ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Triennale in Matematica

QUALCHE ASPETTO DEL CALCOLO ARITMETICO

Elaborato Finale in Didattica della Matematica

Relatore: **Presentata da:**

Prof. BRUNO D'AMORE **ANNA MATERA**

Sessione I

Anno Accademico 2009- 2010

INDICE

INTRODUZIONE

EVOLUZIONE STORICA DEL CONCETTO DI ALGORTMO

Negli ultimi anni è emersa, con evidenza sempre crescente, l'importanza di introdurre in un ambiente didattico elementare elementi di "storia delle matematiche" atti a dare una migliore comprensione dei risultati presentati e a far comprendere altresì l'evoluzione delle idee.
La presente tesi riguarda, quindi, al tempo stesso la storia e la didattica della matematica. Gli algoritmi di calcolo presi in esame hanno rilievo in entrambe le discipline matematiche ora menzionate. Si è anche ritenuto che fosse opportuno mettere in rilievo, nell'ultimo capitolo della tesi, il collegamento stretto che sussiste tra il calcolo aritmetico e la geometria euclidea e che è sempre stato presente nel corso della storia fin dall'antichità.
Anche questo legame ha una sua attualità: la connessione tra algebra e geometria, ben presente in vari settori di ricerca della matematica moderna, costituiscono un aspetto importante e sempre degno della massima attenzione.

CAPITOLO I
QUALCHE CONSIDERAZIONE DI CARATTERE GENERALE E STORICO SUI CONCETTI DI ALGORITMO ED OPERAZIONE

N 1. Importanza degli algoritmi

Chiedendo a qualcuno che non si occupa professionalmente di matematica (il famoso ”uomo della strada” o “l’italiano medio”) che cosa ricordi dei suoi studi o quali siano le sue conoscenze in ambito matematico, probabilmente tra le prime cose citerà “*le quattro operazioni*”. Se gli si chiederanno ulteriori dettagli, verosimilmente chiarirà che intende quelli che i matematici chiamano piuttosto *algoritmi* del campo dell’*Aritmetica*.
Non sarebbe un caso perché essi costituiscono una grossa parte dei contenuti disciplinari insegnati nelle scuole elementari e medie, al punto che è diffusa la falsa opinione che la matematica consista fondamentalmente in cose di questo genere, ossia nella ricerca di metodi e strategie sempre più elaborati per svolgere calcoli difficilissimi.
Nel parlare della gente comune l’espressione “le quattro operazioni” si riferisce a volte ad un sapere certo, affidabile, immutabile, magari anche complesso, ma in ogni caso fondamentale per lo sviluppo della persona.
Pur con le dovute distinzioni, il sentire popolare coglie l’aspetto dell’importanza degli algoritmi nell’ambito della matematica e più in generale nella storia del progresso umano.
Oltre alle operazioni aritmetiche tradizionalmente note, cui le scoperte matematiche hanno aggiunto e vanno aggiungendo via via nuove

varianti, si può citare ad esempio l'ambito dell'informatica, in cui gli algoritmi hanno una funzione centrale e che è oggi così importante.

N 2. Alcune parole ed alcuni concetti chiave

2.a La parola "algoritmo" ed il suo significato

La parola *"algoritmo"* ha una storia interessante che comincia nella Persia nell'ottavo secolo (Bagni 1996, Boyer 1980, Kline 1999). Qui visse e lavorò lasciando una notevole produzione il matematico, fisico e geografo Abu Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 – 850). In questo nome, come in quelli di molti grandi del passato, viene citata la regione d'origine sua o della sua famiglia, la Corasmia (Khwarizm) che è un parte della pianura dell'Asia centrale sulla sponda sud occidentale del Lago d'Aral, solcata dal fiume Amu Darya (già Oxus), oggi per lo più compresa tra i confini dell'Uzbekistan.
Questo personaggio è considerato uno dei più importanti algebristi della storia della matematica. Una sua opera, il *Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala*, che trattava di metodi di risoluzione di equazioni algebriche, giunse in Europa nel XII secolo, dove, in seguito ad una serie di equivoci, si prese ad indicare con la latinizzazione di parte del suo titolo quelle sequenze di istruzioni semplici che permettono di risolvere problemi di varia complessità, come ad esempio i calcoli. Molte altre parole tipiche dell'ambito matematico hanno origine da questo libro, prima tra tutte il nome stesso della disciplina: "*Algebra"* dal titolo *al-Jabr*.
"Calcolo" invece deriva dal termine latino che designava i sassolini con cui i Romani rappresentavano i numeri nell'*abaco*.
Tornando agli algoritmi, una definizione generale può essere la seguente:

> "Un *algoritmo* è una sequenza finita di istruzioni elementari, semplici, chiare, ed effettivamente eseguibili che consente di ottenere un scopo od un effetto determinato."

Una ricetta culinaria ben scritta può essere un esempio di algoritmo. In questo caso sia gli oggetti con cui si opera (ingredienti ed utensili) sia il risultato (un piatto) esulano dalla matematica.
In matematica questa definizione si adatta molto bene a descrivere le pratiche di calcolo praticate in ogni contesto culturale ed in ogni tempo, incluse quelle che esamineremo in questa tesi. Alcune di esse rimontano alla più remota antichità egizia, altre al medio evo europeo e qualcuna, infine, alla tradizione matematica cinese.

2.b Operazioni

Occorre prestare attenzione ad una distinzione importante: benché nella lingua comune si usi il termine "*operazione*" anche per indicare l'algoritmo, nello specifico linguaggio dei matematici tale confusione non è ammissibile. Una operazione in matematica è una struttura di tipo funzionale che mette in relazione gli elementi di certi insiemi (eventualmente diverse copie dello stesso insieme).
Ad esempio la *somma tra numeri naturali* è vista come una funzione in due variabili che collega una coppia di naturali ed un terzo naturale:

$$+:\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\rightarrow\boldsymbol{N}$$
$$(a;\ b)\rightarrow c$$

Nel formalismo dei matematici dovremmo scrivere:

$$+\ (1;\ 2) = 3$$

in luogo della sintassi ben più familiare:

$$1 + 2 = 3.$$

L'operazione è ben altra cosa dall'algoritmo, che, come si è detto, è una particolare lista di cose concrete da fare (ad esempio scrivere certi segni) per ottenere il *risultato*. Possiamo avere molti algoritmi diversi per una stessa operazione, come infatti si vedrà nel seguito, i quali danno lo stesso risultato se applicati agli stessi *termini*.

2.c Nomi specifici

La seguente tabella elenca i termini tecnici usati in questo ambito.

Operazione	**termini**	**risultato**
Addizione	*addendi*	*somma*
Sottrazione	*minuendo e sottraendo*	*differenza*
moltiplicazione	*fattori*	*prodotto*
Divisione	*dividendo e divisore*	*quoziente e resto*

In realtà si confondono spesso le parole della prima e dell'ultima colonna, solitamente senza che ciò causi grandi problemi. Anche in questo lavoro, per ragioni storiche o di usi linguistici, potranno esserci sostituzioni e metonimie ("somma" per "addizione", "prodotto" per "moltiplicazione",…) che però non dovrebbero generare ambiguità.

N 3. Quattro operazioni?

3.a Le operazioni importanti sono ben di più

È necessario riflettere anche su un altro aspetto in cui la lingua comune differisce dal linguaggio dei matematici. Quando si parla di "quattro operazioni" si intende tacitamente che:

a) *Addizione, sottrazione, moltiplicazione* e *divisione* sono operazioni;
b) esse sono, se non proprio le sole, come l'articolo determinativo lascerebbe supporre, almeno le più importanti.

Ora, sia la fantasia dei matematici, sia la complessità stessa delle situazioni reali che l'umanità ha tentato di rappresentare con formalismi matematici, hanno fornito moltissimi esempi di operazioni altrettanto importanti definite tra diversi tipi di numeri.
L'*elevamento ad una potenza* è un esempio di operazione tra numeri naturali, di definizione assai intuitiva e che interviene nella schematizzazione di situazioni concrete assai comuni. Se poi accettiamo di usare anche numeri diversi possiamo pensare al cambiamento di segno, all'inversione (nel senso di passaggio al reciproco), al *valore assoluto,…* sono moltissime le operazioni che ci servono ogni giorno nella nostra vita sociale, economica e culturale. Ciò demolisce l'asserzione b).

3.b La sottrazione non è un'operazione interna ad ***N***
Ma anche ragionando sulla a) occorre fare qualche osservazione perché nella matematica contemporanea, che ha assimilato l'idea di *struttura algebrica* (Odifreddi 2000, Levy Bruhl 1968), citando un'operazione bisognerebbe specificare sempre l'insieme in cui è definita e quello dei suoi risultati, per chiarire a quali termini si può applicare e di che natura sono gli effetti che sortisce. In caso contrario si rischia di incorrere in problemi di definizione.
Se vogliamo restare nell'ambito dell'insieme ***N*** dei *numeri naturali*, incontriamo il problema che la sottrazione può dare come risultato un numero negativo, cioè che non appartiene ad ***N***. I matematici dicono che non è un'operazione *interna* ad ***N***.
Ad esempio la sottrazione:

$$2 - 3 = -1$$

nella sua semplicità già pone il problema di un risultato che non appartiene allo stesso insieme dei termini, perché -1 non è un numero naturale.
Per avere un'operazione interna dovremmo imporre vincoli pesanti ai termini su cui si può usare, e cioè che il minuendo sia maggiore o uguale al sottraendo. Questa è una limitazione molto forte.
Per avere la necessaria libertà d'azione potremmo allora pensare la sottrazione come operazione nell'insieme dei *numeri interi relativi* ***Z.***
Ma in questo caso non è necessario definirla in modo specifico perché può essere vista come un'addizione con l'*opposto* (*inverso additivo*) di un intero. Per esempio:

$$2 - 3 = 2 + (-3)$$

Per i matematici ha più senso dare lo status di operazione al cambiamento di segno e rendere la sottrazione qualcosa di simile ad una sorta di abbreviazione linguistica che si riferisce al processo composto da una somma e da un'inversione.

