Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TABELLE DI YOUNG E STATISTICHE SULLE PERMUTAZIONI

Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Marilena Barnabei

Presentata da:
Vittoria Valgiusti

I Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione

La presente tesi è suddivisa in due parti: nella prima parte illustriamo le definizioni e i relativi risultati della teoria delle tabelle di Young, introdotte per la prima volta nel 1900 da Alfred Young; mentre, nella seconda parte, diamo la nozione di numeri Euleriani e di Polinomi Euleriani, così chiamati perché Eulero fu il primo a studiarli nel 1755, in Institutiones calculi differentialis (Istituzioni di calcolo differenziale). Nel primo capitolo abbiamo introdotto i concetti di diagramma di Young, come collezione di righe di celle di lunghezza non crescente dall'alto al basso, utilizzate per rappresentare le partizioni di un numero intero positivo n, e di tabelle di Young standard, come riempimento delle celle di un diagramma con numeri interi positivi tali che essi siano crescenti lungo le righe e crescenti lungo le colonne. Inoltre, abbiamo fornito la formula degli uncini per contare le tabelle di Young standard della stessa forma. Questo risultato è stato dapprima provato nel 1954 da J. S. Frame, G. de B. Robinson e R. M. Thrall; diamo qui un cenno della dimostrazione probabilistica trovata da C.Greene, A.Nijenhuis e H.S.Wilf nel 1979 [7].
Il primo capitolo è focalizzato, soprattutto, sul teorema di Robinson-Schensted [1], che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le permutazioni di S_n e le coppie di tabelle di Young standard della stessa forma. Ne deriva un'importante conseguenza che consiste nel poter trovare in modo efficiente la massima sottosequenza crescente di una permutazione [4]. Una volta definite le operazioni di evacuazione e "*le jeu de taquin*" relative alle tabelle di Young, illustriamo una serie di risultati riferibili alla corrispondenza biunivoca R-S che variano in base alla permutazione che prendiamo in considerazione. In particolare, enunciamo il teorema di simmetria di M.P.Schüztenberger [5], che dimostriamo attraverso la costruzione geometrica di Viennot [6], la quale fornisce un ottimo modo per ricavare una coppia di tabelle standard a partire dalla loro rappresentazione grafica.
Nel secondo capitolo, dopo aver dato la definizione di discesa di una permutazione, descriviamo altre conseguenze della corrispondenza biunivoca R-S: vediamo così che esiste una relazione tra le discese di una permutazione e la coppia di tabelle di Young asso-

ciata. Abbiamo trattato approfonditamente i numeri Euleriani [9, 10, 11], indicati con $A(n,k) = \sharp\{\sigma \in S_n; d(\sigma) = k\}$, dove $d(\sigma)$ indica il numero di discese di una permutazione. Descriviamo le loro proprietà e simmetrie e vediamo che sono i coefficienti di particolari polinomi, detti Polinomi Euleriani. Il capitolo termina con un'interpretazione differente dei numeri Euleriani. Attraverso la nozione di eccedenza di una permutazione e la descrizione della mappa di Foata arriviamo a dimostrare un importante risultato: $A(n,k)$ conta anche il numero di permutazioni di S_n con k eccedenze.

