Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Uno studio analitico ed algebrico della trasformata di Radon ed alcune sue applicazioni

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Correlatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Filippo Gaggioli

Anno Accademico 2015/2016

Abstract

Lo scopo di questa tesi si articola in tre punti. In primo luogo, ci proponiamo di definire, sia in ambito analitico che in un contesto piú algebrico e geometrico, la trasformata di Radon, di discutere la possibilitá di un'eventuale generalizzazione a spazi non euclidei, e di presentare le sue proprietá piú caratteristiche.

In secondo luogo vogliamo dimostrare, sfruttando un collegamento di questa con la trasformata di Fourier, che la trasformata di Radon é un'applicazione iniettiva tra spazi funzionali e che é dunque invertibile, per poi descrivere uno dei possibili metodi formali di inversione. Accenneremo anche alle problematiche che insorgono nell'utilizzare l'antitrasformata di Radon in situazioni reali, e alle relative soluzioni.

Infine, concluderemo la trattazione con una breve ma, ottimisticamente, delucidatrice, introduzione ad alcuni esempi di applicazione della trasformata di Radon a vari ambiti fisici e matematici.

Indice

Introduzione

Nel 1917 J. Radon ha dimostrato che una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^3$ puó essere determinata esplicitamente a partire dai suoi integrali sui piani in $\mathbb{R}^3$. Questo risultato, sviluppato in seno all'allora neonata Teoria della Misura, fu per lungo tempo patrimonio esclusivo dei dipartimenti di matematica, risalendo le prime, fondamentali, applicazioni solamente agli ultimi anni cinquanta. Nella presente trattazione definiremo la trasformata di Radon di funzioni a valori reali definite su $\mathbb{R}^n$, cosí come faremo per il "problema dell'inversione" e per tutti gli argomenti ad essa collaterali. Ciónonostante sará spesso sufficiente commentare solamente i casi $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, in quanto questo permette di mantenere la notazione piú fluida senza rinunciare ad implicazioni concettuali, ed allo stesso tempo di rendere piú evidenti le connessioni con le applicazioni tecnologiche, matematiche e fisiche dell'argomento in questione. Per gli scopi della presente trattazione sará sufficiente considerare funzioni appartenenti alla classe delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida o alla classe C_0^∞ delle funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto, cosí da aver garantite, quando necessario, tutte le proprietá necessarie ai fini dell'integrazione.

Una convenzione

I vettori nello spazio della trasformata saranno indicati, generalmente, con i simboli ξ, ζ, ω, non in grassetto. I vettori di $\mathbb{R}^n$ saranno invece scritti nel convenzionale grassetto.

Capitolo 1

La trasformata di Radon

1.1 La trasformata di Radon in $\mathbb{R}^n$

La trasformata di Radon é un'applicazione che lega una funzione f ai suoi integrali su una foliazione k-dimensionale della varietá di definizione. Nel nostro caso tratteremo prevalentemente il caso $k = n - 1$, ovvero, poiché la varietá in questione é semplicemente $\mathbb{R}^n$, ci occuperemo degli integrali di f sugli elementi dell'insieme P^n degli iperpiani di $\mathbb{R}^n$. La trasformata di Radon della funzione f é definita come una funzione $\check{f}$ di P^n data da

$$\check{f} = \mathcal{R}f = \int_L f(\mathbf{x})d\mu(\mathbf{x}) \tag{1.1.1}$$

dove $d\mu(x)$ é la misura euclidea di una porzione infinitesima dell'iperpiano L.

Se $n = 2$, dato che P^n rappresenta l'insieme delle rette che attraversano $\mathbb{R}^2$, scritta l'equazione delle retta L in forma normale

$$p = x\cos\phi + y\sin\phi, \tag{1.1.2}$$

possiamo esplicitare le coordinate di $\check{f}$ e scrivere

$$\check{f}(p,\phi) = \mathcal{R}f = \int_L f(\mathbf{x})ds, \tag{1.1.3}$$

dove L rappresenta la retta individuata dai parametri p e ϕ. Per quanto teoricamente quanto scritto sopra non presenti alcun problema, intervenire attivamente sul dominio d'integrazione, al variare di p e di ϕ, non é operativamente efficace. Conviene piuttosto far uso della funzione delta di Dirac e scrivere, passando ad un integrale sull'intero piano[1],

$$\check{f}(p,\phi) = \mathcal{R}f = \int f(\mathbf{x})\delta(p - \xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.1.4}$$

[1]Da questo momento in poi sottintenderemo il dominio d'integrazione quando questo coincide con l'intera varietá.

dove riconosciamo nell'argomento della delta di Dirac l'equazione implicita della retta, una volta definito ξ come il versore angolare unitario $\xi = (\cos\phi, \sin\phi)$. Questo formalismo, oltre al vantaggio appena discusso, si presta immediatamente ad una generalizzazione al caso n-dimensionale: basta infatti usare come argomento della funzione delta l'equazione implicita dell'iperpiano[2] determinato dai parametri di $\check{f}$. Esplicitate le variabili della $\check{f}$, appare evidente che il suo dominio sia $\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$, dove $\mathbf{S}^{n-1}$ é la sfera unitaria generalizzata. Infatti, poiché (p, ξ) e $(-p, -\xi)$ definiscono lo stesso iperpiano in $\mathbb{R}^n$, la mappa

$$(p, \xi) \to \textit{iperpiano} \in P^n$$

é un doppio ricoprimento di P^n con $\mathbb{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1}$.

1.2 Implicazioni geometriche ed uno studio algebrico

Prima di discutere le proprietá e gli sviluppi della trasformata di Radon in base alla definizione datane nel paragrafo precedente, é opportuno visualizzare questa trasformata in un ambito geometrico ed algebrico. La sua scoperta é infatti frutto di sviluppi e ricerche condotte all'inizio del secolo scorso nell'ambito della geometria integrale, ed é solo in questo contesto che é possibile apprezzarne appieno il vero significato.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida, a cui abbiamo premesso di far riferimento quando non specificato altrimenti. É noto che

$$\mathcal{S} \subset L^p, \quad \forall p$$

in maniera densa, ed in particolare che

$$\mathcal{S} \subset L^2.$$

Questo ci permette, rimanendo all'interno del nostro spazio funzionale, di godere di tutte le proprietá di spazio di Hilbert di cui L^2 é dotato, ed induce automaticamente una struttura di prodotto scalare in $\mathcal{S}$. Questo é definito nel modo seguente, per due funzioni f e g appartenenti ad L^2:

$$\langle f|g\rangle = \int \overline{f(x)} g(x) dx, \tag{1.2.1}$$

e quest'integrale é sempre definito per la disuguaglianza di Hölder.