3.c La divisione non è un'operazione interna ad ***N***

Considerazioni analoghe valgono per la divisione che può fornire un risultato non intero e dunque non naturale.
Ad esempio:

$$1 \div 2 = \frac{1}{2}$$

o, se si preferisce la forma decimale (tra le infinite forme a disposizione):

$$1 \div 2 = 0{,}5$$

Anche in questo caso, oltre al vincolo naturale dell'essere i divisori diversi da zero, per non uscire da ***N*** dovremmo porre la pesantissima condizione di poter dividere solo un multiplo per un sottomultiplo. Ciò renderebbe l'operazione troppo limitata.
Se estendiamo allora la nostra attenzione all'insieme dei *numeri razionali* ***Q*** salviamo il carattere interno dell'operazione, ma d'altro canto essa non è più necessaria, potendosi interpretare come abbreviazione della moltiplicazione di un numero per il *reciproco* (*opposto moltiplicativo*) di un razionale.
Per esempio:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}\,.$$

3.d Elementi neutri
Una differenza sostanziale tra addizione e moltiplicazione da un lato e sottrazione e divisione dall'altro è che le prime hanno già anche in ***N*** ciascuna un *elemento neutro* mentre le seconde non lo hanno neppure in quegli insiemi in cui sono operazioni interne.
Per chiarire di che si tratta si ritenga definita in un insieme A una operazione binaria interna:

$$\S : A \times A \to A$$
$$(a;\, b) \to c$$

ovvero, come si scrive più comunemente:

$$a \ \S\ b = c.$$

Diciamo che è *elemento neutro per* § un e elemento di A tale che per ogni a elemento di A:

$$a \mathbin{\S} e = e \mathbin{\S} a = a.$$

è chiaro che se consideriamo l'addizione e la moltiplicazione come operazioni binarie in ***N***:

$$+ : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$$
$$(a; b) \rightarrow c$$
$$(a + b = c)$$

e

$$\times : \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$$
$$(a'; b') \rightarrow c'$$
$$(a' \times b' = c')$$

si vede subito che 0 e 1 sono i rispettivi elementi neutri perché per ogni numero naturale a:

$$a + 0 = 0 + a = a\ ,$$

e

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

Nulla di tutto ciò è possibile per la sottrazione e la divisione perché, se è vero che pero ogni numero intero b:

$$b - 0 = b$$

l'altra eguaglianza è verificata solo in un caso:

$$0 - b = a \quad \textit{se e solo se} \;\; b = 0.$$

Analogamente, certamente si ha per ogni numero razionale c:

$$c \div 1 = c$$

ma l'altra eguaglianza è verificata solo in un caso:

$$1 \div c = c \quad \textit{se e solo se} \;\; c = 1.$$

Attenzione: non si sta parlando di *commutatività*, ossia della proprietà goduta da addizione e moltiplicazione di poter scambiare tra loro rispettivamente addendi e fattori, della quale certo non godono sottrazione e divisione, dato che prevedono ruoli assai asimmetrici dei loro termini. Per poter avere un elemento neutro l'unica cosa che si deve poter commutare è la particolare operazione tra l'elemento neutro ed un elemento qualsiasi, e solo in virtù del fatto che si ottiene comunque quest'ultimo in ambo i casi.

N 4. L'*Aritmetica,* l'*insieme N* dei *numeri naturali* e le operazioni fondamentali secondo la matematica contemporanea

4.a Assiomi di Peano per i numeri naturali

Dato che ne abbiamo parlato spesso nelle pagine precedenti è il caso di soffermarsi sull'insieme ***N*** dei numeri naturali. La sua importanza deriva da tre aspetti:

1) è l'insieme numerico più intuitivo, con cui facciamo esperienze fin da bambini;

2) per questa ragione, di qualunque tipo siano i numeri con cui dobbiamo operare e per quanto siano complesse le operazioni che dobbiamo eseguire, gli algoritmi che avremo a disposizione ricondurranno inevitabilmente i processi più complicati a liste di calcoli elementari tra naturali;

3) l'insieme ***N*** e la teoria che lo riguarda (l'*Aritmetica*) sono servite in fasi decisive dello sviluppo della matematica da modello per le altre branche e le altre scienze, al punto da far desiderare a diversi studiosi e movimenti culturali di poter derivare da essi tutta la matematica.

Una delle più eleganti ed importanti assiomatizzazioni di ***N*** è quella di Peano (1858 - 1932) che si basa sull'idea del *successivo*:

Siano A un insieme e:

$$s: A \to A$$
$$a \to s(a)$$

una funzione. Diciamo $s(a)$ il *successivo* di a. questa scelta terminologica sarà chiara nel seguito. Poniamo che valgano per A ed s i seguenti *assiomi*:

1. A è non vuoto, (ossia esiste almeno un elemento di A; chiamiamolo 0, *zero*);

2. Il successivo di ogni elemento di A esiste ed appartiene ad A (cioè s è una funzione interna);

3. Numeri diversi hanno successivi diversi (cioè s è iniettiva);

4. 0 non è il successivo di nessun elemento (cioè 0 non è nell'immagine di s);

5. Ogni sottoinsieme di A che contenga 0 ed il successivo di ogni suo elemento coincide con A (assioma di *induzione*).

Un tale insieme *A* contenente un elemento *0* e munito di una tale funzione *s* è ciò che abbiamo chiamato *insieme dei numeri naturali* ***N***. In realtà più che di un insieme in senso stretto si parla quindi di una struttura con precise ed interessanti proprietà algebriche.
Questo sistema di assiomi è particolarmente apprezzato perché definisce assai bene queste proprietà. Inoltre ogni struttura algebrica che lo soddisfi in pieno o è l'insieme dei naturali stesso o gli assomiglia molto, al punto di poter essere messo in *corrispondenza biunivoca* con lui, come assicura un apposito teorema (*teorema di categoricità*).

4.b Addizione secondo Peano

Dati a e b naturali si definisce *somma* di a e b:

$$a + b$$

quel numero naturale c tale che:

$$c = \begin{cases} a & se\ b = 0 \\ s(a + d) & se\ b = s(d) \end{cases}$$

a e b si dicono *addendi.*

Definito:

$$1 = s(0)$$

si può dimostrare che:

$$a + 1 = s(a).$$

in tal modo la definizione di somma può essere riscritta come:

$$a + b = \begin{cases} a & se\ b = 0 \\ (a + d) + 1 & se\ b = d + 1 \end{cases}.$$

L'operazione che dati due numeri restituisce la loro somma si chiama *addizione.*

4.c Moltiplicazione secondo Peano

Dati a e b naturali si definisce *prodotto* di a e b:

$$a \times b$$

quel numero naturale c tale che:

$$c = a \times b = \begin{cases} 0 & se\ b = 0 \\ a & se\ b = 1 \\ ad \times a & se\ b = d + 1 \wedge d \neq 0 \end{cases}.$$

a e b si dicono *fattori.*

L'operazione che dati due numeri restituisce il loro prodotto si chiama *moltiplicazione.*

4.d Proprietà algebriche della somma secondo Peano

Dati a, b, c arbitrari numeri naturali, si possono dimostrare in base alle definizioni le proprietà seguenti:

Associativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c);$$

Elemento neutro:

$$a + 0 = 0 + a = 0;$$

risulta inoltre che l'elemento neutro della somma è unico;

Commutativa:

$$a + b = b + a;$$

Legge di cancellazione:

$$a + b = a + c \quad \textit{se e solo se} \quad b = c;$$

Legge dell'annullamento:

$$a + b = 0 \;\; \textit{se e solo se } a = 0 \textit{ e } b = 0.$$

4.e Proprietà algebriche del prodotto secondo Peano

Dati *a, b, c* arbitrari numeri naturali, si possono dimostrare in base alle definizioni le proprietà seguenti:

Associativa:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c);$$

Elemento neutro:

$$a \times 1 = 1 \times a = a;$$

l'elemento neutro del prodotto è unico;

Commutativa:

$$a \times b = b \times a;$$

Legge di cancellazione:

(sia $a \neq 0$)

$$a \times b = a \times c \quad \textit{se e solo se} \quad b = c;$$

Legge dell'annullamento:

$$a \times b = 0 \;\; \textit{se e solo se } (a = 0 \textit{ oppure } b = 0).$$

4.f Distributività della somma rispetto al prodotto

Sempre in base alle definizioni date si può dimostrare che la somma è distributiva rispetto al prodotto, cioè dati *a, b, c* numeri naturali valgono le seguenti proprietà:

distributività a sinistra:

$$a \times (b + c) = a \times c + a \times c;$$

distributività a destra

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

4.g Sottrazione secondo l'assiomatizzazione di Peano

Dati due naturali a e b con $a \geq b$ (tra le tante proprietà di $\boldsymbol{N}$ di cui non abbiamo parlato alcune riguardano la relazione d'ordine) si definisce *differenza:*

$$a - b$$

quel naturale c tale che:

$$a + c = b$$

a si dice *minuendo* e b *sottraendo*.

L'operazione che dati due numeri restituisce la loro differenza si chiama *sottrazione.* Su di lei gravano le perplessità evidenziate sopra. Come proprietà citiamo solo la seguente: dati due numeri naturali a e b

$$a - b = 0 \textit{ se e solo se } a = b\ .$$

4.h Divisione secondo l'assiomatizzazione di Peano

Un noto teorema assai antico asserisce che dati due numeri naturali a e b, con $b \neq 0$, esistono e sono unici due numeri naturali q ed r tali che:

$$a = b \times q + r,$$
$$0 \leq r < b.$$

a si dice *dividendo*, *b divisore*, *q quoziente* e *r resto.*
L'operazione che dati due numeri restituisce il loro quoziente ed il loro resto si chiama *divisione.* Su di lei gravano le perplessità evidenziate sopra.
L'esclusione dei divisori uguali a zero è necessaria per via della condizione posta sul resto di essere maggiore o uguale a zero e strettamente minore del divisore:

$$0 \leq r < b$$

allora se fosse $b = 0$ il resto r dovrebbe essere maggiore o uguale e strettamente minore di zero:

$$0 \leq r < 0$$

che è ovviamente impossibile.

II CAPITOLO
BREVI CENNI AGLI ALGORITMI EGIZIANI ED ALL'ABACO

N 1. Una simbologia numerica egiziana

In questo capitolo si vuole dare qualche cenno al contributo apportato agli algoritmi elementari del calcolo aritmetico da parte dell'antico e celebrato popolo egiziano, i cui documenti matematici risalgono al terzo ed al secondo millennio precedenti la nascita di Cristo. (Bagni 1996, Boyer 1980 ,Kline 1991)

Nel sistema di scrittura geroglifica egiziana relativo alle numerazioni erano stati introdotti dei simboli atti ad indicare tutte le rime sette potenze di 10 con esponenti interi variabili da 0 a 6; dunque:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1.000$,
$10^4 = 10.000$, $10^5 = 100.000$, $10^6 = 1.000.000$.

