Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# LA TEORIA DEI GIOCHI: ALCUNI ESEMPI

**Tesi di Laurea in Complementi di Probabilitá e Statistica matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**PAOLO NEGRINI**

**Correlatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**PIERO PLAZZI**

**Presentata da:**
**MARCO MANGIANTI**

**Sessione II**
**Anno Accademico 2015-2016**

# Indice

*Charles (Paul Bettany)*

La soluzione non la trovi fissando un muro,ma cercando fuori dove hai sempre guardato.

*Cit. A beautiful mind*

# Capitolo 1

# Teoria dei giochi

## 1.1 Introduzione

La Teoria dei Giochi é una disciplina giovane ancora in fase di sviluppo e possibili cambiamenti. L'interesse per questa disciplina nacque verso la fine del XX secolo, piú precisamente con la pubblicazione del libro " *Theory of Games and Economic Behavior* " di John Von Neumann (matematico) e Oskar Morgenstern (economista).

Il gioco é un'attivitá inerente non solo alla specie umana ma anche alla maggior parte delle specie di mammiferi piú evolute. É attraverso il gioco che molti animali imparano a coordinare i movimenti per braccare, attaccare e difendersi ed é sempre attraverso il gioco che l'uomo sviluppa numerose abilitá utilizzando una serie di elementi con cui simulare una situazione reale. In un gioco ci sono tre concetti chiave: lo scenario, il caso e la scommessa.

- *lo scenario* $\rightarrow$ in cui si svolge il gioco é il primo passo per riconoscerne la struttura.
- *il caso* $\rightarrow$ interviene sempre in misura maggiore o minore in qualunque tipo di gioco e decide il grado di iniziativa dei giocatori al momento di definire le loro strategie. Nei giochi in cui il caso é poco rilevante, come nel gioco degli scacchi, l'iniziativa del giocatore é decisiva. Mentre in un gioco di puro caso, come nel lancio della moneta, l'iniziativa dei giocatori si limita alla scommessa.
- *la scommessa* $\rightarrow$ é ció che si mette in gioco; puó essere qualcosa di immateriale oppure anche l'onore.

Le applicazioni alla teoria dei giochi possono andare ben oltre ció che intendiamo per *gioco* ed essere utilizzata in altri ambiti. Di fatto si tratta di definire strategie e formalizzare la presa di decisioni. Prendiamo un esempio banale: la ripartizione di una torta. Supponiamo che i due protagonisti siano bambini. Dobbiamo pensare che due giocatori a cui piacciono molto le torte l'unico obiettivo é quello di vincere per prendere il pezzo piú grande. La ripartizione si pone in questi termini: il bambino A taglierá la torta e il bambino B sará il primo a scegliere il suo pezzo. La prima cosa che fa il bambino A é tenere in considerazione il bambino B e pensare che, una volta tagliata la torta, quest'ultimo prenderá il pezzo piú grande. Questo pensiero é fondamentale per scegliere la strategia migliore, che é sicuramente quella di tagliare la torta in due parti uguali. Se, peró, A pensa che B sia molto buono ed educato, prenderá sempre il pezzo piú piccolo, e quindi puó optare per un'operazione piú rischiosa, cioé tagliarla in due pezzi non uguali. Questa opzione si basa sull'intuizione o sull'informazione privilegiata che ha poco o niente a che vedere con il gioco.

### Prime definizioni

Definiamo *partita* un insieme di strategie compiute attraverso un sistema in cui son presenti delle regole, una delle quali stabilisce la fine della partita. Si dice *gioco* un insieme di partite non vuoto.
I giochi possono essere *competitivi*, ovvero che data una partita tra due o piú giocatori, venga assegnato un vincitore.
Secondo Von Neumann e Morgenstern la *regola* é un comando assoluto. Esse servono per stabilire un equilibrio in un gioco in modo tale che un giocatore non possa trasgredire (anche se il *bluff* viene ammesso). L'importanza delle regole é fondamentale poiché devono essere rispettate e conosciute da tutti i giocatori.
Alla fine di un gioco vi sará un vincitore e diremo *vincita* la somma algebrica di ció che egli deve ricevere dagli altri giocatori. Indicheremo con numeri positivi le vincite e con quelli negativi le perdite.
Il momento in cui il primo giocatore effettua la prima mossa, possiamo dire che il gioco ha un *inizio*; mentre la *fine* avviene solamente quando viene effettuata l'ultima mossa che decreta il vincitore del gioco.
All'interno del gioco la componente fondamentale é la *strategia* che indica l'insieme delle scelte effettuate nel corso di una partita da un giocatore in tutte le situazioni che si presentano durante il corso del gioco. Indicheremo con *payoff* la vincita o perdita di un giocatore.
In questa tesi verranno trattati vari tipi di giochi attraverso degli esempi, come il dilemma del prigioniero, il gioco del pollo, il gioco degli scacchi

(teorema di Zermelo),...
Infine ho trattato un gioco biblico e un caso particolare del Risiko in cui i singoli *payoff* verranno calcolati attraverso le probabilitá degli attacchi.

# Capitolo 2

# Strategie minimax e maximin

Per poter stabilire una strategia vincente come obiettivo fondamentale del gioco, é necessario presupporre che i giocatori soddisfino i due requisiti elencati in seguito:

1. entrambi sono razionali
2. entrambi scelgono la strategia solamente per il proprio beneficio personale

Siano A e B due giocatori. Supponiamo che il giocatore A abbia $m$ differenti strategie e il giocatore B ne abbia $n$. Se A sceglie una strategia, indicheremo con $i$ la sua scelta e $j$ analogamente quella di B.
Abbiamo, quindi, un elenco di numeri chiamati $a_{i,j}$ con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$ e li possiamo sistemare in una matrice. Questi numeri vengono chiamati **payoff** del giocatore A, poiché indicano il valore del premio.
Sia

| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | ... | $a_{1,n}$ |
| $A_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | ... | $a_{2,n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $A_m$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | ... | $a_{m,n}$ |

la matrice di un determinato gioco $mxn$.
Il principale problema é quello di trovare la strategia ottimale per il giocatore A. Vediamo ora come si presenta il problema.
Supponiamo che A scelga una strategia $A_i$ , *i=1,...,m*. B tenterá di opporre, tra le proprie, quella strategia $B_j$ , *j=1,...,n* tale che la vincita $a_{i,j}$ sia quella minima ( eventualmente negativa, ma comunque la piú vantaggiosa per B ).

Quindi, tra le differenti strategie $A_i$, viene ad assumere una particolare importanza tra gli elementi dell'orizzontale il numero $\alpha_{i,j} = \min_j a_{i,j}$. Otterremo cosí la seguente tabella:

| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | ... | $a_{1,n}$ | $\alpha_1$ |
| $A_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | ... | $a_{2,n}$ | $\alpha_2$ |
| : | : | : | $\ddots$ | : | : |
| $A_m$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | ... | $a_{m,n}$ | $\alpha_m$ |

Quindi se A sceglie la strategia $A_i$, la sua vincita non potrá superare $\alpha_i$. Con la speranza di ottenere una vincita maggiore, A sceglierá tra i valori di $\alpha_i$ quello massimo.
Sia $\alpha = \max_i \alpha_i$ ; da qui otteniamo

$$\alpha = \max_i \min_j a_{i,j}$$

Tale valore si dice *valore inferiore del gioco* o anche *valore maximin.*
Lo stesso discorso vale per B: egli cercherá il numero

$$\beta_j = \max_i a_{i,j}$$

al variare di $i$, e quindi il piú piccolo tra i valori possibili $\beta_i$, cioé

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i \beta_{i,j}$$

dove $\beta$ indica il *valore massimo del gioco* o *valore minimax.*
Si ottiene cosí la seguente tabella:

| | $B_1$ | $B_2$ | ... | $B_n$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | ... | $a_{1,n}$ | $\alpha_1$ |
| $A_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | ... | $a_{2,n}$ | $\alpha_2$ |
| : | : | : | $\ddots$ | : | : |
| $A_m$ | $a_{m,1}$ | $a_{m,2}$ | ... | $a_{m,n}$ | $\alpha_m$ |
| $\beta_j$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | ... | $\beta_n$ | |

**Esempio**

Consideriamo la seguente tabella:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | -3 | 4 | -3 |
| $A_2$ | -3 | 4 | -5 | -5 |
| $A_3$ | 4 | -5 | 6 | -5 |
| $B_j$ | 4 | 4 | 6 | |

$\alpha = -3 \qquad \beta = 4$

La strategia maximin di A é $A_1$ dato che $A_1$ contiene $\alpha$. Usando questa egli non perderá piú di 3. Le strategie minimax di B sono la $B_1$ e la $B_2$. Usando una o l'altra, B non perderá piú di 4.

Le strategie scelte dai giocatori sono mutabili e dipendono dalle informazioni che una parte riesce ad avere nella strategia adottata dall'altro.

### La battaglia del mare di Bismarck

La teoria dei giochi ha avuto e continua ad avere uno stretto rapporto con i cosiddetti *giochi di guerra*. Una delle prime applicazioni di questa teoria alla strategia militare fu quella della battaglia del mare di Bismarck, il 23 dicembre 1942, che oppose le strategie del generale Kenney a quelle del contrammiraglio Masatomi Kimura [11]. Alla fine della battaglia erano state affondate tutte le navi da trasporto e la metá della scorta giapponese. In questa battaglia il criterio minimax offrí una strategia vincente alle forze nordamericane. La flotta giapponese doveva uscire dal porto di Rabaul, nel nordest dell'isola di Nuova Britannia, e dirigersi verso il porto di Lae per servire da rinforzo. Kimura aveva due opzioni: scegliere la rotta nord, che era quella che passava dal mare di Bismarck, con la presenza di condizioni climatiche avverse, o la rotta verso sud, attraverso il mare di Salomone, con condizioni climatiche piú favorevoli. Kenney doveva portare tutti gli aerei di ricognizione in una delle due rotte, prendendo in considerazione anche il numero di giorni che avrebbero avuto il bisogno per il bombardamento, una volta avvistato il convoglio. Applicando il criterio minimax alla matrice dei pagamenti, si vide che scegliendo la rotta nord i giorni stimati per il bombardamento erano in entrambi i casi due, dunque egli optó per questa scelta:

| | | Kimura | |
|---|---|---|---|
| | | Rotta nord | Rotta sud |
| Kenney | Rotta nord | 2 | 2 |
| | Rotta sud | 1 | 3 |

## 2.1 Giochi con punto di sella

Supponiamo che 2 giocatori A e B si sfidino in un gioco con la seguente matrice dei pagamenti:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | -3 | 1 | 4 |
| $A_2$ | 3 | 0 | 1 |
| $A_3$ | 3 | -1 | 4 |

Quando il giocatore A sceglie la strategia 1, la massima perdita avviene quando anche B sceglierá la strategia 1 ( questo significa una perdita di -3 per A).
Otterremo cosí la seguente tabella:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_j$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | -3 | 1 | 4 | -3 |
| $A_2$ | 3 | 0 | 1 | 0 |
| $A_3$ | 3 | -1 | 4 | -4 |
| $A_i$ | 3 | 0 | 4 | |

Per il giocatore A il minimo di tutti quei valori é lo 0, che corrisponde alla strategia 2.
Analogamente per il giocatore B, il valore minimo é 0 e corrisponde alla strategia 2. Possiamo osservare che le due strategie coincidono, ovvero corrispondono allo stesso valore: infatti $\alpha = \beta$. In questo caso le due strategie minimax e maximin sono dette *stabili* e $v$ ($=\alpha=\beta$) viene chiamato *valore del gioco*.
Tale valore viene detto *punto di sella del gioco.*
Se é possibile calcolarlo, si dice che il gioco possiede il punto di sella e che le strategie che lo determinano vengono definite *strategie ottimali.* Esse costituiscono la soluzione del gioco.

**Teorema 1.** *Se uno dei due giocatori non segue la propria strategia ottimale, mentre l'altro lo fa, egli non potrá mai ottenere un vantaggio.*

Quindi riassumendo se un gioco ha un punto di sella, le strategie minimax e maximin sono stabili. Le cosiddette strategie ottimali danno le posizioni d'equilibrio.
Von Neumann definí il punto di sella come un punto di una matrice con queste caratteristiche:

- é il minimo della sua riga
- é il massimo della sua colonna

Se durante lo svolgimento della partita il giocatore A suppone che B non cambierá strategia e, di conseguenza, opta per non cambiare la sua e, a sua volta, il giocatore B crede che A non la cambierá e decide anch'egli di non cambiare la sua, si dice che il gioco ha raggiunto un *equilibrio di Nash*.

**Giochi a somma zero**

Un gioco si dice a *somma zero* se il guadagno e la perdita di un giocatore é bilanciata dalla perdita e il guadagno di un altro giocatore. In questo modo la somma di tutti i payoff deve essere uguale a zero.
Un esempio di gioco a somma zero é il lancio del dado.
Consideriamo un dado non truccato e supponiamo che ci siano 2 giocatori. Se l'esito del lancio é un numero pari, il primo giocatore vince 2 euro e il secondo ne perde 2. Invece, se dovesse uscire un numero dispari, sará il secondo giocatore a vincere 2 euro e il primo a perderne 2.
Dato che il risultato del lancio del dado avviene in maniera aleatoria, la probabilitá che esca un numero pari é la stessa di quella che esca un numero dispari e la somma delle due vincite é pari a zero.

## 2.2 Giochi senza punti di sella

Non tutti i giochi a due persone a somma zero hanno un punto di sella. Von Neumann fece un esempio semplice: il lancio simultaneo di 2 monete. Ogni giocatore punta 1 euro.

- A vince se escono 2 teste (T) o due croci (C)
- B vince se esce 1 testa e una croce

La matrice dei pagamenti sarebbe la seguente:

| | T | C |
|---|---|---|
| T | 1 | -1 |
| C | -1 | 1 |

In questo modo Von Neumann distingue le strategie pure da quelle miste.
Le prime sono quelle in cui il giocatore sceglie la stessa strategia in tutte le partite; nella seconda un giocatore cambia la sua strategia da una partita all'altra in maniera aletatoria.

Nel 1928 Von Neumann dimostró che in un gioco a 2 persone a somma zero, le strategie minimax di ciascun giocatore terminerebbe sempre in una soluzione stabile, un punto di sella. Il teorema minimax afferma che in ogni gioco finito a 2 giocatori razionali, con somma zero e con strategia pura o mista, c'é sempre una soluzione. Questo teorema si puó applicare alla maggior parte dei giochi a 2 persone a somma zero ma non tutti. Egli classificó questi giochi come giochi con informazione completa (ad esempio gli scacchi, dama e tris poiché ogni giocatore puó verificare la situazione dopo l'ultima giocata).
Von Neumann dimostró anche un secondo teorema del minimax che poteva essere applicato a giochi a 2 persone a somma zero con *informazione incompleta*.
Il teorema dice che non si puó ottenere una strategia vincente per una sola partita, ma é possibile stabilire una media vincente quando si giocano diverse partite.
Un esempio é il gioco *sasso,carta o forbice*. La matrice che rappresenta il gioco sarebbe:

| | | B | | |
|---|---|---|---|---|
| | | S | C | F |
| A | S | 0 | -1 | 1 |
| | C | 1 | 0 | -1 |
| | F | -1 | 1 | 0 |

Possiamo subito notare che il primo teorema del minimax non é valido, perché il massimo minimo di ogni riga é -1, mentre il minimo massimo di ogni colonna é 1. Ció avviene perché l'informazione del gioco é incompleta.
La migliore strategia sará quella dettata dalle leggi del caso, per non far capire la propria strategia all'avversario. In tali condizioni, il teorema del minimax afferma che il massimo minimo del risultato medio per A coincide con il minore massimo del risultato medio di B [5].

