primo tentativo di trasformare un quadrato in un triangolo isoscele	32
3.2	Il quadrato e il quadrato senza un segmento sono equivalenti per scomposizione finita	33
3.3	Gli assi F e G sulla sfera	35
3.4	La macchina usata per costruire l'insieme di tutte le trasformazioni possibili	36
3.5	L'intera macchina iterativa usata per generare e riordinare tutte le trasformazioni	38

Introduzione

In questo elaborato, dopo aver parlato brevemente della teoria degli insiemi viene trattata la storia dell'assioma della scelta fino ad arrivare ai problemi della teoria della misura legati ai paradossi di Hausdorff e di Banach-Tarski, dei quali viene presentata una dimostrazione.

Ci siamo proposti di indagare il ruolo dell'assioma della scelta all'interno delle varie branche della matematica e di metterne in evidenza il ruolo essenziale per ottenere alcuni risultati fondamentali della nostra disciplina. Abbiamo notato che, essendo un risultato a prima vista intuitivo, l'assioma della scelta veniva usato correntemente nelle dimostrazioni prima ancora che venisse enunciato e venisse analizzata a fondo la questione della sua ambiguità.

Abbiamo confrontato le ragioni degli oppositori e dei sostenitori di tale assioma, evidenziando come i primi teorizzatori dell'assioma e dei paradossi sopracitati li abbiano interpretati come limiti intrinseci della teoria e non come paradossi veri e propri. In seguito, i detrattori dell'assioma caratterizzarono questi risultati come paradossali e sostennero che l'assioma non potesse essere accettato proprio perché portatore di possibili contraddizioni. In questa ottica, abbiamo riportato alcuni assiomi alternativi (si veda il paragrafo 2.4) che permetterebbero di ricavare alcune conseguenze utili dell'assioma della scelta ma non quelle paradossali.

Attualmente l'assioma della scelta viene generalmente unito agli assiomi della teoria standard nonostante alcuni risultati famosi (Gödel, Cohen) abbiano evidenziato l'indcidibilità dell'assioma in ZF.

Capitolo 1

Premesse matematiche

1.1 Premesse logiche

1.1.1 Modello

Diamo alcune nozioni necessarie alla definizione di modello:

Definizione 1.1 (interpretazione). Dato un alfabeto $\Lambda(S)$ con simboli propri in S , una interpretazione è una struttura $\mathcal{I} = (M; I)$ dove:

- M è un insieme non vuoto (il sostegno di (I))
- I è un'applicazione definita su S tale che:
 - $I(P) \subseteq M^n$ (una relazione n-aria) per ogni $P \in S$ predicato n-ario
 - $I(c) \in M$ per ogni $c \in S$ costante
 - $I(f) : M^n \rightarrow M$ per ogni $f \in S$ funzione n-aria

Definizione 1.2 (assegnazione). Un'assegnazione di valori alle variabili (nell'interpretazione \mathcal{I}) è un'applicazione $\sigma : \{v_i; i \in \mathbb{N}\} \rightarrow M$

Definizione 1.3 (assegnazione di valori ai termini). Data una assegnazione σ in una interpretazione \mathcal{I} di $\Lambda(S)$ a ogni suo termine t resta assegnato un

$t^{\sigma, \mathcal{I}} \in M$ tale che:

$$t^{\sigma, \mathcal{I}} = \begin{cases} v_i^\sigma & \text{se } t = v_i, \text{ una variabile} \\ c^\mathcal{I} & \text{se } t = c, \text{ una costante} \\ (f)^\mathcal{I}(s_1^{\sigma, \mathcal{I}}, \dots, s_n^{\sigma, \mathcal{I}}) & \text{se } t = f(s_1, \dots, s_n), f \text{ una funzione n-aria, } s_1, \dots, s_n \text{ termini} \end{cases}$$

Definizione 1.4 (varianti di assegnazioni). Siano σ, τ due assegnazioni, x una variabile. Se le due assegnazioni coincidono tranne (al più) per il valore che assegnano alla variabile x , si dice che sono x -varianti una dell'altra.

Definizione 1.5. Sia ϕ una fbf, \mathcal{I} interpretazione con assegnazione σ . ϕ è soddisfatta da \mathcal{I} e σ (in simboli, $\mathcal{I}, \sigma \models \phi$) quando

- se $\phi = P({}^n t)$, $({}^n t)^{\mathcal{I}, \sigma} \in (P)^\mathcal{I}$
- se $\phi = \neg\psi$, non è vero che $\mathcal{I}, \sigma \models \psi$
- se $\phi = \psi_1 \vee \psi_2$, è vera almeno una tra: $\mathcal{I}, \sigma \models \psi_1$, $\mathcal{I}, \sigma \models \psi_2$
- se $\phi = \forall x\psi$, per tutte le x -varianti τ di σ si ha $\mathcal{I}, \tau \models \psi$

Dove P è un predicato n-ario, ${}^n t$ è una n-pla di termini, $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in L(S)$ e x è una variabile.

Definizione 1.6. ϕ è vera nell'interpretazione \mathcal{I} quando è soddisfatta da ogni assegnazione, cioè $\mathcal{I}, \sigma \models \phi$ per ogni assegnazione σ (in simboli, $\mathcal{I} \models \phi$).

Definizione 1.7. Se ϕ è vera in \mathcal{I} , si dice che \mathcal{I} è un modello di ϕ .

1.1.2 La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel

La teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (abbreviata con ZF) è una teoria predicativa con uguaglianza $=$ e con unico altro simbolo proprio quello di appartenenza \in (predicato binario). Vengono considerati come oggetti solo gli insiemi. Gli assiomi di questa teoria sono:

Assioma 1.1.1 (assioma di estensione, E). *Due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.*

Cioè, $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 = v_1 \Leftrightarrow \forall v_2 (v_2 \in v_0 \Leftrightarrow v_2 \in v_1))$

Assioma 1.1.2 (schema di specificazione, S). *Dati un insieme a e una fbf ϕ la collezione degli $x \in a$ che soddisfano ϕ è un insieme.*

Cioè, $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \in v_1 \Leftrightarrow (v_2 \in v_0 \wedge \phi))$

Assioma 1.1.3 (assioma della coppia, C). *Dati a e b qualunque, esiste sempre un terzo insieme c che li contiene come elementi.*

Cioè, $\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 \in v_2 \wedge v_1 \in v_2)$

Assioma 1.1.4 (assioma dell'unione, U). *Dato un insieme a qualunque, esiste sempre un insieme c che contiene come elementi tutti gli elementi di elementi di a : $(d \in b, b \in a) \Rightarrow d \in c$*

Cioè, $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \forall v_3 ((v_2 \in v_3 \wedge v_3 \in v_0) \Rightarrow v_2 \in v_1)$

Assioma 1.1.5 (assioma della potenza, P). *Dato un insieme a qualunque, esiste sempre un insieme c che contiene come elementi tutti i sottoinsiemi di a : $b \subseteq a \Rightarrow b \in c$*

Cioè, $\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 (v_2 \subseteq v_0 \Rightarrow v_2 \in v_1)$

Dove si definisce il predicato infisso \subseteq come:

Definizione 1.8. $\forall a \forall b (a \subseteq b \Leftrightarrow \forall v_0 (v_0 \in a \Rightarrow v_0 \in b))$

Assioma 1.1.6 (schema di rimpiazzamento, R). *Dati un insieme a e una fbf $\phi = \phi(x, y)$ funzionale in x su a , esiste l'insieme $b = \{z, \exists x \in a \phi(x, z)\}$*

Cioè, $\forall v_0 [(\forall v_1 \in v_0 \forall w_1 \forall w_2 (\phi(v_1, w_1) \wedge \phi(v_1, w_2) \Rightarrow w_1 = w_2)) \Rightarrow (\exists v_2 \forall v_3 (v_3 \in v_2 \Leftrightarrow \exists v_1 (v_1 \in v_0 \wedge \phi(v_1, v_3)))))]$

Dove si definisce:

Definizione 1.9. $\phi = \phi(v, w)$ fbf nelle due variabili esplicitate più eventualmente altre (dette parametri) è un funzionale in v su a se

$$\forall v \in a \forall w_1 \forall w_2 (\phi(v, w_1) \wedge \phi(v, w_2) \Rightarrow w_1 = w_2)$$

Teorema 1.1.1. $\{E, S, C, U, R, P\}$ è consistente.

Assioma 1.1.7 (assioma dell'infinito, I). *Esiste un insieme induttivo c .*

Dove si definisce:

Definizione 1.10. Un insieme c si dice induttivo se:

1. $\emptyset \in c$
2. se $x \in c$ allora anche $Sx \in c$, dove Sx è il successore di x

Si definisce ZF come $\{E, S, C, U, P, R, I\}$ ed è impossibile provarne la consistenza.

Definizione 1.11. Un insieme Γ di enunciati si dice consistente quando non si può derivare da esso una contraddizione, cioè non esiste χ tale che

$$\Gamma \vdash \chi \wedge \neg\chi$$

La costruzione di ZF ci permette di inquadrare l'intera matematica classica entro la teoria degli insiemi, dato che si possono costruire, con metodi giustificati dagli assiomi, le strutture numeriche $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gli insiemi di funzioni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \dots$

1.2 La misura di Lebesgue

Per una trattazione più approfondita, si veda [3] capitolo 5. Noi richiamiamo soltanto i concetti necessari alla comprensione di quanto esposto in seguito.

Definizione 1.12. $I \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice intervallo compatto se

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad a_j < b_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Definiamo la misura di un tale intervallo I come: $m(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$

Definizione 1.13. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definiamo un ricoprimento lebesguiano l'insieme $\{I_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ tale che:

1. \mathcal{A} finito o numerabile
2. $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$

Definizione 1.14 (misura esterna). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora si definisce la misura esterna come:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} m(I_\alpha); \{I_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\} \text{ ricoprimento lebesguiano di } A \right\}$$

Si ha che $\mu^*(A) \in [0, +\infty]$

Questa misura deve avere alcune proprietà:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- Se $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonia)
- Siano $A_k \subseteq \mathbb{R}^n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (additività numerabile)

Definizione 1.15. Diremo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue o L-misurabile se

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Si vedrà che l'additività della misura di insiemi è il cardine sul quale si basano i paradossi di Hausdorff e Banach-Tarski. Inoltre si troverà che, contrariamente a quanto sperato dai creatori della teoria della misura, in base all'assioma della scelta esistono insiemi che non sono misurabili.

