Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

PROPRIETÀ TOPOLOGICHE E CONTROESEMPI

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Massimo Ferri

Presentata da:
Valentina Falcioni

Sessione II
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione

Avendo a che fare con uno spazio topologico X, si dicono proprietà topologiche le proprietà che dipendono unicamente dalla topologia assegnata su X, e che quindi possono essere formulate esclusivamente in termini di aperti di X, senza far riferimento ad altre caratteristiche dello spazio stesso. Tali proprietà sono inoltre invarianti per omeomorfismo, in quanto un omeomorfismo fra due spazi topologici induce un'applicazione biettiva fra la totalità di aperti dei due spazi in questione.
Alcune di queste proprietà sono abbastanza intuitive ma, per comprenderle a fondo, affidarsi all'intuizione non basta: è necessario "metterle alla prova" in situazioni più complesse per capire quali sono i loro limiti, studiando anche quando e perché esse *non* si verificano.
Ad esempio, pensare intuitivamente ad uno spazio connesso o connesso per archi, porta a visualizzare un oggetto composto da un unico "pezzo" (formalmente detto componente connessa o componente connessa per archi, in base alla proprietà che stiamo considerando), mentre il vero significato di queste proprietà è più profondo di tale intuizione. Infatti, vedremo che il grafico del seno del topologo è connesso, in quanto si tratta di una curva continua, ma l'infinità delle oscillazioni della curva alla destra dell'origine fa venir meno la connessione per archi. Vedremo inoltre che proprietà topologiche globali non necessariamente implicano le rispettive proprietà locali, contrariamente a quanto si potrebbe pensare. È il caso del cerchio di Varsavia, che globalmente è connesso e connesso per archi, ma localmente non gode di nessuna delle due proprietà, a causa delle infinite oscillazioni che si hanno alla destra

dello zero.
Esamineremo anche il concetto di retratto per deformazione e il caso in cui un retratto per deformazione non può essere forte, cioè non può restare fisso durante tutta la deformazione dello spazio di partenza. Ciò accade ad un particolare punto dello spazio a pettine (detto anche pettine del topologo).

La tesi si sviluppa in quattro capitoli: si apre con un breve excursus storico sulla storia della topologia nel primo capitolo, per poi passare alle definizioni e proprietà principali riguardanti gli spazi topologici e le applicazioni fra di essi (capitoli 2 e 3) e infine considerare, nel quarto capitolo, gli esempi citati poco sopra.

Capitolo 1

Cenni storici

La geometria antica può essere considerata l'antenata della topologia, in quanto, ad ogni modo, in topologia si ha a che fare con oggetti geometrici. La differenza affascinante che intercorre fra le due discipline sta nel fatto che la topologia si estrinseca dalla misura considerata, andando a studiare gli oggetti in maniera differente, con meno vincoli e rigidità rispetto allo studio euclideo. Infatti in topologia vengono considerati come equivalenti (più precisamente, come vedremo, omeomorfi) oggetti che possono essere portati l'uno nell'altro attraverso deformazioni senza strappi, sovrapposizioni e incollamenti. Ad esempio, un cubo e una sfera sono omeomorfi poiché è effettuabile una tale deformazione. Non si può dire lo stesso di una sfera e di un toro, in quanto il buco del toro non potrà essere creato con alcuna deformazione consentita a partire dalla sfera.
Al fine di studiare gli oggetti geometrici in questa maniera, a partire dalla seconda metà dell'Ottocento, numerosi matematici (fra cui Riemann, Weierstrass, Dedekind, Cantor, Hilbert, Poincaré, Fréchet, Hausdorff, Alexandrov, Urysohn) hanno sottoposto ad un'indagine approfondita la nozione di continuità, riuscendo ad estendere tale nozione dal caso delle funzioni a valori reali, da una o più variabili reali, a situazioni più generali, di rilevante interesse in numerosi campi dell'analisi matematica. La teoria che ne è scaturita, denominata inizialmente analysis situs, è stata chiamata successivamente to-

pologia. Fra le prime pubblicazioni di studi sistematici della topologia si ha infatti Analysis Situs di Henri Poincaré, pubblicata nel 1895. In realtà, già da metà secolo le acque attorno agli studi topologici iniziavano a smuoversi. Infatti ci sono giunte delle corrispondenze, pubblicate da André Weil nel suo articolo The birth of Topology [5], fra Enrico Betti e Placido Tardy, dove il primo dei due matematici italiani spiega al secondo gli argomenti dell'interessante scambio intellettuale avvenuto nel 1863 con Riemann in ambito topologico, in particolare riguardo alla proprietà di connessione degli spazi topologici.
Al giorno d'oggi la topologia, oltre ad essere fondamentale nell'analisi matematica, l'algebra e la geometria, trova applicazione, ad esempio, anche nella cosmologia e nello studio della relatività generale.