Capitolo 1

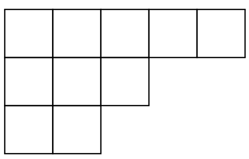
Teorema di Robinson-Schensted

1.1 Tabelle di Young

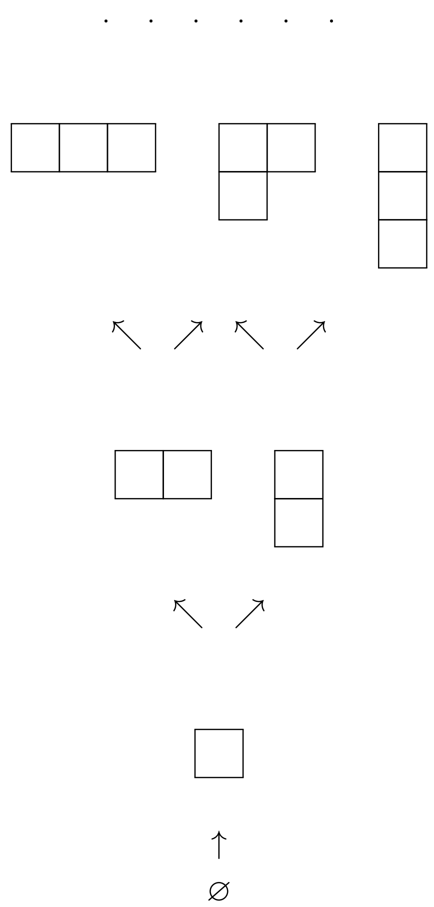
Definizione 1.1 (Diagrammi di Young)**.** Sono delle righe di celle giustificate a sinistra e di lunghezza non crescente dall'alto al basso.

Definizione 1.2 (Partizione di un intero n)**.** Una *partizione di un intero positivo* n è una sequenza $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ tale che:
· λ_i è un intero positivo per ogni i;
· $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$;
· $\sum_{i=1}^{k}(\lambda_i) = n$.
Scriveremo $\lambda \vdash n$ per indicare che λ è una partizione di n.

Si possono utilizzare i diagrammi di Young per rappresentare le partizioni di un numero intero positivo. Se il numero è n, avrò che n è il numero totale delle celle del diagramma, il vettore $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ che ha per componenti il numero di celle in ogni riga rappresenta una partizione di n e ,viceversa, ad ogni partizione di n $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ corrisponde un diagramma di Young. Ad esempio la partizione del numero 10 è $\lambda = (5, 3, 2)$ e corrisponde al seguente diagramma di Young:

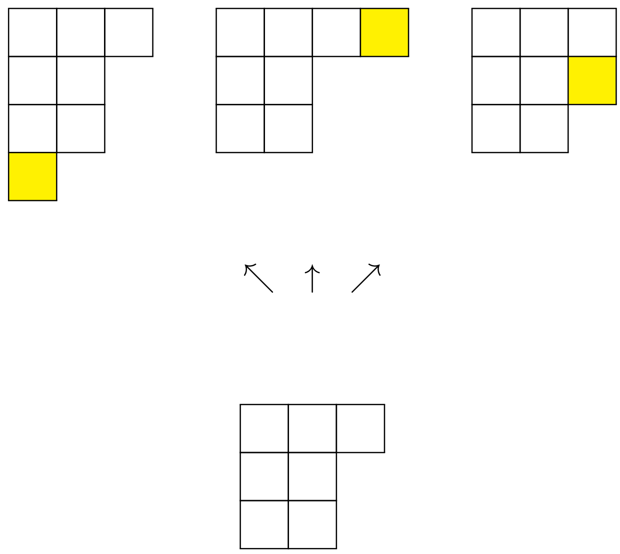


I diagrammi di Young possono essere ordinati per inclusione. L'insieme parzialmente ordinato che ne risulta è in più un reticolo, detto reticolo di Young. Questo ha un minimo, che è la partizione vuota, ma non ha un massimo:



Definizione 1.3 (Relazione di copertura)**.** La *relazione di copertura* nel reticolo di Young è la seguente: data una partizione λ si dice coperta da μ se il diagramma di μ si ottiene da quello di λ aggiungendo una casella alla fine di una riga (se è possibile), oppure alla fine della prima colonna. La casella aggiunta si dice *casella esposta*.