Capitolo 2

L'assioma della scelta

L'assioma della scelta, secondo Abraham Fraenkel, è probabilmente il più interessante e, nonostante la sua tarda apparizione, l'assioma più discusso della matematica, secondo solo all'assioma delle parallele di Euclide che fu introdotto più di duecento anni fa. ([4], p.1)

2.1 Formulazione dell'assioma della scelta

Zermelo formulò l'assioma della scelta per la prima volta nel 1904. La versione proposta di seguito è del 1908, riformulata dallo stesso matematico

Assioma 2.1.1 (Assioma della scelta). *Data una famiglia non vuota T di insiemi non vuoti, esiste una funzione f tale che*

$$\forall A \in T, A \rightarrow f(A) \ni A$$

cioè f assegna a ogni membro A di T un elemento $f(A)$ di A .

Definizione 2.1. Una tale funzione f è chiamata una funzione di scelta per T .

Se l'assioma (2.1.1) è limitato alle famiglie T con cardinalità finita, l'assioma è dimostrabile, ma il più debole caso non banale si presenta quando

T è numerabile. In questo caso l'assioma è noto come assioma della scelta numerabile.

In termini logici, possiamo formulare l'assioma della scelta come:

Assioma 2.1.2 (Assioma della scelta, AS). *Data una famiglia $a \neq \emptyset$ di insiemi non vuoti, esiste sempre una $f : a \rightarrow \cup a$ tale che $f(x) \in x \forall x \in a$. Cioè, $\forall v_0[(v_0 \neq \emptyset \wedge \forall v_1 \in v_0(v_1 \neq \emptyset)) \Rightarrow (\exists v_2 \in F(v_0; \cup v_0) \forall v_1 \in v_0(v_2(v_1) \in v_1))]$*

Definizione 2.2. $\{E, S, C, U, P, R, I\} \cup \{AS\} = ZF \cup \{AS\} := ZFC$

Osserviamo che Gödel provò che l'assioma della scelta porta a contraddizioni soltanto se in ZF ne sono già presenti, mentre P. J. Cohen dimostrò che lo stesso assioma non può essere ricavato dagli altri assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel, quindi è indipendente.

Un'altra formulazione dell'assioma della scelta, proposta da Russell e ripresa in [2], è conosciuta come l'assioma moltiplicativo e usa i concetti di insieme vuoto e di prodotto cartesiano:

Assioma 2.1.3. *Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.*

In altre parole, se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi non vuoti indicizzata da un insieme non vuoto I , allora esiste una famiglia $\{x_i\}$, $i \in I$ tale che $x_i \in X_i \forall i \in I$.

Supponiamo ora che C sia una famiglia non vuota di insiemi non vuoti. L'assioma della scelta in questa formulazione dice che il prodotto cartesiano degli insiemi di C ha almeno un elemento. Un elemento di tale prodotto cartesiano è, per definizione, una funzione il cui dominio è C (l'insieme degli indici) e il cui valore per ogni indice appartiene all'insieme a cui è riferito quell'indice. Quindi esiste una funzione f che ha per dominio C e tale che se $A \in C$, allora $f(A) \in C$.

In particolare, nel caso in cui C è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un

insieme non vuoto X l'assioma 2.1.3 asserisce che esiste una funzione f con dominio $\mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ tale che se A è in quel dominio, allora $f(A) \in A$. Quindi è stata ritrovata la formulazione 2.1.1 dell'assioma della scelta. Notiamo che in questo caso la funzione f può essere descritta intuitivamente come una scelta simultanea di un elemento da ciascun insieme.

In realtà, l'assioma della scelta non solo giustifica infinite scelte arbitrarie indipendenti, ma anche dipendenti dalle scelte fatte prima, cioè interviene anche quando si crea a_1, a_2, a_3, \dots in modo tale che la scelta di a_{n+1} dipende da a_n . Infatti, nel 1942 Paul Bernays propose questo principio che discende direttamente dall'assioma della scelta:

Assioma 2.1.4. [*principio delle scelte dipendenti*] Sia S una relazione su un insieme A t.c. $\forall x \in A \exists y \in A$ per cui xSy , allora esiste una successione a_1, a_2, a_3, \dots tale che $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$ e vale che $a_n S a_{n+1}$.

Un'altra formulazione equivalente dell'assioma 2.1.1 è:

Assioma 2.1.5. Se C è una famiglia di insiemi non vuoti disgiunti, allora esiste un insieme A tale che $A \cap B$ è un singolo $\forall B \in C$.

Per ulteriori approfondimenti di quanto trattato in questo paragrafo, si veda [1], paragrafo 1.1, mentre per quanto riguarda la formulazione 2.1.4 si veda [2], sezione 15.

2.2 Gli usi impliciti dell'assioma

Quando formulò l'assioma della scelta, Zermelo lo considerò come la codifica di un'assunzione che molti matematici avevano già fatto implicitamente. Infatti, dopo il 1904 i matematici erano spesso consci che fare infinite scelte arbitrarie chiamasse in gioco l'assioma della scelta, mentre precedentemente un matematico che facesse tali scelte raramente si rendeva conto di aver fatto qualcosa di questionabile. Le uniche eccezioni furono tre matematici italiani che cominciarono a evitare intenzionalmente queste scelte durante il periodo

1890-1902, primo di questi Peano e successivamente R. Bettazzi e Beppo Levi.

Come conseguenza di questa distinzione storica, gli usi dell'assioma si dividono in usi permessi e proibiti. Gli usi permessi in una dimostrazione sono quelli tali per cui la prova può essere modificata per specificare in modo univoco cosa è stato scelto tramite l'assioma, oppure se si è trovata un'altra dimostrazione del teorema che non fa affidamento sull'assioma della scelta. Un uso proibito, invece, avviene quando la proposizione non può essere provata all'interno della teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) o in quella di Zermelo-Fraenkel con urelementi (ZFU), ma può essere dedotta da ZF unito all'assioma della scelta (ZFC).

Di seguito proporremo alcuni risultati ottenuti prima del 1904 che hanno avuto bisogno di un uso implicito dell'assioma della scelta per essere provati. L'importanza di queste proposizioni risiede anche nel fatto che anticipano i temi principali da cui l'assioma prese vita e sui quali si articolò il dibattito riguardante l'accettazione dell'assioma in ambito matematico.

Teorema 2.2.1 (teorema dell'unione numerabile). *L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Per comprendere il ruolo dell'assioma della scelta nella dimostrazione di questo teorema, vediamola brevemente:

Dimostrazione. Supponiamo che $A_i \forall i \in \mathbb{N}$ siano insiemi numerabili. Siano $a_{i,j} \forall j \in \mathbb{N}$ gli elementi di $A_i \forall i \in \mathbb{N}$. Allora gli elementi dell'unione B degli A_i saranno della forma $a_{i,j}$ con $i, j \in \mathbb{N}$. Ora, grazie al procedimento di Cantor usato per dimostrare che \mathbb{Q} è numerabile si dimostra che B è numerabile.

□

A prima vista non sembra che sia stato usato l'assioma della scelta, tuttavia lo abbiamo dovuto usare per numerare tutti gli infiniti membri degli A_i : grazie all'assioma della scelta numerabile possiamo associare a ogni A_i

un'unica biiezione dagli elementi di A_i a \mathbb{N} (ne esisterebbero infinite) in modo tale che gli $a_{i,j}$, o meglio gli $a_i(j)$, siano ben definiti.

Questo uso dell'assioma numerabile è proibito, infatti esiste un modello di ZF nel quale l'assioma numerabile è falso e \mathbb{R} , sebbene non numerabile, è un'unione numerabile di insiemi numerabili.

Questa seconda proposizione, invece, mostra come senza l'assioma della scelta il confine tra finito e infinito non sia ben marcato:

Proposizione 2.2.2. *Ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile.*

Questo teorema fu dimostrato da Russell nel 1902 (e precedentemente da Cantor nel 1895 e Borel nel 1898) usando implicitamente l'assioma della scelta numerabile. La dimostrazione di Russell mostra chiaramente in che modo l'assioma sia coinvolto.

Dimostrazione. Sia A l'insieme infinito, allora esistono dei sottoinsiemi di A $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tali che $\forall n, |A_n| = n$ e $A_n \subset A_{n+1}$. Il sottoinsieme numerabile che dobbiamo trovare è l'unione di tutti gli A_n . \square

L'assioma numerabile entra in gioco quando dobbiamo formare A_{n+1} una volta che abbiamo ottenuto A_n , infatti bisogna selezionare alcuni elementi di $A \setminus A_n$. Notiamo che in questa proposizione il termine 'infinito' significa 'non-finito', quindi non è usato nel senso della definizione di Dedekind: poiché l'insieme è 'infinito' posso sceglierne un elemento, ma l'insieme non può avere solo un elemento proprio perché 'infinito', quindi posso prenderne un secondo elemento e così via. Le scelte di questi elementi non richiedono l'uso dell'assioma della scelta ma si basano soltanto sulla non-finitezza dell'insieme. Successivamente, per creare l'insieme numerabile entra in gioco l'assioma della scelta numerabile (nell'accezione delle scelte dipendenti) poiché bisogna fare un numero numerabile di scelte e non c'è una regola generale per farle. Ora consideriamo una proposizione strettamente correlata al concetto di buon ordine di un insieme:

Proposizione 2.2.3 (tricotomia dei cardinali). *Per ogni numero cardinale m e n , o $m < n$ o $m = n$ o $m > n$*

In particolare, se formulato in termini di insiemi 2.2.3 afferma che ogni coppia di insiemi A e B sono confrontabili.