Capitolo 2

Gli spazi topologici e alcune loro proprietà

2.1 Cos'è uno spazio topologico

Diamo innanzitutto una serie di definizioni che ci serviranno in seguito. Si veda [4].

Definizione 2.1. Avendo un insieme X, assegnare ad X una *topologia* significa assegnare una famiglia τ di sottinsiemi di X tale che:
- X e $\emptyset \in \tau$;
- Ogni unione di elementi di $\tau \in \tau$;
- Ogni intersezione finita di elementi di $\tau \in \tau$.
Gli elementi di τ si dicono gli *insiemi aperti* della topologia assegnata su X. La coppia (X, τ), dove τ è una topologia sull'insieme X, viene detta *spazio topologico*. Spesso, per indicare uno spazio topologico, si usa, con lieve abuso di linguaggio e quando non vi sia ambiguità, il solo *supporto* X.

Definizione 2.2. Fissato $n \in \mathbb{N}$, possiamo definire la *topologia euclidea* su $\mathbb{R}^n$ come la topologia i cui aperti sono tutti e soli gli insiemi dati dalla unione (finita o meno) e intersezione finita di insiemi del tipo $\{x \in \mathbb{R}^n; d(x, x_0) < r\}$, dove d indica la distanza (in quanto $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico), x_0 è un elemento qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ e r è un numero reale positivo qualsiasi.

Definizione 2.3. Dato uno spazio topologico X ed un punto $p \in X$, si dice *intorno* di p in X ogni $U \subset X$ che contiene un aperto contenente il punto p.

Definizione 2.4. Uno spazio topologico X si dice *spazio di Hausdorff* se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esistono un intorno U di x e un intorno V di y disgiunti.

Definizione 2.5. Dato uno spazio topologico X, una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottinsiemi di X è detta *ricoprimento* di X se $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.
Un ricoprimento di X $\{U_i\}_{i\in I}$ si dice *finito* se l'insieme I degli indici è finito. Un ricoprimento di X $\{U_i\}_{i\in I}$ si dice *aperto* (rispettivamente chiuso) se ciascun U_i è aperto (rispettivamente chiuso) in X.

Definizione 2.6. Avendo un ricoprimento di X $\{U_i\}_{i\in I}$, si dice *sottoricoprimento estratto dal ricoprimento* $\{U_i\}_{i\in I}$ ogni sottofamiglia $\{U_i\}_{i\in J}$ (con $J \subset I$), che sia ancora un ricoprimento di X.

Definizione 2.7. Dato uno spazio topologico X ed un suo punto x, una famiglia B di intorni di x si dice *sistema fondamentale di intorni di x* (oppure *base di intorni del punto x*) se in corrispondenza di qualsiasi intorno U del punto x $\exists V \in B$ tale che $V \subset U$.

2.2 Compattezza

Definizione 2.8. Uno spazio topologico X si dice *quasi-compatto* se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Definizione 2.9. Uno spazio topologico X si dice *compatto* se è quasi-compatto e di Hausdorff.

Osservazione 1. *Preso $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea è uno spazio di Hausdorff, e quindi le definizioni di quasi-compattezza e compattezza si equivalgono per tale spazio topologico.*

Definizione 2.10. Uno spazio topologico X si dice *localmente compatto* se X è di Hausdorff e ogni $x \in X$ possiede un intorno compatto.

Osservazione 2. *La nozione di compattezza locale rientra nella vasta gamma delle proprietà locali degli spazi topologici. In generale, data una proprietà* P *di natura topologica, si dice che uno spazio topologico* X *gode localmente della proprietà* P *se ogni punto di* X *possiede un sistema fondamentale di intorni, ciascuno dei quali gode della proprietà* P.