Esempio:



Definizione 1.4 (Tabella di Young standard)**.** Sia λ una partizione di n. Una *tabella di Young standard* di forma λ è una biiezione dal diagramma di Young di λ all'insieme degli interi $\{1, 2, \ldots n\}$, tale che i numeri siano crescenti lunghe le righe e crescenti lungo le colonne. Può essere vista come una catena satura nel reticolo di Young, che inizia dalla partizione vuota e termina con λ. Questa tabella è ottenuta inserendo nel diagramma di λ l'intero $i + 1$ nella casella che è stata aggiunta passando dall'i-esimo elemento della catena al successivo, per ogni $i = 0, 1, .., n - 1$.

Riportiamo un esempio di tabella di Young standard:

1	2	5	6
3	4	8	
7	9		

Più in generale, se prendiamo un insieme linearmente ordinato di simboli distinti $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$, possiamo dare la definizione di tabella standard di forma λ nei simboli $i_1, i_2, ..., i_n$ come un riempimento delle celle di λ con questi simboli in modo che essi siano crescenti lungo le righe e decrescenti lungo le colonne. Per esempio: prendiamo una tabella standard di forma $\lambda = (4, 3, 2)$ nei simboli 1,7,9,22,25,31,51,85,94:

1	7	31	85
9	22	51	
25	94		

Osservazione 1.
Data la tabella T e il diagramma λ, diremo che T è la tabella sul diagramma λ o che λ è la forma di T.

Definizione 1.5 (Uncino)**.** Sia λ una partizione di n, con diagramma di Young Y, per ogni casella (i, j) di Y definiamo l'*uncino* di (i, j) come l'insieme delle caselle:
$H_{i,j} = \{(i, j'); j' \geq j\} \cup \{(i', j); i' > i\}$ e indichiamo con $h_{i,j}$ la cardinalità di $H_{i,j}$.

Teorema 1.1.1 (Formula degli uncini)**.**
Il numero f^λ di tabelle standard di forma λ è:

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in Y} h_{i,j}} \tag{1.1}$$

La formula degli uncini è stata scoperta inizialmente nel 1954 da J. S. Frame, G. de B. Robinson e R. M. Thrall ed è stata ridimostrata con metodi differenti da diversi autori. Diamo un cenno della dimostrazione probabilistica trovata da C.Greene, A.Nijenhuis e H.S.Wilf nel 1979.

Dimostrazione. Definiamo

$$e^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in Y} h_{i,j}} \tag{1.2}$$

e vogliamo mostrare che $f^\lambda = e^\lambda$. Osserviamo che f^λ si può scrivere come:

$$f^\lambda = \sum_{\mu\uparrow\lambda} f^\mu \tag{1.3}$$

dove $\mu \uparrow \lambda$ indica tutte le tabelle di Young standard μ ottenute da λ con l'eliminazione di una casella esposta di λ. Prendiamo per convenzione $f^\varnothing = 1$, dove $\varnothing$ denota la tabella standard vuota. Per dimostrare la formula 1.3 osserviamo che il simbolo massimo di una tabella di forma λ compare in una casella esposta: cancelliamo questo simbolo e otteniamo una tabella di forma μ. Siccome il numero di tabelle di Young di forma μ è uguale a f^μ, allora sommando su tutte le possibili μ che si ottengono da λ cancellando una casella esposta troviamo in quanti modi possiamo ottenere una tabella standard di forma λ. Ad esempio: prendiamo la tabella di forma $\lambda = (3, 2)$, f^λ=5:

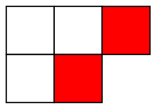
1	2	3
4	5	

1	2	5
3	4	

1	3	4
2	5	

1	2	4
3	5	

1	3	5
2	4	



dove le caselle colorate indicano le caselle esposte di λ. Allora abbiamo f^{μ_1}=2:

1	2
3	4

1	3
2	4

e f^{μ_2}=3:

1	2	3
4		

1	3	4
2		

1	2	4
3		

Concludiamo che $f^\lambda = f^{\mu_1} + f^{\mu_2}$, perchè possiamo aggiungere il numero 5 in ogni tabella trovata mettendolo nella casella esposta che abbiamo eliminato.
Quindi è sufficiente provare che la stessa ricorrenza vale per i numeri e^λ, cioè vale:

$$e^\lambda = \sum_{\mu \uparrow \lambda} e^\mu \tag{1.4}$$

e $e^\varnothing$=1. Per induzione si dimostra che $f^\lambda = e^\lambda$; allora

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in Y} h_{i,j}} \tag{1.5}$$

come asserisce il teorema. La somma 1.4 può essere vista come somma di probabilità riscrivendo l'equazione nel modo seguente:

$$\sum_{\mu \uparrow \lambda} \frac{e^{\mu}}{e^{\lambda}} = 1. \tag{1.6}$$

Pertanto dobbiamo mostrare che i numeri $\frac{e^{\mu}}{e^{\lambda}}$ definiscono una misura di probabilità sull'insieme delle tabelle di Young di forma μ. Questo si verifica in modo costruttivo definendo un percorso casuale, detto "hook walk", sulle caselle di λ. Esso è definito nel modo seguente:

1. scegliere una casella (i, j) di λ in modo casuale e da lì iniziare il percorso aleatorio;
2. scegliere la casella successiva di (i, j) in modo casuale nell' uncino $H_{i,j} \setminus \{(i, j)\}$;
3. proseguire fino a raggiungere una delle celle esposte, che indichiamo con c.

Per ogni casella esposta (a, b) di λ si può dimostrare che $\mathrm{P}(c = (a, b)) = \frac{e^{\mu}}{e^{\lambda}}$, dove $\mu = \lambda \setminus \{(a, b)\}$. Quindi la somma su tutte le possibili caselle esposte $c = (a, b)$ ci dà:

$$\sum_{\mu \uparrow \lambda} \frac{e^{\mu}}{e^{\lambda}} = 1 \tag{1.7}$$

□

1.2 Corrispondenza di Robinson-Schensted

Teorema 1.2.1 (Corrispondenza di Robinson-Schensted).
L'insieme S_n delle permutazioni di n oggetti è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle coppie (P, Q), dove P, Q sono due tabelle di Young standard della stessa forma con n caselle.

Definiamo questa corrispondenza biunivoca.
Essa è basata sull'algoritmo di inserimento per righe di un elemento in una tabella standard. Sia T una tabella standard nei simboli $k_1, k_2, ..k_i$ e sia $b \neq k_j$ per ogni j.

1. poniamo $x = b$ e $s = 1$, dove s sta ad indicare la riga che prendiamo in considerazione;
2. se $x >$ simbolo più a destra della riga s, mettiamo x alla fine della riga s e ci fermiamo;
3. altrimenti, sia y il più piccolo elemento della riga s che sia maggiore di x; sostituiamo y con x in T e incrementiamo di 1 il valore di s, ponendo $x = y$ e torniamo al passo 2. In questo caso si dice che x viene scalzato dalla riga s;

Al termine di questo algoritmo otteniamo una tabella standard con $i + 1$ caselle, la cui

forma copre quella di T nel reticolo di Young.
Ad esempio vediamo l'inserimento di 5 nella tabella:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