Adesso introdurremo un'ultima proposizione che, a differenza di quelle appena viste, non può essere immediatamente considerata ovvia:

Proposizione 2.2.4 (principio della partizione). *Se un insieme M è diviso in una famiglia S di insiemi disgiunti non vuoti, allora S è equipollente a un sottoinsieme di M .*

In breve, la dimostrazione di questo principio dipende dalla selezione di un elemento da ogni insieme di S così da ottenere una biiezione da S a un sottoinsieme di M , quindi la prova dipende dall'assioma della scelta.

Si può trovare un modello di ZF in cui il principio della partizione è falso. Inoltre ad oggi non si sa se questo principio sia più debole dell'assioma della scelta o equivalente.

Per una trattazione più approfondita di quanto esposto in questo paragrafo, si veda [4], paragrafo 1.1.

2.3 La storia

La matematica ha avuto bisogno di costruzioni fin dal tempo di Euclide. Durante il diciannovesimo secolo i matematici analizzarono ciò che era permesso fare in tali costruzioni e si chiesero quali procedure valide per un numero finito di passi potessero essere estese a un numero infinito. Tra le procedure considerate c'era anche la scelta di un elemento da un insieme.

Si possono individuare quattro fasi attraverso le quali dall'uso di scelte arbitrarie si è arrivati alla formulazione esplicita dell'assioma fatta da Zermelo.

La prima fase consiste nella scelta di un elemento non specificato da un singolo insieme, metodo il cui uso può essere rintracciato negli "Elementi" di Euclide, se non addirittura in opere precedenti. A partire da tale procedimento, venne ideato l'antico metodo usato per provare una generalizzazione: si considera un oggetto arbitrario ma ben definito, si esegue la prova per

quell'oggetto e si conclude grazie all'arbitrarietà dell'oggetto scelto. Questa prima fase include anche la scelta arbitraria di un elemento per insieme da un numero finito di insiemi. È importante osservare che l'assioma non viene usato se si fa una scelta arbitraria di un elemento da un unico insieme, anche se l'insieme contiene infiniti oggetti. Infatti in questo caso una singola scelta arbitraria può essere eliminata tramite l'uso della generalizzazione universale o altre regole simili di deduzione. Per induzione sui numeri naturali, tale procedura può essere estesa a una qualsiasi famiglia finita di insiemi.

La seconda fase nacque quando si cominciò a fare un numero infinito di scelte seguendo una regola generale. Poiché ciò presuppone l'esistenza di una famiglia infinita di insiemi, l'analisi e la teoria dei numeri del diciannovesimo secolo furono le prime a passare a questo secondo stadio: gli analisti avevano bisogno di scegliere arbitrariamente i termini di una sequenza infinita, mentre i teorici dei numeri dovevano selezionare un rappresentante da infinite classi di equivalenza. Quando alcuni di questi matematici fecero tali scelte infinite non specificando però la regola per la selezione degli elementi, cominciò la terza fase.

Questa leggerezza portò al quarto stadio: nel 1871 Cantor fece una sequenza infinita di scelte arbitrarie per la quale, come si vide in seguito, non era possibile dare nessuna regola di scelta. Per la prima volta veniva chiamato in causa l'assioma della scelta numerabile, seppure in modo implicito. Infatti Cantor non si rese conto dell'impossibilità di specificare una tale regola di scelta e quindi non si accorse di aver dato il via a una nuova fase. Dopo quella data, gli analisti e gli algebristi usarono sempre più frequentemente tali scelte senza notare quale importante assunzione era coinvolta. A questo punto, Zermelo formulò esplicitamente l'assioma della scelta.

Quindi, mentre già Euclide selezionò un elemento per insieme da un numero finito di insiemi, il secondo e il terzo stadio non videro la luce prima del diciannovesimo secolo.

Molto probabilmente il terzo stadio, caratterizzato da infinite scelte fatte senza esplicitare la regola di scelta seguita, nacque in analisi prima che in

teoria dei numeri, infatti era già visibile nella prova di Cauchy del 1821 di questo:

Teorema 2.3.1 (teorema degli zeri). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$*

Dimostrazione. Dato $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, la sequenza finita

$$f(a), f\left(a + \frac{b-a}{m}\right), f\left(a + \frac{2(b-a)}{m}\right), \dots, f(b)$$

deve contenere una coppia di valori consecutivi con segni opposti.

Supponiamo che una tale coppia sia $f(a_1), f(b_1)$ con $a_1 < b_1$ così che $b_1 - a_1 = \frac{(b-a)}{m}$. Ora consideriamo la sequenza di punti che dividono $[a_1, b_1]$ in m parti uguali e, come prima, scegliamo una coppia $f(a_2), f(b_2)$ con segni opposti tale che $a_2 < b_2$ e $b_2 - a_2 = \frac{(b-a)}{m^2}$. In questo modo si selezionano due successioni a_1, a_2, \dots e b_1, b_2, \dots che convergono allo stesso punto p . Poiché f è continua in $[a, b]$ e $\forall n$ $f(a_n)$ e $f(b_n)$ hanno segni opposti, allora $f(p) = 0$. \square

Quindi, per dimostrare il teorema 2.3.1 Cauchy selezionò arbitrariamente i termini di due successioni convergenti in modo tale che ogni termine dipendesse da quelli scelti precedentemente. Mentre Cauchy usò infinite scelte arbitrarie dipendenti per ottenere le coppie $a_n, b_n \forall n$, avrebbe potuto dare una regola che identificasse in modo unico queste coppie. In particolare, avrebbe potuto selezionare per ogni n la coppia più a sinistra i cui valori avevano segni opposti nella sequenza finita. Di conseguenza, la prova di Cauchy rimane nel terzo stadio.

Il quarto stadio, caratterizzato da infinite scelte arbitrarie per le quali non è possibile dare una regola e quindi per le quali è necessario l'assioma della scelta, iniziò nell'ottobre del 1871 quando Eduard Heine scrisse un articolo di analisi reale. Pubblicato l'anno successivo, l'articolo si basava su ricerche di Weierstrass ancora inedite. Il teorema che appare nell'articolo di Heine e che richiede le scelte arbitrarie è attribuito a Cantor:

Teorema 2.3.2. *Una funzione reale f è continua in un punto $\Leftrightarrow f$ è sequenzialmente continua in quel punto.*

Dove si ha:

Definizione 2.3. Una funzione reale f è continua in un punto p se $\forall \epsilon > 0$
 $\exists \eta > 0$ tale che $\forall x, |x - p| < \eta \quad |f(x) - f(p)| < \epsilon$

e

Definizione 2.4. Una funzione reale f è sequenzialmente continua in un punto p se per ogni successione (x_n) convergente a p la successione $f(x_n)$ converge a $f(p)$.

Quindi il teorema 2.3.2 afferma l'equivalenza di questi due tipi di continuità. La dimostrazione di Heine, presa da Cantor, usa implicitamente l'assioma della scelta per mostrare che la continuità sequenziale in p implica la continuità nel punto:

Dimostrazione. (\Leftarrow)

Per assurdo, supponiamo che f non sia continua in p . Allora $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall \eta_0 > 0 \exists \eta > 0, \eta < \eta_0$ tale che $|f(p + \eta) - f(p)| \geq \epsilon$.

Per ogni valore di η_0 , chiamo η' il valore di $\eta, \eta < \eta_0$ per il quale $|f(p + \eta) - f(p)| \geq \epsilon$.

Quindi per $\frac{\eta_0}{2}$ esiste un η tale che $|f(p + \eta) - f(p)| \geq \epsilon$ e poniamo $\eta := \eta''$, per $\eta = \frac{\eta_0}{4}$, poniamo $\eta := \eta'''$ e così via. Poiché la successione η', η'', \dots converge a zero, allora $p + \eta', p + \eta'', \dots$ converge a p , ma $f(p + \eta'), f(p + \eta''), \dots$ non converge a $f(p)$ contrariamente alle ipotesi. \square

Nè Cantor nè Heine sospettarono che per questa dimostrazione era richiesto un nuovo e fondamentale assioma. Comunque, molti anni dopo fu trovato un modello di ZF che conteneva una funzione reale sequenzialmente continua ma non continua, quindi questo teorema non è deducibile da ZF ma da ZFC. L'uso implicito dell'assioma fatto da Cantor nel provare il teorema 2.3.2 non portò direttamente alla formulazione dell'assioma della scelta numerabile, ma

aprì la prima delle molte strade tramite le quali l'uso proibito dell'assunzione entrò nella matematica.

Nel 1877 Dedekind per primo usò le scelte arbitrarie nell'ambito della teoria dei numeri, dimostrando questo:

Teorema 2.3.3. *Se A e B sono moduli, allora esiste un sottoinsieme $B_1 \subset B$ tale che $\forall b \in B \exists! b_1 \in B_1$ tale che $b \equiv b_1 \pmod{A}$*

Dove:

Definizione 2.5. Un modulo A è un insieme di numeri complessi chiuso rispetto all'addizione e alla sottrazione.

Se $a - b \in A$ scriviamo che $a \equiv b \pmod{A}$

Per dimostrare il teorema 2.3.3, Dedekind fece una partizione di B in classi di congruenza mod A e selezionò un elemento da ogni classe. Si vede però che la selezione di questi elementi non può essere fatta tramite una regola. Notiamo che in questa dimostrazione si ha il primo caso in cui viene usata un'assunzione più forte dell'assioma della scelta numerabile. Comunque neanche Dedekind, come prima di lui Cantor e Heine, si rese conto di aver usato implicitamente un nuovo assioma necessario per provare il suo risultato.

Successivamente in analisi reale Baire, Borel e Lebesgue usarono l'assunzione numerabile in modo implicito, sia direttamente sotto forma di scelte arbitrarie sia indirettamente. Nella teoria degli insiemi, Borel e Russell impiegarono le scelte arbitrarie nelle loro dimostrazioni del teorema di Cantor che ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile.