## 2.3 Matrici semplificate ed esempi di giochi 2x2

Come abbiamo potuto osservare precedentemente, ogni volta che ci viene proposto un gioco, possiamo costruirci una matrice. Peró questa puó risultare complessa e quindi difficile da studiare. Si presentano a volte dei casi in cui una matrice complessa si puó semplificare in una matrice piú semplice. Prendiamo in considerazione la seguente matrice delle vincite di un ipotetico gioco 4x5:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 0,3 | -1,5 | -3 | -0,3 |
| $A_2$ | 3 | 1,8 | -0,6 | -0,9 | 0 |
| $A_3$ | 3 | 0,3 | -1,5 | -3 | -0,3 |
| $A_4$ | 2,1 | -0,9 | 1,8 | 1,2 | 1,8 |

Se A decide di usare la strategia 1, é chiaro che a B converrá fare uso della quarta strategia per cercare di ottenere la massima vincita. Dunque A cercherá di cambiare strategia; se, per esempio, A dovesse scegliere la terza opzione, allo stesso modo B opterá per la quarta soluzione.
Quindi notiamo che se A usa la prima o la terza strategia, per B la scelta ottimale sará sempre la 4, dato che $a_{1,j}$=$a_{3,j}$ $\forall$ j=1,...,5.
In questo caso la prima e la terza riga si dicono *identiche*.
In questo caso é come se una delle due non ci fosse e possiamo non prenderla in considerazione e quindi cancellarla. Se in una matrice ci vengono assegnate due righe o colonne uguali, possiamo sempre cancellarne una (detta orizzontale o verticale doppia) senza alterare il gioco.
Notiamo ora che ogni elemento della terza riga é minore o uguale al corrispondente elemento della seconda riga, ovvero $a_{3.j}\leq$ $a_{2,j}$ $\forall\ j = 1, ..., 5$. In questo caso diremo che $A_3$ é dominata da $A_2$ e possiamo quindi eliminarla, poiché non verrá mai usata da A, dato che non gli é conveniente. Avremo cosí una matrice parzialmente ridotta:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_2$ | 3 | 1,8 | -0,6 | -0,9 | 0 |
| $A_4$ | 2,1 | -0,9 | 1,8 | 1,2 | 1,8 |

Ora invertiamo il ragionamento andando ad analizzare le singole colonne. Osserviamo che la prima colonna é dominata dalla seconda, ovvero $a_{i,2} \leq a_{i,1}$ $\forall\ i = 1, ..., 4$.
Allo stesso modo, possiamo dire che $B_4$ domina $B_3$ e $B_5$ e quindi eliminiamo sia la terza che la quinta colonna. Otterremo cosí la seguente *matrice semplificata*:

| | $B_2$ | $B_4$ |
|---|---|---|
| $A_2$ | 1,8 | -0,9 |
| $A_4$ | -0,9 | 1,2 |

Riassumendo, si possono semplificare e quindi eliminare le orizzontali e verticali doppie e dominate prima di ricercare la soluzione: la matrice cosí ottenuta si dice *matrice semplificata*.

## 2.4 Soluzione per giochi 2x2

Consideriamo la seguente matrice 2x2:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ |
| $A_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ |

Supponiamo che esista un punto di sella e sia $\alpha$=$\beta$=$a_{2,2}$. Avremo, quindi, che $a_{2,1} \geq a_{2,2}$. Ma $a_{2,2}$ é anche valore della $B_2$ e quindi, essendo $a_{2,2} = \beta_2$, avremo $a_{1,2} \leq a_{2,2}$.
Consideriamo $a_{1,1}$:

1. Se é $a_{1,1} \geq a_{1,2}$, essendo $a_{2,2} \leq a_{2,1}$ , si deve eliminare $B_1$ in quanto é dominata da $B_2$.

2. Se é $a_{1,1} \leq a_{1,2}$ é anche $a_{1,1} \leq a_{2,1}$ per la proprietá transitiva $(a_{1,1} \leq a_{1,2} \leq a_{2,2} \leq a_{2,1}$ ). Possiamo, quindi, eliminare la prima riga poiché é dominata dalla seconda.

3. Se é $a_{1,1} \geq a_{2,1}$ , allora, essendo $a_{2,1} \geq a_{1,2}$, si ha pure $a_{1,1} \geq a_{1,2}$; possiamo, quindi, eliminare a prima colonna in quanto dominata dalla $B_2$.

4. Infine, se $a_{1,2} \leq a_{1,1} \leq a_{2,1}$. Anche in questo caso $A_2$ domina $A_1$, poiché $a_{2,1} \geq a_{1,1} \geq a_{1,2}$ e $a_{2,2} \geq a_{1,2}$.

In ogni caso é possibile eliminare una delle strategie $A_1$ o $B_1$ che non contengono $a_{2,2}$, il cosiddetto punto di sella.
Questo ragionamento si puó ripetere per ogni $a_{i,j}$ con $i, j = 1, 2$.
Ora supponiamo che nel gioco non ci sia un punto di sella; consideriamo, cosí la seguente matrice:

| | $B_1$ | $B_2$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $\alpha_1$ |
| $A_2$ | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $\alpha_2$ |
| $\beta_j$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | |

Sia $v$ il valore del gioco.
Consideriamo

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

la strategia ottimale mista in modo tale che $v$ indichi la vincita media. Dato che il gioco non ammette un punto di sella, la scelta di B risulta indifferente poiché se A sceglie la strategia ottimale e cosí fosse anche per B si arriverebbe ad una contraddizione ottenendo un'equilibrio. Quindi B puó scegliere indifferentemente sia la prima che la seconda opzione senza modificare il valore dl gioco $v$.
Se A usa la strategia pura $A_1$ per la frazione $x_1$, con $0 \leq x_1 \leq 1$, allora A coincide con $A_1$ se $x_1$=1 ( rispettivamente con $A_2$ se $x_1$=0).
Supponiamo che la strategia di A non sia pura e che quindi possiamo pensare $x_1$ come un numero razionale ( $0 < x_1 < 1$).
A in questo modo ottiene una vincita che dipende dalla scelta di B:

- $a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 = v$ se B sceglie $B_1$
- $a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 = v$ se B sceglie $B_2$

Sapendo che $x_1 + x_2 = 1$, otteniamo la seguente relazione

$$a_{1,1}x_1 + a_{2,1}(1 - x_1) = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}(1 - x_1)$$

Da queste espressioni ci ricaviamo $x_1$ e $x_2$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{2,2} - a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}} \\ x_2 = \dfrac{a_{1,1} - a_{1,2}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}} \end{cases}$$

Sostituendo i valori di $x_1$ e $x_2$, si ottiene il valore

$$v = \frac{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}}$$

Dunque, la strategia ottimale di A é la seguente:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \dfrac{a_{2,2} - a_{2,1}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}} & \dfrac{a_{1,1} - a_{1,2}}{a_{1,1} + a_{2,2} - a_{1,2} - a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

Analogamente lo stesso vale per B; conoscendo $v$, e le seguenti relazioni:

- $a_{1,1}y_1 + a_{2,1}y_2 = v$

- $a_{1,2}y_1 + a_{2,2}y_2 = v$

otteniamo

$$y_1 = \frac{v - a_{2,1}}{a_{1,1} - a_{2,1}}; \qquad y_2 = 1 - y_1$$

La strategia ottimale per B é quindi la seguente

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \dfrac{v - a_{2,1}}{a_{1,1} - a_{2,1}} & \dfrac{a_{1,1} - v}{a_{1,1} - a_{2,1}} \end{bmatrix}$$

**Esempio del lancio di due dadi**

Siano A e B due giocatori. Ogni giocatore punta 1 euro. Prendiamo in considerazione un dado:

- A vince se la somma dei due dadi é un numero pari (P)
- B vince se la somma dei due dadi é dispari (D)

La matrice dei pagamenti sarebbe la seguente:

| | P | D |
|---|---|---|
| P | 1 | -1 |
| D | -1 | 1 |

Osserviamo che il seguente gioco non ha un punto di sella poiché $\alpha$ = -1 e $\beta$ = 1. Quindi dal seguente sistema

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

otteniamo questa equazione

$$x_1 - (1 - x_1) = -x_1 + 1 - x_1$$

da cui si ricava

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

e quindi anche $x_2 = \dfrac{1}{2}$ .
Ottenuti questi valori, osserviamo che

$$a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 = 0$$

ricavando cosí il valore del gioco $v = 0$.
Analogamente anche $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$
Quindi la strategia ottimale per ciasun giocatore é la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dato che $v = 0$, il gioco appena trattato viene definito *giusto*.

# Capitolo 3

# Equilibrio di Nash

In questo capitolo analizzeremo la Teoria dei Giochi nel suo complesso dove ogni giocatore cercherá di trovare la strategia migliore per se stesso. Studieremo varie tipologie di giochi attraverso degli esempi come il dilemma del prigioniero, il gioco del pollo,...e li risolveremo cercando di trovare l'Equilibrio di Nash. Parleremo di giochi non cooperativi, dinamici,

## 3.1 Giochi non cooperativi

In questa classe di giochi, introdotta da Von Neumann e Morgenstern, i giocatori non possono comunicare fra loro, ma ognuno di essi sceglie la strategia piú idonea a massimizzare la propria utilitá, tenendo conto delle regole, condizioni del gioco e delle mosse/decisioni degli avversari.
Indichiamo con:

- **Strategia** $\rightarrow$ una regola che associa una mossa o decisione ad ogni set formativo. In un gioco per strategia di un giocatore intendiamo un piano completo di azione di quel giocatore.
  La strategia puó essere:

  1. **Pura:** ci permette di capire in maniera completa le scelte di un giocatore che gioca una partita. Essa determina la scelta che il giocatore fará in qualsiasi situazione.
  2. **Mista:** i giocatori usano un *random device* per scegliere una delle strategie pure. In questo modo la loro scelta, essendo del tutto casuale, gli porterá il vantaggio di non essere prevedibili nei confronti dell'avversario.

- **Payoff o utilitá** → per un giocatore é il numero che esprime la valutazione del risultato ottenuto, a seguito delle scelte operate da tutti i giocatori coinvolti, da parte di quel giocatore.

**Esempio: Congestione**

Per andare da A a B ci sono tre strade possibili che vengono percorse con tempi diversi ( T=11 minuti , M = 10 minuti, B = 14 minuti) [6]. I tempi di percorrenza dipendono dalla lunghezza, dal traffico (se due o piú persone scelgono la stessa strada il tempo aumenta). L'obiettivo di ogni persona é quello di minimizzare il proprio tempo di percorrenza ed é difficile cooperare nella realtá poiché é complicato mettersi d'accordo su chi dovrá percorrere le strade piú lente.
Ora consideriamo tre utenti e supponiamo che l'aumento sia di 2 minuti se la strada é scelta da due persone e di 5 minuti se viene scelta da tutti e tre.

Possiamo rappresentare il gioco attraverso le seguenti tabelle:
Se III=T

| I/II | T | M | B |
|---|---|---|---|
| T | (16,16,16) | (13,10,13) | (13,14,13) |
| M | (10,13,13) | (12,12,11) | (10,14,11) |
| B | (14,13,13) | (14,10,11) | (16,16,11) |

Se III=M

| I/II | T | M | B |
|---|---|---|---|
| T | (13,13,10) | (11,12,12) | (11,14,10) |
| M | (12,11,12) | (15,15,15) | (12,14,12) |
| B | (14,11,10) | (14,12,12) | (16,16,10) |

Se III=B

| I/II | T | M | B |
|---|---|---|---|
| T | (13,13,14) | (11,10,14) | (11,16,16) |
| M | (10,11,14) | (12,12,14) | (10,16,16) |
| B | (16,11,16) | (16,10,16) | (19,19,19) |

Fu John F. Nash ad introdurre alla fine degli anni '40 la nozione di gioco non cooperativo, nel quale ogni giocatore agisce egoisticamente allo scopo di ottenere il risultato migliore senza collaborare, cooperare con gli altri giocatori.
Secondo la visione di Nash, il comportamento di un giocatore si puó basare su tre caratteristiche fondamentali:

1. **egoismo** : il giocatore cerca di massimizzare la propria vincita senza preoccuparsi che il suo comportamento possa andare a scapito degli altri partecipanti;

2. **razionalitá** : il giocatore effettua sempre le scelte piú ragionevoli comportandosi in maniera intelligente;

3. **non cooperativismo** : il giocatore non puó creare accordi né coalizioni con gli altri partecipanti al gioco.

Il piú semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo é l'equilibrio di Nash.
Nel caso di un gioco con due giocatori, A e B, si dice che una coppia di strategie é un *equilibrio di Nash* se la scelta di A é ottima per A data la scelta di B, e allo stesso tempo la scelta di B é ottima per B data la scelta di A.
L'esempio piú famoso di un gioco non cooperativo é il dilemma del prigioniero:
*La polizia ha arrestato due sospettati di aver commesso una rapina. Vengono tenuti in due celle separate in modo che non possano comunicare. Ci sono forti prove per accusarli; ognuno di loro ha due possibili scelte: confessare o tacere. Vengono presentati 3 casi:*

1. *Se uno dei due confessa la rapina accusando l'altro (mentre l'altro tace), uscirá subito dal carcere, mentre il complice subirá una condanna di 20 anni*

2. *Se entrambi confessano di essere colpevoli, verranno condannati a 5 anni di carcere ciascuno*

3. *Nel caso nessuno dei due confessasse, verrebbero entrambi puniti solamente 1 anno*

In questo gioco i giocatori hanno a disposizione solamente due strategie: confessare o negare. I pay-off sono sempre negativi ed ognuno dei due criminali cercherá di fare la scelta piú opportuna per ottenere meno anni di reclusione. La matrice dei pay-off che rappresenta il gioco é la seguente:

| Prigioniero 1 | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-5) | (0,-20) |
| Negare | (-20,0) | (-1,-1) |

Vediamo come trovare un equilibrio di Nash in questo caso:

**Prigioniero 1**

Trattandosi di un gioco non cooperativo, per il prigioniero 1 é meglio confessare perché, indipendentemente dalla scelta dell'altro giocatore, il suo pay-off é piú alto confessando.
Allo stesso modo anche per il secondo prigioniero é piú conveniente confessare. Ora vediamo il perché: se il prigioniero 1 avesse confessato, al secondo converrebbe confessare cosí da poter scontare solamente 5 anni di carcere. Se il prigioniero 2 scegliesse di confessare, il prigioniero 1 preferisce confessare, poiché se confessa ottiene 5 anni di carcere, mentre se non confessa 20.
In questo modo l'unico equilibrio del dilemma del prigioniero é che entrambi i prigionieri confessino. Questo gioco é particolarmente semplice da risolvere perché confessare é una strategia dominante per entrambi i prigionieri e definiamo l'equilibrio cosí trovato *equilibrio in strategie dominanti*.
Notiamo, peró, che l'equilibrio di Nash in questo gioco non rappresenta un esito ottimale per entrambi i giocatori: infatti se avessero potuto comunicare prima dell'esito, avrebbero scelto entrambi di non confessare, in quanto ció avrebbe comportato un pay-off maggiore per entrambi.

## 3.2 Strategie miste

Come abbiamo descritto precedentemente, le strategie miste richiedono che i giocatori usino un *random device* per scegliere una delle strategie pure. Il fatto di randomizzare la scelta, a volte porta un grosso vantaggio: non essere prevedibili. Infatti le strategie miste possono risultare utili in presenza di equilibri multipli e quando non esiste un equilibrio di Nash in strategie pure.
Lo scopo di queste strategie é di non far capire al proprio avversario la propria intenzione e non utilizzare, quindi, uno schema ben preciso per le proprie scelte. La sorpresa é l'arma principale da usare contro l'avversario per queste tipologie di giochi.