il 5 sostituirà il 6 nella prima riga, il 6 sostituirà il 7 nella seconda riga e infine il 7 viene posizionato in fondo alla terza riga. Allora otterremo la tabella $T \leftarrow 5$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 7 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Data una permutazione $\sigma = x_1....x_n$, costruiamo, utilizzando questo algoritmo, una sequenza di coppie di tabelle standard: $(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), ..., (P_n, Q_n) = (P, Q)$, dove per ogni i P_i e Q_i hanno la stessa forma λ_i, che indica la partizione dell'intero i. Allora dati (P_i, Q_i), otteniamo P_{i+1} inserendo l'elemento x_{i+1} in P_i, mentre Q_{i+1} è ottenuta da Q_i aggiungendo il simbolo $i + 1$ nella nuova casella creata dall'inserimento di x_{i+1} in P_i. Otteniamo così una coppia finale di tabelle (P, Q), dove $P = P(\sigma)$ è chiamata tabella di inserimento e $Q = Q(\sigma)$ tabella guida. Possiamo notare che la costruzione delle due tabelle avviene contemporaneamente: la costruzione di Q dipende da quella di P. Infatti, Q avrà la stessa forma di P e al suo interno avrà i numeri da 1 a n, poichè ogni volta che aggiungiamo una cella in P, l'aggiungiamo nella stessa posizione in Q, scrivendo il numero del passo a cui eravamo arrivati, ad esempio il numero i sarà posizionato nella cella aggiunta all' i-esimo passo durante la costruzione di P. Vediamo un esempio: data $\sigma = 231645$, l'algoritmo per trovare (P, Q) procede così:

$$\begin{array}{lll}
 & P_i & Q_i \\
 & \varnothing & \varnothing \\
2 & \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array} \\
23 & \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array} \\
231 & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \\
2316 & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&6\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \\
23164 & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&6\\\cline{1-2}\end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array} \\
23164 & \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2&6\\\cline{1-2}\end{array} = \mathrm{P} & \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&6\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array} = \mathrm{Q}
\end{array}$$

Per provare che la corrispondenza di R-S è una biiezione, descriviamo l'applicazione inversa. Per fare questo abbiamo bisogno di utilizzare l'algoritmo di eliminazione di una casella da una tabella standard. Sia T una tabella standard nei simboli $k_1, k_2, ..k_i$ e c una casella esposta di T situata nella riga h. Sia b il simbolo che compare nella casella c:
1. poniamo $x = b$ e $s = h$;
2. se $s = 1$, cancelliamo c in T e ci fermiamo.
3. altrimenti, sia y il più grande elemento della riga $s - 1$ minore di x; allora sostituiamo y con x in T, diminuiamo di 1 il valore di s, poniamo $x = y$ e torniamo al passo 2.
Al termine di questo algoritmo otteniamo una tabella standard in cui il simbolo y, che corrisponde all'ultimo valore assunto dalla variabile x, non compare.
Ad esempio vediamo l'eliminazione di 8 dalla tabella:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6&7&9\\\hline 2&4&8\\\cline{1-3} 10\\\cline{1-1}\end{array}$$

il numero 8 è nella seconda riga, l'elemento più grande della prima riga < 8 è 7, allora sostituiamolo con 8; poichè ci troviamo nella prima riga cancelliamo la casella iniziale dov'era 8 e il 7 scompare dalla tabella:

1	3	5	6	8	9
2	4				
10					

Data una coppia (P, Q) di tabelle standard con n caselle e della stessa forma λ, costruiamo una permutazione σ in S_n e una sequenza di coppie di tabelle standard: $(P, Q) = (P_n, Q_n), ..., (P_0, Q_0)$, dove per ogni i P_i e Q_i hanno la stessa forma λ_i. Supponiamo di aver costruito (P_i, Q_i), allora, per ottenere (P_{i-1}, Q_{i-1}):

· sia (k, j) la casella di Q_i che contiene il simbolo i e sia x il simbolo che compare nella stessa casella di P_i;

· cancelliamo questa casella da Q_i, ottenendo Q_{i-1}, e eliminiamo la stessa casella anche da P_i, ottenendo P_{i-1};

· $\sigma(i) = x$.

Allora abbiamo ottenuto una permutazione σ di S_n associata alla coppia di tabelle (P, Q). Riprendiamo l'esempio fatto precedentemente, date P e Q utilizziamo l'algoritmo appena descritto per trovare la permutazione associata:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array} \quad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

	P_i	Q_i
$\sigma(6) = 5$	$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & & \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & & \end{array}$
$\sigma(5) = 4$	$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & \end{array}$
$\sigma(4) = 6$	$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ 2 & & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 3 & & \end{array}$
$\sigma(3) = 1$	$\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \end{array}$
$\sigma(2) = 3$	$\begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}$
$\sigma(1) = 2$	$\begin{array}{c} 2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 1 \end{array}$
	$\varnothing$	$\varnothing$

La permutazione associata a (P, Q) è $\sigma = 231645$.