Puó adesso essere utile reinterpretare la definizione 1.1.4 da un punto di vista algebrico: la trasformata di Radon $\check{f}$ di una funzione a variabile reale f é la sua proiezione

[2]É importante sottolineare che non é sufficiente ai fini del problema inverso, trattato nella sezione successiva, considerare solamente le rette, i piani o gli iperpiani passanti per l'origine, come suggeriscono considerazioni di natura dimensionale.

sull'insieme di vettori dello spazio di Hilbert formato dalle $\delta(p-\xi\mathbf{x})$, di seguito indicate, nella loro accezione vettoriale, come $|p,\xi\rangle$. In notazione *bra-ket*:

$$\check{f} = \langle p,\xi|f\rangle = \int \delta(p-\xi\cdot\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{1.2.2}$$

oppure, in un'ottica operatoriale:

$$\check{f} = \langle \mathbf{x}|\,\hat{\mathbf{R}}_{p,\xi}\,|f\rangle\,. \tag{1.2.3}$$

É necessario adesso spendere qualche parola su questa collezione di vettori, determinare le sue caratteristiche, ed analizzare la possibilitá che questa possa assumere il ruolo di *base*.

É immediato notare che, nella loro accezione vettoriale, le $\delta(p-\xi\mathbf{x})$ non sono tra loro ortogonali, ovvero non godono della proprietá

$$\left\langle p,\xi\middle|p',\xi'\right\rangle = \delta_{pp'}\delta_{\xi\xi'}. \tag{1.2.4}$$

Questo ci priva di molte proprietá algebriche, e rende molto delicato, a prima vista, un ulteriore sviluppo operativo della trattazione in questo contesto, anche se non mina in alcun modo la soliditá concettuale dell'impalcatura geometrica.

Resta invece da discutere il problema della completezza di quest'insieme, ovvero, in maniera implicita, della reversibilitá dell'operazione di proiezione su questi vettori. Perché quest'operazione sia infatti teoricamente possibile é strettamente necessario che i vettori dell'insieme in questione, parametrizzati in maniera continua dalle variabili p e ξ, soddisfino la condizione

$$|f\rangle = \iint\limits_{p,|\xi|=1} |p,\xi\rangle\,\langle p',\xi'|f\rangle\ dp\,d\xi \tag{1.2.5}$$

ovvero che sia verificata la *Relazione di Completezza*:

$$\hat{\mathbf{1}} = \iint\limits_{p,|\xi|=1} |p,\xi\rangle\,\langle p,\xi|\,dp\,d\xi. \tag{1.2.6}$$

La verifica diretta di questa proprietá é molto complicata, e non sempre raggiungibile, soprattutto in casi generali come questo. Vedremo che quest'obiettivo sará comunque raggiunto per una via indiretta, esplicitando il collegamento tra la trasformata di Radon e la trasformata di Fourier.

1.3 Generalizzazione a spazi non euclidei

La prima interpretazione geometrica della trasformata di Radon, data nel paragrafo precedente, é, per quanto non approfondita, di grande stimolo per un'ulteriore generalizzazione dei concetti alla base di questo importante strumento matematico.

Ci siamo infatti finora limitati a considerare soltanto le proiezioni di f su "oggetti" euclidei, in particolare su sottovarietá di $\mathbb{R}^n$ di codimensione 1, ma in generale di dimensione potenzialmente variabile, con la condizione che queste fossero in grado di generare, attraverso una qualche combinazione lineare dei loro elementi, tutto lo spazio affine (euclideo) in cui il dominio di f vive.

Tuttavia, le rette, i piani, e tutti i sottospazi della varietá di definizione che abbiamo considerato finora, non sono altro che foliazioni di $\mathbb{R}^n$, e si distinguono soltanto per essere le piú *naturali* in un contesto euclideo.

Questo fatto suggerisce che sia del tutto lecito estendere uno strumento come la trasformata di Radon a funzioni definite su spazi molto piú generali ed "esotici" di $\mathbb{R}^n$, e di modificare la famiglia di sottovarietá a cui restringere di volta in volta i domini degli integrali nella maniera piú opportuna. Uno sviluppo del genere permette di trattare in maniera del tutto equivalente spazi curvi ed in generale non euclidei, una volta identificate le giuste "basi" su cui effettuare le proiezioni, e consente di estendere il campo d'applicabilitá della trasformata alle situazioni fisiche e matematiche piú disparate: basti pensare all'importanza che la geometria differenziale, in tutte le sue forme, ha assunto nelle nuove teorie fisiche da un secolo a questa parte.

Su suggerimento della fisica, la famiglia di sottovarietá in cui é piú "interessante" foliare una varietá Rienmanniana, é proprio quella delle geodetiche di quella varietá, oppure, piú in generale, quella delle sue sottovarietá *totalmente geodetiche*[3]. Le sottovarietá totalmente geodetiche di $\mathbb{R}^n$ sono i piani di $\mathbb{R}^n$: é dunque naturale, nel generalizzare la trasformata di Radon, considerare l'integrazione proprio su questo tipo di sottovarietá.

Quest'idea é stata proficuamente seguita ed ampliata negli anni, e giá in Helgason (1965), se ne trovano presentati importanti ed approfonditi sviluppi. Negli anni successivi molte applicazioni, piú o meno concrete, hanno sfruttato questa generalizzazione della trasformata di Radon, come si vedrá nel capitolo conclusivo.

1.4 Proprietá della trasformata di Radon

Dalle definizioni date in 1.1.4 e in 1.2.2 discendono molte delle proprietá che caratterizzano la trasformata di Radon, e tutti i suoi risvolti applicativi.

Di seguito elencheremo e dimostreremo le piú importanti tra queste:

- **Omogeneitá**

[3]Una varietá differenziabile X é detta Rienmanniana, o di Rienmann, se é dotata di un *tensore metrico* g definito positivo. Data una varietá Rienmanniana X, una sottovarietá *connessa* S di X é detta *totalmente geodetica* se ogni geodesica di X che é tangente ad S in un punto giace interamente in S.

Dall'omogeneitá di grado -1 della delta di Dirac discende che la funzione $\check{f}(p,\xi)$ é *pari* ed omogenea di grado -1. Infatti

$$\check{f}(sp,s\xi)=\int f(\mathbf{x})\delta(sp-s\xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x}=|s|^{-1}\int f(\mathbf{x})\delta(p-\xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

per ogni $s\neq 0$. Dunque

$$\check{f}(sp,s\xi)=|s|^{-1}\check{f}(p,\xi) \tag{1.4.1}$$

Per $s=-1$ abbiamo dimostrato la paritá di $\check{f}(p,\xi)$, in maniera equivalente a quanto fatto nella sezione 1.1.

Un'altra importante conseguenza é che, fissato p e rimosso il vincolo sul modulo di ξ, conoscere il valore di $\check{f}(p,\xi)$ per qualsiasi ξ equivale a fissare completamente $\check{f}$.

Infatti, detto $\zeta=s\xi, |\zeta|=s>0$, ne segue che:

$$\check{f}(p,\zeta)=\check{f}(p,s\xi)=|s|^{-1}\check{f}\left(\frac{p}{s},\xi\right)$$

o, equivalentemente,

$$\check{f}(p,\zeta)=|\zeta|^{-1}\check{f}\left(\frac{p}{|\zeta|},\frac{\zeta}{|\zeta|}\right). \tag{1.4.2}$$

Questa proprietá é importante in operazioni in cui, per un qualche motivo, il modulo di ξ viene alterato. In questi casi permette infatti di ricondursi al caso $|\xi|=1$ usato nelle definizioni.