**Il gioco del pollo**

L'idea del gioco ha preso spunto dal film *Gioventú bruciata* del 1955 interpretato da James Dean.
Ad un certo punto nel film c'é una competizione che consiste nel correre il piú veloce possibile con un automobile verso un dirupo e abbandonarla l'istante prima che cada. Questo esempio di gioco é stato trasformato in un gioco non cooperativo:

*Due piloti fanno una sfida di coraggio che consiste nel guidare l'uno verso l'altro in rotta di collisione. Entrambi hanno due opzioni: sterzare (S) o procedere dritto (D). Chi sterza verrá definito un codardo, ovvero un "pollo", mentre chi proseguirá dritto verrá glorficato dai presenti. Se entrambi, peró, filano dritto, moriranno.*
La tabella dei giochi é la seguente:

| | S | D |
|---|---|---|
| S | (5,5) | (1,8) |
| D | (8,1) | (-2,-2) |

Analizziamo la tabella:
se il primo pilota decide di sterzare le conseguenze saranno 2: se il secondo pilota sterza, la sfida terminerá con un pareggio e non sará considerato né un eroe né un pollo; se il secondo pilota, invece, tira dritto, il primo pilota verrá preso in giro da tutti gli spettatori e verrá soprannominato " fifone " . Il discorso é analogo per il secondo pilota.

Analizziamo le varie strategie e cerchiamo di capire quale sia quella dominante, ovvero che massimizza il nostro risultato.
Ricordando i valori $x_1$ e $x_2$ calcolati nel capitolo precedente, indichiamo con $p$ la probabilitá che il primo pilota decida di sterzare e *1-p* la probabilitá di tirare dritto. Analogamente indichiamo con $q$ e *1-q* le probabilitá per il secondo pilota:

$$p = \frac{-2-1}{-2-1+5-8} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{-2-1}{-2-1+5-8} = \frac{1}{2}$$

Nel caso piú generico, sará

| | S | D |
|---|---|---|
| S | (A,C) | (a,D) |
| D | (B,c) | (b,d) |

$$p = \frac{d-c}{d-c+C-D} \qquad q = \frac{b-a}{b-a+A-B}$$

Nel caso del gioco del pollo, quale sará la strategia dominante?
Purtroppo in questo gioco non esiste una strategia migliore di ogni altra come accadeva nel dilemma del prigioniero. La decisione di sterzare é la scelta migliore solo se il mio avversario tira dritto, in quanto mi risparmia da morte certa, ma se l'altro pilota decide di sterzare, mi brucia la possibilitá di uscirne vincitore. **Sterzare**, quindi, non é la strategia dominante. Lo stesso ragionamento é analogo per l'altro pilota.

Esistono due punti di equilibrio ( due equilibri di Nash ), che sono rispettivamente S/D e D/S. Ogni giocatore, quindi, cerca di optare per una strategia opposta a quella dell'altro.
Questi equilibri sono detti *equilibri paretiani* poiché al migliorare della condizione di un giocatore, peggiora quella dell'altro.

**La battaglia dei sessi**

Supponiamo di avere due giocatori (in questo caso una coppia ) che devono decidere, senza poter comunicare, cosa fare la sera: andare a vedere una partita di calcio (preferenza dell'uomo) oppure andare a teatro ( preferenza della donna ). Entrambi, peró, preferirebbero passare la serata insieme piuttosto che in posti diversi.
In questo caso non esistono strategie dominanti, poiché gli equilibri di Nash sono due, ovvero quando la coppia si ritrova insieme. Visto, quindi, l'impossibilitá di comunicare, la strategia migliore risulta assai complessa.
Sia

| | Calcio | Teatro |
|---|---|---|
| Calcio | (4,3) | (2,2) |
| Teatro | (1,1) | (3,4) |

la tabella che rappresenta questo esempio.
Ogni strategia puó essere considerata fallimentare, sia quella egoistica che quella altruistica.

## 3.3 Specificazione delle strategie miste

Consideriamo il seguente gioco generico [4]:

| | L | R |
|---|---|---|
| A | $(x_1, x_2)$ | $(y_1, y_2)$ |
| B | $(v_1, v_2)$ | $(z_1, z_2)$ |

Determiniamo in maniera piú rigorosa le strategie miste, indicando con $\sigma_i$ le strategie miste del primo e del secondo giocatore e con $\pi_i(\sigma_i)$ i *payoff* attesi dei due giocatori:

$$\sigma_1 = pA + (1-p)B; \qquad \sigma_2 = qL + (1-q)R$$

Il *payoff* atteso del primo giocatore é:

$$\overline{\pi}_1 = pq\pi_1(A, L) + p(1-q)\pi_1(A, R) + (1-p)q\pi_1(B, L) + (1-p)(1-q)\pi_1(B, R)$$

Se vogliamo massimizzare questa funzione, la deriviamo rispetto a $p$ e poi la poniamo uguale a zero, ottenendo cosí la seguente relazione:

$$\frac{\partial \overline{\pi}_1}{\partial p} = q\pi_1(A,L)+\pi_1(A,R)-q\pi_1(A,R)-q\pi_1(B,L)-\pi_1(B,R)+q\pi_1(B,R) = 0$$

In questo modo osserviamo che

$$q[\pi_1(B,R) - \pi_1(A,R) + \pi_1(A,L) - \pi_1(B,L)] = \pi_1(B,R) - \pi_1(A,R)$$

da cui si ricava q

$$q = \frac{\pi_1(B,R) - \pi_1(A,R)}{[\pi_1(B,R) - \pi_1(A,R) + \pi_1(A,L) - \pi_1(B,L)]}$$

Questa probalilitá ( cioé la probabilitá che il secondo giocatore giochi L ) é del tutto analoga a quella calcolata precedentemente. Invece, 1-q indica la probabilitá che il secondo giocatore scelga R.
Analogamente possiamo applicare lo stesso ragionamento per calcolare p; l'utilitá attesa del giocatore 2 vale:

$$\overline{\pi}_2 = qp\pi_2(A,L)+q(1-p)\pi_2(B,L)+(1-q)p\pi_2(A,R)+(1-q)(1-p)\pi_2(B,R)$$

Massimizzando questa funzione e ponendo a zero la derivata otteniamo:

$$\frac{\partial \overline{\pi}_2}{\partial p} = p\pi_{12}(A,L)+\pi_2(B,L)-p\pi_2(B,L)-p\pi_2(A,R)-\pi_2(B,R)+p\pi_2(B,R) = 0$$

da cui ricaviamo:

$$p = \frac{\pi_2(B,R) - \pi_2(B,L)}{[\pi_2(B,R) - \pi_2(B,L) + \pi_2(A,L) - \pi_2(A,R)]}$$

Applicando i risultati ottenuti al seguente gioco otteniamo:

| | L | R |
|---|---|---|
| A | (2,-2) | (-1,1) |
| B | (-1,1) | (1,-1) |

$$p = \frac{\pi_2(B,R) - \pi_2(B,L)}{[\pi_2(B,R) - \pi_2(B,L) + \pi_2(A,L) - \pi_2(A,R)]} = \frac{-1-1}{-1-1+(-2)-1} = \frac{2}{5}$$

$$q = \frac{\pi_1(B,R) - \pi_1(A,R)}{[\pi_1(B,R) - \pi_1(A,R) + \pi_1(A,L) - \pi_1(B,L)]} = \frac{2-(-1)}{2-(-1)+2-(-1)} = \frac{1}{2}$$

L'equilibrio di Nash in strategie miste é ($p = \frac{2}{5}$; $q = \frac{1}{2}$) o anche ($\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$).

## 3.4 Strategie miste e funzione di corrispondenza

Se le strategie miste dei due giocatori indicano le risposte migliori, possiamo esprimerle attraverso una funzione continua nell'intervallo [0,1] detta *funzione di corrispondenza* [4].
Consideriamo la seguente tabella:

| | a | b |
|---|---|---|
| A | (0,0) | (3,-1) |
| B | (5,-1) | (0,5) |

Tale tabella non ammette nessun equilibrio di Nash in strategie pure. L'utilitá attesa del primo giocatore é:

- $0q + 3(1 - q)$ se sceglie la strategia A;
- $5q + 0(1 - q)$ se sceglie la strategia B.

L'utilitá attesa della scelta A sará piú alta se

$$0q + 3(1 - q) > 5q + 0(1 - q) \rightarrow q < \frac{3}{8}$$

Questo risultato ci indica con quale probabilitá il primo giocatore sceglie A o B secondo questo schema:

$$\begin{cases} A \quad se \quad q < \frac{3}{8} \\ B \quad se \quad q > \frac{3}{8} \\ indifferente \quad se \quad q = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Questo significa che se $q < \frac{3}{8}$ il giocatore 1 sceglierá A con probabilitá p=1. Se, invece, $q > \frac{3}{8}$ la strategia mista del giocatore 1 di scegliere A avrá probabilitá $p = 0$, poiché $1 - p = 1$.
Quindi $p$ assumerá sempre valori compresi tra 0 e 1. Possiamo, quindi, rappresentare le strategie miste del primo giocatore attraverso una funzione, detta **funzione di corrispondenza**, che specifica la probabilitá $q$ nell'intervallo [0,1].

La funzione di corrispondenza del giocatore 1 é la seguente:

$$p(q) = \begin{cases} 0 \quad se \quad q > \frac{3}{8} \\ (0,1) \quad se \quad q = \frac{3}{8} \\ 1 \quad se \quad q < \frac{3}{8} \end{cases}$$

Lo stesso discorso vale per il secondo giocatore:

$$0p + (1-p)(-1) > -1(p) + 5(1-p) \rightarrow p > \frac{6}{7}$$

La funzione di corrispondenza del secondo giocatore, quindi, é la seguente:

$$q(p) = \begin{cases} 0 & se \quad p < \frac{6}{7} \\ (0,1) & se \quad p = \frac{6}{7} \\ 1 & se \quad p > \frac{6}{7} \end{cases}$$

Le probabilitá di giocare le strategie pure che costituiscono un equilibrio di Nash in strategie miste sono indicate dalle probabilitá per cui i due giocatori risultano indifferenti: ($p = \frac{6}{7}$ ; $q = \frac{3}{8}$ ).

## 3.5 Equilibrio bayesiano

Un equilibrio bayesiano puó essere considerato come :

- un equilibrio di Nash in un contesto ad informazione incompleta
- un equilibrio di Nash quando uno o piú giocatori sono in possesso di un'informazione privata.

Consideriamo, per esempio, il caso di un imprenditore che puó inviare ad una banca la richiesta per il finanziamento di un progetto; ció presuppone che l'imprenditore sia a conoscenza di qualcosa che la banca non conosce.
Un altro esempio riguarda le imprese che devono decidere se entrare in alcuni mercati, valutando quindi le caratteristiche delle imprese che giá operano su quei mercati.
A differenza dei giochi precedenti dove il giocatore puó identificare le strategie ottime degli altri giocatori, arrivando ad un equilibrio, qui tale giocatore diventa incerto sulle strategie ottime che questi potranno intraprendere. Ma anche chi possiede un'informazione privata affronta una situazione di incertezza perché sará incerto su come reagirá l'altro giocatore.

### 3.5.1 Harsanyi e le strategie miste

La soluzione di questo dilemma la forniá Harsanyi con la trasformazione di un gioco ad informazione incompleta in un gioco ad informazione imperfetta [4]. In un gioco ad informazione incompleta, il giocatore che possiede

un'informazione privata é definito in tipi. Se consideriamo due imprese, l'impresa con informazione privata avrá piú tipi ed a ciascuno di essi sará affidato un payoff. Invece la seconda impresa senza informazione privata presenterá solamente un tipo. Consideriamo un gioco in cui nella prima cella dei payoff viene introdotta una perturbazione $\epsilon$. Lo scopo di tale perturbazione é quella di fare in modo che ci sia incertezza nel gioco ed indica l'informazione privata dei due giocatori.
Indichiamo con $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ rispettivamente le informazioni private del primo e del secondo giocatore.
La tabella iniziale senza perturbazioni é la seguente:

| | a | b |
|---|---|---|
| A | (1,-1) | (-1,1) |
| B | (-1,1) | (1,-1) |

mentre, se introduciamo tali perturbazioni, otteniamo cosí la seguente tabella:

| | a | b |
|---|---|---|
| A | $(1+\epsilon_1, -1+\epsilon_2)$ | (-1,1) |
| B | (-1,1) | (1,-1) |

Questo gioco con informazione incompleta, puó essere trasformato in un gioco con informazione imperfetta con l'introduzione di Natura, ovvero una mossa che sceglie i tipi con delle probabilitá che sono conoscenza comune.
Consideriamo $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ come due tipi, uno positivo $\epsilon^+$ e uno negativo $\epsilon^-$ che hanno una probabilitá di verificarsi pari a $\frac{1}{2}$. Avremo quindi:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} \epsilon^+ \\ \epsilon^- \end{cases} \qquad con \quad p = \frac{1}{2}$$

e

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \epsilon^+ \\ \epsilon^- \end{cases} \qquad con \quad p = \frac{1}{2}$$

Questo, cosí non é piú un gioco tra due giocatori, ma é un gioco con 4 tipi, due per ciascun giocatore. Cosí facendo dalla matrice dei payoff emerge un possibile equilibrio:

$$giocatore1 = \begin{cases} \epsilon^+ \to A \\ \epsilon^- \to B \end{cases}$$

$$giocatore2 = \begin{cases} \epsilon^+ \to a \\ \epsilon^- \to b \end{cases}$$

Il giocatore 1 ha due tipi $\epsilon^+$ e $\epsilon^-$ ed entrambi devono scegliere quale strategia usare: A o B. Il tipo $\epsilon^+$ del primo giocatore sa che il giocatore 2 puó scegliere la strategia $a$ o $b$ con probabilitá $\frac{1}{2}$ .
Analizziamo i due casi:

1. se il giocatore 1 pensa di incontrare il tipo $\epsilon^+$ del secondo giocatore, le utilitá attese saranno:
   - $\frac{1}{2}(1+\epsilon^+) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\epsilon^+ > 0$ se sceglie A;
   - $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ se sceglie B;

   A é la scelta ottima.

2. se il giocatore 1 pensa di incontrare il tipo $\epsilon^-$ del secondo giocatore, le utilitá attese saranno:
   - $\frac{1}{2}(1+\epsilon^-) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\epsilon^- < 0$ se sceglie A;
   - $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ se sceglie B;

   B é la scelta ottima.

Analogamente lo stesso ragionamento vale per il secondo giocatore. Analizziamo, quindi, i due casi:

1. se il giocatore 2 pensa di incontrare il tipo $\epsilon^+$ del primo giocatore, le utilitá attese saranno:
   - $\frac{1}{2}(-1+\epsilon^+) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\epsilon^+ > 0$ se sceglie $a$;
   - $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ se sceglie $b$;

   $a$ é la scelta ottima.

2. se il giocatore 2 pensa di incontrare il tipo $\epsilon^-$ del primo giocatore, le utilitá attese saranno:
   - $\frac{1}{2}(-1+\epsilon^-) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\epsilon^- < 0$ se sceglie $a$;
   - $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ se sceglie $b$;

   $b$ é la scelta ottima.

É interessante notare da questi risultati due caratteristiche:

1. le strategie ottime non dipendono dal parametro $\epsilon$;

2. piú piccolo é $\epsilon$ meno marcata é la differenza tra tipi.

Arriviamo alla conclusione che i tipi positivi di entrambi i giocatori giocheranno (A,a), mentre i tipi negativi giocheranno (B,b).
L'equilibrio bayesiano, quindi, é:

- per i tipi $\epsilon^+$ di entrambi i giocatori (A,a)
- per i tipi $\epsilon^-$ di entrambi i giocatori (B,b)

Harsanyi sottolinea come ogni equilibrio in strategie miste puó essere interpretato come equilibrio bayesiano in strategie pure introducendo una leggera perturbazione.

## 3.6 Giochi dinamici ed induzione a ritroso

I giochi dinamici prevedono l'inserimento dell'elemento temporale durante l'interazione tra i giocatori. In questa parte analizzeremo i giochi sequenziali, ovvero dei giochi in cui un giocatore agisce dopo che gli altri giocatori hanno giá deciso le loro azioni.