Conclusione

Abbiamo così dimostrato che esiste una funzione g biunivoca tale che, data una permutazione σ di S_n, associa a σ una coppia di tabelle di Young (P, Q), dove P, Q sono due tabelle standard della stessa forma.

$g : \sigma \xrightarrow{R-S} (P, Q)$

Per definire questa corrispondenza biunivoca sono stati utilizzati l'algoritmo di inserimento di un elemento in una tabella e l'algoritmo di eliminazione di un elemento da una tabella.

L'esistenza di questa corrispondenza biunivoca implica immediatamente il seguente risultato:

Teorema 1.2.2.

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2$$

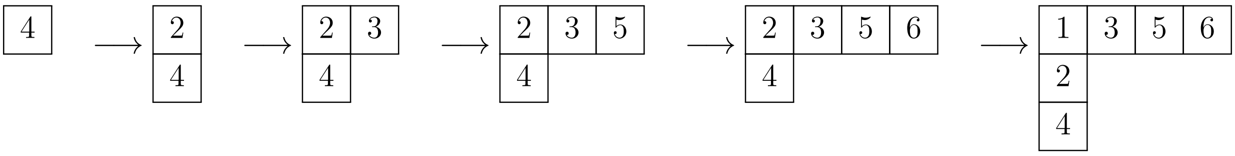
1.3 Sottosequenze di una permutazione

Introduciamo ora il concetto di sottosequenza di una permutazione e vediamo alcuni risultati che la riguardano legati alle tabelle di Young.

Definizione 1.6 (Sottosequenza strettamente crescente)**.** Data una permutazione $\sigma = a_1 .... a_n$ una *sottosequenza strettamente crescente* di σ è $a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_k}$, dove $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Il numero intero k viene detto lunghezza della sottosequenza. Possiamo definire in modo analogo la nozione di sottosequenza strettamente decrescente.
Ad esempio data una permutazione $\sigma = 4235617$ una sottosequenza strettamente crescente di σ è $t = 23567$ e una sottosequenza strettamente decrescente di σ è $z = 431$.

Teorema 1.3.1 (Schensted)**.**
Data una permutazione σ, la lunghezza massima di una sottosequenza strettamente crescente è pari al numero di colonne della tabella $P(\sigma)$.

Dimostrazione. Osserviamo, prima di tutto, che ogni elemento a_i di σ nel momento in cui viene inserito tramite l'algoritmo di Robinson-Schensted, viene posizionato nella prima riga della tabella. Definiamo la classe di a_i l'indice della colonna in cui a_i compare quando viene inserito. Per esempio, consideriamo la permutazione $\sigma = 423561$ le classi dei suoi elementi sono rispettivamente $1, 1, 2, 3, 4, 1$ come vediamo dalla costruzione di $P(\sigma)$:



Per ogni k, indichiamo con A_k la sequenza ordinata dei numeri di classe k, nell'ordine in cui compaiono in σ. Nel nostro esempio abbiamo $A_1 = (4, 2, 1), A_2 = (3), A_3 = (5), A_4 = (6)$.
Possiamo notare che:
1. ogni simbolo appare in uno ed un solo A_k;
2. ogni A_k è una sottosequenza strettamente decrescente di σ.
Allora una sottosequenza strettamente crescente di σ può contenere al più un elemento di ogni A_k e questo implica che la sua lunghezza può essere al massimo uguale al numero degli A_k, cioè il numero di colonne di P.