Si rinuncia qui ad indicare con precisione il grafico preciso introdotto dagli egiziani per ciascuno di questi sette numeri e, solo per dare un'idea dell'uso operativo di tali simboli, ci si limita ad indicare con semplici simboli di comodo le prime tre potenze di 10. Si introducono quindi adesso, in luogo dei simboli egiziani (espressi da disegni non sempre semplici), queste convenzioni:

$10^0 = 1$ viene indicato con I,
$10^1 = 10$ viene indicato con O,
$10^2 = 100$ è associato al simbolo X.

Il sistema di numerazione è decimale e ogni numero viene descritto usando i simboli menzionati partendo da destra verso sinistra, dove sono sottintese operazioni additive.

Ad esempio, usando le convenzioni anzidette, il numero 825 viene scritto così:

$$\boxed{I\,I\,I\,I\,I \;\; O\,O \;\; \begin{matrix} X\,X\,X\,X \\ X\,X\,X\,X \end{matrix}}$$

La prima serie relativa al simbolo *I* ripetuto cinque volte porta al numero 5. Il simbolo *O* è ripetuto due volte e ha per risultato 20. Infine il simbolo *X* viene ripetuto otto volte e si ottiene additivamente il numero 800. Quindi, sempre ricorrendo all'addizione, si ottiene:

$$5 + 20 + 800 = 825$$

Gli oggetti numerici presi soprattutto in considerazione dagli egiziani erano i numeri interi e le frazioni del tipo $1/_{n}$ con *n* intero positivo.

(Ifrah 1983) talvolta venivano considerate anche frazioni più complicate, senza però aggiungere sempre la necessaria chiarezza comprensiva.

N. 2 Qualche esempio relativo all'addizione, sottrazione, e moltiplicazione nell'Egitto antico

L'addizione e la sottrazione non comportavano difficoltà in quanto basate entrambe sull'operazione additiva già sottintesa nella simbologia introdotta nel paragrafo n. 1.

Ad esempio, volendo ottenere il risultato dell'addizione:

$$38 + 75$$

Si possono esprimere i numeri 39 e 75 mediante le convenzioni introdotte nel paragrafo n. 1. Il numero 38 viene rappresentato nelle prime due righe del disegno seguente, mentre per il numero 75 si usano la terza e la quarta riga:

$$
\begin{array}{cccc}
\begin{matrix} I\,I\,I\,I \\ I\,I\,I\,I \end{matrix} & O\,O\,O & & 38 \\
\begin{matrix} I\,I\,I \\ I\,I \end{matrix} & \begin{matrix} O\,O\,O\,O \\ O\,O\,O \end{matrix} & & 75 \\
\hline
I\,I\,I & O & X & 113
\end{array}
$$

Nella quinta riga si eseguono separatamente le addizioni per verticale relative ai simboli *I* e *O*. L’addizione relativa ai simboli *I* porta al numero 13 e quindi si scrive tre volte il simbolo *I*, tenendo presente che allora andrà aggiunto un altro simbolo *O* alla seconda somma verticale. In quest’ultima somma sono coinvolti dieci simboli *O* a cui, per quanto detto, ne va aggiunto uno, tenendo allora presente che, a destra, occorrerà aggiungere una volta sola il simbolo *X*. L’addizione dei tre numeri riportati:

$$3 + 10 + 100$$

conduce al risultato 113, come è evidenziato anche nello schema precedente. Dunque:

$$38 + 75 = 113.$$

L’operazione di sottrazione usa implicitamente l’addizione. Ad esempio si voglia eseguire:

$$59 – 36$$

usufruendo di uno schema del tipo di quello usato per l'addizione precedente. Il trucco consiste nella decomposizione del numero 59 nella somma di 36 e della parte rimanente. Nella prima riga del diagramma si introducono i simboli atti a rappresentare 36 e nella seconda riga i simboli corrispondenti additivamente al numero da addizionare a 36 per ottenere 59 nella totalità "prima + seconda riga":

I I I I I I	*O O O*		59
I I I	*O O*		
I I I	*O O O*		36
I I I	*O*	*X*	113

È allora chiaro che, scrivendo nella seconda riga quei simboli che, aggiunti a quelli della prima portano al risultato 59, compaiono già nella seconda riga i simboli che portano al risultato finale 23 espresso nella quarta riga, dopo aver indicato nella terza il sottraendo 36, già scritto nella prima riga. Dunque:

$$59 - 36 = 23.$$

Per quanto riguarda la moltiplicazione di due numeri interi, gli Egiziani avevano scoperto un metodo curioso e semplice (seppur talvolta laborioso per l'alto numero dei calcoli coinvolti). Occorreva però la divisione per 2 di un numero intero. Dati due fattori della moltiplicazione, si incolonnavano i risultati ottenuti dalla successiva divisione per 2, 2^2, 2^3,… del primo fattore, scrivendo solo ogni volta la parte intera del risultato. Si otteneva così una successione finita di numeri dove l'ultimo termine era sempre 1. Accanto alla colonna anzidetta si scrivevano in una seconda colonna corrispondente i risultati ottenuti moltiplicando per 2, 2^2, 2^3,… il secondo fattore. Si addizionavano quindi quei numeri della seconda colonna aventi come

corrispondenti nella prima colonna numeri dispari e la somma così ottenuta dava il risultato voluto. La giustificazione della validità del procedimento non è affatto immediata.
Un esempio relativo al prodotto:

$$52 \times 27$$

è costituito dal diagramma seguente, costruito scrivendo l'uno vicino all'altro separati da una linea verticale, dividendo quello scritto a destra (meglio sia il maggiore) per due senza considerare il resto, moltiplicando l'altro per due e scrivendo ordinatamente i risultati in colonna sotto i due numeri, ripetendo il passo precedente sino a che una divisione ha per risultato 1:

$$\begin{array}{r|l} 52 & 27 \\ 26 & 54 \\ 13 & 108 \\ 6 & 216 \\ 3 & 432 \\ 1 & 864 \end{array}$$

Si Cancellano i numeri pari della prima colonna, insieme ai corrispondenti numeri della seconda:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{52} & \cancel{27} \\ \cancel{26} & \cancel{54} \\ 13 & 108 \\ \cancel{6} & \cancel{216} \\ 3 & 432 \\ 1 & 864 \end{array}$$

La somma degli elementi superstiti della seconda colonna:

$$108 = 2^2 \times 27,$$
$$432 = 2^4 \times 27,$$

$$864 = 2^5 \times 27,$$

è il prodotto dei due numeri:

$$108 + 432 + 864 = 1.404.$$

A titolo di giustificazione rileviamo che il primo fattore 52 risulta somma delle potenze di due intervenute, il che ci consente di determinare che l'algoritmo poggia su di una scomposizione in potenze di 2 di uno dei fattori:

$$52 \times 27 = (4+ 16 + 32) \times 27 = 108 + 432 + 864 = 1.404.$$

dunque:

$$52\ 108 + 432 + 864 = 1.404.$$

Si noti che questo algoritmo che compare nel Papiro Rinhd, uno dei più antichi documenti matematici della storia dell'Egitto e dell'umanità. (Bagni 2001), non richiede che i numeri siano scritti in notazione posizionale né sfrutta particolari conoscenze matematiche, basandosi solo sulla moltiplicazione per due, sulla divisione per due e sulla somma. È noto, con poche inessenziali varianti, anche come "moltiplicazione del contadino russo"

Una variante di questo metodo, sempre di origine egizia, prevede di scrivere il maggiore dei due in prima colonna ed un uno in seconda colonna, per poi dividere il maggiore per due moltiplicando al tempo stesso il nostro uno per due e fermandosi solo quando queste moltiplicazioni giungono ad un numero il cui doppio supererebbe il secondo fattore:

52	1
104	2
208	4
416	6
832	8

$$1664 \mid 16$$

Ci fermiamo a 16 perché: $16 \times 2 = 32 > 27$.
Poi evidenziamo nella seconda colonna alcuni numeri la cui somma è 27 (in uno dei modi presenti, se ce ne fosse più d'uno):

52	**1**
104	**2**
208	4
416	**8**
832	**16**

infatti:

$$1 + 2 + 8 + 16 = 27$$

Allora il risultato cercato è la somma dei numeri della prima colonna evidenziati:

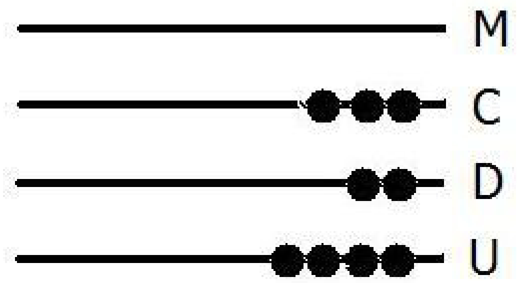
$$52 + 104 + 416 + 832 = 1.404.$$

Sempre grazie scomposizioni simili in potenze di 2 si possono ricavare altri algoritmi in uso presso gli Egiziani.

N. 3 Qualche cenno sull'Abaco

La scrittura posizionale ha avuto un'importanza fondamentale nella storia della matematica. Quando viene scritto un numero, ad esempio 25 nella numerazione decimale, hanno importanza non soltanto i due numeri 2 e 5 (indicanti numeri compresi tra 0 e 9) ma anche la loro posizione: 5 indica il numero delle unità e 2 il numero delle decine.
La scrittura posizionale implica dunque l'assegnazione convenzionale non solo a ciascuno dei nove simboli usati (in qualche caso disegni complessi) ma anche nelle posizioni in cui essi vengono collocati.