### 3.6.1 Esempio di gioco sequenziale ad informazione perfetta

Prendiamo in considerazione due imprese: la prima é monopolista in un mercato e gode di un profitto di monopolio pari a 6. La seconda impresa deve decidere se entrare (E) o non entrare (NE) nel mercato [4]
Se dovesse scegliere di starne fuori, il gioco finisce; essa non guadagna niente e la prima impresa continua a guadagnare come prima.
Se, invece, dovesse entrare, la prima impresa dovrá decidere se fare la guerra (G) oppure dividere i profitti di monopolio (D). In caso di guerra, entrambe perderebbero 3, mentre se scegliesse di cooperare, entrambe prenderebbero metá del profitto.
La tabella del gioco é la seguente:

| | G | D |
|---|---|---|
| E | (-3,-3) | (3,3) |
| NE | (0,6) | (0,6) |

In questo tipo di gioco sono presenti due equilibri di Nash (E,D) e (G,NE). Peró come possiamo interpretare l'equilibrio di Nash (G,NE)? Se ci pensiamo

bene la prima impresa, se sa che la seconda é razionale, egli entrerá nel mercato, e cosí la seconda non avrebbe nessun motivo ad entrare in guerra e perdere un profitto pari a 3.
Invece, se la seconda impresa decidesse di fare guerra, alla prima impresa non converrebbe assolutamente entrare nel mercato, poiché porterebbe solamente ad una perdita.
Il problema é che tale equilibrio sta coinvolgendo due strategie che sono fuori dal percorso dell'equilibrio, cioé che se la prima impresa non dovesse entrare, la strategia di entrare in guerra non verrá mai raggiunta.
Quindi l'unico equilibrio di Nash di questo gioco é (E,D).

### 3.6.2 Esempio di gioco sequenziale ad informazione imperfetta

Consideriamo ora il caso in cui la seconda impresa, una volta entrata nel mercato, decida di fare la guerra (G) o di dividere i profitti (D) con la prima impresa.
A questo punto dobbiamo trovare gli equilibri di Nash che caratterizzano il gioco. La tabella da studiare é la seguente:

| | G | D |
|---|---|---|
| G | (-6,2) | (2,4) |
| D | (-4,-2) | (6,2) |

Cosí facendo , mettendo insieme queste due tabelle, otteniamo la seguente tabella finale:

| | G | D |
|---|---|---|
| NE,G | (0,6) | (0,6) |
| NE,D | (0,6) | (0,6) |
| E,G | (-6,2) | (2,4) |
| E,D | (-4,-2) | (6,2) |

Da questa vediamo che ci sono 3 equilibri di Nash:

$$[(NE, D), G] \qquad [(NE, G), D] \qquad [(E, D), D]$$

A questo punto si puó verificare che solo uno di questi equilibri é un equilibrio di Nash; quindi l'unico equilibrio di Nash credibile del gioco é :

$$[(E, D), D]$$

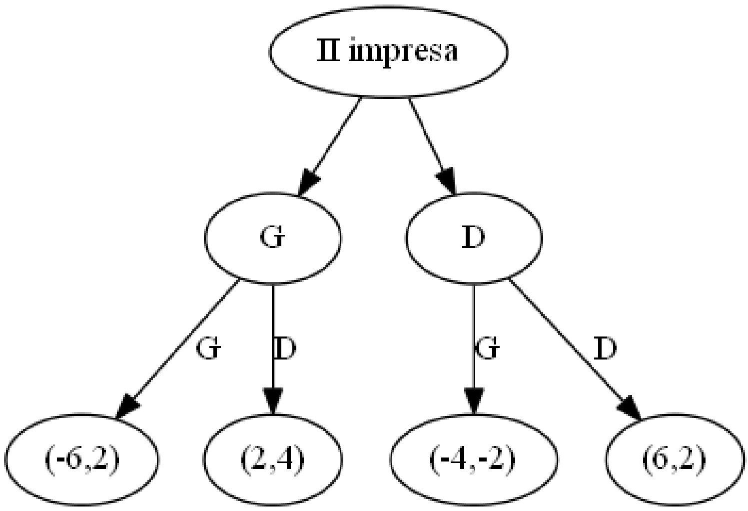


Figura 3.1: Grafo II impresa

### 3.6.3 Induzione a ritroso

Prima di introdurre il metodo dell'induzione a ritroso possiamo osservare che una semplice tabella con equilibrio di Nash riusciamo sempre a scriverla sotto forma di grafo. Per esempio consideriamo la tabella del gioco precedente; la sua struttura puó essere rappresentata attraverso la *Figura* 3.1.

L'induzione a ritroso é un altro metodo che viene utilizzato per risolvere alcuni problemi in un gioco sequenziale con informazione completa e con giocatori razionali. Il metodo consiste nel partire dall'ultimo giocatore, analizzare la sua mossa razionale e da questa ritornare indietro *a ritroso* risalendo fino alla scelta iniziale, arrivando cosí alla conclusione del gioco.

#### Esempio

Consideriamo un gioco composto da 2 giocatori: il giocatore A e il giocatore B.

La tabella che rappresenta il grafo della *Figura* 3.2 é la seguente:

| | df | dg | ef | eg |
|---|---|---|---|---|
| DF | (2,3) | (2,3) | (-1,5) | (-1,5) |
| DG | (2,3) | (2,3) | (0,4) | (0,4) |
| EF | (-2,6) | (4,4) | (-2,6) | (4,4) |
| EG | (-2,6) | (4,4) | (-2,6) | (4,4) |

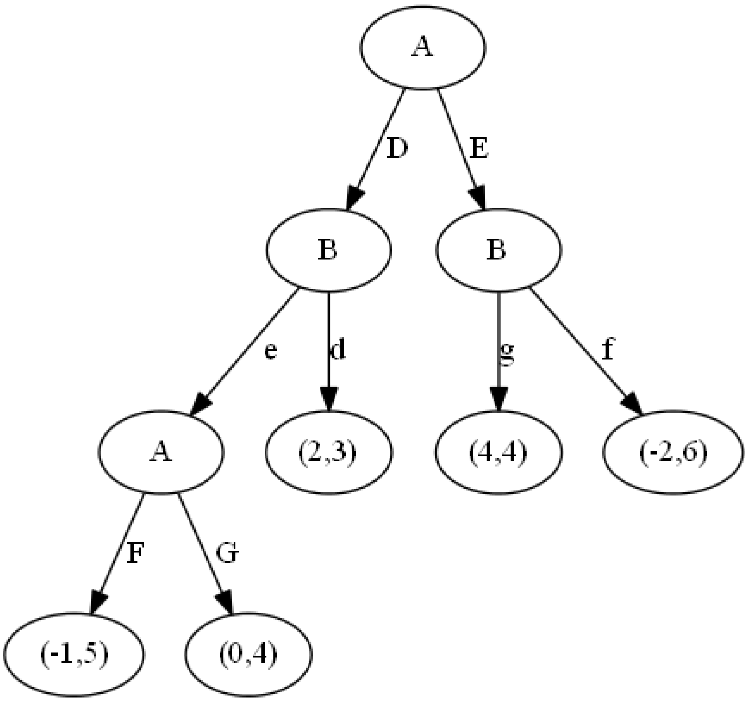


Figura 3.2: grafo per 2 giocatori

Per capire l'equilibrio, partiamo dal nodo finale:
se il giocatore A scegliesse la strategia F, otterrebbe un payoff pari a -1, inferiore a 0 se dovesse scegliere G: quindi se il gioco dovesse arrivare fin qui, il giocatore A opterebbe per G. Andando a ritroso il giocatore B ha due opzioni:

- $d \rightarrow$ otterrebbe un payoff pari a 3;
- $e \rightarrow$ egli, essendo un giocatore razionale, sa giá che se dovesse scegliere $e$, la scelta di A ricadrebbe su G, ottenendo cosí un payoff pari a 4.

Quindi se la scelta iniziale di A dovesse ricadere su D, il secondo giocatore opterebbe per $e$ e infine si giungerá alla seguente conclusione: (0,4).
Lo stesso ragionamento lo possiamo fare con la parte inferiore del grafo: Se A dovesse optera per E, la conclusione sarebbe (-2,6).
Dato che la prima scelta ricade sul giocatore A, l'equilibrio di tale gioco sará (0,4).

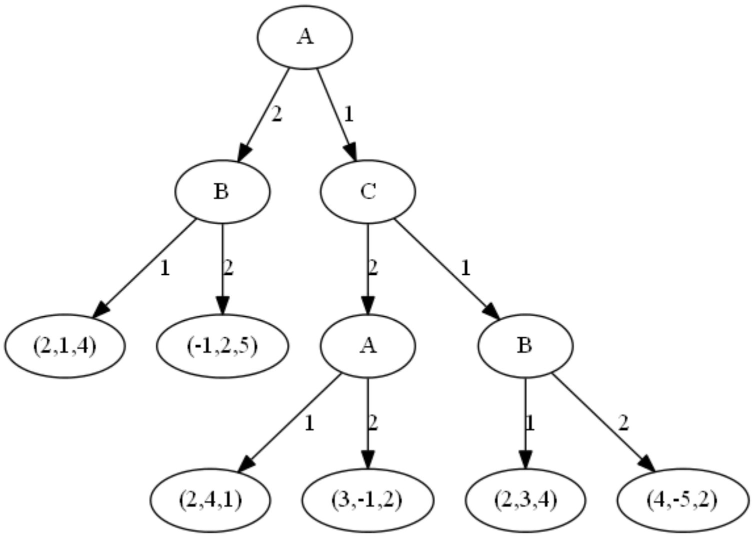


Figura 3.3: grafo per 3 giocatori

### Esempio con 3 giocatori

Partendo dal ramo superiore e ragionando a ritroso come l'esempio precedente, l'equilibrio é (2,3,4); invece in quello inferiore é (-1,2,5).
Dato che la prima scelta é quella di A, egli opterá sicuramente per il ramo superiore poiché il payoff 2 é maggiore di -1.
Quindi l'equilibrio di Nash per questo gioco, attraverso l'induzione a ritroso, é (2,3,4).

### L'indovinello dei cappelli bianchi e neri

L'induzione a ritroso puó essere applicata anche per risolvere indovinelli: un esempio é l'indovinello dei cappelli bianchi e neri.
Supponiamo che tre persone vengano catturate e condannate a morte: peró, queste hanno comunque un'unica possibilitá di salvarsi. Vengono disposti in fila indiana e viene dato a ciascuno di loro un cappello da mettere in testa scelto tra cinque: 3 bianchi e 2 neri.
Cosí facendo, il primo della fila non vede niente, il secondo vede solo il primo e il terzo vede il cappello dei primi due. Ognuno di loro avrá la possibilitá di salvarsi solamente se é in grado di dire con sicurezza il colore del proprio cappello, altrimenti verrá giustiziato. All'ultimo della fila viene chiesto il colore del proprio cappello ed egli risponde di non saperlo e viene giustiziato. Ora la stessa domanda viene fatta all'uomo in mezzo che, sentita la risposta del suo compagno, non sa cosa rispondere e viene, quindi, giustiziato. Infine tocca al primo che, sentite le riposte degli altri due, capisce il colore del proprio cappello e si salva.
Come ha fatto? Qual é il colore del suo cappello?

### Soluzione

L'uomo in fondo puó vedere i cappelli degli altri due davanti a lui; se entrambi fossero neri, egli avrebbe detto con certezza che il suo cappello sarebbe stato bianco. Quindi, dato che egli non sa dire con certezza il colore del suo cappello, le varie possibilitá dei colori dei cappelli dei primi due uomini saranno : bianco e bianco, bianco e nero, nero e bianco.
Ora la scelta va al secondo: se il cappello del primo fosse nero, allora egli saprebbe con certezza che il suo cappello sarebbe bianco, poiché le possibilitá sono che entrambi i cappelli siano bianchi oppure uno é bianco e l'altro nero. Dato che lui non puó saperlo, allora il primo uomo puó affermare con sicurezza che il suo cappello é bianco. In questo modo il primo giocatore é riuscito a capire la risposta ragionando a ritroso in base alle affermazioni fatte dai due giocatori precedenti.

## 3.7 Giochi ripetuti

I giochi ripetuti sono una particolare tipologia di giochi dinamici.
Definiamo *sottogioco* una parte dell'intero gioco che puó essere trattata come un gioco a sé. Un gioco viene detto *ripetuto* se lo stesso sottogioco viene svolto piú volte nel tempo e il payoff finale é la somma di tutti i payoff dei

sottogiochi precedenti.
Si possono presentare due casi:

- **Orizzonte temporale finito** : se c'é un solo equilibrio di Nash, poiché viene eseguito un numero finito di volte, ogni volta da entrambi i giocatori verrá scelta la strategia di equilibrio;
- **Orizzonte temporale infinito** : se sono presenti piú equilibri di Nash, si puó cercare l'equilibrio che permette di ottenere un payoff maggiore.

Il primo di questi risultati é:

### IL DILEMMA DEL PRIGIONIERO MODIFICATO

#### Ripetizione finita

Consideriamo il modello analizzato precedentemente:

| | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-5) | (0,-20) |
| Negare | (-20,0) | (-1,-1) |

L'unico equilibrio di Nash é (C,C). Il gioco, se viene ripetuto piú volte (in questo caso 2), presenta piú equilibri di Nash ma uno solo perfetto nei sottogiochi. La differenza rispetto al caso precedente é che quando scelgono la seconda volta, possono guardare ció che é accaduto prima.
Abbiamo cosí 4 sottogiochi:

1. nella prima ripetizione le mosse sono (C,C)
2. nella prima ripetizione le mosse sono (C,N)
3. nella prima ripetizione le mosse sono (N,C)
4. nella prima ripetizione le mosse sono (N,N)

Le matrici delle vincite saranno le seguenti:

| GIOCO 1 | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-10,-10) | (-5,-25) |
| Negare | (-25,-5) | (-6,-6) |

L'equilibrio di Nash é (N,N) e il payoff é (-6,-6).

| GIOCO 2 | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-25,-5) | (-20,-20) |
| Negare | (-40,0) | (-21,-1) |

L'equilibrio di Nash é (N,N) e il payoff é (-21,-1).

| GIOCO 3 | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-25) | (0,-40) |
| Negare | (-20,-20) | (-1,-21) |

L'equilibrio di Nash é (N,N) e il payoff é (-1,-21).

| GIOCO 4 | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-6,-6) | (-1,-21) |
| Negare | (-21,-1) | (-2,-2) |

L'equilibrio di Nash é (N,N) e il payoff é (-2,-2).

### Ripetizione infinita

Ora ripetiamo il caso del dilemma del prigioniero infinite volte.
Supponiamo che:

- si gioca (C,C) per $n_1$ volte;
- si gioca (N,C) per $n_2$ volte;
- si gioca (C,N) per $n_3$ volte;
- si gioca (N,N) per $n_4$ volte.

Puó capitare che qualche $n_i$ sia nullo.
I payoff di un giocatore sono ottenuti da tutti i payoff di ogni singolo periodo.
Il compito di un giocatore é quello di capire la strategia migliore. Peró, come si fa a relazionare le strategie se non si puó effettuare una somma algebrica dei singoli payoff?
É preferibile avere subito piuttosto che in futuro un reddito o una vincita. Col passare del tempo i valori dei payoff saranno differenti rispetto al presente.
Quindi la somma dei payoff viene "pesata" con il fattore di sconto e chiamata "valore attuale" della serie dei singoli payoff [4].
Sia $\delta$ il fattore di sconto e $r$ il tasso di sconto ( o tasso di interesse ). La relazione fra questi due fattori é data dalla seguente equazione:

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

Questo significa che $\delta = 1$ solamente quando $r = 0$ e che $\delta \in (0, 1)$. Piú il tasso di interesse é basso, minore é il fattore di sconto verso il futuro.