Infine, Whitehead dedusse alcuni teoremi, più tardi riconosciuti come equivalenti all'assioma, assumendo implicitamente che una certa classe moltiplicativa non fosse vuota (l'origine dell'assioma moltiplicativo di Russell).

Molti futuri critici dell'assioma, come Borel e Russell, furono incapaci di notare l'uso di scelte arbitrarie all'interno delle loro ricerche in parte perché erano inconsapevoli (come chiunque altro al tempo) della forza deduttiva di tali scelte arbitrarie, e anche perché il confine tra metodi costruttivi e

non costruttivi continuava ad essere vago. Tuttavia, tre matematici italiani (Peano, Bettazzi e Beppo Levi) dichiararono che molte scelte arbitrarie non erano permesse in matematica, ma doveva essere data una regola secondo la quale fare tali scelte. Più tardi sia Peano che Beppo Levi espressero la loro opposizione all'assioma.

Quindi, come abbiamo visto alla fine del diciannovesimo secolo gli analisti facevano spesso una sequenza infinita di scelte arbitrarie in una maniera che ricordava il metodo usato da Cauchy settanta anni prima. Tali analisti non si resero conto che alcuni loro risultati richiedevano una nuova assunzione: l'assioma della scelta. Tale consapevolezza arrivò soltanto quando Zermelo provò tramite le scelte arbitrarie la proposizione di Cantor che ogni insieme può essere ben ordinato, cosa che molti matematici trovavano estremamente implausibile.

Per un ulteriore approfondimento di quanto trattato in questo paragrafo, si veda [4], paragrafo 1.2.

2.4 Le reazioni

Come già anticipato, nel 1904 Zermelo enunciò l'assioma della scelta e pubblicò la dimostrazione che ogni insieme può essere ben ordinato. Nei primi anni successivi a questa data, il dibattito matematico si orientò più sulla questione del buon ordine piuttosto che sull'accettabilità dell'assioma.

Una discussione approfondita dell'assioma fu compiuta dalla scuola polacca, che nacque a Varsavia subito dopo il 1918 sotto la guida di Sierpiński. In pochi anni, i matematici polacchi scoprirono connessioni tra l'assioma e molte proposizioni in varie branche della matematica, mentre Banach e Tarski estesero il paradosso di Hausdorff arrivando ad enunciare quello che oggi porta il loro nome.

Intanto, fuori dalla Polonia l'assioma stava assumendo un ruolo vitale nell'ambito dell'algebra, della logica e della topologia. In campo algebrico, Artin

e Schreier produssero dei lavori sui campi reali, Stone enunciò il teorema di rappresentazione per le algebre di Boole e venne enunciato il lemma di Zorn. In ambito logico, Hilbert formulò l'assioma della scelta come un postulato logico, che chiamò assioma ϵ . Inoltre, l'assioma giocò un ruolo principale per la formulazione del teorema di Löwenheim-Skolem. In topologia, venne enunciato il teorema di Tychonoff sui compatti, che poi si dimostrò essere equivalente all'assioma della scelta.

Durante lo stesso periodo, si cominciò a investigare la posizione dell'assioma della scelta all'interno del sistema logico di Zermelo. Fraenkel dimostrò che l'assioma della scelta nella sua accezione numerabile è indipendente dagli altri postulati del sistema, Gödel definì gli insiemi costruibili e stabilì la consistenza relativa dell'assioma della scelta, risultato che risolse la controversia sulla generazione di contraddizioni a partire dall'assioma. Inoltre dalle ricerche di Fraenkel, Mostowski e Gödel emerse un nuovo campo della matematica: i modelli della teoria degli insiemi.

Nel 1940 l'importanza dell'assioma e la sua consistenza relativa erano evidenti a tutti coloro che operavano in campo matematico, ma l'assioma rimaneva un'assunzione sgradevole per molti di essi, meglio se evitata dove possibile. Anche i sostenitori dell'assioma, come Tarski, preferivano dedurre i loro teoremi senza dover ricorrere all'assioma quando era possibile. In ogni caso era diventato chiaro che la matematica moderna sarebbe stata molto limitata se non ci fosse stato l'assioma della scelta.

Subito dopo la riunificazione della Polonia dopo la prima guerra mondiale l'università di Varsavia riaprì e Sierpiński fu messo a capo della facoltà di matematica. Dopo aver letto della conferenza del 1911 che Russell aveva tenuto a Parigi sull'assioma della scelta, Sierpiński rivolse la sua ricerca in questa direzione. Egli non solo scoprì che tutte le dimostrazioni conosciute del teorema 2.3.2 sull'equivalenza della continuità e della continuità sequenziale in un punto si basavano sull'assioma, ma evidenziò anche che era equivalente a una nuova forma dell'assioma più debole dell'assioma numerabile:

Assioma 2.4.1. *Sia A_1, A_2, \dots una famiglia di sottoinsiemi di \mathbb{R} disgiunti*

e non vuoti, allora esiste una successione a_1, a_2, \dots di numeri reali tale che termini diversi della successione appartengono a diversi insiemi A_n .

Questo fu uno dei primissimi casi in cui si cercò di stabilire se l'uso dell'assioma in una proposizione fosse di tipo proibito.

Nello stesso tempo, Sierpiński sottolineò che ogni dimostrazione conosciuta di molti teoremi scoperti da Baire e Lebesgue si basavano sull'assioma numerabile. Come esempio, Sierpiński portò questa

Proposizione 2.4.1. *La misura di Lebesgue è numericamente additiva.*

la cui prova può essere rintracciata nel paradosso di Hausdorff, di cui parleremo nel prossimo capitolo.

Sierpiński assunse una posizione di neutralità verso l'assioma della scelta, senza mai darle una connotazione di verità o falsità. Egli, durante la sua ricerca, elencò alcune importanti evidenze che riguardavano l'assioma: innanzitutto, molti casi particolari dell'assioma erano stati dimostrati senza l'utilizzo di tale assioma. Inoltre, i matematici avevano dedotto numerose conseguenze dall'assioma, nessuna delle quali aveva portato a una contraddizione e per finire evidenziò che l'assioma della scelta era essenziale per la dimostrazione di molti teoremi importanti in teoria degli insiemi e in analisi. Per queste ragioni Sierpiński credeva che bisognasse determinare precisamente quali dimostrazioni si basassero sull'assioma anche se, come molti matematici, lo si rifiutava.

Secondo il matematico polacco, molte delle controversie sull'assioma erano nate da interpretazioni diverse del suo significato. Sierpiński pensava che il nome 'assioma della scelta' fosse inappropriato, perché effettivamente non permetteva di scegliere un elemento neanche da un singolo insieme non vuoto. Infatti esistono insiemi non vuoti per i quali non si può determinare univocamente un singolo elemento, per esempio l'insieme di tutti i sottoinsiemi non misurabili di \mathbb{R} . Sierpiński pensava invece che l'assioma dovesse essere interpretato come l'affermazione dell'esistenza astratta di una funzione di scelta, punto di vista condiviso da molti sostenitori dell'assioma della scelta ma non

dai suoi contestatori.

Quindi Sierpiński si tenne sempre su una posizione di neutralità riguardo all'assioma della scelta. Egli mostrò in dettaglio come l'assioma era profondamente legato alla teoria degli insiemi e all'analisi reale, ma ammise che la posizione dei molti matematici che si erano opposti all'assioma poteva essere giustificata. In ogni caso, cercò di trasformare questa opposizione in una ragione per indagare il ruolo dell'assioma.

Tra le due guerre mondiali crebbe la dicotomia degli atteggiamenti dei matematici nei riguardi dell'assioma della scelta. Da una parte, l'assioma fu applicato in molti dei campi della matematica che si stavano espandendo, ma dall'altra parte moltissimi matematici rimanevano scettici riguardo all'effettiva validità dell'assioma. Molti lo criticarono a causa del suo carattere non costruttivo: l'assioma della scelta non indica nessun metodo per effettuare le scelte che però assicura esistere, nè per definire univocamente una funzione di scelta. Perciò, se si dovesse stabilire l'esistenza di un oggetto matematico con una certa proprietà soltanto definendo un tale particolare oggetto, allora l'assioma sarebbe falso. Questo problema sta al confine tra matematica e filosofia: l'assioma assicura l'esistenza di una funzione di scelta, non la sua costruzione. Bisognerebbe capire se è lecito restringere il concetto di esistenza soltanto alle costruzioni, e in questo caso il dibattito sull'accettabilità dell'assioma sarebbe totalmente superfluo.

Alcuni sviluppi tecnici dovuti all'assioma riflettevano la sua ambiguità. Per esempio, nell'ambito della teoria della misura l'assioma fu usato per stabilire l'additività numerabile della misura di Lebesgue e l'esistenza di un insieme che non fosse L -misurabile. A causa di questa ambiguità i contestatori dell'assioma, tra cui Borel, videro confermate le loro opinioni e rafforzarono il loro rifiuto dell'assioma.

Molti, come Lebesgue, Hobson, Borel e Richard rimasero sostanzialmente contrari all'assioma, nonostante i successivi sviluppi della questione. Russell invece, inizialmente contrario all'assioma, fu influenzato da Ramsey, aperto sostenitore di tale assioma, per poi riportarsi in posizioni più neutrali. Anche

Luzin, un matematico russo, si schierò contro l'assioma, trattandolo meramente come un metodo euristico per trovare nuovi teoremi, che poi dovevano essere dimostrati, se possibile, senza l'aiuto dell'assioma della scelta.

Comunque, nonostante il grandissimo numero di oppositori all'assioma della scelta, nel periodo 1918-1940 ci furono molti sviluppi matematici dovuti proprio a tale assioma, solitamente usato sotto le spoglie del teorema del buon ordine.