Teorema 2.2.1. *(di Heine-Borel)*
Un sottinsieme S *dello spazio euclideo* $\mathbb{R}^n$ *è compatto se e solo se è limitato e chiuso.*

2.3 Connessione

Definizione 2.11. Uno spazio topologico X si dice *connesso* se non esiste alcuna coppia di sottinsiemi A, B di X aperti, non vuoti e disgiunti fra loro tali che $A \cup B = X$

Definizione 2.12. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso* se $\forall x_0 \in X$, x_0 possiede un sistema fondamentale di intorni connessi.

Definizione 2.13. Dato uno spazio topologico X e due punti $x_0, x_1 \in X$, si dice *arco* che connette x_0 con x_1 ogni applicazione continua f (se esiste) dell'intervallo euclideo reale [0,1] in X, tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$.

Definizione 2.14. Uno spazio topologico X si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x_0, x_1 \in X$ esiste un arco che li connette.

Definizione 2.15. Uno spazio topologico X si dice *localmente connesso per archi* se $\forall x_0 \in X$, x_0 possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

Lemma 2.3.1. *Sia* S *un sottinsieme connesso di uno spazio topologico* X. *Se* A, B *sono due aperti disgiunti di* X *tali che* $S \subset A \cup B$, *allora* $S \subset A$ *oppure* $S \subset B$.

Dimostrazione. Siano $A' := S \cap A$, $B' := S \cap B$, che sono aperti di S (visto come sottospazio di X). Si ha quindi che $S = A' \cup B'$. Essendo A, B disgiunti per ipotesi, anche A', B' lo saranno. Poiché S è un insieme connesso, necessariamente uno fra i due insiemi A', B' dev'essere vuoto. Avremo quindi:
$A' = \emptyset \Rightarrow S = B' \Rightarrow S \subset B$.
$B' = \emptyset \Rightarrow S = A' \Rightarrow S \subset A$. □

Proposizione 2.3.2. *La connessione per archi implica la connessione.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Per assurdo, supponiamo che X non sia connesso, e quindi che esistano due sottinsiemi di X aperti e non vuoti A, B tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$.
Siano $x_0 \in A, x_1 \in B$. Essendo X connesso per archi, $\exists f$ arco che connette i punti x_0, x_1. Sia Y il supporto dell'arco f, cioè $Y = f[(0,1)]$. Y è connesso in quanto immagine continua del connesso [0,1], grazie alla Proposizione 3.1.2 del prossimo capitolo. Siamo nelle ipotesi del lemma precedente, in quanto Y è un sottinsieme connesso di X contenuto in $A \cup B$ con A, B aperti disgiunti di X. Ciò implica che $Y \subset A$ oppure $Y \subset B$, ma Y contiene sia punti di A, in particolare x_0, sia punti di B, in particolare x_1. Siamo quindi giunti ad un assurdo. □

La proposizione precedente può essere applicata localmente:

Proposizione 2.3.3. *La locale connessione per archi implica la locale connessione.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico X localmente connesso per archi. Per definizione, $\forall x \in X$, x possiede un sistema fondamentale di intorni B connessi per archi. Per la proposizione precedente, ciascun elemento di B, essendo connesso per archi, è anche connesso. Perciò otteniamo che $\forall x \in X$, x possiede un sistema fondamentale di intorni connessi, e quindi X è localmente connesso. □

Proposizione 2.3.4. *Dato uno spazio topologico X, sia D un suo sottinsieme connesso e tale che D è denso in X. $\Rightarrow X$ è connesso.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che X non sia connesso. Allora esistono A, B sottinsiemi aperti di X non vuoti tali che $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$. Siano $A_0 = A \cap D$ e $B_0 = B \cap D$. A_0, B_0 sono sottinsiemi aperti di D (visto come sottospazio di X). Essendo D denso in X, ogni aperto non vuoto di X ha intersezione non vuota con D, e quindi A_0, B_0 sono non vuoti. Inoltre, $A \cup B = X \Rightarrow (A \cap D) \cup (B \cap D) = X \cap D = D$, cioè $A_0 \cup B_0 = D$ e, analogamente, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \cap D) \cap (B \cap D) = \emptyset \cap D = \emptyset$, cioè $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Ciò implica che D non è connesso, e quindi giungiamo ad un assurdo. $\square$

Capitolo 3

Applicazioni fra spazi topologici

3.1 Applicazioni continue e omeomorfismi

In questa sezione, si faccia riferimento a [4].