Indichiamo con $\pi$ il valore attuale dei *payoff* che in ogni singolo stadio puó essere individuato attraverso questa relazione

$$\pi + \pi\delta + \pi\delta^2 + \pi\delta^3 + .... = \frac{\pi}{1-\delta}$$

Se abbiamo una sequenza infinita di *payoff* con fattore di sconto $\delta$, il *payoff* medio $X$ deve essere uguale al valore attuale

$$\frac{\pi}{1-\delta} = X \Leftrightarrow \pi = (1-\delta)X$$

Se ipotizziamo che i 2 giocatori alternino le soluzioni con (C,C) e (N,C), la sequenza dei payoff del primo giocatore é:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = (1-\delta)(-5 - 20\delta - 5\delta^2 - 20\delta^3 - 5\delta^4 - 20\delta^5...) = \\
&= (1-\delta)[-5(1+\delta^2+\delta^4+...) - 20\delta(1+\delta^2+\delta^4+...)] = \\
&= (1-\delta)\left(-\frac{5}{1-\delta^2}\right) - (1-\delta)\left(20\delta\frac{1}{1-\delta^2}\right) = \\
&= -\frac{5+20\delta}{1+\delta}
\end{aligned}$$

Invece per il secondo giocatore la sequenza dei payoff sará la seguente:

$$\begin{aligned}
&\pi_2 = (1-\delta)(-5 - 0\delta - 5\delta^2 - 0\delta^3 - 5\delta^4 - 0\delta^5...) = \\
&= (1-\delta)[-5(1+\delta^2+\delta^4+...)] = \\
&= (1-\delta)\left(-\frac{5}{1-\delta^2}\right) \\
&= -\frac{5}{1+\delta}
\end{aligned}$$

Se $\delta$ si avvicina di molto a 1, otterremo i seguenti payoff:

1. $\lim_{\delta\to 1^-} -\frac{5+20\delta}{1+\delta} = -\frac{25}{2} = -12,5$

2. $\lim_{\delta\to 1^-} -\frac{5}{1+\delta} = -\frac{5}{2} = -2,5$

I due giocatori, peró, devono decidere se :

- cooperare per sempre

- cooperare per un po' e poi cambiare strategia

Indichiamo con $j$ la "giocata attuale" e con $k$ la "giocata precedente". Consideriamo il caso generico del dilemma del prigioniero:

| | | II giocatore | |
|---|---|---|---|
| | | Confessa | Non confessa |
| I giocatore | Confessa | (a,a) | (c,b) |
| | Non confessa | (b,c) | (d,d) |

con $c < d < a < b$.
I casi sono due:

1. se il giocatore confessa sempre il payoff sará $\frac{a}{1+\delta}$;
2. se il giocatore confessa e ad un certo punto decide di non confessare, il payoff sará $\frac{a(1-\delta^j)}{1-\delta} + b\delta^j + \frac{d\delta^{j+1}}{1-\delta}$.

É conveniente confessare sempre se

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{1+\delta} > \frac{a(1-\delta^j)}{1-\delta} + b\delta^j + \frac{d\delta^{j+1}}{1-\delta} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a > a(1-\delta^j) + b\delta^j(1-\delta) + d\delta^{j+1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0 > -a + b - b\delta + d\delta \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \delta > \frac{b-a}{b-d}
\end{aligned}$$

Questo ci dice quanto deve essere grande il fattore di sconto $\delta$ affinché ai 2 giocatori debba convenire sempre la confessione.

## 3.8 Giochi ad informazione incompleta

Fino al 1968 si ipotizzava nella teoria dei giochi che entrambi i giocatori fossero a conoscenza delle caratteristiche del gioco, sapendo giá le strategie e le funzioni di utilitá. Peró sappiamo bene che queste ipotesi molte volte non sono realistiche. Puó succedere che il giocatore I non sia a conoscenza dei payoff del giocatore II.
Come esempio andiamo ad analizzare il dilemma del prigioniero:
Supponiamo che il giocatore I confessi senza sapere la strategia scelta dal giocatore II. Tuttavia la scelta del secondo giocatore é sconosciuta al primo.
I casi, quindi, sono due:

1. il giocatore II confessa assumendo un comportamento "aggressivo"; la tabella dei singoli payoff dei due giocatori é la seguente:

| Giocatore II aggressivo | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-5) | (0,-20) |
| Negare | (-20,0) | (-1,-1) |

2. il giocatore II non confessa assumendo un comportamento da "vigliacco"; la tabella dei singoli payoff dei due giocatori é la seguente:

| Giocatore II vigliacco | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-20) | (0,-5) |
| Negare | (-20,-1) | (-1,0) |

Per ipotesi il giocatore I confessa a prescindere della strategia dell'avversario. Il II giocatore ha una strategia dominante "confessare" se é aggressivo e "negare" se é un vigliacco.
Ora, invece, supponiamo che il giocatore I scelga la sua strategia in base alla scelta del giocatore II; le tabelle dei payoff sono le seguenti:

| Giocatore II aggressivo | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-5,-5) | (0,-20) |
| Negare | (-20,0) | (-1,-1) |

| Giocatore II vigliacco | Confessare | Negare |
|---|---|---|
| Confessare | (-20,-20) | (-1,-5) |
| Negare | (-5,-1) | (0,0) |

La strategia del giocatore II non cambia: "confessare" se é aggressivo e "negare" se é un vigliacco.
Invece il gocatore I deve scegliere se "confessare" oppure "negare". Nel caso che il secondo giocatore sia aggressivo gli sarebbe piú conveniente "confessare", altrimenti "negare".
Sia $p$ la probabilitá che il giocatore II sia aggressivo e $1-p$ la probabilitá che sia un vigliacco.
Se il giocatore I decidesse di "confessare", il suo payoff sarebbe

$$p*(-5)+(1-p)*(-1)=-4p-1$$

Se, invece, decidesse di "negare", il suo payoff sarebbe

$$p*(-20)+(1-p)*(0)=-20p$$

Al giocatore I converrá "confessare" solo se la probabilitá che il giocatore II sia aggressivo é :

$$-4p-1>-20p \Leftrightarrow p>\frac{1}{16}$$

# Capitolo 4

# Il Risiko, gli scacchi e un gioco biblico

## 4.1 Risiko

Il risiko é un gioco di strategia da tavolo il cui tema principale é la guerra. Inizialmente a ciascun giocatore viene dato un obiettivo che deve mantenersi segreto nei confronti degli avversari. Il gioco termina quando un giocatore raggiunge il proprio obiettivo. Gli obiettivi possono consistere nella conquista di un certo numero di territori, nell'eliminazione di un giocatore oppure nella conquista di due o tre continenti.
Come funzionano gli attacchi?
Per cercare di conquistare un territorio l'attacco si fa attraverso l'uso di dadi (rossi per l'attaccante e blu per i difensori). Ogni giocatore, in base a quante armate possiede nel proprio territorio, puó attaccare/difendere con un numero massimo di 3 dadi (se uno dei due giocatori possiede un numero di armate inferiore a 3 nel proprio territorio, attaccherá o difenderá con il numero di armate presenti).

(**Variazione dal risiko classico**: se per eseguire un attacco, l'attaccante deve sempre lasciare minimo un carro armato nel proprio territorio, nel nostro esempio l'attacco prosegue finché uno dei due giocatori non termina le proprie armate).
Una volta lanciati i dadi si ottengono i seguenti risultati:

- Il dado piú alto ottenuto dall'attaccante si confronta con il dado piú alto del difensore;
- Se é piú alto il dado dell'attaccante, viene eliminata un'armata del difensore;

- Se é piú alto il dado del difensore, viene eliminata un'armata dell'attaccante;
- Se il punteggio é lo stesso vince sempre il difensore;

Una volta lanciati i dadi, questi vengono messi in ordine crescente e il valore piú alto dell'attaccante viene confrontato con il valore piú alto del difensore e cosí via. L'esito dell'attacco avviene a seconda delle regole elencate precedentemente.

### 4.1.1 Un caso particolare del Risiko

Prendiamo in considerazione due giocatori ciascuno dei quali possiede 10 carro armati; entrambi devono scegliere se posizionarne 4 in attacco (quindi 6 in difesa), 5 oppure 6 (si possono anche analizzare i casi in cui un giocatore puó scegliere di schierarne 7,8,9 in attacco/difesa ma per motivi di spazio analizzeró solamente queste opzioni). Ogni giocatore deve cercare di scegliere la strategia migliore senza sapere la giocata avversaria. I *payoff* vengono rappresentati dalle probabilitá degli esiti vincenti dei dadi. La tabella finale rappresenta i *payoff* calcolati attraverso la vittoria di un giocatore sia nella fase offensiva che difensiva. Prima di calcolare ogni singola probabilitá, la tabella che indica la probabilitá di un solo attacco é la seguente [10]:

| Attaccante | Difensore | Att -3 | Att -2 | Att -1 | Att -0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 dadi | 3 dadi | 38,3 % | 26,5 % | 21,5% | 13,8 % |
| 3 dadi | 2 dadi | | 29,3 % | 33,6 % | 37,2 % |
| 3 dadi | 1 dado | | | 34 % | 66 % |
| 2 dadi | 3 dadi | | 61,9 % | 25,5% | 12,6% |
| 2 dadi | 2 dadi | | 44,8 % | 32,4 % | 22,8% |
| 2 dadi | 1 dado | | | 42,1 % | 57,9 % |
| 1 dado | 3 dadi | | | 82,6% | 17,4% |
| 1 dado | 2 dadi | | | 74,5% | 25,5% |
| 1 dado | 1 dado | | | 58,3% | 41,7% |

In questa tabella vengono forniti i vari casi di un singolo attacco, in base a quanti dadi possiede l'attaccante e il difensore. Le colonne indicano con quale probabilitá in ogni singolo lancio l'attaccante perde $n$ armate con $n = 0, 1, 2, 3$. Prima di andare ad analizzare i nostri casi, calcoliamo la probabilitá di ogni singolo attacco (vince attacco = A, vince difesa = D ) quando entrambi i giocatori possiedono non piú di 3 armate. Gli attacchi proseguono finché uno dei due non termina le proprie armate giungendo cosí ad una sconfitta (per esempio in un 3 vs 3 se l'attaccante nel primo attacco perde un'armata e il difensore due, l'attacco successivo sará un 2 vs 1):

| Attacco/Difesa | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 41,7 % ; 58,3 % | 10,63 % ; 89,37 % | 1,85 % ; 98,15 % |
| 2 | 75,46 % ; 24,54 % | 36,31 % ; 63,69 % | 12,22 % ; 87,79 % |
| 3 | 91,67 % ; 8,33 % | 65,67 % ; 34,33 % | 32,84 % ; 67,16 % |

Qui sotto riportiamo la probabilitá di vittoria nelle varie strategie che entrambi i giocatori possono scegliere ( i calcoli verranno riportati nel capitolo successivo ).

- 4 VS 4
  P(A) = 32 %
  P(D) = 68 %
- 4 VS 5
  P(A) = 19,27 %
  P(D) = 80,73 %
- 4 VS 6
  P(A) = 10,98 %
  P(D) = 89,02 %
- 5 VS 4
  P(A) = 41,21 %
  P(D) = 58,79 %
- 5 VS 5
  P(A) = 27,89 %
  P(D) = 72,11 %
- 5 VS 6
  P(A) = 18,29 %
  P(D) = 81,71 %
- 6 VS 4
  P(A) = 48,41 %
  P(D) = 51,59 %
- 6 VS 5
  P(A) = 38,10 %
  P(D) = 61,90 %
- 6 VS 6
  P(A) = 25,58 %
  P(D) = 74,42 %

I risultati appena trovati possono essere rappresentati dalla seguente tabella:

| Attacco/Difesa | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| 4 | 32 % ; 68 % | 19,27 % ; 80,73 % | 10,98 % ; 89,02 % |
| 5 | 41,21 % ; 58,79 % | 27,89 % ; 72,11 % | 18,29 % ; 81,71 % |
| 6 | 48,41 % ; 51,59 % | 38,10 %; 61,90 % | 25,58 % ; 74,42 % |

Con quale probabilitá il giocatore 1 vince sia nella fase offensiva che nella fase difensiva? Per esempio se entrambi i giocatori decidessero di schierare 4 armate in attacco e 6 in difesa, la probabilitá che il giocatore 1 possa vincere entrambi gli esiti é data dalla probabilitá di vincere un 4 vs 6 in attacco e un 6 vs 4 in difesa. Per gli altri casi il ragionamento é analogo.
Ora andiamo a calcolare tutti i vari casi ed indichiamo come valore dei singoli *payoff* le probabilitá di un giocatore di vincere sia nella fase offensiva che difensiva.

1. - Il giocatore 1 attacca con 4 armate e difende con 6 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 4 armate e difende con 6 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$10,98\% * 89,02\% = 9,77\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 9,77.

2. - Il giocatore 1 attacca con 5 armate e difende con 5 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 4 armate e difende con 6 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$18,29\% * 80,73\% = 14,77\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 14,77.

3. - Il giocatore 1 attacca con 6 armate e difende con 4 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 4 armate e difende con 6 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$25,58\% * 68\% = 17,39\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 17,39.

4. 
   - Il giocatore 1 attacca con 4 armate e difende con 6 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 5 armate e difende con 5 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$19,27\% * 81,71\% = 15,75\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 15,75.

5. 
   - Il giocatore 1 attacca con 5 armate e difende con 5 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 5 armate e difende con 5 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$27,89\% * 72,11\% = 20,11\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 20,11.

6. 
   - Il giocatore 1 attacca con 6 armate e difende con 4 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 5 armate e difende con 5 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$38,10\% * 58,79\% = 22,40\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 22,40.

7. 
   - Il giocatore 1 attacca con 4 armate e difende con 6 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 6 armate e difende con 4 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$32\% * 74,42\% = 23,81\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 23,81.

8. 
   - Il giocatore 1 attacca con 5 armate e difende con 5 armate
   - Il giocatore 2 attacca con 6 armate e difende con 4 armate

   La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

   $$41,21\% * 61,90\% = 25,51\%$$

   e quindi il *payoff* in questo caso vale 25,51.

9. 
   - Il giocatore 1 attacca con 6 armate e difende con 4 armate

- Il giocatore 2 attacca con 6 armate e difende con 4 armate

La probabilitá che il giocatore 1 vinca entrambi gli attacchi é

$$48,41\% * 51,59\% = 24,97\%$$

e quindi il *payoff* in questo caso vale 24,97.

I calcoli per i *payoff* per il giocatore 2 sono analoghi.
Otteniamo cosí la seguente tabella simmetrica

| Giocatore 1/ Giocatore 2 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|
| 4 | 9,77 ; 9,77 | 15,75 ; 14,77 | 23,81 ; 17,39 |
| 5 | 14,77 ; 15,75 | 20,11 ; 20,11 | **25,51 ; 22,40** |
| 6 | 17,39 ; 23,81 | **22,40 ; 25,51** | 24,97 ; 24,97 |

Nella tabella vengono evidenziati due equilibri di Nash.

## 4.2 Zermelo e gli scacchi

Gli scacchi vengono considerati come un gioco da tavolo di strategia in cui si sfidano due giocatori: uno che usa i pezzi bianchi e l'altro che usa i pezzi neri. La scacchiera é composta da 64 caselle di due colori alternati, sulla quale vengono posizionati 32 pezzi; ogni giocatore possiede: due torri, due cavalli, due alfieri, un re, una regina e otto pedoni. Uno dei personaggi piú famosi che si occupó degli scacchi é il matematico e logico tedesco Ernest Zermelo, il quale fu un precursore della teoria dei giochi. Egli formuló un teorema molto importante ed efficace sugli scacchi [1,p.2]:

**Teorema 2.** *Nel gioco degli scacchi vale solamente una delle seguenti opzioni:*

- ***Vince il bianco****: il bianco usa una strategia tale che, qualunque sia la strategia scelta dal nero, vince;*
- ***Vince il nero****: il nero usa una strategia tale che, qualunque sia la strategia scelta dal bianco, vince;*
- ***Pareggio****: Sia il bianco che il nero adottano una strategia che garantisce almeno il pareggio qualunque cosa faccia l'altro.*

*Dimostrazione.* Noi dimostreremo il risultato per una famiglia di giochi che comprende gli scacchi. Qualunque gioco in questa famiglia é caratterizzato da:

1. una posizione degli scacchi
2. un'indicazione di " chi deve muovere "
3. un intero positivo $n$

con la consapevolezza che se il gioco non termina con uno scacco o é un pareggio "per cui $n$ puó fare un'unica mossa", allora é dichiarato un pareggio. Per dimostrare tale risultato usiamo il metodo dell'induzione su $n$. La ragione per cui viene usata la famiglia piú grande é che si rafforza l'ipotesi induttiva e cosí la prova induttiva risulta possibile.
Supponiamo $n = 1$.