Nonostante le opposizioni, prima del risultato di P. J. Cohen del 1962 nessuno propose una valida alternativa all'assioma della scelta. In realtà, Church nel 1927 e Specker nel 1951 avevano considerato qualche opzione, ma nessuno era andato oltre queste investigazioni preliminari. Soltanto un decennio dopo due matematici polacchi, Jan Mycielski e Hugo Steinhaus introdussero un'alternativa: l'assioma di determinatezza (AD). Questo assioma nacque dalla teoria dei giochi infiniti e afferma che se S è un insieme di sequenze numerabili di zeri e uno, e se i giocatori scelgono alternativamente dei termini dalle sequenze (zero o uno) formando una nuova sequenza infinita, allora il gioco è determinato, cioè esiste una strategia che assicura sempre che la sequenza stia o non stia in S .

Nel 1964 Mycielski congetturò che AD non permettesse alcune conseguenze spiacevoli dell'assioma della scelta, come il paradosso di Banach-Tarski. Come poi mostrò, AD implica che ogni insieme di numeri reali è L-misurabile. Inoltre da AD si possono ricavare alcune conseguenze piacevoli dell'assioma della scelta, per esempio il teorema 2.3.2, l'equivalenza di continuità e sequenziale continuità per ogni funzione reale. Si dimostrò anche che l'assioma della scelta numerabile ristretto ai sottoinsiemi di \mathbb{R} segue da AD. Comunque, come Mycielski evidenziò, la consistenza di AD rispetto a ZF è problematica. Recenti ricerche hanno evidenziato che usando l'assioma della scelta si può mostrare che alcune relazioni che seguono da AD sono false. Come conseguenza, è nato un interesse per una forma ristretta di AD, che non sembra contraddire l'assioma della scelta: la determinatezza proiettiva (PD). Nel 1975 D. A. Martin stabilì che la determinatezza boreliana (la restrizione di

AD agli insiemi di Borel dello spazio di Baire dei numeri irrazionali) può essere dedotta dall'assioma della scelta in ZF. L'assunzione analoga ma più forte alla determinatezza proiettiva (la restrizione di AD agli insiemi proiettivi) sembra essere consistente con l'assioma della scelta. Infine, alcuni modelli di ZF+AD sono stati usati per ottenere un modello di ZF, dell'assioma della scelta e di varie proposizioni.

Ulteriori approfondimenti sulle reazioni dei matematici all'assioma della scelta possono essere ricercate in [4] nei paragrafi 4.1, 4.11, 4.12 e 5.2.

2.5 Varianti dell'assioma della scelta

Come abbiamo visto, molti matematici fecero uso dell'assioma della scelta senza però esserne consapevoli. Una causa di questo fenomeno è da ricercarsi nel gran numero di proposizioni, anche ovvie a prima vista, che poi si è scoperto essere equivalenti all'assioma. Queste proposizioni solitamente riguardano diversi ambiti della matematica, cosa che sottolinea la vastità della portata dell'assioma della scelta. Ne elenchiamo qualcuna di seguito, per darne un'idea generale.

Per quanto riguarda i principi di massimalità abbiamo:

Proposizione 2.5.1 (principio di massimalità di Hausdorff). *Ogni insieme parzialmente ordinato M ha un sottoinsieme totalmente ordinato A che è massimale totalmente ordinato.*

Proposizione 2.5.2. *Ogni insieme parzialmente ordinato M ha un sottoinsieme massimale totalmente ordinato A che include un sottoinsieme dato di M .*

Proposizione 2.5.3 (Lemma di Zorn). *Sia A una famiglia di insiemi tale che l'unione di ogni catena di A sia contenuta in A , allora A contiene un insieme massimale.*

Un'altra formulazione di questo lemma è:

Proposizione 2.5.4. *Se in un insieme parzialmente ordinato non vuoto (X, \leq) ogni catena ha un maggiorante allora X ha almeno un elemento massimale.*

In ambito algebrico invece citiamo:

Proposizione 2.5.5. *Se V è uno spazio vettoriale reale allora per ogni sottospazio S esiste un sottospazio S' tale che $S \cap S' = \{0\}$ e $S \cup S'$ genera V .*

Proposizione 2.5.6. *Se un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale V genera V allora contiene una base.*

In logica si ha un risultato estremamente importante:

Teorema 2.5.7 (Teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski). *Se una teoria (un insieme di enunciati) con uguaglianza ha un modello normale infinito, allora ne ha uno di qualunque cardinalità infinita.*

In ambito topologico, abbiamo già citato il:

Teorema 2.5.8 (teorema di Tychonoff sulla compattezza). *Il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi topologici compatti è compatto.*

Che ha un corollario:

Proposizione 2.5.9 (Teorema di Tychonoff debole). *Il prodotto di un qualsiasi numero di copie di un qualsiasi spazio topologico compatto è compatto.*

Per quanto riguarda le funzioni, si ha:

Proposizione 2.5.10. *Se A e B sono due insiemi non numerabili, allora esiste una funzione $f : A \rightarrow B$ che è iniettiva o suriettiva.*

Per informazioni aggiuntive sui risultati appena citati si veda [4], tabella 9.

Nel prossimo paragrafo vedremo in dettaglio alcune delle proposizioni riportate precedentemente e i risultati fondamentali che ne conseguono.

2.6 L'importanza dell'assioma

L'assioma della scelta interviene in maniera quasi inavvertibile, ma necessaria, in molti enunciati apparentemente elementari, come:

Proposizione 2.6.1. *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per un sottoinsieme A di \mathbb{R} se e solo se esiste una successione di elementi di A tutti diversi da x_0 convergenti a x_0 .*

Proposizione 2.6.2. *Ogni spazio vettoriale non banale ha una base*

Inoltre, riprendendo il lemma di Zorn (proposizione 2.5.4) enunciato precedentemente, vediamo come l'assioma della scelta interviene direttamente nella sua prova.

L'idea della dimostrazione è piuttosto semplice: poiché X è non vuoto esisterà almeno un elemento $x_0 \in X$. Se x_0 è massimale abbiamo concluso, altrimenti esisterà un $x_1 \in X$ tale che $x_1 > x_0$. Se x_1 è massimale possiamo fermarci qui, altrimenti continuiamo nello stesso modo finché troveremo un elemento massimale.

Quindi vengono effettuate delle scelte autorizzate soltanto dall'assioma della scelta.

Per una trattazione della prova più approfondita, si veda [2], sezione 16.

Grazie alla proposizione 2.5.4 si possono dimostrare alcuni teoremi fondamentali per l'analisi, come:

Teorema 2.6.3 (teorema di prolungamento di Hahn-Banach). *Sia E spazio di Banach, $F \subseteq E$ sottospazio, $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ lineare limitata.*

Allora $\exists f : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineare limitata che estende g , cioè $f|_F = g$ e tale che $\|f\| = \|g\|$

(In forma differente, viene citato in [4], paragrafo 4.5).

In conclusione, a causa dei risultati fondamentali dipendenti dall'assioma della scelta di cui abbiamo mostrato alcuni esempi, lo stesso assioma viene

correntemente assunto nella teoria standard, nonostante comporti anche molti risultati assai controintuitivi, tra cui spicca il paradosso di Banach-Tarski (1924), di cui tratteremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Il paradosso di Banach-Tarski e la sua prova

3.1 Introduzione al paradosso di Banach-Tarski

Teoricamente è possibile tagliare una sfera in un numero finito di pezzi che possono essere riassemblati in modo da formare due sfere, ognuna con le stesse dimensioni e lo stesso volume di quella di partenza. Più in generale, da un qualsiasi solido tridimensionale si possono produrre due nuovi oggetti esattamente uguali a quello di partenza.

La prova di questo paradosso fu ideata da Stefan Banach e Alfred Tarski nel 1924 e si basa sull'assioma della scelta. Il nostro intento è quello di esporre tale prova, ma prima abbiamo bisogno di alcuni concetti e lemmi preliminari.

3.1.1 Geometria elementare

Definizione 3.1 (congruenza). Due sottoinsiemi del piano si dicono congruenti se uno di essi può essere fatto coincidere precisamente con l'altro usando soltanto traslazioni e rotazioni del piano.

Osservazione 1. L'essenza del concetto di congruenza consiste nel fatto che la distanza tra i punti del primo sottoinsieme rimane immutata dopo che è

stato mosso per farlo coincidere con il secondo sottoinsieme.

Osservazione 2. La congruenza non deve essere confusa con la corrispondenza biunivoca. Per esempio, l'insieme dei numeri pari $\{2, 4, 6, \dots\}$ non è congruente all'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, \dots\}$ perché non c'è nessun modo di sovrapporre uno dei due insiemi sull'altro mentre si può facilmente costruire una corrispondenza biunivoca tra i due.

Comunque, niente impedisce a un insieme di essere congruente a un suo sottoinsieme: per esempio i due insiemi infiniti $\{1, 2, 3, \dots\}$ e $\{5, 6, 7, \dots\}$ sono congruenti. Infatti si possono spostare di quattro unità verso destra tutti gli elementi del primo insieme e così produrre una copia conforme al secondo insieme.

Definizione 3.2 (equivalenza per scomposizione finita). Un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n X è equivalente per scomposizione finita ad un altro sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^n Y se ripartendo X in un numero finito di parti disgiunte e riassemblandole si ottiene Y .

Notiamo che riassemblare un insieme dato significa che l'insieme nella sua posizione iniziale è congruente all'insieme nella posizione finale.

Osservazione 3. Questo tipo di equivalenza è transitiva, cioè se un insieme X è equivalente per scomposizione finita a Y e Y è equivalente per scomposizione finita a Z , allora anche X è equivalente per scomposizione finita a Z .

3.1.2 Primi paradossi elementari

Per avvicinarci gradualmente alla dimostrazione del paradosso di Banach-Taski considereremo alcuni paradossi basilari e le loro prove.

Proposizione 3.1.1. *L'insieme degli interi positivi \mathbb{N} è equivalente per scomposizione finita all'insieme degli interi positivi senza un elemento.*

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, supponiamo che l'elemento rimosso sia il numero 5.