- **Linearitá**

  Dalla linearitá del prodotto scalare definito in 1.2.1 e, in ultima analisi, dell'operazione stessa d'integrazione, discende che

  $$\mathcal{R}(c_1f+c_2g)=\int[c_1f(\mathbf{x})+c_2g(\mathbf{x})]\delta(p-\xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x}=c_1\check{f}+c_2\check{g}$$

  perció

  $$\mathcal{R}(c_1f+c_2g)=c_1\mathcal{R}f+c_2\mathcal{R}g, \tag{1.4.3}$$

  dunque la trasformata di Radon é una trasformazione lineare.

- **Proprietá di Shifting**

  Si consideri la funzione $f(\mathbf{x}-\mathbf{a})$, dove $\mathbf{a}$ é un vettore di $\mathbb{R}^n$. La trasformata di Radon di questa funzione é

  $$\mathcal{R}f(\mathbf{x}-\mathbf{a})=\int f(\mathbf{x}-\mathbf{a})\delta(p-\xi\cdot\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int f(\mathbf{y})\delta(p-\xi\cdot\mathbf{a}-\xi\cdot\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

  dove é stato operato il cambio di variabile $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$.

  Dunque

  $$\mathcal{R}f(\mathbf{x}-\mathbf{a})=\check{f}(p-\xi\cdot\mathbf{a},\xi). \tag{1.4.4}$$

- **Trasformata di derivate**

  Data una funzione $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$, vogliamo trovare la trasformata di Radon di $\partial f/\partial x_k$. Possiamo scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f\left(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k}\right) - f(\mathbf{x})}{\frac{\epsilon}{\xi_k}} \tag{1.4.5}$$

  dove $f\left(\mathbf{x} + \frac{\epsilon}{\xi_k}\right)$ significa $f(x_1, ..., x_k + \frac{\epsilon}{\xi_k}, ..., x_n)$ e ξ_k é la k-esima componente di ξ. Si consideri adesso la linearitá della trasformata e si applichi la proprietá di shifting come in 1.4.4 per $a = -(0, ..., \frac{\epsilon}{\xi_k}, ..., 0)$:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\check{f}(p+\epsilon, \xi) - \check{f}(p, \xi)}{\epsilon}$$

  perció

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \xi_k \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}. \tag{1.4.6}$$

  La proprietá di linearitá permette di estendere facilmente questa formula, cosí che

$$\mathcal{R}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = \mathbf{a} \cdot \xi \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}. \tag{1.4.7}$$

  Per esempio, nel caso $n = 3$, la trasformata di Radon di una derivata direzionale é

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{a} \cdot \nabla f\right) = \mathbf{a} \cdot \xi \frac{\partial \check{f}(p, \xi)}{\partial p}. \tag{1.4.8}$$

  Un'ulteriore generalizzazione della 1.4.7 al caso di un ordine di derivazione qualsiasi porta all'espressione

$$\mathcal{R}\left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_l b_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_l x_k}\right) = (\mathbf{a} \cdot \xi)(\mathbf{b} \cdot \xi) \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial p^2} \tag{1.4.9}$$

  L'applicazione di questa formula al caso del Laplaciano di f,

$$\mathcal{R}\{\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\} = |\xi|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p, \xi)}{\partial p^2}, \tag{1.4.10}$$

  ha importanti applicazioni nel campo delle equazioni differenziali alle derivate parziali, come vedremo.

- **Derivata della trasformata**

  Vogliamo mostrare quale forma abbiano le derivate di $\check{f}$ rispetto ad una delle componenti di ξ.

  Differenziare $\check{f}(p,\xi)$ rispetto a ξ_k significa eseguire l'integrale

$$\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_k} = \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

  Quest'espressione trova una spiegazione nella teoria delle distribuzioni, nell'ambito della quale la derivata distribuzionale $\frac{d}{da}\delta(x-a)$, con x ed a appartenenti ad $\mathbb{R}^1$, vale

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{da}\delta(x-a) \middle| F \right\rangle &= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \delta(x-a-h)|F\rangle - \langle \delta(x-a)|F\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \\ &= \frac{dF}{dx}|_{x=a} = F'(a).\end{aligned}$$

  Similmente abbiamo che

$$\left\langle \frac{d}{dx}\delta(x-a) \middle| F \right\rangle = -\langle \delta(x-a)|F'\rangle = -F'(a),$$

  dunque, nel caso di variabili unidimensionali

$$\frac{d}{da}\delta(x-a) = -\frac{d}{dx}\delta(x-a) \tag{1.4.11}$$

  mentre nel caso di nostro interesse, in cui $a = \xi \cdot \mathbf{x}$, con $\xi, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^1$,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) = -x_j \frac{\partial}{\partial p}\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}). \tag{1.4.12}$$

  Riprendendo lo sviluppo dell'espressione della derivata della trasformata di Radon e portando la derivata rispetto a p fuori dal segno dell'integrale nella seconda uguaglianza, si ha a questo punto che

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{f}}{\partial \xi_k} &= \int f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \xi_k}\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial p} \int x_k f(\mathbf{x}) \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}\end{aligned}$$

  ovvero che

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k}\mathcal{R}\{f(\mathbf{x})\} = -\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{R}\{x_k f(\mathbf{x})\}. \tag{1.4.13}$$

É a questo punto necessaria una sottolineatura: per essere coerenti con la definizione e con l'uso precedentemente fatto della trasformata, bisogna imporre alla derivata di $\check{f}$ rispetto ad una delle componenti della ξ il vincolo $|\xi| = 1$. L'unitarietá di ξ non é infatti conservata naturalmente dall'operazione di derivazione.

- **Trasformata di una convoluzione**

Sia $\check{g} = \mathcal{R}g$ e $\check{h} = \mathcal{R}h$. Detta f la convoluzione di g con h, allora

$$f(\mathbf{x}) = g * h = \int g(\mathbf{y})h(\mathbf{x} - \mathbf{y})d\mathbf{y},$$

dove $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \xi) = \quad \mathcal{R}f &= \mathcal{R}(g * h) \\ &= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y})h(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) \\ &= \int d\mathbf{y} g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{x} h(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}). \end{aligned}$$

dove per scambiare gli integrali, in presenza della delta di Dirac, abbiamo sfruttato un risultato della *teoria delle distribuzioni* per cui rimandiamo alla sezione 1.5.

Operando il cambio di variabile $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e applicando la proprietá di shifting della trasformata

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \xi) &= \int d\mathbf{y}\ g(\mathbf{y}) \int d\mathbf{z}\ h(\mathbf{z})\delta(p - \xi \cdot \mathbf{y} - \xi \cdot \mathbf{z}) \\ &= \int d\mathbf{y}\ g(\mathbf{y})\check{h}(p - \xi \cdot \mathbf{y}, \xi) \\ &= \int d\mathbf{y}\ g(\mathbf{y}) \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \check{h}(p - s, \xi)\delta(s - \xi \cdot \mathbf{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \check{h}(p - s, \xi) \int d\mathbf{y}\ g(\mathbf{y})\delta(s - \xi \cdot \mathbf{y}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \check{g}(s, \xi)\check{h}(p - s, \xi)ds. \end{aligned}$$

Dunque

$$\check{f} = \check{g} * \check{h},$$

ovvero

$$\mathcal{R}(g * h) = \check{g} * \check{h}. \tag{1.4.14}$$

Possiamo concludere che la trasformata di Radon di una convoluzione é la convoluzione di trasformate di Radon, ovvero che quest'ultima operazione commuta con il prodotto di convoluzione.