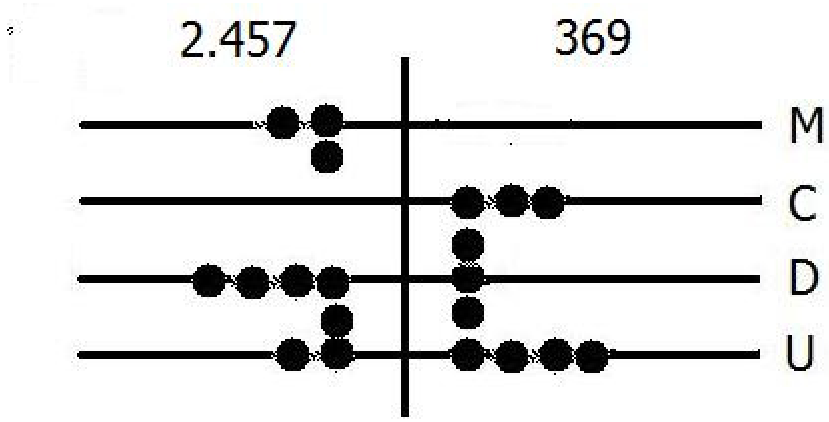
Un dispositivo meccanico di calcolo usato sfruttando la notazione posizionale è stato l'abaco: uno strumento con palline scorrevoli lungo file orizzontali, che si presta bene ad essere raffigurato con un disegno. Ad esempio il numero 324 può essere raffigurato nel modo seguente:



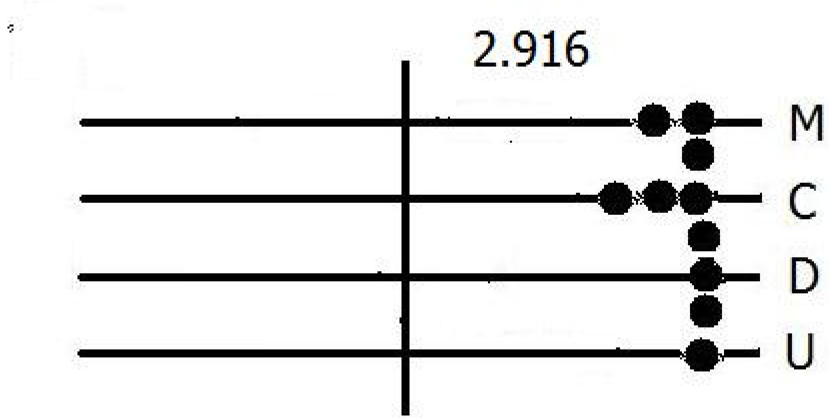
Si conviene che la prima riga indichi le migliaia, la seconda le centinaia, la terza le decine e la quarta l'unità.
Il più antico tipo di abaco (a righe) è stato usato in Grecia dal VI secolo a.C..
In epoche successive l'abaco a righe è stato usato anche per eseguire operazioni del calcolo aritmetico, come riportato ad esempio nelle opere di G. Reisch e R. Recorde, due maestri d'abaco del XV e XVI secolo d.C. (Reisch 1504, Recorde 1542, Ifrah 1983)
Ci si limita qui a dare un semplice esempio relativo all'addizione (Mingozzi 1993). Se si vuole calcolare:

$$2547 + 369$$

i due addendi vengono raffigurati rispettivamente nella parte sinistra ed in quella destra del disegno seguente:



per eseguire la somma si tratta di spostare da sinistra a destra, oppure da destra a sinistra le palline e riordinare la totalità così ottenuta in modo da ottenere il risultato voluto. Nell'esempio in oggetto si perviene al disegno:



Da cui il risultato:

$$2.547 + 369 = 2.916.$$

Sono da segnalare le tavolette d'Abaco ed altri procedimenti più complicati riguardanti moltiplicazione e divisione, per i quali si rinvia alla bibliografia, in particolare a (Mingozzi 1993, Cap. III).

CAPITOLO III
ALCUNI ALGORITMI DI CALCOLO PER OPERAZIONI ELEMENTARI

N. 1 L’addizione

L’operazione di addizione, in ambito numerico, è la prima ad essere stata presa in esame nel corso dell’antichità, per motivi abbastanza evidenti: è non soltanto l’operazione più semplice ma è anche quella che consente di capire la sottrazione e la moltiplicazione (quest’ultima, sempre in ambito numerico, può essere riguardata come una successione di addizioni e quindi, in ultima analisi, come una addizione, sia pure complessa).
Le prime operazioni eseguite dagli uomini con le dita di una mano o di due mani (o di uno o due piedi) riguardavano sempre somme (o sottrazioni ricondotte ad addizioni).
L’operazione di addizione nel Medioevo era praticaente eguale a quela odierna.
Ad esempio la somma:

$$\begin{array}{cc l} 3 & 9 & + \\ 4 & 3 & \\ \hline 8 & 2 & \end{array}$$

procedeva così: la somma di 9 e 3 è 12 che è anche la somma di 10 e 2:

$$9 + 3 = 12$$
$$10 + 2 = 12$$

Dunque questo numero è l’addizione di una decina e di due unità. La somma delle decine in gioco è 3 (dal primo addendo), 4 (dal secondo addendo) più 1 (la diecina compresa nel numero 12 già indicata). Si hanno così in tutto 2 unità ed 8 decine.

N. 2 La sottrazione

Il procedimento di sottrazione chiamato *"per prestito"* ha molte analogie col calcolo odierno. Ad esempio si deve eseguire la sottrazione:

$$463 - 158.$$

Si procede così, incolonnando ed iniziando da destra, cioè dalle unità: non si può fare la differenza tra 3 ed 8 in quanto 8 è maggiore di 3. Si prende allora "in prestito" una decina dalle decine del primo numero, che sono 6. Questo 6 diventa dunque un 5 per i passaggi futuri. Dopo ciò si effettua la sottrazione:

$$13 - 5 = 8$$

quest'ultimo è il numero delle unità del risultato cercato. Non ci sono poi diecine in questo risultato perché da 5 si sottrae 5 ed infine ci sono 3 centinaia. Dunque:

$$\begin{array}{cccc} 4 & 6 & 3 & - \\ 1 & 5 & 8 & \\ \hline 3 & 0 & 5 & \end{array}$$

Vi sono, reperibili in bibliografia, altri esempi di algoritmi per la sottrazione, come ad esempio quello "*per complementi*".
Si può comunque dire che l'addizione è l'operazione essenziale, sempre utilizzata per eseguire ogni tipo di sottrazione.

N. 4 La moltiplicazione

Questa operazione viene solitamente presentata ai bambini come un'addizione ripetuta. In realtà sono ben pochi gli algoritmi che la trattano in questo modo. Nella maggior parte si cerca di ricondurre i calcoli a quelli già noti ed indicati nella *Tavola Pitagorica*, che non è che un elenco di moltiplicazioni elementari, e a qualche somma.

La maggior parte di questi algoritmi ha una storia molto antica, che passa solitamente per fonti arabe. Le testimonianze più accurate in Occidente sono ne *Larte de labbacho* (il primo testo di aritmetica a stampa; Treviso, 1478) e nelle opere di Leonardo Fibonacci (1170 – 1220), Luca Pacioli (1445 – 1517) e Nicolò Tartaglia (al secolo Nicolò Fontana, 1499 – 1557).
Esaminiamo alcuni esempi.

4.a Moltiplicazione per colonna
Sfruttando la notazione posizionale si scompone agevolmente il primo fattore in somme di unità, decine, centinaia, eccetera e se ne moltiplica ciascun addendo per il secondo fattore cominciando dalle unità e procedendo con ordini di grandezza sempre maggiori, dopodiché si sommano i prodotti ottenuti. È necessario prestare attenzione ai riporti.
Per esempio si voglia calcolare:

$$215 \times 36$$

Il numero di centinaia occorrenti per arrivare a 215 è 2; il numero di diecine è 1 e il numero delle unità è 5. Ne segue che:

$$215 = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 200 + 10 + 5$$

che conviene scrivere nella forma:

$$215 = 5 + 10 + 200$$

sfruttando la commutatività dell'addizione.
Dopo ciò il prodotto iniziale può scriversi:

$$215 \times 36 = (5 + 10 + 200) \times 36.$$

Quindi, facendo ricorso alla proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, possiamo scrivere:

$$215 \times 36 = 5 \times 36 + 10 \times 36 + 200 \times 36$$

dove ciascuno dei tre addendi è un prodotto facilmente calcolabile. Si ha:

$$5 \times 36 = 180, \qquad 10 \times 36 = 360, \qquad 200 \times 36 = 7.200.$$

Dunque risulta:

$$215 \times 36 = 180 + 360 + 7.200 = 7.740.$$

Se i numeri sono appena un po' alti questo metodo si rivela macchinoso e più adatto alla forma scritta che al calcolo mentale.

4.b Moltiplicazione per scapezzo

È una generalizzazione del precedente in cui ci si prende la libertà di scomporre in somme in tutti i modi possibili i due fattori, secondo i calcoli che si rivelano più semplici.
Calcoliamo ad esempio:

$$15 \times 21.$$

I due fattori si possono scomporre in somme di numeri più piccoli, e dunque più maneggevoli, in moltissimi modi. Prendiamo in considerazione la scomposizione:

$$15 = 10 + 5.$$

Dunque abbiamo:

$$15 \times 21 = (10 + 5) \times 21$$

che per distributività prodotto rispetto alla somma diviene:

$$15 \times 21 = (10 \times 21) + (5 \times 21).$$

Calcolando, con relativa semplicità:

$$10 \times 21 = 210 \quad e \qquad 5 \times 21 = 105$$

risulta:

$$15 \times 21 = 210 + 105 = 315.$$

Vediamo un altro esempio dello stesso calcolo in cui scomponiamo come segue:

$$21 = 20 + 1.$$

Allora l'operazione diviene:

$$15 \times 21 = 15 \times (20 + 1)$$

che applicando la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto, dà:

$$15 \times 21 = (15 \times 20) + (15 \times 1)$$

ed essendo:

$$15 \times 20 = 300 \quad e \qquad 15 \times 1 = 15$$

risulta:

$$15 \times 21 = 300 + 15 = 315.$$

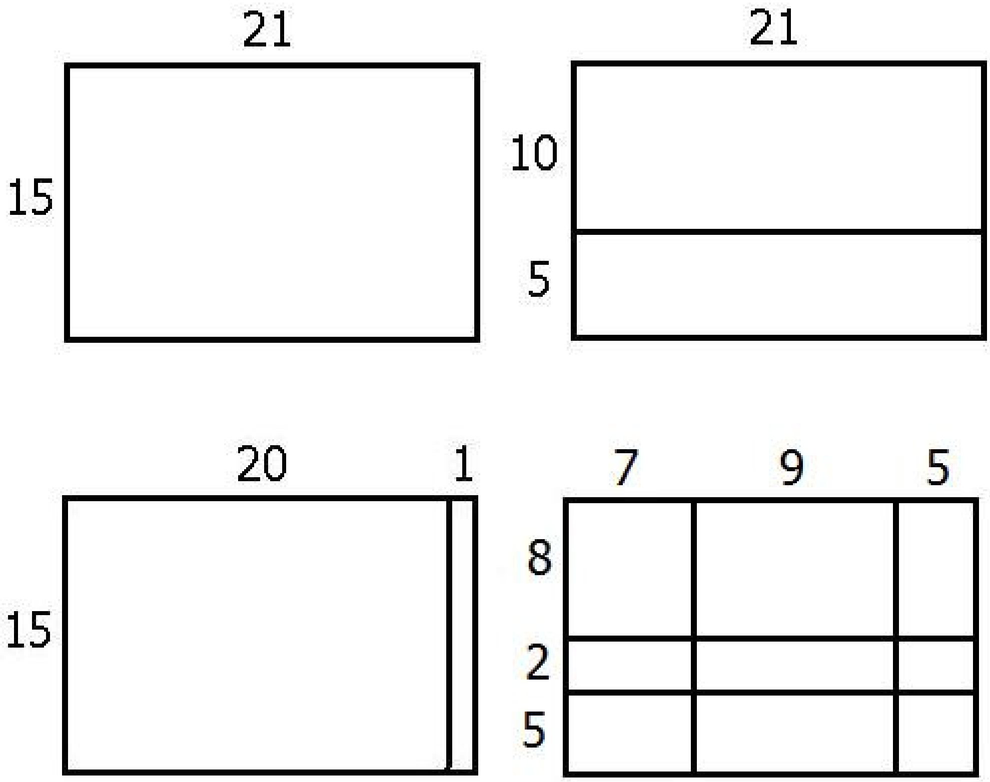
Vediamo ancora una volta lo stesso calcolo scomponendo entrambi i fattori:

$$15 = 8 + 2 + 5 \quad e \qquad 21 = 7 + 9 + 5.$$

Il calcolo, applicando diverse volte la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, è quindi:

$$(8 + 2 + 5\ ) \times (7 + 9 + 5) =$$
$$= 8 \times (7 + 9 + 5) + 2 \times (7 + 9 + 5) + 5 \times (7 + 9 + 5) =$$
$$= 8 \times 7 + 8 \times 9 + 8 \times 5 + 2 \times 7 + 2 \times 9 + 2 \times 5 + 5 \times 7 + 5 \times 9 + 5 \times 5 =$$
$$= 56 + 72 + 40 + 14 + 18 + 10 + 35 + 45 + 25 =$$
$$= 315.$$

Una giustificazione grafica di questo procedimento è nella possibilità di suddividere arbitrariamente un rettangolo con segmenti paralleli ai lati lasciando invariata l’area.



4.c Moltiplicazione per ripieghi

Si moltiplica il primo fattore per un divisore del secondo, poi il risultato per un altro divisore del secondo e così via sino al’esaurimento dei divisori.

Esempio:

$$215 \times 36 =$$

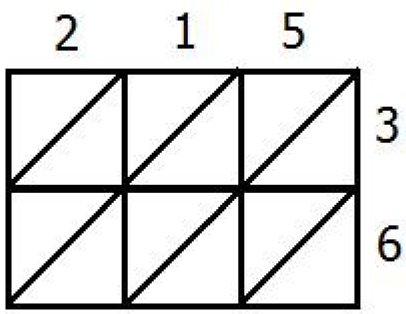
$= 215 \times (2 \times 2 \times 3 \times 3) =$
$= (((215 \times 2) \times 2) \times 3) \times 3 =$
$= ((430 \times 2) \times 3) \times 3 =$
$= (860 \times 3) \times 3 =$
$= 2.580 \times 3 =$
$= 7.740.$

È sostanzialmente la versione moltiplicativa del precedente. Questo metodo ha lo svantaggio di dover conoscere i divisori dei numeri che possono capitarci come fattori, cosa non sempre facile.

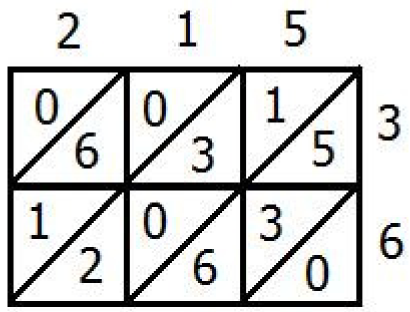
4.d Moltiplicazione per gelosia

Si traccia una griglia come quella della figura seguente, in cui le caselle sono tagliate dalle diagonali (la *gelosia*, per analogia con le imposte delle finestre usate a Venezia) e poi si sistemano i fattori in modo che le cifre corrispondano alle righe od alle colonne come in figura.
Esempio:

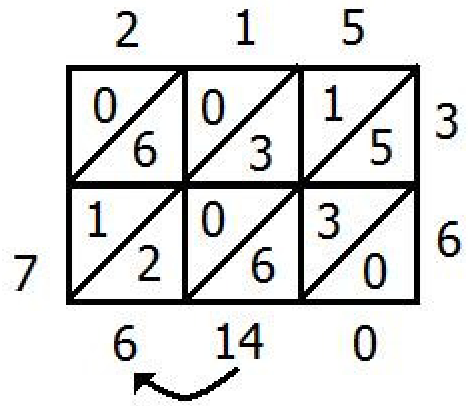
$$215 \times 36 = 7.740.$$



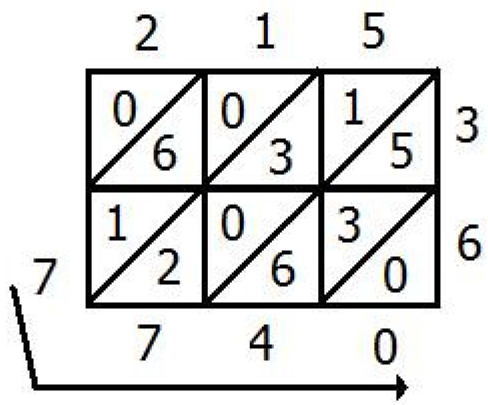
I fattori delle moltiplicazioni degli elementi delle righe per quelli delle colonne sono scritte separando decine ed unità.



Gli zeri iniziali sono inseriti per maggiore leggibilità e probabilmente per lungo tempo non si scrissero. Si somma secondo le righe diagonali.



Si operano i necessari riporti. Il risultato si legge secondo la freccia.



4.e Moltiplicazione a quadrilatero

È una variante più complessa della precedente. Sfrutta una tabella senza diagonali in cui si inseriscono i risultati delle moltiplicazioni cominciando dall'ordine minore e con i riporti già calcolati. Si sommano poi gli elementi delle caselle in diagonale calcolando i riporti.

	2	1	5	
		3	6	
1	2	9	0	
	6	4	5	0
		7	7	4

4.f Moltiplicazione a scachero

Questo algoritmo, analogo a quello attualmente diffuso in Italia, sfrutta pesantemente la notazione posizionale. Probabilmente deriva dal precedente. Scritto il primo fattore orizzontalmente lo si moltiplica per l'ultima cifra del secondo (unità) scrivendo sotto il risultato; si ripete la moltiplicazione per la penultima cifra del secondo fattore (decine) e si scrive il risultato sotto il primo, sfasato di un posto; si ripete il procedimento sino a terminare le cifra del secondo fattore; poi si sommano per colonne i diversi risultati parziali ottenuti.

Esempio:

$$215 \times 341 = 73.315$$

		2	1	5	
		2	*1*	*5*	1
	8	*6*	*0*	-	4
6	*4*	*5*	-	-	3
7	3	3	1	5	

Ovvero, come siamo soliti farla noi:

2	1	5
3	4	1
2	*1*	*5*

$$\begin{array}{ccccc}
 & 8 & 6 & 0 & - \\
6 & 4 & 5 & - & - \\
\hline
7 & 3 & 3 & 1 & 5
\end{array}$$

Una variante è detta *Schema all'indietro* e prevede di cominciare con l'ordine di grandezza maggiore, tenendo dei posti vuoti, ma ha lo svantaggio di doverli contare (2 se il secondo fattore ha 3 cifre, ed in generale *n-1* se ha *n* cifre):

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & 1 & 5 \\
 & & 3 & 4 & 1 \\
\cline{3-5}
6 & 4 & 5 & - & - \\
 & 8 & 6 & 0 & - \\
 & & 2 & 1 & 5 \\
\hline
7 & 3 & 3 & 1 & 5
\end{array}$$

Un'ulteriore variante del tutto analoga alla precedente è lo *Schema a castelluccio* che ha lo stesso conteggio iniziale di zeri da lasciare dietro al primo calcolo (*n-1* se il secondo fattore ha *n* cifre):

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 1 & 5 & & & & \\
3 & 4 & 1 & & & & \\
\hline
 & & 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \\
 & & & 8 & 6 & 0 & 0 \\
 & & & & 2 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 7 & 3 & 3 & 1 & 5
\end{array}$$

4.g Moltiplicazione a piramide

Citato dal Figatelli nel XVII secolo prevede di scrivere su diverse righe i risultati di alcune moltiplicazioni parziali di cifre dei fattori da sommare in seguito. Nella prima riga la prima cifra del primo fattore per l'ultima del secondo; nella seconda la prima del secondo per l'ultima del primo; nella terza la penultima del primo per la prima del secondo e poi l'ultima del primo per la seconda del secondo; nella quarta la penultima del secondo per la prima del primo e poi l'ultima del secondo per la seconda del primo, e così via sino a finire i fattori.