Viceversa, dimostriamo che dato h:= numero delle colonne della tabella $P(\sigma)$, possiamo costruire una sottosequenza strettamente crescente di lunghezza h della permutazione σ. Per ogni simbolo x_h di A_h, sia x_{h-1} l'elemento che era nella posizione $h-1$ della prima riga nel momento in cui x_h è stato inserito; allora $x_{h-1} < x_h$. Inoltre, dato che x_h è stato inserito dopo x_{h-1}, allora compare in σ dopo x_{h-1}. Ripetendo la stessa procedura con $x_{h-1}, \ldots$, costruiremo una sequenza $x_h > x_{h-1} > x_{h-2} > \ldots > x_1$, cioè $(x_1 \ldots x_h)$. Allora abbiamo costruito una sottosequenza strettamente crescente di σ di lunghezza uguale al numero delle colonne della tabella $P(\sigma)$, la dimostrazione è completata.
Consideriamo la permutazione $\sigma = 423561$ utilizzata nella prima parte della dimostrazione. Per verificare il ragionamento applicato nella seconda parte della dimostrazione, registriamo in una tabella ogni elemento a_i della permutazione, la sua classe e il simbolo precedente quando a_i è stato inserito:

simbolo	classe	simbolo precedente
4	1	
2	1	
3	2	2
5	3	3
6	4	5
1	1	2

la sottosequenza strettamente crescente trovata è 2356.