Per prima cosa, si creano due sottoinsiemi di \mathbb{N} : l'insieme B di tutti i multipli di 5 ($\{5, 10, 15, \dots\}$) e il suo complementare A ($\{1, 2, 3, 4, 6, 7, \dots\}$). Per definizione, questi due insiemi sono disgiunti e la loro unione è \mathbb{N} .

Ora introdurremo la tecnica chiave per questa dimostrazione e tutte quelle che verranno, inclusa quella del paradosso di Banach-Tarski. Chiameremo questa tecnica *shifting toward infinity* ('spostamento verso l'infinito'). Spostiamo B verso l'infinito di 5 unità, cioè produciamo un nuovo insieme $B' = \{10, 15, 20, \dots\}$ che è congruente a B per definizione. Adesso abbiamo un'unione di insiemi disgiunti $A \cup B$ che è uguale all'insieme degli interi positivi e un'altra unione disgiunta di insiemi $A \cup B'$ che è uguale all'insieme degli interi positivi senza l'elemento 5. Ma, come abbiamo detto, B e B' sono ovviamente congruenti come lo è A con se stesso. Quindi possiamo concludere che $A \cup B$ e $A \cup B'$ sono congruenti per scomposizione finita, cioè che l'insieme degli interi e l'insieme degli interi senza il numero 5 sono equivalenti per scomposizione finita. \square

Ora vediamo un'altra dimostrazione un po' più complicata ma sempre basata sul metodo dello *shifting toward infinity*.

Proposizione 3.1.2. *Un cerchio e lo stesso cerchio senza un punto sono equivalenti per scomposizione finita.*

Dimostrazione. Sia C un cerchio di raggio unitario e sia 0 un punto sulla circonferenza di C (0 è il punto che rimuoveremo). Dal punto 0 ci muoviamo in senso antiorario lungo la circonferenza di esattamente un'unità (la lunghezza del raggio). Chiamiamo 1 il punto in cui ci fermiamo. Continuiamo con questo processo, chiamando 2 il punto a esattamente un'unità dal punto 1 , 3 il punto a un'unità dal punto 2 e così via. Sia B l'insieme di tutti questi punti ($\{0, 1, 2, 3, \dots\}$).

Proprio come nella dimostrazione precedente, A sarà l'insieme dei punti del cerchio che non sono in B . Ora creiamo l'insieme B' partendo da B e spostando i suoi punti di 1 verso l'infinito. Allora B' sarà l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Ovviamente B e B' sono congruenti.

Poiché il cerchio C è uguale a $A \cup B$ e il cerchio senza il punto 0 è uguale a $A \cup B'$, concludiamo che il cerchio e il cerchio senza un punto sono equivalenti per scomposizione finita. \square

Proposizione 3.1.3. *Un quadrato di lato unitario può essere scomposto e riassembleato in un triangolo isoscele di altezza unitaria, cioè un quadrato di lato unitario e un triangolo isoscele di lato unitario sono equivalenti per scomposizione finita.*

Dimostrazione. Per dimostrare questa proposizione potremmo tagliare il quadrato lungo una diagonale, ottenendo quindi due triangoli rettangoli che, assemblati in modo tale che due dei loro cateti coincidano e la loro ipotenusa si intersechi in un punto, costituiscano un triangolo isoscele. Purtroppo però questo metodo non funziona.

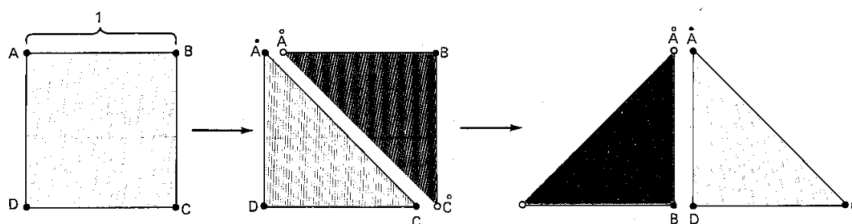


Figura 3.1: Un primo tentativo di trasformare un quadrato in un triangolo isoscele

Ciò perché quando tagliamo il quadrato non otteniamo due triangoli rettangoli completi. Infatti la diagonale del quadrato può essere usata per creare soltanto una delle due ipotenuse, non entrambe. Inoltre, la definizione di equivalenza per scomposizione finita richiede che le parti costituenti siano disgiunte. La figura 3.1¹ mostra un modo di tagliare il quadrato che soddisfa questa condizione.

Sfortunatamente, ci sono due candidati per l'altezza dei triangoli isosceli e nessun punto lungo uno dei loro lati. Allora proviamo a togliere una delle altezze in più e a 'incollarla' lungo il lato del triangolo che è senza punti. Ci

¹Tutte le figure presenti in questo capitolo sono state prese da [1]

accorgiamo subito che dopo questa operazione rimane un buco di lunghezza $\sqrt{2} - 1$. Useremo la tecnica dello *shifting toward infinity* per togliere dal quadrato di partenza un segmento della lunghezza richiesta e proveremo che questo non ha conseguenze dannose per la nostra prova. Successivamente, finiremo la costruzione riempiendo il ‘buco’ sul lato del triangolo con il segmento preso dal quadrato.

Per togliere dal quadrato il segmento richiesto mostreremo che il quadrato

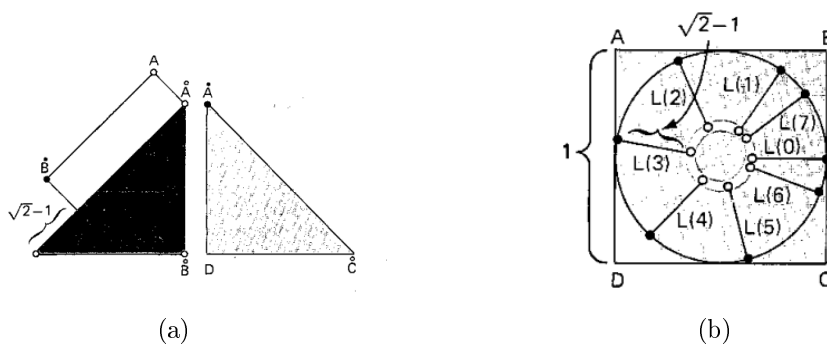


Figura 3.2: Il quadrato e il quadrato senza un segmento sono equivalenti per scomposizione finita

e il quadrato senza il segmento sono equivalenti per scomposizione finita. Abbiamo bisogno di un segmento di lunghezza $\sqrt{2} - 1$ con il punto finale soltanto su una delle due estremità (figura 3.2(a)). La tecnica di rimozione di questo segmento è simile a quella usata precedentemente per dimostrare che una circonferenza e una circonferenza senza un punto sono equivalenti per scomposizione finita, ma ora invece di rimuovere un punto da un cerchio rimuoveremo un segmento da un disco.

Cominciamo inscrivendo il cerchio C della dimostrazione precedente nel quadrato. Ora attacchiamo a ognuno dei punti $0, 1, 2, \dots$ della costruzione vista prima un segmento di lunghezza $\sqrt{2} - 1$ (figura 3.2(b)). Chiamiamo questi segmenti $L(0), L(1), \dots$. Da ora in poi la prova è identica a quella precedente eccetto per il fatto che al posto della circonferenza che delimitava C ora consideriamo C stesso e al posto del punto 0 consideriamo il segmento $L(0)$. Ripetendo la stessa prova, possiamo mostrare che il disco è equivalente per

scomposizione finita al disco senza un segmento. Inoltre, poiché il nostro ‘furto’ del segmento $L(0)$ non coinvolge nessuna parte del quadrato al di fuori del disco, possiamo affermare che il quadrato è equivalente per scomposizione finita al quadrato senza il segmento. Per concludere, inseriamo $L(0)$ nel ‘buco’ lungo il lato del triangolo e otteniamo il risultato desiderato: il quadrato chiuso è equivalente per scomposizione finita al triangolo isoscele chiuso. \square

Finora abbiamo usato lo *shift toward infinity* su insiemi la cui dimensione era trascurabile rispetto a quella degli insiemi che li contenevano: un punto preso da una circonferenza e un segmento tolto da un disco. Ora vedremo come si può applicare questa tecnica a insiemi molto più grandi, come l'intero volume di una sfera solida.

3.2 Il paradosso di Hausdorff

Il cuore della prova del paradosso di Banach-Tarski si basa su questo risultato di Hausdorff del 1914.

Teorema 3.2.1. *È possibile dividere la superficie (di spessore 0) di una sfera, dopo aver rimosso un insieme numerabile di punti, in tre insiemi disgiunti di punti A , B , C in modo tale che A , B , C e $B \cup C$ siano tutti congruenti uno con l'altro.*

Osservazione 4. La congruenza reciproca di questi tre insiemi significa che A è congruente all'unione disgiunta di due copie di se stesso. Infatti A è congruente separatamente a B e C , cioè B e C sono due copie di A , ed è anche congruente a $B \cup C$, cioè l'unione disgiunta di due copie di A . Questo tipo di decomposizione si dice paradossale.

Grazie a questo teorema possiamo concludere che una sfera può essere scomposta e riassembleta in due sfere identiche alla prima. Infatti il nostro scopo è di fare la stessa cosa con una sfera solida, non solo con la sua superficie. Per dimostrarlo, intuitivamente dovremmo applicare la tecnica di

Hausdorff a sfere cave la cui superficie diventa progressivamente più spessa, fino ad arrivare ad applicare questa costruzione alla superficie di una sfera il cui interno è composto soltanto dal punto centrale. Dopodichè dovremmo mostrare che la sfera solida e la sfera solida senza il suo punto centrale sono equivalenti per scomposizione finita.

Vediamo ora come si dimostra il paradosso di Hausdorff.