Se il bianco esegue una mossa, il nero puó eseguire la stessa mossa oppure no; nel primo caso il nero puó forzare la vittoria, mentre nel secondo caso entrambi i giocatori possono forzare un pareggio. La stessa cosa vale per il bianco.
Ora assumiamo che il teorema sia vero per $n \leq m - 1$ e proviamo che sia vero per $m$. Supponiamo che siano i neri a fare la prima mossa; con l'ipotesi d'induzione, dopo la prima mossa, si ripresentano le tre ipotesi del teorema ( il bianco puó forzare la vittoria, il nero puó forzare la vittoria, entrambi possono forzare per un pareggio ).
In altre parole, sia $x$ la prima mossa del nero; ad essa verrá associata una lettera che puó essere:

- **n** $\rightarrow$ se il nero puó forzare la vittoria;
- **b** $\rightarrow$ se il bianco puó forzare la vittoria;
- **p** $\rightarrow$ se entrambi possono forzare il pareggio.

Ci saranno cosí i tre seguenti casi :

1. se c'é una mossa $x$ del nero tale che $f(x) = n$, in seguito il nero puó forzare la vittoria nel gioco originale;
2. se c'é una mossa $x$ del bianco tale che $f(x) = b$, in seguito il bianco puó forzare la vittoria nel gioco originale;
3. se c'é una mossa $x$ tale che $f(x) = p$, in seguito il nero puó forzare la vittoria nel gioco originale; quindi il nero puó forzare almeno un pareggio.

Questo completa la dimostrazione del teorema.

$\square$

Ora possiamo rappresentare il teorema di Zermelo attraverso delle tabelle. Le righe rappresentano le strategie dei bianchi, mentre le colonne quelle dei neri. I numeri 1,2,... indicano le strategie. Siano $b$, $n$ e $d$ le strategie scelte rispettivamente dal bianco, nero e per il pareggio.
Se il bianco puó forzare la vittoria, allora esiste una strategia del bianco che, qualunque sia quella scelta dal nero, assicura la vittoria del bianco. Analogamente la stessa cosa vale per il nero.

| Strategia del bianco / Strategia del nero | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|
| 1 | b | n | b | ... |
| 2 | p | b | p | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |
| k | b | b | b | b...b |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

Il bianco puó forzare una vittoria se e solo se c'é una riga $k$ che é occupata solamente da $b$.

| Strategia del bianco / Strategia del nero | 1 | 2 | 3 | ... | k | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | p | p | n | ... | n | ... |
| 2 | b | n | p | ... | n | ... |
| 3 | b | b | b | ... | n | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | b b | |

Il nero puó forzare una vittoria se e solo se c'é una colonna $k$ che é occupata solamente da $n$.

| Strategia del bianco / Strategia del nero | 1 | 2 | 3 | ... | k | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | b | p | n | ... | p | ... |
| 2 | p | n | n | ... | n | ... |
| 3 | b | b | n | ... | n | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | b b | |
| $k'$ | b | p | b | b or p | p | b or p |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | n or p | |

Entrambi possono forzare un pareggio se e solo se ci sono una colonna $k$ che non ha nessun $b$ e una riga $k'$ che non ha nessun $n$.

## 4.3 Un triangolo amoroso : Nabal, Abigail e David

In questo esempio andremo ad analizzare un triangolo amoroso i cui protagonisti sono : Abigail, vedova di Nabal e moglie di David.
Dopo la riconciliazione di Saul con David nella caverna, David tornó nella distesa selvaggia dove inizió ad avere contatti con un uomo davvero ricco, il cui pastore non era stato disturbato da lui e i suoi uomini. Il nome dell'uomo era Nabal e il nome della moglie era Abigail. La donna era bella ed intelligente ma, l'uomo, era duro e malvagio.
David spedí 10 giovani uomini per salutare Nabal, ma egli chiese anche qualcosa in cambio per la protezione, o almeno di non interferire con il pastore di Nabal : *"Ricevi cortesemente questi giovani uomini, essendo in un'occasione di festa. Per favore dona ai tuoi servitori e a tuo figlio David, tutto ció che puoi"* (1 SAM. 25:17).
Quando Nabal rifiutó questa richiesta, David riuní 400 dei suoi uomini e li preparó a combattere. Prima, pensó di far avvicinare uno dei suoi uomini ad Abigail, condannando il suo "bruto" marito e comunicandole che lui sarebbe stato una rovina per la sua famiglia. Abigail, inorridita, senza dire niente a Nabal, mise assieme, velocemente, dei regali per David, che aveva giurato di non lasciare Nabal "uno solo dei suoi uomini" vivo entro la mattina.
Quando Abigail tornó da David, scese velocemente dall'asino e si mise a faccia in giú davanti a David, inchinandosi al suolo. Distesa ai suoi piedi imploró : *"Lasciate che la vergogna sia mia, mio Signore, ma date alla vostra serva la possibilitá di parlarvi ed ascoltare la mia richiesta. Per favore mio Signore, non date ascolto a quello sciagurato di Nabal. Per lui é giá troppo ció che dice il suo nome: esso significa " scosternato " e lui é un maleducato"*.
Abigail diede a David i suoi doni e gli disse per quale motivo egli fosse protetto da Dio ed il suo massacro fosse superfluo. David rispose con gratitudine alla prudenza di Abigail e a Dio per averla mandata da lui, ritirando cosí l'attacco.
La seconda fase del gioco cominció quando Abigail spiegó al marito la veritá della sua comparsa davanti a David: quando Abigail tornó a casa da Nabal, lui stava dando una festa in casa, una festa adatta ad un re; Nabal era di umore allegro e tanto ubriaco, quindi lei non gli disse nulla fino all'alba. Il mattino dopo quando Nabal si fu svegliato dall'effetto del vino, sua moglie gli raccontó tutto quello che successe; il suo coraggio morí ed egli diventó come una pietra. Circa 10 giorni dopo, il Signore colpí Nabal che morí.
David mandó dei messaggeri per proporre ad Abigail di prenderlo in sposo. Lei immediatamente si chinó con il viso sul terreno e disse: *"La vostra dome-*

*stica é pronta per diventare la vostra ancella, per lavare i piedi ai servi del mio signore".*

Se uno riesce ad eliminare gli elementi migliori di questa storia, Brams [3,p.149] crede che ci sia un gioco interessante che si nasconde in superficie. Abigail é senza dubbio una donna infelice all'interno del suo matrimonio; lei detesta Nabal. Quindi, dopo aver sentito che David era pronto a vendicarsi per essere stato offeso da Nabal, lei non ci pensa due volte a prendere in mano la situazione. Senza il consenso del marito, lei da il via alla prima mossa di David - di accettare o meno la sua richiesta - nel gioco dell'albero raffigurato nell'immagine 4.1.

Se David accetta la richiesta di Abigail, la stessa Abigail puó informare Nabal della sua intercessione davanti a David oppure non parlare. Mentre Abigail sa che David vuole salvarla, il suo "rude" marito rimane una spina nel fianco. Mostrando il suo successo con David, e sminuendo l'incapacitá di Nabal contro di lui, l'autore ritiene che Abigail sia speranzosa di provocare la sua morte. Alla fine, dopo che Nabal esce fuori di scena, David potrebbe scegliere o meno di proporsi alla bellissima donna che tanto lo ha sedotto. Dopo la vedovanza, tale comportamento non era tanto sconveniente, e nemmeno sconveniente lo era per Abigail accettando la proposta di David. Brams crede che le preferenze di David e Abigail per i 4 differenti risultati raffigurati nell'immagine 4.1 fossero identici. Entrambi preferivano sopra ogni cosa il matrimonio (4); se David non avesse fatto la proposta, le loro prospettive sarebbero state meno certe, quindi Brams valuta questo risultato come il *"next best"* (3). Sarebbe stato peggio se Abigail fosse tornata indietro, informando Nabal della sua infedeltá (2); mentre per Nabal non sarebbe presumibilmente stato peggio per essere stato cosí ingannato; questo é buono sia per David che per Abigail, in quanto avrebbero ancora avuto a che fare con lui.

L'autore ritiene che il peggior esito per David e Abigail sarebbe avvenuto se David avesse rifiutato la supplica della donna all'inizio; per David sarebbe stata una colpa ottenere giustizia con il sangue, in quanto avrebbe compromesso il suo futuro potere sovrano.

Abigail, probabilmente, se fosse stata a lungo con Nabal, sarebbe stata uccisa dall'arroganza di suo marito, e David ovviamente non avrebbe potuto sposare la donna che tanto lo aveva affascinato.

Procedendo a ritroso fino al gioco dell'albero in figura 4.1, é facile far notare che l'idea di Abigail e David é quella di sposarsi, ed é anche l'unica che porta al successo per entrambi i giocatori in questo gioco di totale accordo.

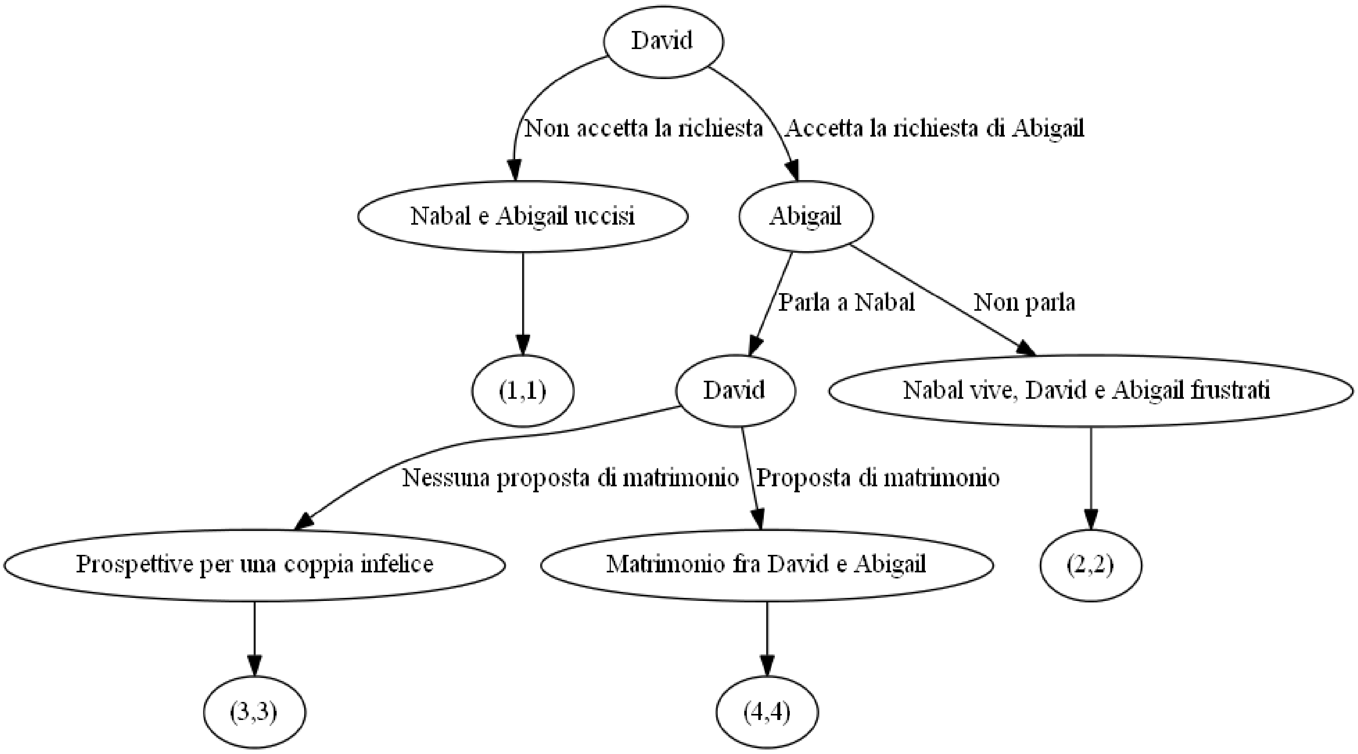


Figura 4.1: Nabal, David e Abigail

# Capitolo 5

# Calcoli di probabilitá: il Risiko

In questo capitolo calcoleremo le probabilitá di ogni singolo attacco. Prima di analizzare i nostri 9 casi, per semplificare i conti, troviamo le probabilitá di vittoria nel caso in cui i dadi non siano piú di 3 per ogni singolo giocatore; i calcoli sono stati eseguiti tutti con l'uso di una calcolatrice scientifica. Nei vari grafi tra le frecce ci sará un numero che indicherá il numero di armate vinte dall'attaccante:

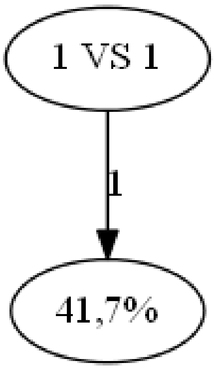


Figura 5.1: 1 VS 1

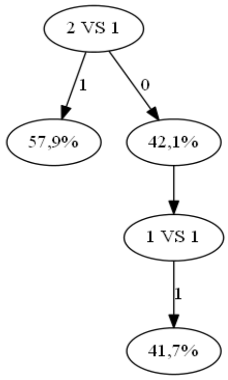


Figura 5.2: 2 VS 1

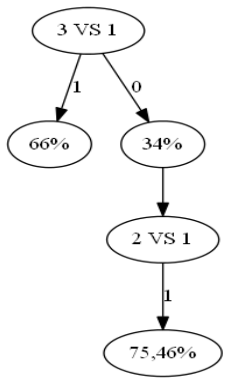


Figura 5.3: 3 VS 1

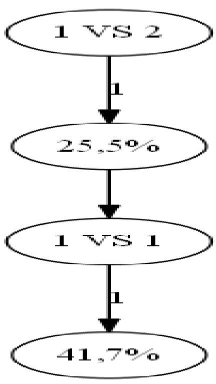


Figura 5.4: 1 VS 2

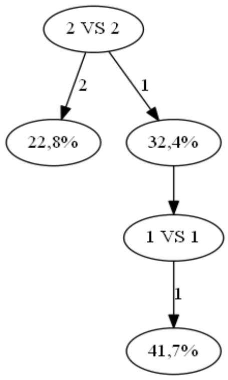


Figura 5.5: 2 VS 2

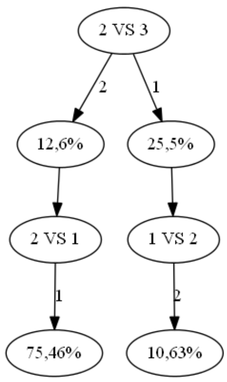


Figura 5.6: 2 VS 3

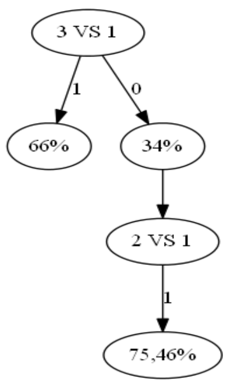


Figura 5.7: 3 VS 1

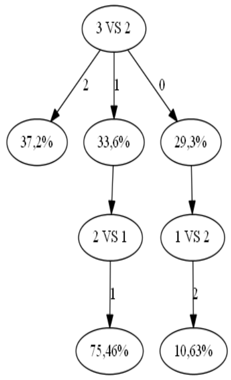


Figura 5.8: 3 VS 2

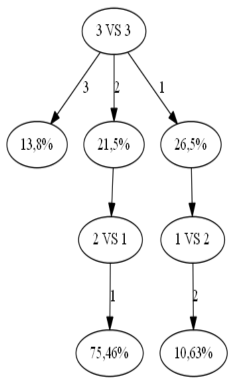


Figura 5.9: 3 VS 3

Le probabilitá di ogni attacco sono:
1 vs 1 = 41,7%
2 vs 1 = 57,9% + 42,1% * 41,7% = 75,46 %
3 vs 1 = 66 % + 34 % * 75,46 % = 91,67 %
1 vs 2 = 25,5 % * 41,7 % = 10,63 %
2 vs 2 = 22,8 % + 32,4 % * 41,7 % = 36,31 %
3 vs 2 = 37,2 % + 33,6 % * 75,46 % + 29,3 % * 10,63 % = 65,67 %
1 vs 3 = 17,4 % * 10,63 % = 1,85 %
2 vs 3 = 12,6 % * 75,46 % + 25.5 % * 10,63 % = 12,22 %
3 vs 3 = 13,8 % + 21,5 % * 75,46 % + 26,5 % * 10,64 % = 32,84 %