1.5 Relazione con la trasformata di Fourier

Un importante suggerimento per l'impostazione del problema inverso legato alla trasformata di Radon ed uno spunto per una piena comprensione della sua azione su una funzione f vengono dal collegamento di quest'ultima con la trasformata di Fourier. Entrambe trasformate integrali, ed entrambe caratterizzate da un'interpretazione simile in senso algebrico, le due applicazioni si distinguono per i vettori dello spazio di Hilbert associati alla loro azione di proiezione. Mentre é stato mostrato in 1.2.2 che la trasformata di Radon associa ad una funzione le sue proiezioni sugli iperpiani in cui é possibile foliare la varietá $\mathbb{R}^n$, l'espressione algebrica della trasformata di Fourier é

$$\mathcal{F}f = \tilde{f} = \langle \mathbf{k}|f\rangle = \int e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{1.5.1}$$

dove con $|\mathbf{k}\rangle$ sono indicati i vettori generalizzati dello spazio di Hilbert L^2, rappresentati le onde piane e parametrizzati per l'appunto dal vettore d'onda $\mathbf{k}$. La collezione di vettori associata alla trasformata di Fourier, oltre ad essere una *base*, é ortonormale, e questa caratteristica conferisce alla trasformata di Fourier le importanti ed abbondanti proprietá algebriche che, insieme all'importantissimo significato fisico che essa nasconde, la contraddistinguono.

La trasformata di Radon non gode degli stessi privilegi, ed é ancora da dimostrare la sua invertibilitá, ovvero che i vettori ad essa associati formino una base dello spazio di Hilbert, ma si dimostra facilmente il suo forte legame con la piú "nobile" trasformata di Fourier, e proprio questo legame ci permetterá di dimostrare alcune delle proprietá algebriche che le due trasformata hanno in comune.

Raggiungeremo quest'obiettivo combinando un procedimento algebrico ad espedienti puramente analitici, evidenziando cosí la duplice natura della trasformata di Radon.

Sia $\hat{T}_p$ un operatore di C^∞ tale che

$$\hat{T}^i_p : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow\ C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$\hat{T}^i_p(f) = (\delta * f)\,(x_1, ..., x_{i-1}, p, x_{i+1}, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(p - x_i) f(\mathbf{x})dx_i, \tag{1.5.2}$$

ovvero un applicazione a parametro reale p che fissi, data una funzione $f(\mathbf{x})$, la componente i-esima della sua variabile ad un valore costante tale che $x_i = p$, bloccando quindi un grado di libertá e riducendo di un'unitá la dimensione del dominio.

Allora

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \langle \mathbf{k}|f\rangle \\
&= \int d\mathbf{x} \left(\int dt\ e^{-i2\pi t}\ \delta(t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x}) \\
&= \int d\mathbf{x} \left(\int s\, dp\ e^{-i2\pi sp} \frac{1}{|s|}\, \delta(p - \xi\cdot\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x}) \\
&= \left(\langle s|\, \hat{T}_{\xi\cdot\mathbf{x}} \right) |f\rangle\, .
\end{aligned}$$

dove $|s\rangle$ é una base di L^2, $t = sp$ e $s = |s| = |\mathbf{k}|$.

Da un punto di vista analitico, essendo presenti oggetti quali la delta di Dirac all'interno dei due integrali, bisogna considerare con cautela la possibilitá di scambiare l'ordine d'integrazione. É tuttavia possibile cercare una soluzione all'interno della *teoria delle distribuzioni*[4], in particolare considerando la penultima delle precedenti espressioni come la convoluzione di una funzione con il prodotto di convoluzione di due distribuzioni.

Applicando tramite la matrice $\mathbf{R}_\xi$ una rotazione ai vettori di base di $\mathbb{R}^n$ é possibile allineare uno di questi con ξ, per esempio $\hat{e}_1$. Denotando con $\mathbf{x}'$ i vettori espressi in queste nuove coordinate ruotate, il prodotto scalare nell'argomento della δ diventa banale, e possiamo riscrivere l'ultimo integrale come

$$\int d\mathbf{x} \left(\int dp \; e^{-i2\pi sp} \, \delta(p - \xi \cdot \mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x}) =$$

$$= \int d\mathbf{x}' \left(\int dp \; e^{-i2\pi sp} \, \delta(p - x_1') \right) f(\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T) =$$

$$= \int d\mathbf{x}_{n-1}' \int dx_1' \left(\int dp \; e^{-i2\pi sp} \, \delta(p - x_1') \right) f(\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T) =$$

$$= \int d\mathbf{x}_{n-1}' \left(< (s * \delta)(x_1'), f(\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T) > \right) =$$

$$= \int d\mathbf{x}_{n-1}' \left(s * (\delta * f(-\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T))(0) \right) =$$

$$= \int d\mathbf{x}_{n-1}' \left(< s, (\delta * f(\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T) > \right) =$$

$$= \int d\mathbf{x}_{n-1}' \int dp \; e^{-i2\pi sp} \left(\int dx_1' \, \delta(p - x_1') \, f(\mathbf{R}^T \mathbf{x}'^T) \right) \tag{1.5.3}$$

dove le tre eguaglianze centrali sfruttano, abusandone leggermente, la notazione distribuzionale, e si basano su un noto risultato circa il prodotto di convoluzione di due distribuzioni.

Nell'integrale piú interno dell'ultima espressione abbiamo fissato il dominio dell'integrale piú esterno sull'iperpiano coordinato al vettore di base $\hat{e}_1'$. A questo punto é del tutto legittimo procedere ad un semplice scambio di ordine d'integrazione, essendo verificate le condizioni del teorema di Fubini grazie alla *bontá* delle funzioni integrande.

[4]Per approfondimenti riguardo questo e altri risultati noti della teoria delle distribuzioni sfruttati in questa trattazione, si rimanda al relativo capitolo delle dispense di *Metodi matematici della fisica* del Professor Ortolani, citate al punto [3] della bibliografia.

Dunque, ricapitolando i punti cruciali,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \int e^{-i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int d\mathbf{x} \left(\int dp\ e^{-i2\pi sp}\, \delta(p-\xi\cdot\mathbf{x}) \right) f(\mathbf{x}) \\
&= \int d\mathbf{x}'_{n-1} \int dp\ e^{-i2\pi sp} \left(\int dx'_1\, \delta(p-x'_1)\, f(\mathbf{R}^T\mathbf{x}'^T) \right) \\
&= \int dp\ e^{-i2\pi sp} \left(\int d\mathbf{x}'_{n-1} \int dx'_1\, \delta(p-x'_1)\, f(\mathbf{R}^T\mathbf{x}'^T) \right) \\
&= \int dp\, e^{-i2\pi sp} \left(\int d\mathbf{x}\, \delta\left(p-\xi\cdot\mathbf{x}\right) f(\mathbf{x}) \right) \\
&= \int dp\, e^{-i2\pi sp} \check{f}(p,\xi).
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque dimostrato che, data una funzione f, la $\tilde{f}$ corrispondente non é altro che la trasformata di Fourier unidimensionale, lungo la direzione radiale, della trasformata di Radon $\check{f}$. Stabilito che $\mathcal{F}_1$ indica la trasformata di Fourier radiale, abbiamo che, simbolicamente

$$\tilde{f} = \mathcal{F}_1\check{f} = \mathcal{F}_1\mathcal{R}f. \tag{1.5.4}$$

Quanto detto fino ad ora merita di essere formalizzato anche in termini algebrici, per arricchire l'interpretazione geometrica della trasformata.