Definizione 3.1. Dati due spazi topologici X, Y, un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *continua nel punto* $x_0 \in X$ se per ogni intorno V di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$ (o, equivalentemente, se per ogni intorno V di $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0).
Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *continua* se essa è continua in ogni punto di X.

Definizione 3.2. Dati due spazi topologici X, Y, un'applicazione $f : X \to Y$ si dice *omeomorfismo* se f è biettiva e se f, f^{-1} sono applicazioni continue.
Se esiste un omeomorfismo f fra due spazi topologici X e Y, essi si dicono *omeomorfi* fra loro.

Proposizione 3.1.1. *Siano X, Y spazi di Hausdorff e $f : X \to Y$ un'applicazione continua. X compatto $\Rightarrow f(X)$ compatto.*

Proposizione 3.1.2. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici. X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso.*

3.2 Omotopie e retratti

In questa sezione, si faccia riferimento a [1, 2].

Definizione 3.3. Siano X, Y spazi topologici e f, $g : X \to Y$ mappe. Si dice che f è *omotopa* a g, e si scrive $f \simeq g$, se $\exists F$ applicazione continua $F : X \times I \to Y$ (dove I è l'intervallo $[0,1] \subset \mathbb{R}$) tale che $F|_{\mathrm{X}\times\{0\}} = f$ e $F|_{\mathrm{X}\times\{1\}} = g$. Tale applicazione F si dice *omotopia* da f a g.

Notazione 1. Dato un insieme X, indichiamo con 1_X l'applicazione identità, cioè $1_X : X \to X$ tale che $x \mapsto x \; \forall x \in X$.

Definizione 3.4. Siano X, Y spazi topologici tali che esistono le mappe $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ per cui $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$. Si dice che f e g sono *inverse omotopiche* l'una rispetto all'altra e che X e Y sono *omotopicamente equivalenti* oppure aventi *lo stesso tipo di omotopia*. In tal caso, si scrive $X \simeq Y$.

Definizione 3.5. Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$ e f, $g : X \to Y$ mappe tali che $f|_A = g|_A$. Si dice *omotopia relativa ad* A una mappa $F : X \times I \to Y$ tale che $\forall t \in I \; F|_{\mathrm{A}\times\{\mathrm{t}\}} = f|_A = g|_A$. In tal caso, si scrive $f \simeq g$ *rel* A.

Definizione 3.6. Siano X uno spazio topologico e A un suo sottospazio.
A si dice *retratto* di X se esiste una mappa, detta *retrazione*, $r : X \to A$ tale che $r|_A = 1_A$.
A si dice *retratto per deformazione* di X se A è un retratto di X avente come retrazione r tale che $i \circ r \simeq 1_X$, dove i indica la mappa di inclusione di A in X.

Osservazione 3. *Siano X uno spazio topologico e A un suo sottospazio. A è un retratto per deformazione di $X \Rightarrow A \simeq X$.*

Dimostrazione. Per definizione di retratto per deformazione, $i \circ r \simeq 1_X$ e, banalmente, si ha che $r \circ i = 1_A$ dato che i ed r mandano gli elementi di A in sé, per cui vale anche che $r \circ i \simeq 1_A$. Quindi $i : A \mapsto X$ e $r : X \mapsto A$ sono mappe che verificano la definizione di spazi topologici omotopicamente equivalenti per A, X, e perciò vale che $A \simeq X$. $\square$

Definizione 3.7. Siano X uno spazio topologico e A un suo retratto per deformazione, per cui r è la retrazione. A si dice *retratto forte per deformazione* di X se $i \circ r \simeq 1_X$ *rel* A.

Definizione 3.8. Uno spazio topologico si dice *contraibile* se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.
Quindi, per l'Osservazione 3, se un punto è retratto per deformazione dello spazio topologico considerato, allora tale spazio è contraibile.

Capitolo 4

Controesempi

Per questo capitolo, si veda [3].

4.1 Seno del topologo e cerchio di Varsavia

Consideriamo ora due esempi significativi per comprendere meglio il concetto di connessione e non solo: il seno del topologo e il cerchio di Varsavia.

Definizione 4.1. Il grafico del *seno del topologo* è rappresentato dall'insieme $\{(x; \sin(1/x)); 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$ che d'ora in poi, per comodità, chiameremo S^*.