Chiaramente questo algoritmo è utile in caso di fattori di uguale ordine, cioè con lo stesso numero di cifre.
Esempio:

$$4.521 \times 7.373 = 33.333.333$$

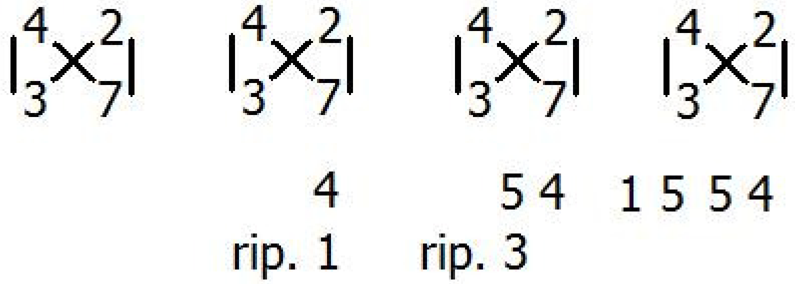
		4	5	2	1			
		7	3	7	3			
			0	7				1×7
			1	2				3×4
		1	4	0	3			2×7, 1×3
		2	8	1	5			7×4, 3×5
	1	2	3	5	0	6		3×4, 7×5, 3×2
	3	5	0	6	0	7		5×7, 2×3, 1×7
2	8	1	5	1	4	0	3	7×4, 3×5, 7×2, 3×1
3	3	3	3	3	3	3	3	

4.h Moltiplicazione a crocetta

Descritta da Fibonacci nel *Liber Abaci* si applica a fattori di uguale ordine, cioè con lo stesso numero di cifre.
Scritti i due numeri uno sotto l'altro li si collega con segmenti in tutti i modi possibili. Contiamo segmenti semplici o nodi (gli incroci) da destra a sinistra. Facciamo il prodotto dei numeri del primo segmento e scriviamo l'ultima cifra del risultato e teniamo presente il riporto. Nell'esempio:

$$42 \times 37 = 1.554.$$

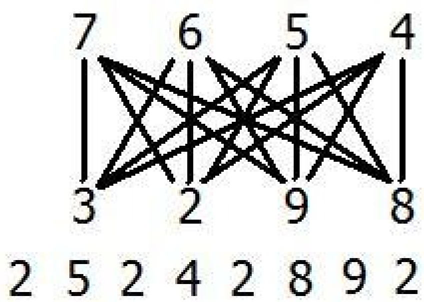
Quindi: primo segmento: $7 \times 2 = 14$.
Scriviamo 4 e teniamo il riporto 1.



Poi facciamo i prodotti dei numeri del secondo nodo, 7 × 4 = 28 e 3 × 2 = 6;
li sommiamo tra loro e col riporto precedente: 28 + 6 + 1 = 35. Scriviamo 5 e teniamo il riporto 3.
Poi calcoliamo il prodotto dei numeri dell’ultimo segmento: 3 × 4 = 12,
sommiamo a questo il riporto e lo scriviamo: 12 + 3 = 15.

Se le cifre sono di più tutto è analogo ma bisogna stare attenti a non confondersi tra i diversi nodi. Si guardi allo schema seguente relativo alla moltiplicazione:

7.654 × 3.298 = 25.242.892.



I segmento: 4 × 8 = 32, scrivo 2 e riporto 3;
II nodo: 5 × 8 + 4 × 9 + 3 = 79, scrivo 9 e riporto 7;
III nodo: 6 × 8 + 5 × 9 + 2 × 4 + 7 = 108, scrivo 8 e riporto 10;
IV nodo: 7 × 8 + 6 × 9 + 5 × 2 + 4 × 3 +10 = 142, scrivo 2 e riporto 14;
V nodo: 7 × 9 + 6 × 2 + 3 × 5 + 14 = 104, scrivo 4 e riporto 10;
VI nodo: 7 × 2 + 6 × 3 + 14 = 42, scrivo 2 e riporto 4;

VII segmento: $7 \times 3 + 4 = 25$ che scrivo.

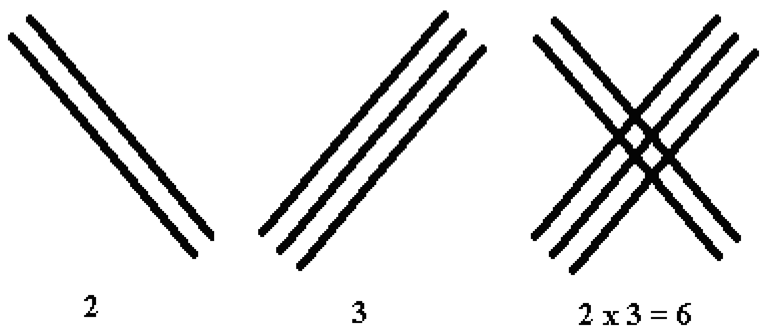
4.i Un algoritmo cinese con le bacchette da calcolo

Il fascino della cultura matematica cinese è tale che non possiamo esimerci dal presentare questo algoritmo basato sull'uso delle bacchette da calcolo. Il loro uso in Cina è piuttosto antico ma la descrizione degli algoritmi compare in opere del V secolo, tra cui il *Manuale di calcolo di Sunzǐ* (孙子算经 *Sunzǐ suànjìng*), il *Manuale matematico di Zhāng Qiūjiàn* (张邱建算经 *Zhāng Qiūjiàn suànjìng*) e le *Memorie su metodi algebrici tradizionali* (数术记遗 *Shùshū jìyí*) di Xú Yuè (徐岳). (Nicosia 2010)

L'algoritmo sfrutta una rappresentazione posizionale in base 10. Rappresentati i fattori, peraltro in modo molto intuitivo, si incrociano le bacchette corrispondenti e si contano ordinatamente i nodi. Occorre sempre fare attenzione ai riporti ma il sistema è decisamente semplice anche per numeri abbastanza alti.

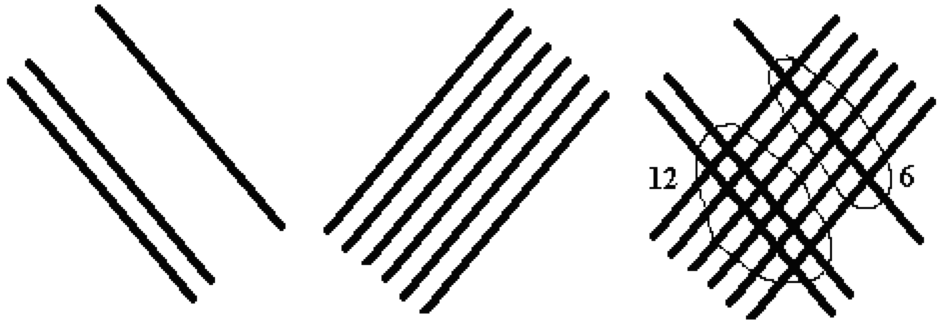
Esempio:

$$2 \times 3 = 6$$



Esempio:

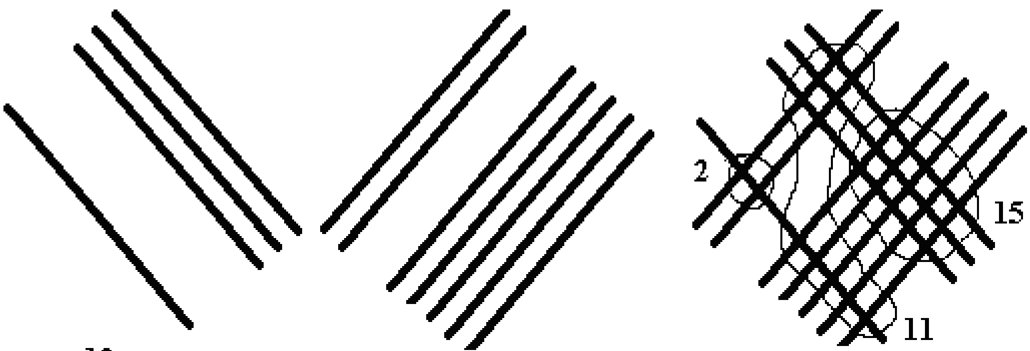
$$21 \times 6 = 126$$



21   6   21 x 6 = (12 x 10) + 6 = 126

Esempio:

$$13 \times 25 = 325$$



13   25

13 x 25 = (2 x 100) + (11 x 10) + 15 =
= 200 + 110 + 15 = 325

Si noti che la rappresentazione non è omogenea: i fattori sono rappresentati da bacchette mentre il prodotto da intersezioni. Se lo si deve usare in altri calcoli lo si deve riscrivere in un altro modo.