Ricordando che $\mathbf{k} = s\xi$, e denotando con $\hat{T}_p^\xi$ l'operatore di traslazione lungo la direzione data da ξ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(s\xi) = \langle \mathbf{k}|f\rangle &= \left(\langle s|\, \hat{T}_{\xi\cdot x} \right) |f\rangle \\
&= \langle s| \left(\int d\mathbf{x}_\perp\, \hat{T}_p^\xi\, |f\rangle \right) \\
&= \langle s|\, \hat{\mathcal{R}}\, |f\rangle \\
&= \left\langle s \middle| \check{f}_\xi \right\rangle \\
&= \mathcal{F}_1\check{f}(s,\xi)
\end{aligned}$$

dove con $d\mathbf{x}_\perp$ si indica l'elemento infinitesimo di iperpiano coordinato a ξ e con $\check{f}_\xi$ si indica la trasformata di Radon per un valore del versore ξ fissato.

É stata stabilita una sostanziale corrispondenza tra l'operatore di traslazione $\hat{T}_p^\xi$ e l'operatore trasformata di Radon $\hat{\mathcal{R}}$, di cui $\hat{T}_p^\xi$ é in un certo senso il nucleo operatoriale.

Dunque, concludendo,

$$\left(\mathcal{F}_n f\right)(s\xi) = \left\langle s \middle| \check{f}_\xi \right\rangle = \left(\mathcal{F}_1\check{f}\right)(s,\xi). \tag{1.5.5}$$

Quanto appena detto offre importanti sviluppi, sia per quanto riguarda una facilitazione nei calcoli della trasformata di Radon, sia per quanto riguarda il problema dell'inversione.

Partendo dalla 1.5.4, ed invertendola, si ottiene che

$$\mathcal{R}f = \mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_n, \tag{1.5.6}$$

ovvero che, in termini piú espliciti,

$$\check{f}(p,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(s\xi)e^{i2\pi sp}ds. \tag{1.5.7}$$

É spesso conveniente calcolare la trasformata di Radon di una funzione f applicando questa formula, piuttosto che applicare la definizione 1.2.2.

É immediato, partendo dalla 1.5.6 e ricordando che la trasformata di Fourier si comporta come un endomorfismo dello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dimostrare il seguente risultato:

$$\mathcal{R}: \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathcal{P}^n), \tag{1.5.8}$$

ovvero che la trasformata di Radon, in quanto equivalente alla composizione di due trasformate di Fourier, é a sua volta un endomorfismo dello spazio delle funzioni a decrescenza rapida.

Capitolo 2

Il problema dell'inversione

2.1 Invertibilitá

L'invertibilitá della trasformata di Radon, giá oggetto di discussione del paragrafo 1.2, é un requisito fondamentale per lo sviluppo di un metodo di inversione, ovvero dell'operazione comunemente detta *antitrasformata di Radon.*

Dire che la trasformata é invertibile equivale a dire che é un'applicazione in grado di mappare in maniera iniettiva le funzioni del suo dominio nello spazio funzionale di arrivo. In termini puramente algebrici, dimostrare l'invertibilitá della trasformata di Radon equivale a dimostrare la completezza della base ad essa associata, o, equivalentemente, a verificare la relazione

$$\hat{\mathbf{1}} = \iint\limits_{p,|\xi|=1} |p,\xi\rangle \langle p,\xi| \, dp \, d\xi. \tag{2.1.1}$$

Una risposta a questo problema, in tutte le sue forme, viene dalla parte conclusiva del paragrafo 1.5. Invertendo l'espressione 1.5.4 é infatti immediato scrivere

$$f = \mathcal{F}_n^{-1}\mathcal{F}_1\check{f}, \tag{2.1.2}$$

sottintendendo il passaggio da $\tilde{f}(s\xi)$ a $\tilde{f}(\mathbf{k})$ "inconsciamente" effettuato nello spazio di Fourier. Quest'espressione, che discende in maniera rigorosa dai risultati ottenuti nel capitolo precedente, risolve in maniera positiva la questione dell'invertibilitá, e fornisce automaticamente un metodo di inversione, che sfrutta una combinazione di trasformata ed antitrasformata di Fourier.

2.2 Metodi di inversione

Lo stesso Johann Radon, nel suo articolo del 1917, descrisse un metodo per ricavare una funzione a decrescenza rapida dai suoi integrali su infiniti iperpiani diversi. Negli anni successivi altri, tra cui John (1955), Ludwig (1966), Helgason (1965), e Courant ed Hilbert (1962), fornirono ulteriori e piú potenti formule d'inversione, basandosi su identitá analitiche, collegamenti con altre note trasformate integrali, e creazione di appositi operatori.

Tutte queste formule, per necessitá di calcolo integrale, sono diverse nel caso di dimensione pari e di dimensione dispari, e solo nel 1965 Helgason ha fornito una formula d'inversione unica, per i casi ad n pari ed n dispari, sfruttando le proprietá del calcolo differenziale frazionario.

Di seguito, sia per motivi di pesantezza matematica, sia per la sostanziale equivalenza tra tutte queste formule d'inversione, ci limiteremo ad approfondire ed esplicitare, tra tutte, la formula [Ludwig (1966)] che deriva dalla relazione tra trasformata di Radon e trasformata di Fourier descritta nella sezione precedente.

É noto che

$$f(\mathbf{x}) = \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i2\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{k}. \tag{2.2.1}$$

Detto $\mathbf{k} = k\xi$, é lecito scrivere

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=1} \int_0^{+\infty} \tilde{f}(k\xi)\, e^{i2\pi k\xi\cdot\mathbf{x}}\, k^{n-1}\, dk\, d\xi, \tag{2.2.2}$$

dove k^{n-1} é il jacobiano introdotto nel cambio di coordinate.

Sostituendo alla $\tilde{f}(k\xi)$ la parte destra della 1.5.4, l'espressione precedente diventa

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=1} d\xi \left[\int_0^{+\infty} dk\, k^{n-1}\, e^{i2\pi k\xi\cdot\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-i2\pi kp}\, \check{f}(p,\xi) \right]. \tag{2.2.3}$$

Nel caso piú generale, gli integrali in k e in p dentro parentesi quadre daranno una funzione di $\xi \cdot \mathbf{x} = t$ e di ξ, che potrá essere scritta come $g(t,\xi)$. Poiché questa verrá integrata sulla superficie dell'ipersfera unitaria, é sufficiente considerarne la parte pari, cosí definita

$$g_e(t,\xi) = \frac{1}{2} \left[g(t,\xi) \,+\, g(-t,-\xi) \right], \tag{2.2.4}$$

ovvero, piú esplicitamente,

$$g_e(t,\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dk\, k^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \check{f}(p,\xi)\, e^{i2\pi k(t-p)} \tag{2.2.5}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dk\, k^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \check{f}(p,-\xi)\, e^{-i2\pi k(t+p)}. \tag{2.2.6}$$

Operiamo adesso, nel secondo addendo dell'espressione precedente, il cambio di variabile $k \to -k$, $p \to -p$. Questo, congiuntamente alla condizione di simmetria $\check{f}(-p,-\xi) = \check{f}(p,\xi)$ e al fatto che nel primo integrale k^{n-1} puó essere sostituito con $|k|^{n-1}$, porta a riscrivere l'intera formula eliminando la somma:

$$g_e(t,\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,|k|^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\,\check{f}(p,\xi)\,e^{i2\pi k(t-p)}. \tag{2.2.7}$$

Una volta raggiunta questa forma, é abbastanza agevole il calcolo della formula di inversione.