Definizione 4.2. Il *cerchio di Varsavia* è definito come l'unione del grafico del seno del topologo con il segmento verticale $\{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ e un arco che collega i punti (0,0) e (1,0).

Proposizione 4.1.1. *Il grafico del seno del topologo è connesso.*

Dimostrazione. Sia $S = \{(x; \sin(1/x)); 0 < x \leq 1\}$. Avremo quindi che il grafico del seno del topologo è, per definizione, $S^* = S \cup \{(0,0)\}$.
Notiamo che S è un sottinsieme denso di S^*, poiché il punto (0,0) è punto di accumulazione di S, e così ogni elemento di S^* o sta in S o è un suo punto

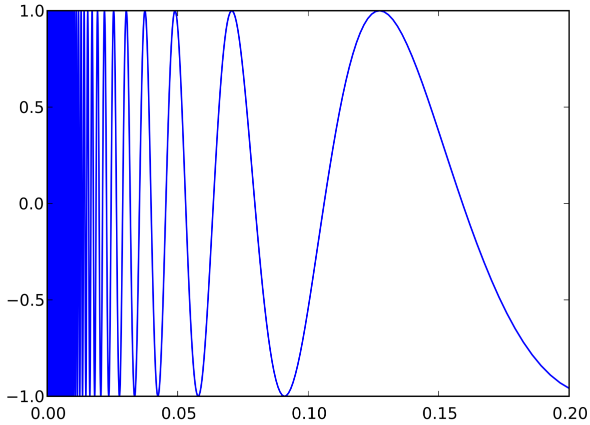

Figura 4.1: Seno del topologo

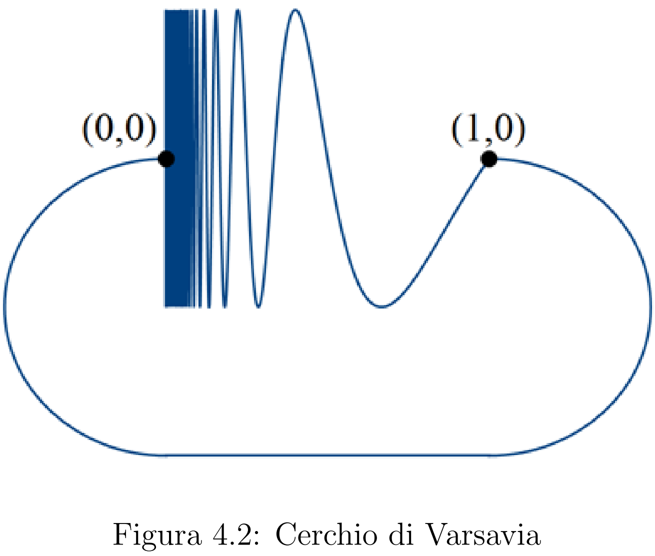

Figura 4.2: Cerchio di Varsavia

di accumulazione. Inoltre S è connesso per la Proposizione 2.3.2, in quanto connesso per archi. Infatti, presi due punti qualsiasi di S, esiste sempre un arco finito appartenente ad S che li colleghi.
In questo modo, possiamo applicare la Proposizione 2.3.4, da cui otteniamo la connessione di S^*. $\square$

Proposizione 4.1.2. *Il grafico del seno del topologo non è connesso per archi.*

Dimostrazione. Affinché S^* sia connesso per archi, presi due punti qualsiasi $P, Q \in S^*$, deve esistere una funzione continua f da [0,1] a S^* tale che $f(0) = P$ e $f(1) = Q$ (che rappresenta un arco finito che giace su S^* e collega i due punti). Se considero $P = (0, 0)$ e Q un qualsiasi altro punto di S^*, ad esempio $Q = (1/\pi, 0)$, tale funzione f non esiste, in quanto la porzione di curva di estremi P, Q ha lunghezza infinita, quindi non esiste un arco finito in S^* che colleghi i due punti. $\square$

Osservazione 4. *La connessione non implica la connessione per archi.*

Dimostrazione. Basta considerare il grafico del seno del topologo, che abbiamo visto essere connesso ma non connesso per archi. $\square$

Proposizione 4.1.3. *Il grafico del seno del topologo non è localmente compatto.*