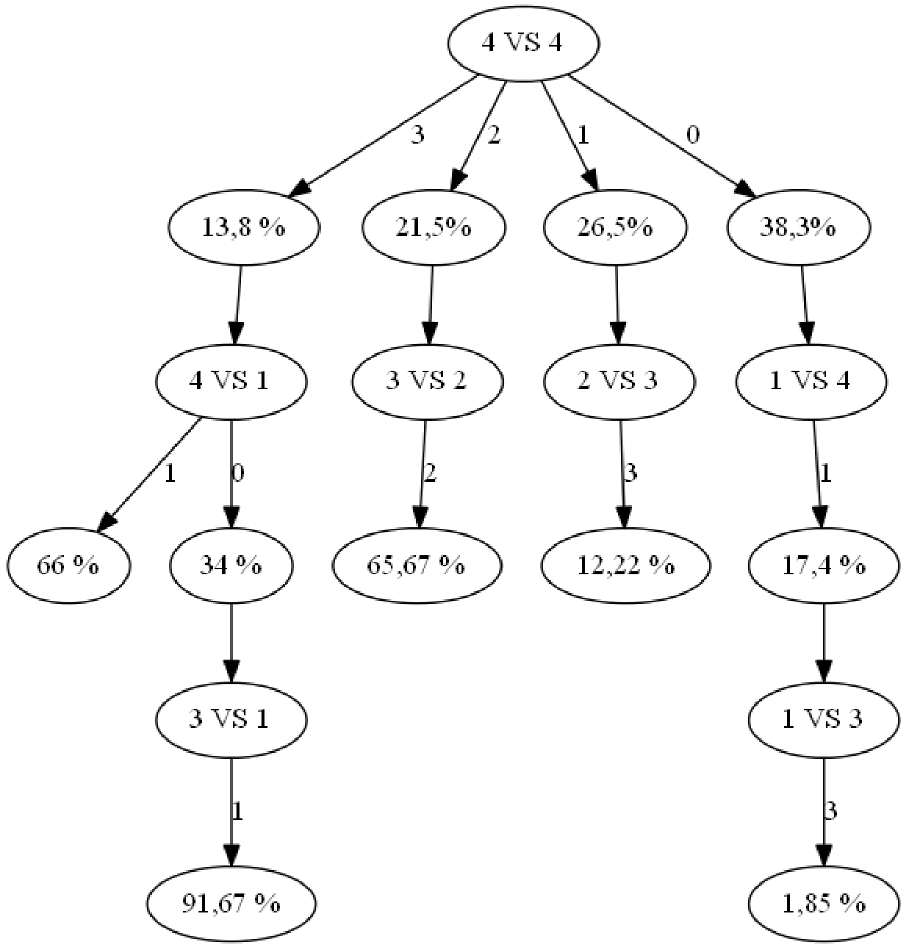


Figura 5.10: 4 VS 4

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$\begin{aligned} P(A) = {} & \{13,8\% * [66\% + (34\% * 91,67\%)]\}+ \\ & + \{21,5\% * 65,67\%\}+ \\ & + \{26,5\% * 12,22\%\}+ \\ & + \{38,3\% * 17,4\% * 1,85\%\} = \\ & = 32\% \end{aligned}$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 32\% = 68\%$$

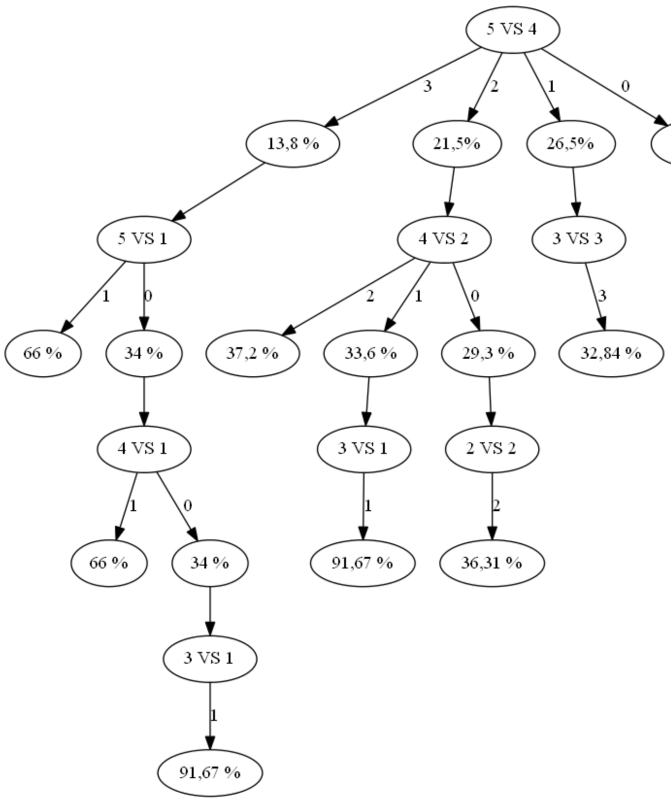


Figura 5.11: 5 VS 4

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$\begin{aligned} P(A) = &\{13,8\% * [66\% + 34\% * (66\% + 34\% * 91,67\%)]\} + \\ &+ \{21,5\% * [37,2\% + (33,6\% * 91,67\%) + (29,3\% * 36,31\%)]\} + \\ &+ \{26,5\% * 32,84\%\} + \\ &+ \{38,3\% * [(12,6\% * 36,31\%) + (25,5\% * 1,85\%)]\} = \\ &= 41,21\% \end{aligned}$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 41,21\% = 58,79\%$$

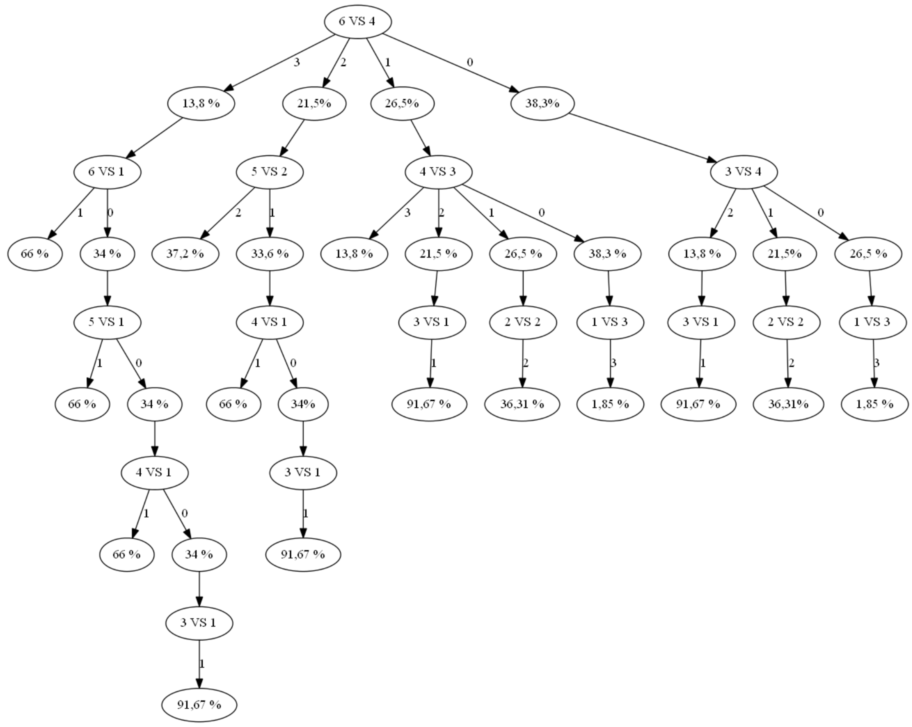


Figura 5.12: 6 VS 4

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$\begin{aligned}P(A) = &\{13,8\% * [66\% + 34\% * (66\% + 34\% * (66\% + 34\% * 91,67\%))]\} +\\ &+ \{21,5\% * [37,2\% + 33,6\% * (66\% + 34\% * 91,67\%)]\} +\\ &+ \{26,5\% * [13,8\% + (21,5\% * 91,67\%) + (26,5\% * 36,31\%) + (38,3\% * 1,85\%)]\} +\\ &+ \{38,3\% * [(13,8\% * 91,67\%) + (21,5\% * 36,31\%) + (26,5\% * 1,85\%)]\} =\\ &= 48,41\%\end{aligned}$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 48,41\%\% = 51,59\%$$

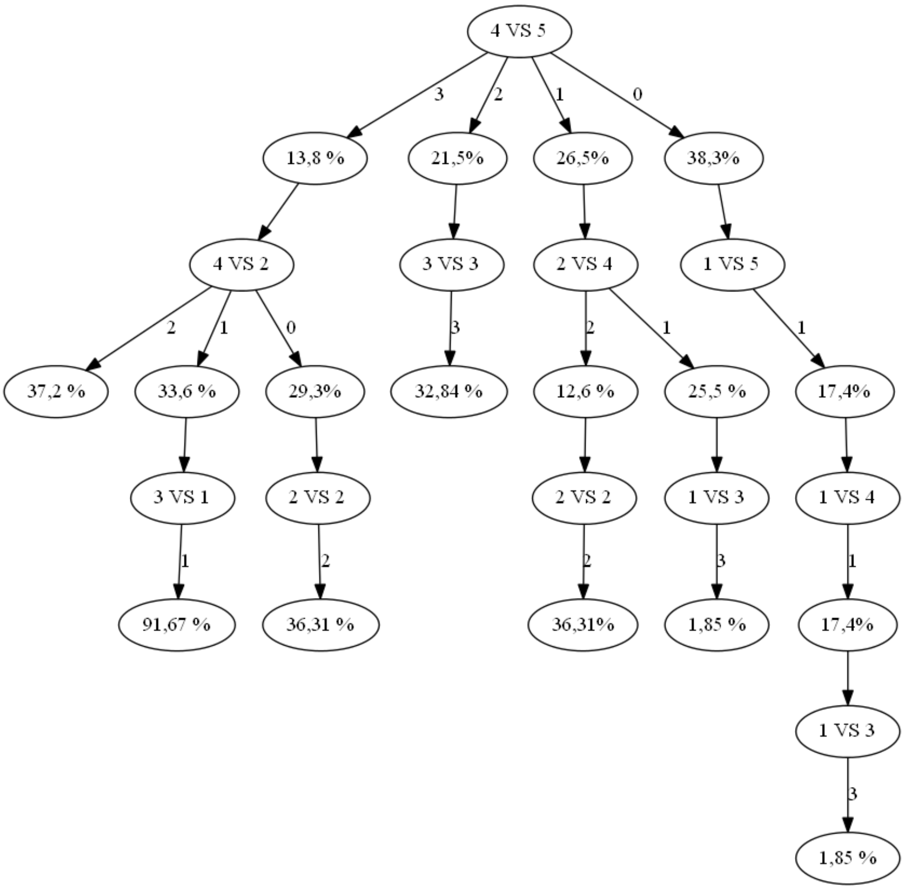


Figura 5.13: 4 VS 5

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$\begin{aligned}
P(A) = {} & \{13,8\% * [37,2\% + (33,6\% * 91,67\%) + (29,3\% * 36,31\%)]\} + \\
& + \{21,5\% * 32,84\%\} + \\
& + \{26,5\% * [(12,6\% * 36,31\%) + (25,5\% * 1,85\%)]\} + \\
& + \{38,3\% * 17,4\% * 17,4\% * 1,85\%\} = \\
& = 19,27\%
\end{aligned}$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 19,27\% = 80,73\%$$

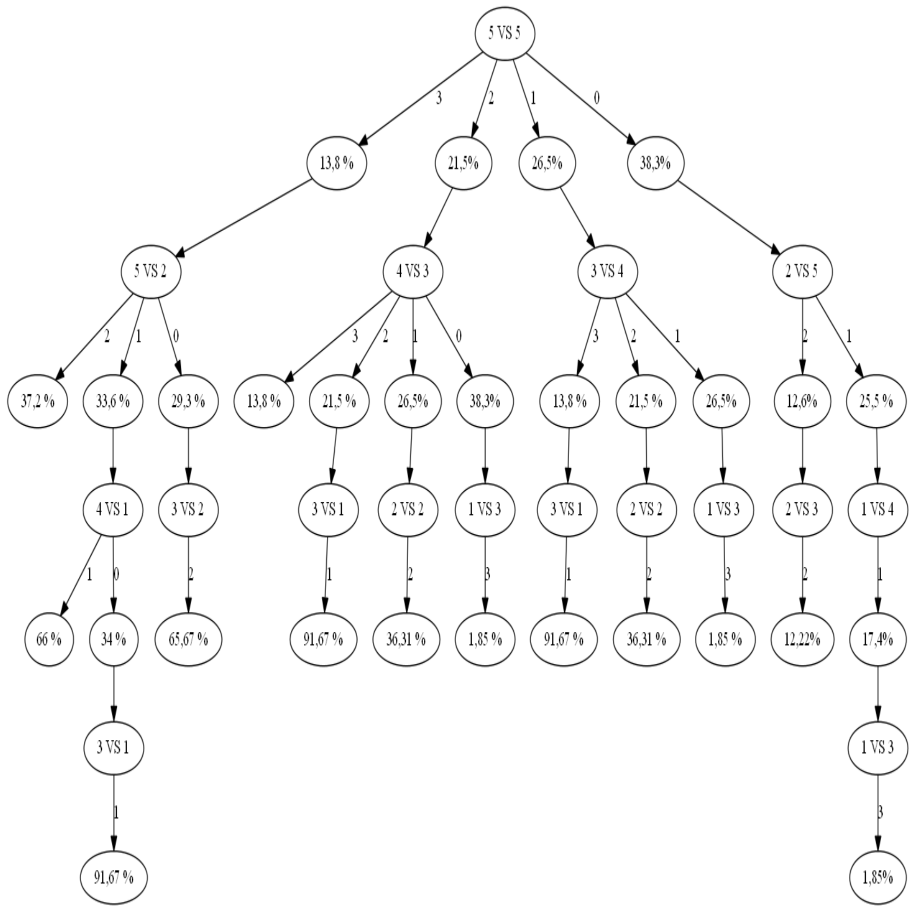


Figura 5.14: 5 VS 5

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$\begin{aligned}
P(A) = &\{13,8\% * [37,2\% + (33,6\% * (66\% + 34\% * 91,67\%)) + (29,3\% * 65,67\%)]\}+\\
&+ \{21,5\% * [13,8\% + (21,5\% * 91,67\%) + (26,5\% * 36,31\%) + (38,3\% * 1,85\%)]\}+\\
&+ \{26,5\% * [(13,8\% * 91,67\%) + (21,5\% * 36,31\%) + (26,5\% * 1,85\%)]\}+\\
&+ \{38,3\% * [(12,6\% * 12,22\%) + (25,5\% * 17,4\% * 1,85\%)]\} =\\
&= 28,07\%
\end{aligned}$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 28,07\% = 71,93\%$$