Se n é *dispari*, si procede con $n-1$ integrazioni per parti rispetto alla variabile p, che portano

$$g_e(t,\xi) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dp\,e^{-i2\pi k(p-t)}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1}\check{f}(p,\xi). \tag{2.2.8}$$

Si applichi adesso un semplice scambio degli ordini di integrazione, giustificabile in nome dell'estrema regolaritá del nostro spazio funzionale e della sua immagine attraverso la trasformata di Radon. Rinominando il coefficiente complesso all'inizio del secondo membro come $\mathcal{C}_n$, otteniamo che

$$g_e(t,\xi) = \mathcal{C}_n\int_{-\infty}^{+\infty} dp\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1}\check{f}(p,\xi)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi k(p-t)}\,dk, \tag{2.2.9}$$

dove possiamo riconoscere, all'interno del secondo integrale, la trasformata di Fourier della funzione costante $y=1$. É un risultato noto della teoria delle distribuzioni che

$$\delta(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi kx}\,dx. \tag{2.2.10}$$

Questa formula si applica facilmente al nostro caso, e comporta che la 2.2.9 si riduca a

$$\begin{aligned} g_e(t,\xi) &= \mathcal{C}_n\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1}\check{f}(p,\xi)\,\delta(p-t)\,dp \\ &= \mathcal{C}_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\check{f}(t,\xi) \end{aligned}$$

Dunque, nel caso di dimensione *dispari*, la formula di inversione é

$$f(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=1}\mathcal{C}_n\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n-1}\check{f}(t,\xi)\,d\xi, \tag{2.2.11}$$

dove ricordiamo che $t = \xi\cdot\mathbf{x}$.

Consideriamo adesso invece il caso in cui n sia *pari*. Le $n-1$ integrazioni per parti rispetto alla variabile p porteranno a

$$g_e(t,\xi) = \mathcal{C}_n \int_{-\infty}^{+\infty} dk \ \mathsf{sgn}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, e^{-i2\pi k(p-t)} \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{n-1} \check{f}(p,\xi). \tag{2.2.12}$$

Adesso, applicando un altro risultato della teoria delle distribuzioni, otteniamo infine

$$g_e(t,\xi) = \frac{\mathcal{C}_n}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\partial/\partial p)^{n-1} \, \check{f}(p,\xi)}{p-t} \, dp, \tag{2.2.13}$$

ovvero la formula d'inversione per il caso a dimensione *pari*.

2.3 Moderni sviluppi dei metodi d'inversione

Nonostante i problemi della ricerca e dello studio di metodi d'inversione formali possano dirsi superati, per quanto questa trattazione non ne esponga le soluzioni in maniera completa e del tutto esauriente, i risultati finora ottenuti sono di scarsa utilitá nell'applicazione a situazioni reali.

Solo a partire dal 1956, stimolata da un lavoro pionieristico nel campo della radio astronomia compiuto da R. N. Bracewell, l'attenzione di scienziati e matematici si é concentrata su questo vasto e ricco problema, e proprio a questo "rinvigorimento" degli sforzi, con chiare finalitá applicative, si riferisce questa sezione all'interno del capitolo sul problema dell'inversione. Le formule precedentemente esposte sono infatti rigorosamente valide solo nel caso di f continue ed a decrescenza rapida, oppure a supporto compatto, ed in presenza di una collezione di proiezioni su linee od iperpiani infinita, e mai discreta.

La condizione di supporto compatto non presenta grossi problemi, dato che necessariamente abbiamo a che fare con oggetti di dimensioni finite. Anche la questione della continuitá puó essere in qualche modo secondaria in molte situazioni, ma la natura intrinsecamente discreta delle proiezioni in ogni problema reale dá luogo a problemi sottili e assolutamente non trascurabili.

Esiste infatti un teorema di Smith, Solmon e Wagner (1977), che stabilisce, nella sua piú moderna riformulazione [Marr (1982)]:

> *Una funzione f a supporto compatto defnita in $\mathbb{R}^2$ é univocamente determinata da ogni collezione infinita, ma da nessuna finita, delle sue proiezioni.*

É dunque inevitabile che in qualunque applicazione reale si debba rinunciare alla pretesa di unicitá del risultato.

Esiste tuttavia un altro teorema, formulato nel 1980 degli stessi autori di quello di cui sopra, che stabilisce che, per quanto l'unicitá sia irraggiungibile, si possono effettuare approssimazioni arbitrariamente buone usando un numero sempre maggiore di proiezioni.

Molti studiosi si sono dedicati in quegli anni ad uno studio formale dei problemi tecnici relativi all'unicitá, alla stabilitá delle soluzioni, all'applicazione di eventuali appropriate condizioni sulla soluzione, e all'ottimalitá dei vari metodi, e, grazie a tutto il materiale da loro procurato, é fiorito un gran numero di approcci al problema ed algoritmi di risoluzione diversi. Relativamente a questa gran abbondanza di metodi di inversione "reali", é necessaria una precisazione: nessuno di questi é equivalente ad un altro, per via delle ovvie approssimazioni, dei diversi metodi numerici impiegati, ed anche degli inevitabili limiti fisici degli strumenti di acquisizione e dei dati impiegati. Perfino metodi che sono stati dimostrati essere teoricamente equivalenti possono produrre risultati numerici molto differenti nella pratica: questo fatto é sintomatico della grande sensibilitá e instabilitá che caratterizzano all'atto pratico l'operazione di inversione della trasformata di Radon.

In tutti i problemi di natura tridimensionale, si procede generalmente affrontando separatamente le varie sezioni bidimensionali dell'oggetto in questione, per poi ricostruirlo tridimensionalmente con un opportuno processo di "impilamento".

Per completezza, riportiamo di seguito le principali categorie a cui i piú efficaci metodi di inversione appartengono:

1. Metodi di Fourier *diretti*;

2. Convoluzione nello spazio dei segnali (ovvero della trasformata) e filtraggio nello spazio delle frequenze (ovvero di Fourier);

3. Metodi iterativi;

4. Metodi basati su serie e funzioni ortogonali.

Il metodo usato varia di applicazione in applicazione in base a questioni di opportunitá fisica e computazionale.