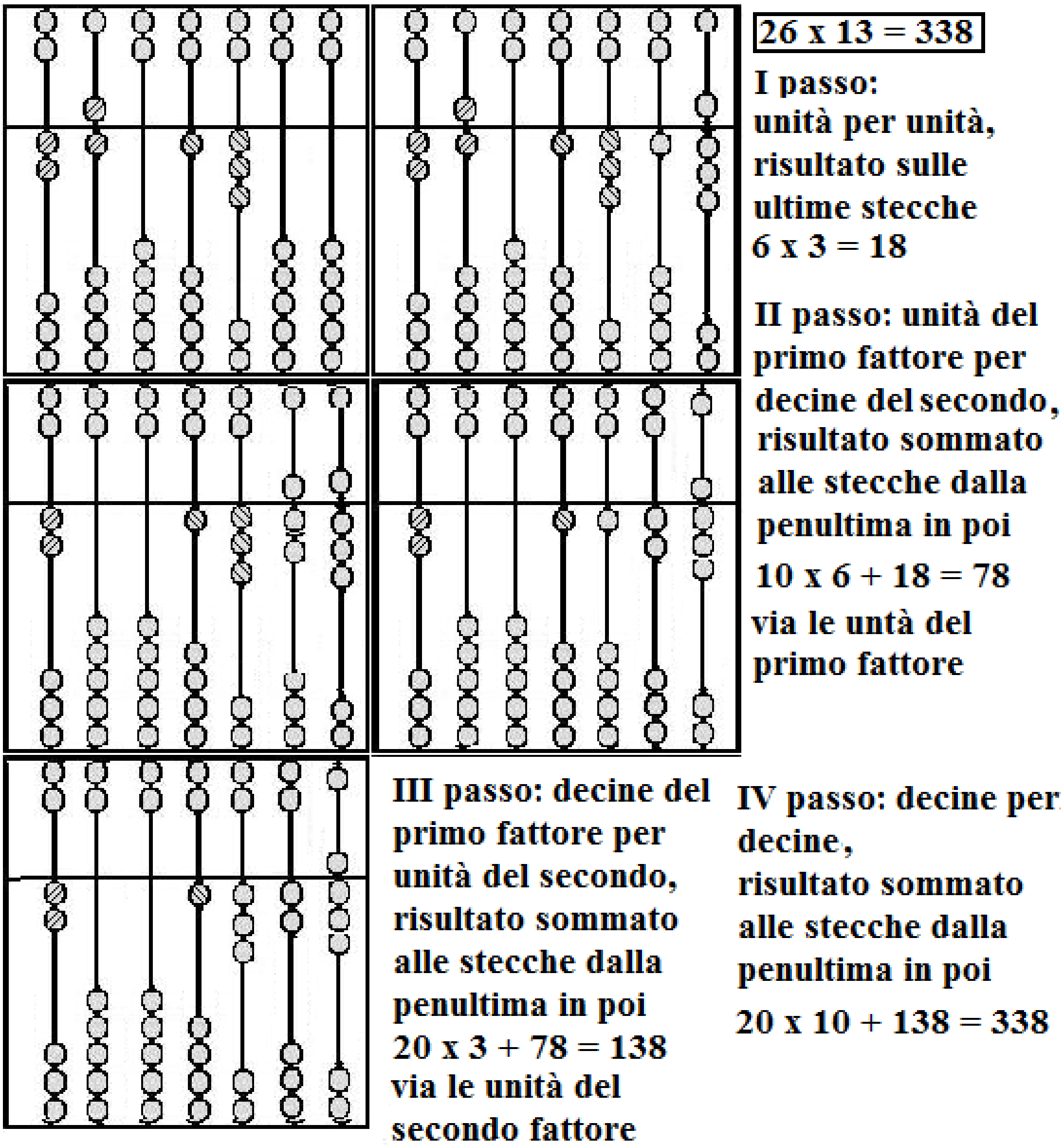
4.j Algoritmi col pallottoliere cinese

Per la sua diffusione in molte regioni del pianeta gli algoritmi che usano il pallottoliere meritano la nostra attenzione. Si tratta di pratiche tuttora in voga in quasi metà dei Paesi dell'Asia, in cui non è infrequente trovare pallottolieri accanto ai registratori di cassa dei supermercati.

Inizialmente occorre rappresentare ambo i fattori su insiemi di stecche diverse, meglio se divisi da almeno una stecca "inerte". Ricordiamo che nella rappresentazione di numeri col pallottoliere le stecche

rappresentano l'ordine di grandezza, crescente da sinistra a destra; le palline al di sotto del setto rappresentano unità, quelle al di sopra cinquine.
Esempio:

$$26 \times 13 = 338$$



N.5 La divisione

È l'operazione che presenta le più grandi difficoltà didattiche nel processi di insegnamento/apprendimento. Coerentemente anche

l'elaborazione di algoritmi per la divisione è stata assai lunga, presentandosi molti di quelli che in letteratura sono classificati come *ostacoli epistemologici*. (D'amore 1999)
La rassegna qui presentata è quindi solo una minima parte degli algoritmi esistenti ed esistiti e non ha alcuna pretesa di completezza. Gli esempi riportati sono per lo più presi da (D'amore e Oliva 1994).

5.a Divisione a danda lunga
È stato a lungo l'algoritmo più usato in Italia (almeno sino al secondo dopoguerra) e, con qualche lieve differenza grafica, in molte parti del mondo. Si calcoli ad esempio:

$$372.865 \div 43$$

Inseriamo i numeri nello schema grafico seguente:

$$\begin{array}{r|l} 3\ \ 7\ \ 2\ \ 8\ \ 6\ \ 5 & 4\ \ 3\ \ \ \ \ \\ \cline{2-2} & \\ & \\ & \end{array}$$

Consideriamo la prima cifra del divisore: 4. È maggiore della prima cifra del dividendo, 3, per cui considereremo le prime due cifre di questo: 37. Il 4 nel 37 *sta* 8 volte. Dimenticando il resto scrivo 8 sotto la prima cifra del divisore.

$$\begin{array}{r|l} 3\ \ 7\ \ 2\ \ 8\ \ 6\ \ 5 & 4\ \ 3\ \ \ \ \ \\ \cline{2-2} & 8 \\ & \\ & \end{array}$$

Poi moltiplico questo numero per il divisore ottenendo l'ultima cifra del divisore, 3, ottenendo 344, numero che scrivo sotto le prime cifre del dividendo:

$$\begin{array}{cccccc|cc} 3&7&2&8&6&5&4&3\\ \cline{7-8} 3&4&4&&&&8& \\ &&&&&&& \end{array}$$

Faccio poi la sottrazione tra il dividendo e il numero sottostante, fingendo che ci siano degli zeri nei posti vuoti tra questo e la riga; la differenza viene scritta in colonna sotto un'altra riga:

$$\begin{array}{cccccc|cc} 3&7&2&8&6&5&4&3\\ \cline{7-8} 3&4&4&&&&8& \\ \cline{1-6} &2&8&8&6&5&& \\ &&&&&&& \end{array}$$

Dato che tale risultato 28.865 è maggiore o uguale al dividendo:

$$28.865 \geq 43$$

si ripetono tutti gli stessi passi applicati alla divisione:

$$28.865 \div 43$$

$$\begin{array}{cccccc|cc} 3&7&2&8&6&5&4&3\\ \cline{7-8} 3&4&4&&&&8&6 \\ \cline{1-6} &2&8&8&6&5&& \\ &2&5&8&&&& \\ \cline{2-6} &&3&0&6&5&& \\ &&&&&&& \end{array}$$

$$3.065 \geq 43$$

dunque si continua con la divisione:

$$3.065 \div 43$$

3	7	2	8	6	5	4	3		
3	4	4				8	6	7	
	2	8	8	6	5				
	2	5	8						
		3	0	6	5				
		3	0	1					
		0	0	5	5				

$$55 \geq 43$$

Continuiamo con:

$$55 \div\geq 43$$

3	7	2	8	6	5	4	3		
3	4	4				8	6	7	1
	2	8	8	6	5				
	2	5	8						
		3	0	6	5				
		3	0	1					
				5	5				
				4	3				
				1	2				

Ci fermiamo perché:

$$12 < 43$$

concludendo che il quoziente è 8.671 ed il resto è 12.

5.b Divisione a danda corta

È in tutto analoga alla precedente, con l’omissione dei prodotti dei quozienti parziali per il divisore:

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
3 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & & \\ \cline{7-10}
 & 2 & 8 & 8 & & & 8 & 6 & 7 & 1 \\
 & & 3 & 0 & 6 & & & & & \\
 & & & & 5 & 5 & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & & & &
\end{array}$$

È l’algoritmo attualmente in uso in Italia ed in molti altri Paesi.

5.c Divisione per galera

L’algoritmo prende il nome dal disegno che produce alla fine, simile allo schema di una nave. Si scrivano il dividendo ed il divisore in uno schema come quello sottostante:

$$\begin{array}{cccccc|c}
3 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & \qquad \\ \cline{7-7}
 & 4 & 3 & & & &
\end{array}$$

In cui il divisore 43 è allineato sotto l’ultima cifra del 372 perché la prima divisione parziale è:

$$372 \div 43$$

Ne scriviamo il quoziente nella parte tra le righe:

$$\begin{array}{cccccc|l}
3 & 7 & 2 & 8 & 6 & 5 & 8 \qquad \\ \cline{7-7}
 & 4 & 3 & & & &
\end{array}$$

Poi calcoliamo il prodotto della prima cifra del divisore con questo risultato parziale:

$$4 \times 8 = 32$$

Sottraiamo la differenza trovata dal numero formato dalle prime due cifre del dividendo:

$$37 - 32 = 5$$

e scriviamo ciò che si ottiene al di sopra del 37 come in figura, cancellando ciò che non ci servirà più:

$$\begin{array}{cccccc|l} & 5 & & & & & \\ \cancel{3} & \cancel{7} & 2 & 8 & 6 & 5 & \underline{8\qquad} \\ & \cancel{4} & 3 & & & & \end{array}$$

Poi si ripete il prodotto del quoziente parziale divisore per la seconda cifra del divisore:

$$3 \times 8 = 24$$

e si sottrae questo numero da quello formato dalla differenza trovata prima (5) e dall'ultima cifra del dividendo parziale considerato prima (2):

$$52 - 24 = 28$$

scriviamo allora 2 sopra 5 ed 8 sopra il 2, cancellando poi come in figura:

$$\begin{array}{cccccc|l} & 2 & & & & & \\ & \cancel{5} & 8 & & & & \\ \cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & 8 & 6 & 5 & \underline{8\qquad} \\ & \cancel{4} & \cancel{3} & & & & \end{array}$$

Ora, come si è fatto per il 53, si legge in diagonale il prossimo dividendo parziale: 288. Riscriviamo dunque 43 anche esso in diagonale, incolonnato sotto 288:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & \mathbf{2} & & & & & \\
 & \cancel{5} & \mathbf{8} & & & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \mathbf{8} & 6 & 5 & \underline{8\qquad\quad} \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} & 3 & & & \\
 & & \cancel{4} & & & &
\end{array}
$$

Allora, ripetendo i passaggi si ha:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & & 3 & & & & \\
 & \cancel{2} & \cancel{4} & & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{8} & 0 & & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & 6 & 5 & \underline{8\;\;6\qquad} \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & & & \\
 & & \cancel{4} & & & &
\end{array}
$$

Evidenziamo il prossimo dividendo parziale e riscriviamo il divisore:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & & \mathbf{3} & & & & \\
 & \cancel{2} & \cancel{4} & & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{8} & \mathbf{0} & & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & \mathbf{6} & 5 & \underline{8\;\;6\qquad} \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 & & \\
 & & \cancel{4} & 4 & & &
\end{array}
$$

Da cui:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & & \cancel{3} & & & & \\
 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & 5 & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{6} & 5 & \underline{8\;\;6\;\;7\quad} \\
 & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & & \\
 & & \cancel{4} & \cancel{4} & & &
\end{array}
$$

Ancora una volta evidenziamo il prossimo dividendo parziale e riscriviamo il divisore:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & \cancel{3} & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & \mathbf{5} & & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{6} & \mathbf{5} & 8\ 6\ 7 \\
\cline{7-7}
 & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 & \\
 & & \cancel{4} & \cancel{4} & 4 & & \\
\end{array}
$$

Da cui:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
 & & \cancel{3} & & 1 & & \\
 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{1} & & \\
 & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{5} & 2 & \\
\cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{6} & \cancel{5} & 8\ 6\ 7\ 1 \\
\cline{7-7}
 & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & \\
 & & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & & \\
\end{array}
$$

Ci fermiamo qui perché abbiamo raggiunto un resto (12) minore del divisore (43).