Dimostrazione. Data una sfera S , si scelgano due assi F e G di tale sfera in modo tale che l'angolo formato da questi due assi al centro della sfera sia di 45° . Chiameremo f una rotazione in senso orario di 180° della sfera attorno all'asse F e g una rotazione in senso orario di 120° della sfera attorno all'asse G (figura 3.3). Chiamiamo f e g trasformazioni della sfera. Useremo combinazioni di tali trasformazioni per descrivere diverse sequenze di rotazioni della sfera. Per esempio, la trasformazione composta g^2f è la rotazione in senso orario della sfera di 180° attorno all'asse F seguita da due rotazioni in senso orario di 120° ciascuna attorno a G .

Notiamo che g^2 non rappresenta soltanto una rotazione in senso orario di 240° ma anche una rotazione di 120° nella direzione opposta, quindi per evitare un'eccessiva proliferazione di esponenti scriveremo \bar{g} al posto di g^2 . Da ora in avanti chiameremo f , g , \bar{g} trasformazioni elementari.

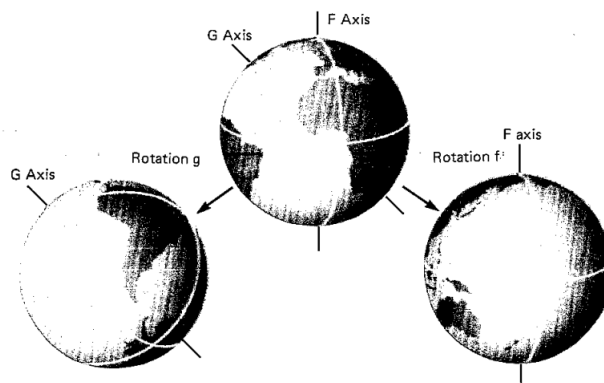


Figura 3.3: Gli assi F e G sulla sfera

Inoltre notiamo che, data una sfera in una certa posizione, se applichiamo f due volte di seguito la sfera tornerà nella posizione iniziale. Quindi $f^2 = 1$, dove 1 è la trasformazione identica. In modo simile, poiché g rappresenta una rotazione di 120° , $g^3 = 1$.

Queste osservazioni aiutano a ridurre trasformazioni complesse in una forma più semplice. Per esempio, $g^5 f^3 = (g^3)(g^2)(f^2)(f) = 1 \cdot (g^2) \cdot 1 \cdot f = g^2 f$. D'altra parte, non si può semplificare la trasformazione composta $gf g f g f \bar{g}$ perché la posizione degli assi F e G è stata scelta in modo che $fg \neq gf$, cioè le trasformazioni elementari f e g non commutano.

Noi siamo interessati soltanto alle trasformazioni semplificate il più possibile

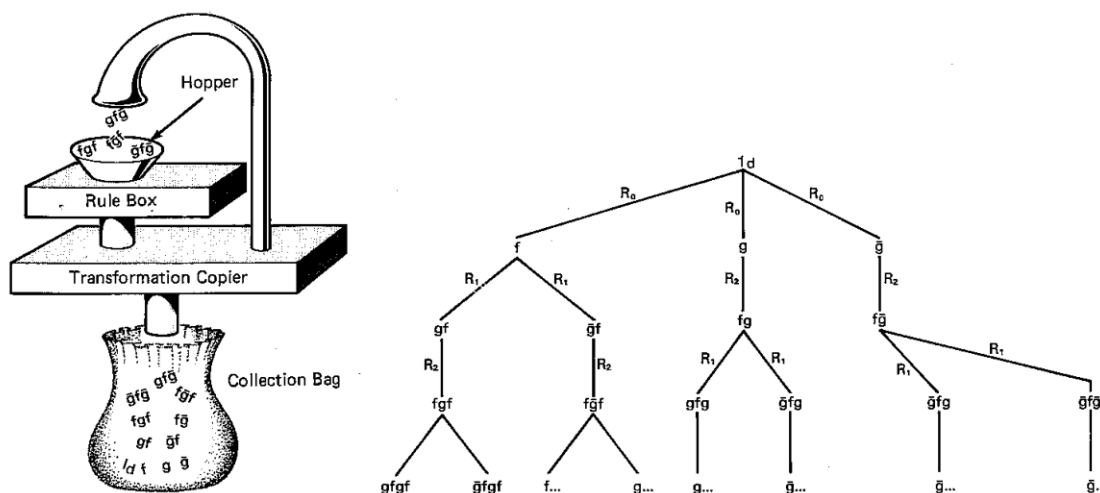


Figura 3.4: La macchina usata per costruire l'insieme di tutte le trasformazioni possibili

e useremo una macchina iterativa (figura 3.4) per generare l'insieme Q di tutte queste trasformazioni. Descriviamo la macchina:

Per prima cosa, per far partire la macchina bisogna inserire la trasformazione identica 1. La macchina esegue queste tre istruzioni:

1. se la trasformazione identica 1 è l'unica trasformazione inserita, restituisce le tre trasformazioni elementari f, g, \bar{g} ;

2. se viene inserita una trasformazione la cui componente più a sinistra è f , vengono create due nuove trasformazioni, la prima aggiungendo la rotazione addizionale g e la seconda aggiungendo \bar{g} ;
3. se viene inserita una trasformazione la cui componente più a sinistra è g o \bar{g} , viene creata una nuova trasformazione aggiungendo la rotazione addizionale f .

Per esempio, se viene inserita la trasformazione $f\bar{g}f$, verranno prodotte le trasformazioni $gf\bar{g}f$ e $\bar{g}f\bar{g}f$, se invece viene inserita la trasformazione gfg verrà creata la trasformazione $fgf\bar{g}$.

Le trasformazioni prodotte vengono poi copiate e una copia viene conservata mentre l'altra viene nuovamente inserita nella macchina. Così si crea l'insieme Q delle trasformazioni. Osserviamo che l'angolo tra gli assi F e G è stato scelto in modo da assicurare che ogni elemento di Q rappresenti un'unica posizione della sfera.

La macchina appena descritta è la base della più potente macchina iterativa di cui abbiamo bisogno per dimostrare il teorema di Banach-Tarski. Questa macchina iterativa non solo deve essere in grado di produrre tutte le trasformazioni di Q , ma deve anche essere capace di ordinarle in tre sottoinsiemi disgiunti I , J e K tali che $I \cup J \cup K = Q$ e $fI = J \cup K$; $gI = J$; $\bar{g}I = K$.

Osserviamo che $fI = J \cup K$ significa che applicando f (una rotazione in senso orario di 180°) a tutte le trasformazioni di I si ottiene esattamente l'insieme di trasformazioni $J \cup K$ e diremo che I è congruente a $J \cup K$. In modo simile, $gI = J$ significa che I è congruente a J e $\bar{g}I = K$ vuol dire che I è congruente a K , eccetera.

La figura 3.5 mostra l'intera macchina iterativa che crea i tre insiemi di trasformazioni I , J e K . La maggior differenza rispetto alla macchina base descritta prima è la presenza di tre componenti che ordinano le trasformazioni (i *transformation sorter*). Il loro ruolo è quello di decidere in quale insieme I , J o K dovranno essere mandate le varie trasformazioni. Questa scelta si basa soltanto sulla trasformazione elementare più a sinistra delle trasformazioni che entrano nell'ordinatore. La macchina opera in modo sequenziale:

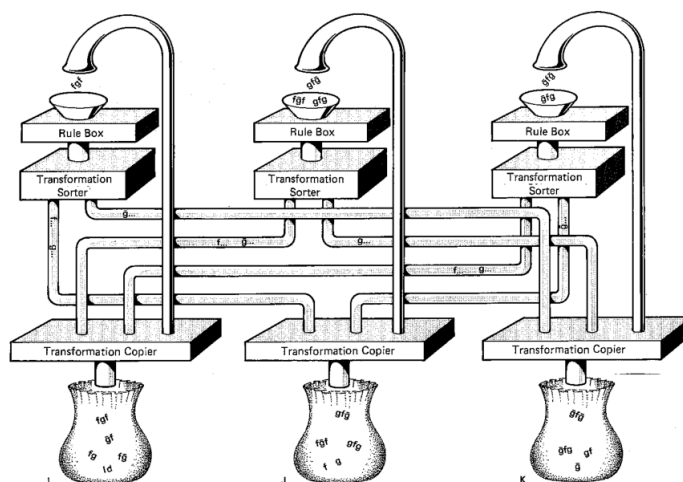


Figura 3.5: L'intera macchina iterativa usata per generare e riordinare tutte le trasformazioni

prima processa tutte le trasformazioni che vengono da I , poi quelle che provengono da J e infine quelle che provengono da K prima di tornare ad I . Per questo motivo, possiamo parlare di cicli della macchina. Quindi, grazie a questa macchina otteniamo le relazioni richieste tra i vari sottoinsiemi di Q , cioè $fI = J \cup K$; $gI = J$; $\bar{g}I = K$.

Stiamo quindi arrivando alla nostra conclusione: il paradosso di Hausdorff afferma che possiamo dividere la superficie sferica (senza un suo sottoinsieme numerabile) in tre sottoinsiemi disgiunti di punti A , B e C tali che A , B , C e $B \cup C$ siano congruenti a due a due, e grazie alla macchina iterativa siamo stati in grado di produrre tre sottoinsiemi disgiunti di trasformazioni della sfera I , J e K in modo tale che I , J , K e $J \cup K$ siano congruenti a due a due.

Torniamo ora alla sfera. Si vede che dopo averla ruotata in qualsiasi direzione immaginabile attorno a un centro fissato si può trovare esattamente un asse che avrebbe permesso di passare dalla posizione iniziale della sfera a quella finale tramite soltanto una rotazione. Faremo questo per tutte le trasformazioni di Q : per ogni trasformazione, determiniamo l'asse di rotazione che ci avrebbe permesso di passare dalla posizione iniziale direttamente alla

posizione finale. Questo asse taglia la superficie della sfera in due punti che chiameremo poli. Ora raccogliamo in un insieme D entrambi i poli associati a ogni trasformazione di Q . L'insieme D rappresenta i punti della sfera che sono fissi per almeno una trasformazione di Q . D è un insieme numerabile, quindi è infinitesimamente piccolo rispetto alla sfera. Tutti gli altri punti della sfera si muovono per ogni trasformazione di Q . Chiameremo D^* questo insieme di punti.