Capitolo 3

Applicazioni

Le applicazioni della trasformata di Radon sviluppate nel corse degli anni sono numerose e tra le piú disparate: sono stati implementati strumenti che la utilizzano in campo medico, dove la **TAC** (***T****omografia* ***A****ssiale* ***C****omputerizzata*) é forse l'applicazione piú nota, in meccanica quantistica, radio astronomia, microscopia elettronica, ottica, geofisica e nel campo delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Per quanto molte di queste applicazioni siano degne di nota e di approfondimento, nella presente trattazione ci limiteremo a trattare solamente il problema della tomografia sismica, in ambito geofisico, e l'utilizzo della trasformata di Radon nella risoluzioni di alcune importanti equazioni differenziali alle derivate parziali, cosí da offrire al lettore un interessante approfondimento ed una prova tangibile della duttilitá e dell'importanza dello strumento matematico oggetto di questo studio.

3.1 Tomografia sismica

Un noto problema di geofisica é il cosiddetto *problema inverso*: noti i tempi di percorrenza delle onde sismiche nel sottosuolo, il problema consiste nel ricavare il profilo di velocitá con cui le onde hanno compiuto il loro tragitto, e quindi, in ultima analisi, nel trovare una funzione che rappresenti il profilo di disomogeneitá del sottosuolo.

Di seguito, senza pretesa di eccessiva completezza, introdurremo l'*equazione dell'iconale* relativa alle onde sismiche, e, impostandone la risoluzione con un metodo variazionale, mostreremo come emerga naturalmente la possibilitá d'applicazione della trasformata di Radon come metodo risolutivo.

Si consideri un campo d'onda scalare monocromatico

$$\left[\nabla^2 + k^2 + k^2 v\left(\mathbf{x}\right)\right] u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.1.1}$$

dove $v(\mathbf{x})$ é la disomogeneitá del profilo di velocitá dell'onda, che corrisponde ad una disomogeneitá del mezzo, e $k > 0$ é il numero d'onda.

Se richiediamo che la soluzione u sia nella forma

$$u = Aexp\,(ik\phi) = exp\,(ik\phi) \sum_{0}^{\infty} \frac{A_j}{(ik)^j}, \tag{3.1.2}$$

allora, combinando questa condizione con l'espressione precedente, otteniamo le note equazioni

$$(\nabla\phi)^2 = 1 + v(\mathbf{x}), \tag{3.1.3}$$

$$2\nabla\phi \cdot \nabla A_0 + A_0\nabla^2\phi = 0, \tag{3.1.4}$$

$$2\nabla\phi \cdot \nabla A_n + A_n\nabla^2\phi = -\nabla^2 A_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{3.1.5}$$

L'equazione 3.1.3 é la nota *equazione dell'iconale*, mentre le 3.1.4-3.1.5 sono le *equazioni di trasporto*.

L'equazione dell'iconale puó essere risolta col *metodo delle caratteristiche*. Le caratteristiche dell'equazione 3.1.3 sono gli estremali del funzionale

$$\int_{\mathcal{L}(s_0,s)} [1 + v(\mathbf{x})]\; d\mathbf{x} = \min_{\mathcal{L}(s_0,s)} := t(s_0, s), \tag{3.1.6}$$

che é proprio il *principio di Fermat*, che stabilisce che un segnale impiega il minor tempo possibile per giungere da un punto ad un altro.

Si supponga che $v(\mathbf{x})$ sia una funzione a supporto compatto e che $suppv(\mathbf{x}) := D$. Il problema inverso, che é d'interesse in geofisica, consiste nel trovare $v(\mathbf{x})$ dati i tempi di percorrenza $t(\mathbf{s_0}, \mathbf{s})$ necessari all'onda per viaggiare tra i punti $\mathbf{s_0}$ e $\mathbf{s}$ per molte coppie $\mathbf{s_0}, \mathbf{s} \in \Gamma := \partial D$.

Se $|v(\mathbf{x})| \ll 1$, si puó facilmente ricavare una soluzione approssimata del problema inverso. Infatti, per $v(\mathbf{x}) \to 0$, le curve estremali del funzionale diventano segmenti di rette. Si puó trovare dunque $v(\mathbf{x})$ dalla relazione

$$\int_{L(\mathbf{s_0},\mathbf{s})} [1 + v(\mathbf{x})]\; d\mathbf{x} = t(\mathbf{s_0}, \mathbf{s}), \tag{3.1.7}$$

dove $\mathbf{s_0}$ e $\mathbf{s}$ sono punti arbitrari su Γ e $L(\mathbf{s_0}, \mathbf{s})$ é la retta che li congiunge. É adesso immediato notare che la 3.1.7 non é altro che un classico problema di tomografia: non si vuole far altro che trovare $v(\mathbf{x})$ a partire dai suoi integrali su tutte le rette che passano per il supporto di $v(\mathbf{x})$.

Allo stesso modo, guardando indietro all'integrale 3.1.6 si vede che questo non é altro che un esempio di trasformata di Radon generalizzata a spazi non euclidei, di cui abbiamo giá discusso nella sezione 1.3. Come anticipato nella sezione appena citata, anche in questo caso le sottovarietá su cui vengono effettuati gli integrali sono proprio le geodetiche dello spazio, definite da quello che in questo caso é l'elemento di "metrica" dell'onda sismica, ovvero il fattore $[1 + v(\mathbf{x})]$.

Quest'interessante applicazione ha dunque evidenziato non solo l'importanza della trasformata di Radon nella risoluzione di problemi fisici alquanto concreti, ma anche la persistenza di una forte connessione tra la versione piú generalizzata della trasformata e la sfera della fisica applicata.

3.2 Applicazioni alla risoluzione delle EDP

3.2.1 Considerazioni preliminari

Le equazioni differenziali alle derivate parziali sono caratterizzate da una problematica assenza di un metodo standard di risoluzione e dalla loro insistente comparsa in gran parte dei problemi fisici degni di nota, in ogni branca della materia.

La trasformata di Radon, sfruttando alcuni dei risultati esposti nei precedenti capitoli, permette in certe occasioni di compiere semplificazioni fondamentali, e di rendere quindi abbordabile la soluzione di queste equazioni.

Si consideri quanto detto nella sezione 1.4, nel punto sulla trasformata delle derivate di funzioni ed in particolare all'equazione 1.4.10, che ripresentiamo perché fondamentale ai fini di ció di cui vogliamo discutere:

$$\mathcal{R}\{\Delta_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\} = |\xi|^2 \frac{\partial^2 \check{f}(p,\xi)}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \check{f}(p,\xi)}{\partial p^2}. \tag{3.2.1}$$

Vogliamo illustrare con un esempio un'importante conseguenza di questo risultato.

Si supponga che f dipenda in maniera parametrica da un'ulteriore variabile, quale ad esempio puó essere il tempo. Allora, per $n = 3$, $f = f(x, y, z; t)$. Consideriamo l'equazione di un'onda tridimensionale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{3.2.2}$$

Applicando su entrami i membri la trasformata di Radon,

$$\frac{\partial^2 \check{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \check{f}}{\partial p^2}, \tag{3.2.3}$$

dove la forma del membro di destra discende dalla 1.4.10, mentre il fatto che $\mathcal{R}$ *commuti* con $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ dipende dalla natura paramentrica della variabile t, che, non facendo parte del dominio su cui *geometricamente* agisce $\mathcal{R}$ ($\mathbb{R}^3$ in questo caso), non "innesca" al momento della derivazione la proprietá di shifting 1.4.4, e non produce cosí alcun effetto sulla trasformata $\check{f}$.