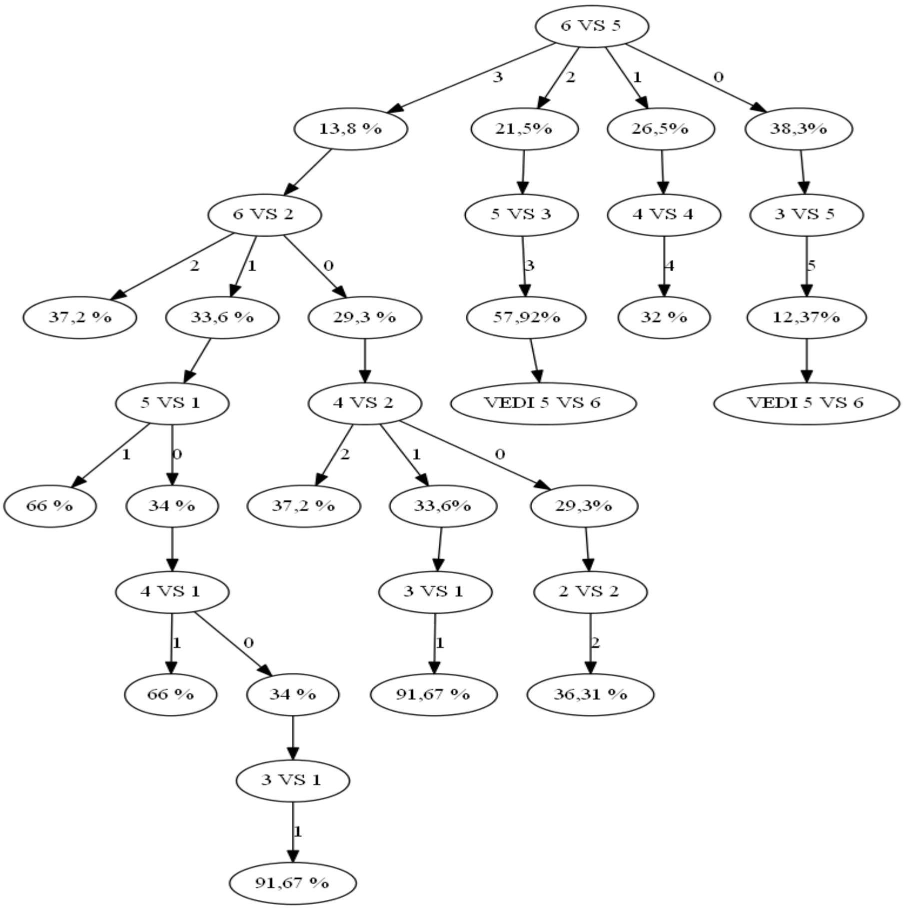


Figura 5.15: 6 VS 5

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$
\begin{aligned}
P(A) = &\{13,8\% * [37,2\% + 33,6\% * (66\% + 34\% * (66\% + 34\% * 91,67\%))+ \\
&+ 29,3\% * (37,2\% + 33,6\% * 91,67\% + 29,3\% * 36,31\%)]\}+ \\
&+ \{21,5\% * 56,77\%\}+ \\
&+ \{26,5\% * 32\%\}+ \\
&+ \{38,3\% * 11,78\%\} = \\
&= 38,10\%
\end{aligned}
$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 38,10\% = 61,90\%$$

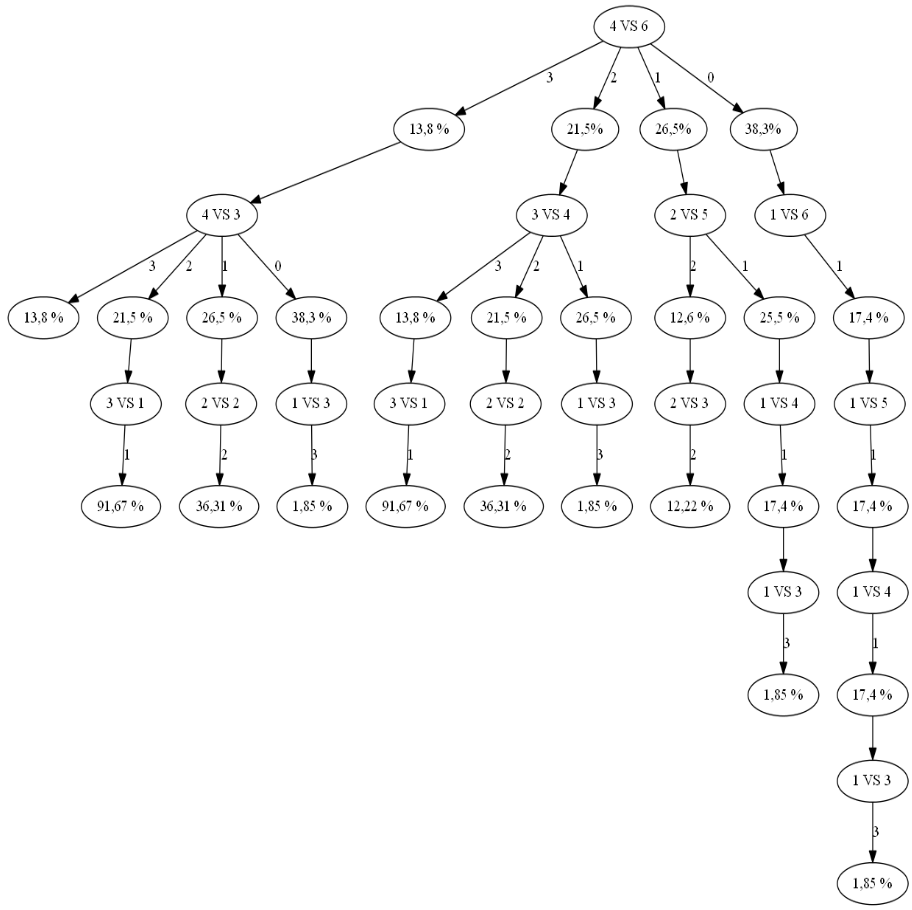


Figura 5.16: 4 VS 6

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$
\begin{aligned}
P(A) = &\{13,8\% * [13,8\% + (21,5\% * 91,67\%) + (26,5\% * 36,31\%) + (38,3\% * 1,85)\%]\}+ \\
&+ \{21,5\% * [(13,8\% * 91,67\%) + (21,5\% * 36,31\%) + (26,5\% * 1,85\%)]\}+ \\
&+ \{26,5\% * [(12,6\% * 12,22\%) + (25,5\% * 17,4\% * 1,85\%)]\}+ \\
&+ \{38,3\% * 17,4\% * 17,4\% * *17,4\% 1,85\%]\} = \\
&= 10,98\%
\end{aligned}
$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 10,98\% = 89,02\%$$

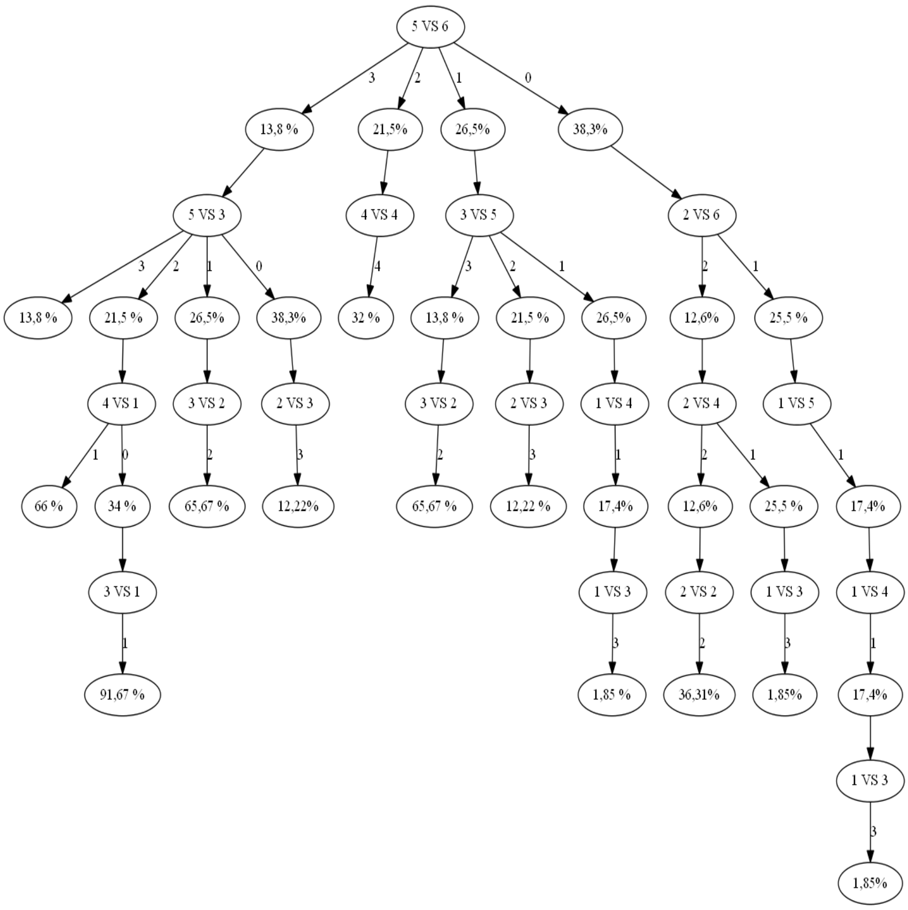


Figura 5.17: 5 VS 6

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$
\begin{aligned}
P(A) = {} & \{13,8\% * [13,8\% + (21,5\% * (66\% + 34\% * 91,67\%)) + 26,5\% * 65,67\% + 38,3\% * 12,22\%]\} \\
& + \{21,5\% * 32\%\} + \\
& + \{26,5\% * [(13,8\% * 65,67\%) + (21,5\% * 12,22\%) + (26,5\% * 17,4\% * 1,85\%)]\} + \\
& + \{38,3\% * [12,6\% * (12,6\% * 36,31\% + 25,5\% * 1,85\%) + 25,5\% * 17,4\% * 17,4\% * 1,85\%]\} = \\
& = 18,29\%
\end{aligned}
$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 18,29\% = 81,71\%$$

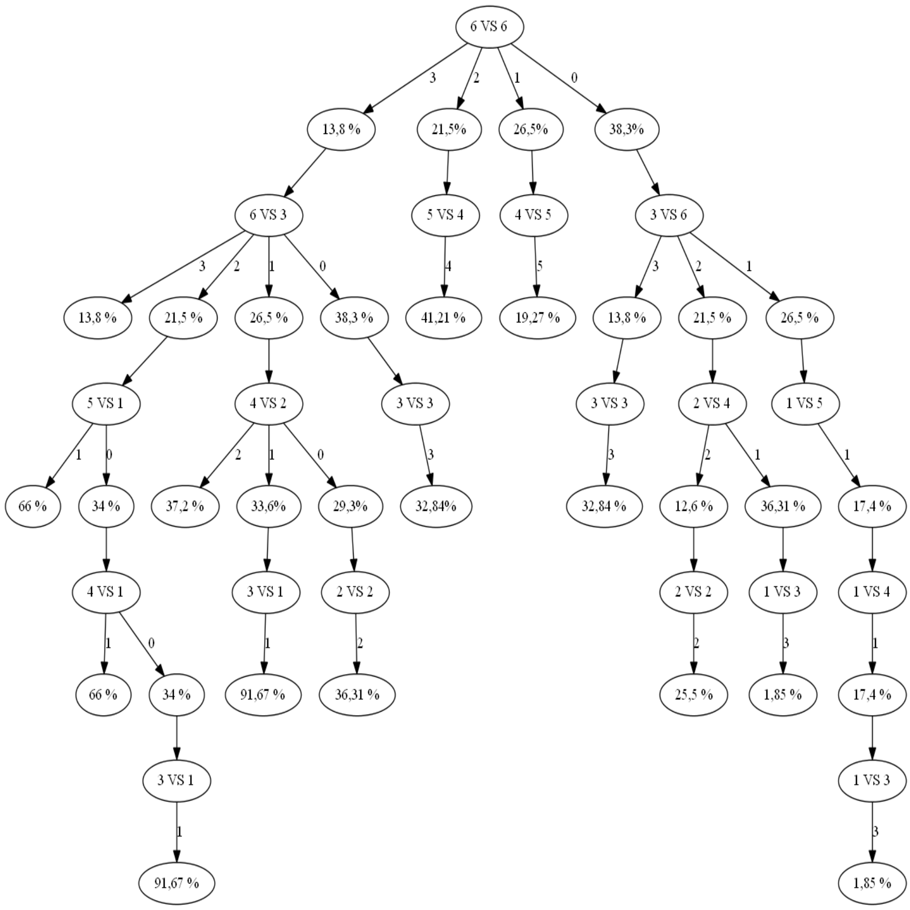


Figura 5.18: 6 VS 6

La probabilitá di vittoria dell'attacco é:

$$
\begin{aligned}
P(A) = {} & \{13,8\% * [13,8\% + 21,5\% * (66\% + 34\% * (66\% + 34\% * 91,67\%)) + \\
& + 26,5\% * (37,2\% + 33,6\% * 91,67\% + 29,3\% * 36,31\%) + 38,3\% * 32,84\%]\} + \\
& + \{21,5\% * 41,21\%\} + \\
& + \{26,5\% * 19,27\%\} + \\
& + \{38,3\% * [(13,8\% * 32,84\%) + 21,5\% * (12,6\% * 25,5\% + 36,31\% * 1,85\%)] + \\
& + 26,5\% * 17,4\% * 17,4\% * 1,85\%\} = \\
& = 25,58\%
\end{aligned}
$$

Analogamente la probabilitá di vittoria della difesa é:

$$P(D) = 1 - 25,58\% = 74,42\%$$

## Ringraziamenti

Desidero dedicare questa tesi a tutti coloro che mi hanno aiutato e sostenuto in questi anni. Un ringraziamento speciale alla mia famiglia che mi ha sempre aiutato nei momenti critici e di difficoltá.
Grazie ai miei amici che mi hanno fatto passare bei momenti in compagnia. Sono stati anni bellissimi passati in questa facoltá soprattutto per la disponibilitá di tutte le persone presenti a cui mi sono appoggiato nei momenti in cui avevo bisogno. Un ultimo ringraziamento ai professori Negrini e Plazzi che hanno reso possibile la creazione di questa tesi. Questa non é la fine, ma solamente l'inizio verso una nuova avventura!!

# Bibliografia


K1 [1] Aumann Robert John, *Lectures on game theory*, 1989

K2 [2] Biló Vittorio, *http://ithaca.unisalento.it/nr-02_12_13/bilo.pdf*

K3 [3] Brams Steven J. , *Game Theory and the Hebrew Bible*, 1980

K4 [4] Chiarini Bruno, *Un mondo in conflitto : teoria dei giochi applicata*, Mondadori, Bologna, 2014

K5 [5] D'Amore Bruno, *Elementi di teoria dei giochi*, , Zanichelli, 1976

K6 [6] Fragnelli Vito, *Dispense su teoria dei giochi* http://people.unipmn.it/fragnelli/dispense/TdGB.PDF

K7 [7] Gibbons Robert, *Teoria dei giochi*, , Il Mulino, 1994

K8 [8] Lucchetti Roberto, *Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi*, Mondadori, Bologna, 2002

K9 [9] Patrone Fioravante, *Decisori (razionali) interagenti: Una introduzione alla teoria dei giochi* , Feltrinelli, 2006

K10 [10] Tabella probabilitá Risiko http://pmassio.altervista.org/risikobase.pdf

K11 [11] Von Neumann John, *La teoria dei giochi, Sasso, carta, teorema*, EDIZIONE RBA 2013