5.d Divisione di testa o per colonna

Adatto a divisori di una sola cifra, è l’algoritmo usato attualmente nella scomposizione in fattori primi. Calcoliamo:

$$3.271 \div 6$$

Allora, scritti i due numeri separati da una riga, calcoliamo: il 6 nel 32 sta 5 volte (che scriviamo sotto il 32) col resto di 2, che attacchiamo al 7 del divisore generando un 27; 6 nel 27 sta 4 volte (che scriviamo sotto il 7) col resto di 3; 6 nel 31 sta 5 volte (che scriviamo) col resto di 1, che è il resto generale. Nello schema:

$$
\begin{array}{r|l}
3271 & 6 \\
545 & \quad \text{Resto } 1 \\
\end{array}
$$

CAPITOLO IV
I LEGAMI DEL CALCOLO CON LA GEOMETRIA

N. 1 I postulati della geometria piana e gli assiomi proposti da Hilbert

Nell'antichità, insieme allo sviluppo del calcolo aritmetico, si è manifestato anche un graduale interesse per le proprietà elementari ella geometria rettilinea, piana e dello spazio.
Hanno assunto in proposito grande importanza in cinque seguenti postulati introdotti da Euclide di Alessandria (III secolo a.C.) per la geometria piana:

I. "Un punto qualunque può essere congiunto con un altro con un segmento rettilineo."

II. "Ogni segmento rettilineo può essere prolungato al di là dei suoi estremi."

III. "Con centro in un punto qualunque, si può descrivere una circonferenza di raggio arbitrario."

IV. "Tutti gli angoli retti sono uguali tra loro."

V. "Se due segmenti rettilinei, incontrandone un terzo, formano dalla stessa parte di questo due angoli interni con somma inferiore a due retti, allora essi, sufficientemente prolungati, si incontrano dalla parte anzidetta."

La formulazione qui esposta dei postulati in oggetto si trova in (Waismann) e coincide con quelle riportate nei vari testi in circolazione.
È facilmente comprensibile che a David Hilbert (1862 – 1943) e a vari altri matematici, soprattutto nel XIX secolo ed in epoca successiva, la formulazione così ridotta degli assiomi di Euclide per la geometria piana sia apparsa del tutto carente, con necessità di una riformulazione totale più completa e rigorosa.
Nel 1899 Hilbert pubblicava la prima edizione della sua notissima e apprezzata opera *Grundlagen del Geometrie* (tradotta in italiano per conto di Feltrinelli nel 1970 col titolo di *Fondamenti della Geometria* cui poi è seguita una nuova recentissima traduzione italiana con lo stesso titolo pubblicata da Franco Angeli - Bicocca) in cui venivano introdotti venti assiomi divisi in cinque gruppi.
Nel primo gruppo (*Assiomi di collegamento*) vengono introdotti tre assiomi di geometria piana, seguiti da altri cinque assiomi riguardanti la geometria dello spazio.
Il secondo gruppo di assiomi riguarda l'ordinamento dei punti in una retta e comprende quattro assiomi.
I cinque assiomi del terzo gruppo sono relativi ala congruenza; i primi tre riguardano i segmenti e gli altri due s riferiscono agli angoli.
Nel quarto gruppo vi è un solo assioma detto *assioma di parallelismo*.
Infine vi sono due assiomi nel quinto gruppo, detti *di continuità e completezza*: il primo denominato *assioma di Archimede* e l'altro *assioma di completezza*.
Si può notare che qualcuno dei suddetti assiomi contiene più di un asserto, onde il numero degli assiomi avrebbe potuto essere maggiore.

N. 2 Legami tra algebra e geometria

Fin dall'antichità era noto che i segmenti di una retta si potevano sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere per un numero naturale, evidenziando così il primo legame tra calcolo aritmetico e geometria.

Si poteva evincere anche un legame tra proprietà geometriche ed estrazione di radice quadrata: il quadrato A costruito sulla diagonale di un quadrato B ha area doppia di quella di B e quindi se il lato di B misura 1 il lato di A misura la radice quadrata di 2.

Anche se si è arrivati ad una definizione pienamente rigorosa dell'insieme $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali solo in epoca recente (fine Ottocento, inizio Novecento), i numeri reali erano sostanzialmente noti ed usati anche nei secoli precedenti.

Usufruendo del cosiddetto *postulato della continuità di una retta* si era stabilita una corrispondenza biunivoca tra *punti di una retta del piano* e *numeri reali*. In tal modo la scoperta di Cartesio (1596 – 1650) relativa alla corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di punti di una retta permetteva di identificare il piano euclideo al piano cartesiano $\boldsymbol{R}^2=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ costituito appunto dalle coppie di numeri reali.

N. 3 Cenni sul *calcolo con i segmenti* proposto da Hilbert sulla base del teorema di Desargues

La possibilità aperta dalla scoperta di Cartesio di avere una geometria analitica piana in un ambiente del tipo $\boldsymbol{K}^2$, dove $\boldsymbol{K}$ è un corpo qualsiasi (non necessariamente commutativo), ha consentito ad Hilbert di evidenziare l'importanza del teorema di Desargues (1623 – 1662) nei legami tra algebra e geometria.

L'enunciato del teorema di Desargues proposto da Hilbert è il seguente:

> "se in un piano vi è una corrispondenza tra due triangoli *ABC* ed *A'B'C'* tale che i lati *AB*, *A'B',* e *BC*, *B'C'* sono paralleli,

allora i lati *BC*, *B'C'* sono paralleli se e solo se le tre rette *AA'*, *BB'*, *CC'* sono parallele oppure hanno un punto in comune."

Supponiamo che in un piano valgano soltanto gli assiomi piani di Hilbert, gli assiomi dell'ordine ed una forma forte del postulato delle parallele:

"esiste in un piano una e una sola parallela per un punto a una retta data".

Viene allora dimostrato da Hilbert che sussiste un'equivalenza tra queste proprietà:

α) "Il piano è immergibile in uno spazio in cui valgono gli assiomi spaziali di Hilbert del primo gruppo."

β) "Nel piano vale il teorema di Desargues."

γ) "Una retta del piano è identificabile con un corpo $\boldsymbol{K}$ (non necessariamente commutativo), il piano è identificabile con $\boldsymbol{K}^2$ e le rette del piano sono identificabili con equazioni lineari."

L'implicazione più difficile da dimostrare è: β) → γ). Si tratta infatti di provare che la validità del teorema di Desargues consente di definire, in modo originale e laborioso, un *calcolo con i segmenti* (somma, sottrazione, prodotto, divisione) in cui sono verificate le proprietà commutativa della somma, le proprietà associative della somma e del prodotto e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.
Hilbrt prende in esame anche la seguente versione del teorema di Pappo-Pascal (Pappo è vissuto nel III, IV secolo d.C.; Pascal 1593 – 1662):

> “Presi rispettivamente su due rette *r* ed *r’* di un piano tre punti *A*, *B*, *C* e tre punti *A’*, *B’*, *C’* se le rette *A’B* e *AB’*, *AC’* e *A’C* sono parallele, tali sono anche *B’C* e *BC’*.”

Dopo ciò, sostituendo in β) “Desargues” con “Pascal” e in γ) “corpo” con “campo” vale ancora l’equivalenza tra le due condizioni.
È interessante notare come tali teoremi pongano una base teorica rigorosa, per noi moderni, di quel calcolo geometrico che tanto apprezzavano i Greci.

BIBLIOGRAFIA

Bagni, G.T. (1989) L'Aritmetica di Treviso. In: D'Amore B., Speranza F. (a cura di) *Lo sviluppo storico della matematica*. Roma: Armando. Pp. 27-34.

Bagni G.T. (1994) Numeri e operazioni nel Medioevo. Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478). *La matematica e la sua didattica*, 4, Pp. 432- 444.

Bagni G.T. (1995) *Il primo manuale di matematica stampato al mondo. Larte de labbacho (Treviso, 1478).*Treviso: Cassamarca, 11, IX, 2, Pp. 77-82.

Bagni G.T. (1996) *Storia della matematica* (2 voll.). Bologna: Pitagora.

Bagni G.T. (2001) Dalla storia alla didattica della Matematica. *Atti del Convegno "La Matematica è difficile?"* Adria, 10 maggio 2001, PP. 19-30.

Boyer C.B. (1980) *Storia della matematica*. Milano: Mondadori.

Bottazzini U. (1990) *Il flauto di Hilbert*. Torino: UTET.

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L. (1992) *Fonti per la Storia della Matematica*. Firenze: Sansoni.

Carruccio E. (1972) *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999) *Elementi di Didattica della Matematica* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Oliva P. (1994) *Numeri – Teoria, storia, curiosità, giochi e didattica nel mondo dei numeri* Milano: FrancoAngeli.

Hilbert D. (1970) *Fondamenti della Geometria*. Milano: Feltrinelli.

Hilbert D. (2009) *Fondamenti della Geometria*. Milano: Franco Angeli - Bicocca.

Ifrah G. (1983) *Storia Universale dei Numeri*. Milano: Mondadori.

Kline M. (1999) *Storia del pensiero matematico* (2 voll.). Torino: Einaudi.

Levy Bruhl J. (1968) *Introduction aux structures algebriques*. Paris: Dunod.

Loria G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX.* Torino: Sten. (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Mingozzi C. (1993) *Algoritmi di calcolo antichi*. Bologna: tesi di laurea a.a. 1992-1993.

Neugebauer O. (1974) *Le scienze esatte nell'Antichità*. Milano: Feltrinelli.

Nicosia G.G. (2010) *Cinesi, scuola e matematica*. Morrisville e London: Lulu.com

Odifreddi P. (2000) *La matematica del Novecento. Dagli insiemi alla complessità.* Torino: Einaudi.

Recorde R. (1542) *Arithmetic: or, The Ground of Arts.* London.

Reisch G. (1504) *Aepitoma omnis phylosophiae, alias, Margarita phylosophica: tractans de omni genere scibili.* Freiburg.

Salmon P. (2004) *Appunti manoscritti del corso S.S.I.S. di Epistemologia e Storia della Matematica* a.a. 2003-2004. Bologna.

Tinaglia C. (2010) *Appunti manoscritti del corso universitario di Teoria dei Numeri* a.a. 2009-2010. Bologna.

Waismann F. (1944) *Introduzione al pensiero matematico.* Torino: Einaudi.