Dimostrazione. Basta provare che il punto (0,0) non ha intorni compatti in S^*.
Sia $N = \Delta \cap S^*$, dove Δ è il disco di centro (0,0) e raggio $\epsilon > 0$, quindi ogni intorno di (0,0) in S^* contiene un intorno del tipo di N.
Essendo $N \subset \mathbb{R}^2$ con la topologia indotta da quella euclidea, vale che N è compatto $\Leftrightarrow$ N è limitato e chiuso, per il teorema di Heine-Borel.
Considero la retta parallela all'asse x passante per il punto $(0,\epsilon/2)$. Tale retta interseca N in una sequenza di punti che ha $(0, \epsilon/2)$ come punto di accumulazione, che però non appartiene ad S^* e quindi nemmeno ad N. Ciò implica che N non è un insieme chiuso, e quindi non è compatto.
Otteniamo quindi che il punto (0,0) non ha intorni compatti in S^*. $\square$

Osservazione 5. *L'immagine continua di un insieme localmente compatto non è necessariamente un insieme localmente compatto.*

Dimostrazione. Considero la funzione $f : \{-1\} \cup (0, 1] \to S^*$ tale che $f(-1) = (0, 0)$ e $f(x) = (x, \sin(1/x))$ per $x \in (0, 1]$.
Avremo quindi che f è una funzione continua su un insieme localmente compatto, la cui immagine è S^*. Ma nell'osservazione precedente abbiamo mostrato che S^* non è localmente compatto, da cui la tesi. □

Proposizione 4.1.4. *Il cerchio di Varsavia è connesso per archi.*

Dimostrazione. Ciò si ha proprio per costruzione del cerchio di Varsavia stesso. Infatti, grazie all'arco continuo che viene aggiunto agli estremi del grafico del seno del topologo, qualsiasi coppia di punti appartenenti al cerchio di Varsavia potrà essere collegata da un arco continuo finito. In particolare, considerando il punto (0,0) e un punto del tipo $(x, \sin(1/x))$ con $0 < x < 1$, dovremo considerare l'arco che "passa sotto" al grafico del seno del topologo. □

Proposizione 4.1.5. *Il cerchio di Varsavia è connesso.*

Dimostrazione. Si ottine ciò direttamente dalla proposizione precedente, poiché in generale la connessione per archi implica la connessione. □

Proposizione 4.1.6. *Il cerchio di Varsavia non è localmente connesso.*

Dimostrazione. Considero un intorno arbitrariamente piccolo di (0,0), in particolare una palla Δ di centro (0,0) e raggio ϵ, sul cerchio di Varsavia che per comodità chiamo C. Se C fosse localmente connesso, dovrebbe valere che $C \cap \Delta$ contiene un intorno di (0,0) connesso. Suppongo per assurdo che ciò sia vero, e chiamo V la palla di centro (0,0) e raggio ϵ', con $\epsilon' < \epsilon$, tale che $C \cap V$ sia connesso.
Si può notare che l'insieme $C \cap V$ è costituito dall'unione di infiniti archetti aperti disgiunti. L'unione infinita di aperti è ancora un aperto, quindi posso considerare $C \cap V$ come unione di due aperti disgiunti. Ciò ci fa giungere ad un assurdo, poiché viene contraddetta la definizione di connessione per l'insieme $C \cap V$, da cui la tesi. □

Proposizione 4.1.7. *Il cerchio di Varsavia non è localmente connesso per archi.*

Dimostrazione. Si ottiene ciò direttamente dalla proposizione precedente. Infatti sappiamo che la locale connessione per archi implica la locale connessione: dalla contronominale di questa implicazione otteniamo che uno spazio non localmente connesso non è nemmeno localmente connesso per archi. □

Dalle quattro proposizioni precedenti, considerando l'esempio del cerchio di Varsavia, otteniamo:

Osservazione 6. *La connessione per archi non implica la locale connessione per archi.*

Osservazione 7. *La connessione non implica la locale connessione.*

4.2 Spazio a pettine

Per comprendere meglio i concetti di contraibilità, retratto per deformazione e retratto forte per deformazione, considero l'esempio dello spazio a pettine.