Si consideri adesso un operatore differenziale $\mathbf{L} = \mathbf{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ ed una funzione $u = u(x, y, z; t) = u(\mathbf{x}; t)$. La trasformata di Radon di $\mathbf{L}u$ é

$$\mathcal{R}[\mathbf{L}u] = \mathbf{L}\left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial p}, \ldots ; \frac{\partial}{\partial t}\right) \check{u}(p, \xi; t). \tag{3.2.4}$$

Vedremo che, in opportune situazioni, applicare la trasformata di Radon ad un'equazione differenziale equivale in un certo senso a scomporre il problema generale ad n

dimensioni in una serie di problemi unidimensionali di tipo *planare*, ovvero caratterizzati da soluzioni costanti sui piani perpendicolari ad una data direzione, del tipo dunque delle onde piane. Le singole soluzioni di questo problema "decomposto" verranno poi ricombinate in un risultato unico dalle formule di inversione, portando cosí alla soluzione del problema iniziale.

Un'idea del meccanismo alla base di questo procedimento si puó avere osservando che $\check{f}(p,\xi)$, ovvero l'integrale di f sull'iperpiano d'equazione $(\mathbf{x}\cdot\xi) = p$, é per ξ fissato un'applicazione $\mathbf{x} \to \check{f}\left((\xi\cdot\mathbf{x}),\xi\right)$ costante su ogni iperpiano perpendicolare a ξ.

Se si combina, nel caso $n = 3$, la formula 2.2.11 con il risultato 1.4.10, vediamo che invertire la trasformata di Radon, come di seguito

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\,\nabla^2\left(\int_{\mathbb{S}^2}\check{f}\left(\xi\cdot\mathbf{x},\xi\right)\,d\xi\right), \tag{3.2.5}$$

equivale a ricavare f ricombinando i risultati della sua trasformazione in una serie di "onde piane", ovvero funzioni *unidimensionali* caratterizzate da una direzione privilegiata che definisce ipersuperfici (o *fronti d'onda*) a valore costante.

In conclusione, come la trasformata di Radon vedremo essere in grado di risolvere agevolmente alcune categorie di EDP, si potrebbe dimostrare, anche se questo esula dagli scopi della presente trattazione, che la sua generalizzazione a spazi non euclidei, accennata discorsivamente nella sezione 1.3, si puó adattare, mediante l'uso di opportune ipersuperfici, o fronti d'onda, alla risoluzione di un numero ancor maggiore di equazioni differenziali alle derivate parziali.

3.2.2 Il problema di Cauchy

Consideriamo, senza perdere di generalitá, un'equazione iperbolica omogenea con coefficienti costanti, con un numero sufficiente di condizioni iniziali: questo é un classico *problema di Cauchy* alle derivate parziali.

Formalmente cerchiamo la soluzione $u(\mathbf{x};t)$ dell'equazione

$$\mathbf{L}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z};\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,y,z;t) = 0, \tag{3.2.6}$$

soggetta alle m condizioni iniziali per $t = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l} u(\mathbf{x};t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad per \quad 0 \le l \le m-2, \tag{3.2.7}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u(\mathbf{x};t)\Big|_{t=0} = f(\mathbf{x}), \tag{3.2.8}$$

dove m é il grado dell'operatore polinomiale $\mathbf{L}$.

Applicando alla 3.2.6 la trasformata di Radon otteniamo

$$\mathbf{L}\left(\xi_1\frac{\partial}{\partial p},\xi_2\frac{\partial}{\partial p},\xi_3\frac{\partial}{\partial p};\frac{\partial}{\partial t}\right)\check{u}(p,\xi;t)=0. \tag{3.2.9}$$

Poiché $\mathcal{R}$ e $\partial/\partial t$ commutano, le condizioni iniziale si riducono a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l}\check{u}(p,\xi;t)\Big|_{t=0} = 0 \qquad per \quad 0\leq l\leq m-2, \tag{3.2.10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1}\check{u}(p,\xi;t)\Big|_{t=0} = \check{f}(p,\xi). \tag{3.2.11}$$

L'equazione in $\check{u}$ é unidimensionale nella variabile spaziale p e puó essere risolta in maniera standard come un'equazione alle derivate parziali con una variabile spaziale ed il tempo come variabili indipendenti. Le componenti di ξ sono infatti trattate alla stregua di parametri nella risoluzione della 3.2.2.

Una volta trovata $\check{u}$, la soluzione $u(\mathbf{x};t)$ puó essere ricavata con le formule di inversione della sezione 2.2.

Una volta ricavata la soluzione di questo problema, é possibile usarne il risultato per ottenere le soluzioni di un problema di Cauchy piú generale, dove l'equazione alle derivate parziali é non omogenea e le condizion iniziali piú generali. L'utilizzo della trasformata di Radon in questo contesto é dunque di utilitá del tutto generale, e non si limita a certi casi specifici.

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi é, in primo luogo, quello di fornire un'introduzione alla matematica della trasformata di Radon, in parte grazie ad uno studio sistematico delle sue definizioni e delle sue proprietá, ed in parte grazie all'alternanza di punti di vista con cui é stato tentato, quando possibile, di stendere la trattazione nella maniera piú costruttiva e coerente possibile.

Le digressioni geometriche, frutto delle modeste capacitá dell'autore, sono state pensate con lo scopo di completare, senza eccessive pretese di rigore tecnico, la definizione della trasformata, ma soprattutto con la convinzione che proprio un re-inquadramento del tema in uno schema algebrico e geometrico potesse far emergere il significato essenziale dell'azione della trasformata di Radon ed arricchire cosí in maniera fondamentale la sua comprensione. Allo stesso modo l'*excursus* sulla generalizzazione a spazi non euclidei, richiamato nel capitolo finale sulle applicazioni, non ha alcuna pretesa di completezza o di valore tecnico, ma vuole sottolineare quale sia il concetto alla base della trasformata e come proprio uno studio di questa in un'ottica geometrica possa suggerirne una potente generalizzazione.

Scendendo piú nello specifico, si é molto insistito sull'intrinseco e fondamentale legame che corre tra trasformata di Radon e trasformata di Fourier, e su come proprio in nome di questo siano desumibili alcune importanti proprietá della trasformata, tra le quali la sua iniettivitá. Il problema dell'inversione, che ha coperto in questa tesi un ruolo centrale, é stato a sua volta introdotto, e, sulla base di quanto detto nella sezione di definizione della trasformata, risolto, anche se in maniera puramente "accademica". Al problema infatti dell'esistenza di metodi d'inversione della trasformata che fossero *applicabili* in campo pratico é stato dato spazio in un'altra sezione, in cui sono le relative difficoltá tecniche sono state esposte ed affrontate verbalmente.

Infine, ma con rilevanza primaria, sono state prima citate molte delle applicazioni della trasformata, e, successivamente, esaminate due di queste a titolo esemplificativo, col fine di mostrare come l'astratta impalcatura matematica su cui si fonda la trasformata di Radon sia in realtá facilmente ed intuitivamente applicabile alle piú svariate situazioni reali.

Bibliografia

[1] Deans, Stanley R. *The Radon Transform and Some of Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

[2] Alexander G. Ramm, Alex I. Katsevich. *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, 1996.

[3] Prof. Fabio Ortolani. *Appunti di metodi matematici*. Bologna, 2007.