Ora dobbiamo definire gli altri tre insiemi A , B e C la cui unione disgiunta dovrebbe darci D^* . Procediamo in questo modo: a ogni punto $p \in D^*$ applichiamo tutte le trasformazioni di Q , raccogliendo i punti risultanti in un insieme $Q(p) = \{p, f(p), g(p), \bar{g}(p), fg(p), \dots\}$. È facile vedere che per qualsiasi coppia di punti distinti p e p' gli insiemi $Q(p)$ e $Q(p')$ sono identici oppure disgiunti. Ora, da ogni insieme creato in questo modo si prende un punto e si genera l'insieme M di tutti questi punti (la possibilità di creare l'insieme M si basa sull'accettazione dell'assioma della scelta). Si dimostra che l'insieme D^* è uguale all'insieme ottenuto applicando tutte le trasformazioni di I ai punti dell'insieme M .

Adesso dobbiamo dividere D^* in tre sottoinsiemi disgiunti A , B e C tali che A , B , C e $B \cup C$ siano congruenti a due a due. Chiameremo A l'insieme dei punti risultanti dall'applicazione di tutte le trasformazioni di I ai punti dell'insieme M , B sarà l'insieme dei punti risultanti dall'applicazione delle trasformazioni di J su M e C quello dei punti risultanti dall'applicazione delle trasformazioni di K su M . Questa costruzione fornisce la scomposizione desiderata di D^* in tre sottoinsiemi disgiunti A , B , C . Poiché $fI = J \cup K$ allora $f(A) = B \cup C$. Dal momento che f è semplicemente una rotazione di 180° , possiamo concludere che A e $B \cup C$ sono congruenti. Con un ragionamento simile, $gI = J$ implica che A e C sono congruenti. Inoltre, la proprietà transitiva della congruenza ci permette di concludere che A , B , C e $B \cup C$ sono congruenti a due a due.

Ora possiamo usare la tecnica dello *shifting toward infinity*: invece di spostare i punti verso l'infinito di un certo numero di posizioni, consideriamo la

trasformazione f che equivale a ruotare l'insieme di 180° attorno al primo asse. Per far coincidere l'insieme A con $B \cup C$ dobbiamo soltanto applicare f . In modo simile, una rotazione di 120° attorno al secondo asse, cioè la trasformazione g , porta l'insieme A a coincidere direttamente con B , mentre due delle suddette rotazioni fanno coincidere A con C . Questo ci fa concludere la dimostrazione del paradosso di Hausdorff. \square

Vedere [1] per una disamina più approfondita della dimostrazione.

3.2.1 L'importanza storica del paradosso di Hausdorff

Storicamente, il paradosso di Hausdorff fu il primo esempio delle contraddizioni a cui poteva portare l'assioma della scelta. Infatti, prima del 1914 molti matematici avevano criticato tale assioma a causa del suo carattere non costruttivo e molti sospettavano anche che potesse portare a una qualche contraddizione, ma non ne era ancora stata trovata nessuna.

In realtà, la formulazione di Hausdorff del suo paradosso è leggermente diversa da quella riportata sopra:

Proposizione 3.2.2 (paradosso di Hausdorff, 1914). *Metà sfera è congruente a un terzo della stessa sfera.*

Hausdorff stesso non considerò la sua proposizione come paradossale né come un attacco diretto alla validità dell'assioma della scelta, ma come la soluzione al problema della misura di Lebesgue. Questo problema, formulato per la prima volta nel 1902, consiste nella ricerca di una funzione m , detta misura, tale che per ogni sottoinsieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $m(A)$ sia un numero reale non negativo che soddisfi quattro condizioni:

1. Il cubo n -dimensionale unitario ha misura 1;
2. Insiemi congruenti hanno la stessa misura;
3. $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ se A e B sono disgiunti e limitati;

$$4. m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \text{ (additività numerabile).}$$

Per risolvere questo problema, Lebesgue introdusse gli insiemi misurabili che gli permisero di definire l'integrale di Lebesgue. Nello stesso tempo però si accorse che non tutti i sottoinsiemi limitati di \mathbb{R}^n sono misurabili e quindi questa definizione non poteva aiutarlo a risolvere il problema della misura. Questo problema infatti è profondamente legato all'assioma della scelta numerabile, che è necessario per assicurare l'additività numerabile della misura di Lebesgue.

Hausdorff dedusse dall'assioma della scelta che il problema della misura non ha soluzione. Infatti egli sottolineò che l'esistenza di una soluzione per \mathbb{R}^{n+1} ne fornirebbe una anche per \mathbb{R}^n . Ma, grazie a un procedimento che risentiva fortemente dell'influsso degli esempi di insiemi non L-misurabili portati da Vitali, Lebesgue e Van Vleck, dimostrò che non esiste una soluzione al problema della misura in \mathbb{R} dal momento che non ce n'è una per un cerchio con raggio unitario. Secondo Hausdorff, il punto essenziale di questa dimostrazione consisteva nel fatto che venissero usati soltanto le condizioni 1-4 e non la definizione particolare di misura di Lebesgue. Quindi Lebesgue si chiese se fosse possibile risolvere il problema della misura togliendo la quarta condizione. Questa domanda rimase aperta per spazi euclidei uno e due dimensionali, ma Hausdorff trovò che non ci fosse una soluzione per spazi di dimensione 3 o superiore. In particolare, dimostrò che non c'è soluzione per la sfera grazie alla proposizione 3.2.2, infatti se una tale soluzione esistesse si avrebbe che metà sfera avrebbe la stessa misura di un terzo della sfera.

Il primo a schierarsi contro il paradosso di Hausdorff (in realtà, il primo che lo definì un paradosso) fu Borel, che era certo che il colpevole di questa conclusione paradossale fosse l'assioma della scelta. Borel quindi si oppose all'assioma della scelta perché il suo carattere illogico e impreciso non poteva aiutare i matematici, dal momento che generava una contraddizione. Ma Hausdorff, che aveva scoperto il paradosso, non era d'accordo, come non erano d'accordo Stefan Banach e Alfred Tarski, che analizzarono il paradosso in profondità una decina di anni dopo.

In realtà, alla base del paradosso ci sono l'assioma della scelta e il problema della misura di Lebesgue, e quindi si possono rifiutare entrambi. In ogni caso, la battaglia sull'assioma della scelta non fu decisa grazie al paradosso di Hausdorff, ma fu soltanto intensificata.

Per una trattazione più approfondita della storia del paradosso di Hausdorff si veda [4] paragrafi 1.7 e 3.7.

3.3 Il paradosso di Banach-Tarski

Teorema 3.3.1 (Paradosso di Banach-Tarski, 1924). *È possibile suddividere una sfera piena in \mathbb{R}^3 in un numero finito di pezzi e riassemblarli in modo da ottenere due sfere con le stesse dimensioni e lo stesso volume di quella di partenza.*

Possiamo utilizzare la dimostrazione del teorema 3.2.1 per dimostrare rapidamente il paradosso di Banach-Tarski.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è questa: sapendo, grazie al paradosso di Hausdorff, che la superficie della sfera si può dividere in quattro sottoinsiemi disgiunti A , B , C e D tali che A , B , C e $B \cup C$ siano tutti mutuamente congruenti, possiamo usare l'insieme $B \cup C$ come modello (*cutting template*) per 'tagliare' le coppie di insiemi che verranno riassemblati per formare due sfere separate. In pratica, si 'stende' questo modello su A e lo si taglia in due insiemi A_1 e A_2 che sono rispettivamente congruenti a B e C . Dal momento che B e C sono entrambi congruenti ad A , la scomposizione di A in A_1 e A_2 è paradossale. Nello stesso modo scomponiamo B in B_1 e B_2 e C in C_1 e C_2 . In altre parole, possiamo scomporre S in sottoinsiemi

disgiunti in questo modo:

$$\begin{aligned} S &= A \cup B \cup C \cup D \\ &= (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2) \cup (D_1 \cup D_2) \cup D \\ &= (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D) \cup (A_2 \cup B_2 \cup C_2) \end{aligned}$$

Con $(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D)$ creiamo una sfera S_1 che è equivalente per scomposizione finita alla sfera di partenza S (poiché A è congruente a A_1 , B è congruente a B_1 , eccetera). Rimane soltanto da mostrare che possiamo costruire una seconda sfera da $(A_2 \cup B_2 \cup C_2)$. Innanzitutto notiamo che $A_2 \cup B_2 \cup C_2$ può quasi creare una seconda sfera S_2 identica ad S , ma manca l'insieme D la cui dimensione però, come abbiamo già visto, è trascurabile rispetto a quella di S . La dimostrazione che una sfera e la sfera senza l'insieme D sono equivalenti per scomposizione finita è essenzialmente la stessa della prova che una circonferenza e la stessa circonferenza senza un punto sono equivalenti per scomposizione finita, e ciò conclude la dimostrazione del paradosso di Banach-Tarski. \square

Per approfondire la dimostrazione di questo paradosso si veda [1].

Il paradosso di Banach-Tarski ha rinfocolato le polemiche sull'assioma della scelta finché Gödel, come già detto in 2.1, non provò nel 1938 che l'assioma è consistente con ZF. Più di 20 anni dopo, nel 1963, P. J. Cohen provò che l'assioma della scelta è indipendente dagli altri assiomi. In conclusione, oggi sappiamo che l'assioma della scelta è indecidibile in ZF, cioè non si può dire se sia consistente o refutabile.

Bibliografia

- [1] Robert M. French, 'The Banach-Tarski Theorem', in *the mathematical intelligencer*, vol 10, n 4, 1988, pp. 21-28
- [2] Paul R. Halmos, *Naive set theory*, D. Van Nostrand Company, 1960
- [3] Ermanno Lanconelli, *Lezioni di analisi matematica 2*, Pitagora, 1997
- [4] Gregory H. Moore, *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence*, Springer-Verlag, 1982