Definizione 4.3. Lo *spazio a pettine* è uno spazio topologico sottinsieme di $\mathbb{R}^2$, con la topologia indotta da quella euclidea, dato da:

$$([0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{1/n\} \times [0,1])$$

Osservazione 8. *Lo spazio a pettine è contraibile e il punto (0,0) è un suo retratto forte per deformazione.*

Dimostrazione. Chiamo C lo spazio a pettine. Considero l'applicazione $r : C \to \{(0,0)\}$ t.c. $r(x,y) = (0,0)$. Tale applicazione è una retrazione, in quanto è continua e $r(0,0) = (0,0)$, e quindi il punto $(0,0)$ è un retratto di C.

Chiamo Id la mappa identità di C in sé, i la mappa di inclusione di {(0,0)} in

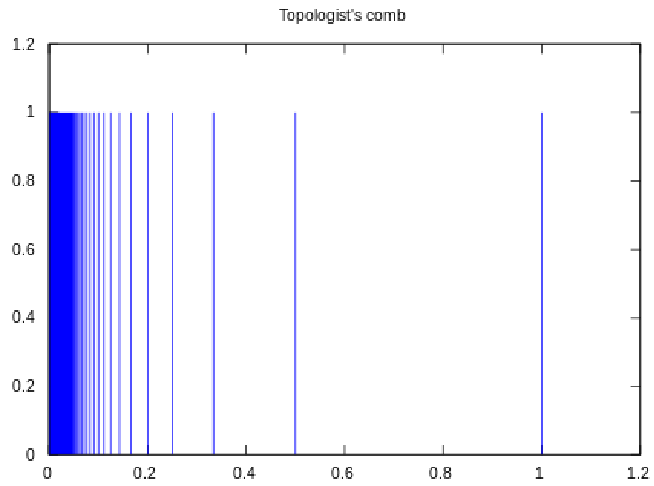

Figura 4.3: Spazio a pettine

C, I l'intervallo [0,1]. Affinché il punto (0,0) sia un retratto per deformazione di C, deve valere che $i \circ r \simeq Id$. Devo mostrare che esiste un'omotopia tra queste due applicazioni continue.
Sia $F : C \times I \to C$ t.c.

$$F(x, y, t) = \begin{cases} (x, (1-2t)y), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2; \\ ((2-2t)x, 0), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

F è un'applicazione continua tale che $F|_{C\times\{0\}} = Id$ e $F|_{C\times\{1\}} = i \circ r$, e quindi è verificata la definizione di omotopia.
Inoltre F è anche un'omotopia relativa al punto (0,0), poiché $i \circ r(0,0) = Id(0,0) = (0,0) = F|_{(0,0)\times\{t\}}$ $\forall t \in I$.
Quindi il punto (0,0) è un retratto forte per deformazione di C. □

Osservazione 9. *Il punto (0,1) è un retratto per deformazione dello spazio a pettine, ma NON è un suo retratto forte per deformazione.*

Dimostrazione. Chiamo P il punto (1,0). Innanzitutto, mostriamo che P è un retratto per deformazione di C.
Considero l'applicazione $G : C \times I \to C$, tale che al variare di $t \in I$ i "denti"

del pettine, cioè i segmenti verticali, siano mandati nel segmento orizzontale, cioè $[0,1] \times \{0\}$, per poi spostarsi fino a (0,0) ed arrivare, per $t = 1$, in P. In questo modo, abbiamo definito un'applicazione G continua, in quanto durante la deformazione i punti di C variano la propria posizione con continuità, senza salti. Chiamiamo $r : C \to P$ la retrazione che manda ogni punto di C in P, ed $i : P \to C$ l'immersione che manda P in se stesso. Per come abbiamo definito G, avremo che $G|_{\mathrm{C}\times\{0\}} = 1_X$ e $G|_{\mathrm{C}\times\{1\}} = i \circ r$. Essendo 1_X, $i \circ r$ e G delle applicazioni continue, grazie alle proprietà appena verificate otteniamo che $1_X \simeq i \circ r$, e quindi che P è retratto per deformazione di C.
Mostriamo ora che P non può essere un retratto forte per deformazione di C.
Per assurdo, supponiamo che esista un'applicazione $F : C \times I \to C$ continua tale che $F|_{\mathrm{P}\times\{\mathrm{t}\}} = 1_C|_P = (i \circ r)|_P\ \forall t \in I$, cioè stiamo supponendo che esista un'omotopia relativa a P fra 1_C e $i \circ r$.
Consideriamo i punti di C del tipo $(1/n, 1)$, con $n \in \mathbb{N}$, cioè tutte le "punte dei denti" del pettine, escluso il "dente" $\{0\} \times [0,1]$. Per continuità di F, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists t_n \in I$ tale che $F(1/n, 1, t_n) = (1/n, 0)$, in quanto tali punti, per arrivare a P alla fine della deformazione, devono necessariamente passare per il segmento orizzontale, e quindi attraverso l'omotopia F devono giungere a $(1/n, 0)$ ad un certo istante $t_n \in I$. Abbiamo quindi ottenuto una successione di punti di I: $(t_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, essendo $(t_n)_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata, esiste una sottosuccessione $(t_{\mathrm{n_k}})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ convergente. Chiamo t^* il punto di I a cui converge tale sottosuccessione.
Per come abbiamo scelto i t_n, vale che $F(1/n_k, 1, t_{\mathrm{n_k}}) = (1/n_k, 0)$ che, per $k \to +\infty$, tende a (0,0). Inoltre, per continuità di F, per $k \to +\infty$, vale che $F(1/n_k, 1, t_{\mathrm{n_k}}) \to F(0, 1, t^*)$, che è proprio (0,1) cioè P, poiché, per definizione di omotopia relativa a P, P resta fisso durante tutta la deformazione. In questo modo siamo giunti ad un assurdo, perché abbiamo dimostrato che $F(1/n_k, 1, t_{\mathrm{n_k}})$ ha limiti diversi per $k \to +\infty$, ma il limite deve essere unico. Abbiamo ottenuto quindi che un'applicazione definita come F non può esistere, cioè non esiste un'omotopia relativa a P fra 1_C e $i \circ r$. Perciò il punto

P non è un retratto forte per deformazione di C. □

Dall'osservazione precedente, considerando l'esempio dello spazio a pettine, si ricava direttamente la seguente osservazione.

Osservazione 10. *Se un punto è un retratto per deformazione di uno spazio topologico, non necessariamente sarà un suo retratto forte per deformazione.*

Bibliografia

[1] Maunder, C.: Algebraic Topology. Dover Books on Mathematics Series, Dover Publications (1996), https://books.google.it/books?id=YkyizIcJdK0C

[2] Spanier, E.: Algebraic Topology. Mathematics subject classifications, Springer (1994), https://books.google.it/books?id=h-wc3TnZMCcC

[3] Steen, L., Seebach, J.: Counterexamples in Topology. Dover Books on Mathematics, Dover Publications (2013), https://books.google.it/books?id=Gc3DAgAAQBAJ

[4] Villani, V., Stagnaro, E.: Elementi di topologia generale con esercizi. Materiali didattici, Editrice tecnico scientifica (1975), https://books.google.it/books?id=Lor1oAEACAAJ

[5] Weil, A.: Riemann, Betti and the birth of topology. Archive for History of Exact Sciences 20(2), 91–96 (1979), http://dx.doi.org/10.1007/BF00327626

Sitografia

Ho trovato informazioni utili alla tesi nei seguenti siti.

Storia della topologia:
http://progettomatematica.dm.unibo.it/Topologia1/intro.htm
http://www.caressa.it/testi/geotopo.html

Seno del topologo:
http://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/a-few-of-my-favorite-spaces-the-topologist-s-sine-curve/

Spazio a pettine:
http://topospaces.subwiki.org/wiki/Comb_space
https://en.wikibooks.org/wiki/Topology/Comb_Space

Ringraziamenti

Al termine di questa tesi, tengo a ringraziare un po' di persone.
Un ringraziamento va al professore Massimo Ferri, per la passione che pone nell'insegnamento e per la disponibilità e pazienza con cui ha seguito questo mio lavoro.
Grazie ai miei compagni di corso, perché in Università si è venuto a creare un ambiente di grande solidarietà, oltre che di amicizia.
Grazie a tutti gli amici che, chi più da vicino e chi più da lontano, sono stati una presenza fondamentale per me in questi anni, standomi accanto e credendo nelle mie capacità.
Grazie anche al gruppo dei clown di corsia Fanep, perché in questi due anni mi ha permesso di vivere esperienze che mi resteranno per sempre dentro e di scoprire delle persone fantastiche e una parte di me che non conoscevo davvero bene.
Infine ringrazio di cuore i miei genitori, perché è grazie al loro costante sostegno e affetto che sono arrivata a questo punto.