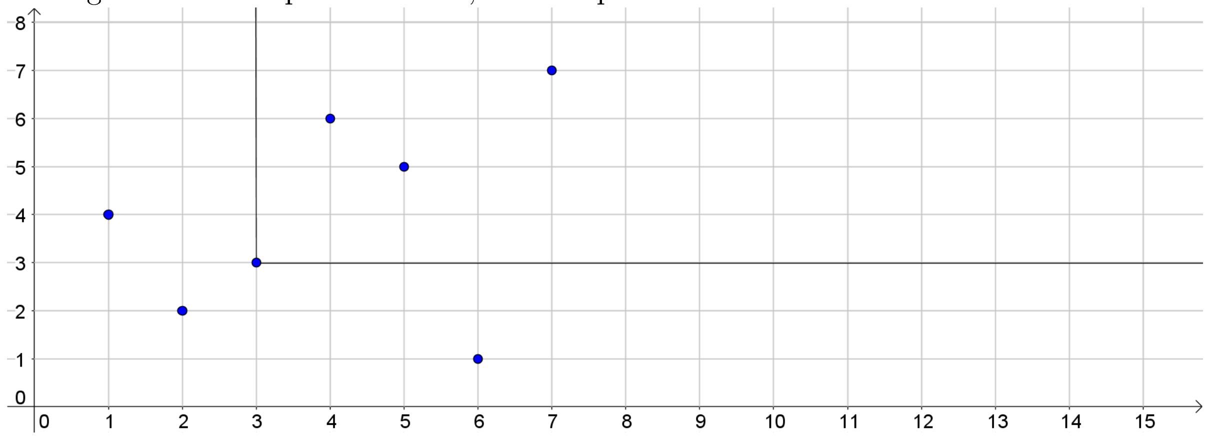
□

1.4 Involuzione di Schützenberger

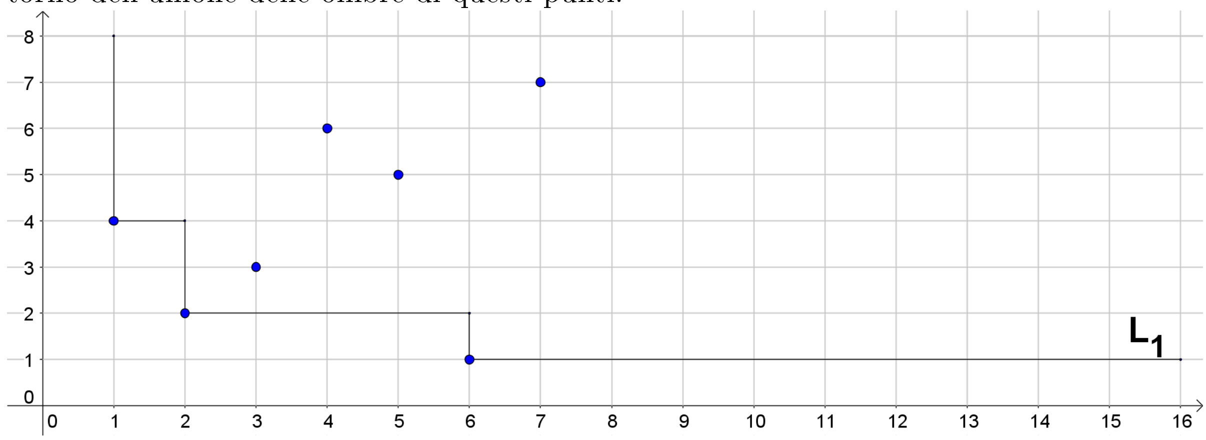
Illustreremo una serie di risultati che riguardano la corrispondenza biunivoca di Robinson-Schensted al variare del tipo di permutazione che prendiamo in considerazione.

Teorema 1.4.1 (Teorema di simmetria (Schützenberger))**.**
Data σ una permutazione e la tabella associata $P(\sigma)$, se $\sigma \xrightarrow{R-S} (P(\sigma), Q(\sigma))$ allora $\sigma^{-1} \xrightarrow{R-S} (Q(\sigma), P(\sigma))$.

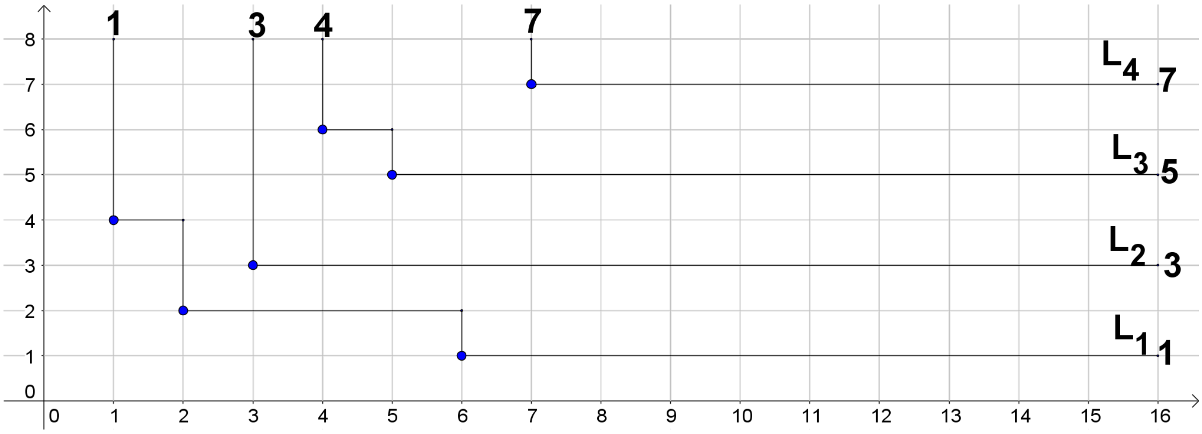
Dimostrazione. Questo risultato può essere dimostrato tramite la costruzione geometrica di Viennot [6]; descriviamo in cosa consiste quest'ultima. Consideriamo la rappresentazione grafica di una permutazione, ad esempio $\sigma = 4236517$:



Supponiamo che in ogni punto parta un cono d'ombra con i bordi paralleli agli assi. Ad esempio nel disegno precedente abbiamo rappresentato il cono d'ombra del punto (3,3). Consideriamo i punti della permutazione che non sono nel cono d'ombra di altri punti, nel nostro caso (1,4),(2,2) e (6,1), e chiamiamo L_1 la prima linea d'ombra che è il contorno dell'unione delle ombre di questi punti.



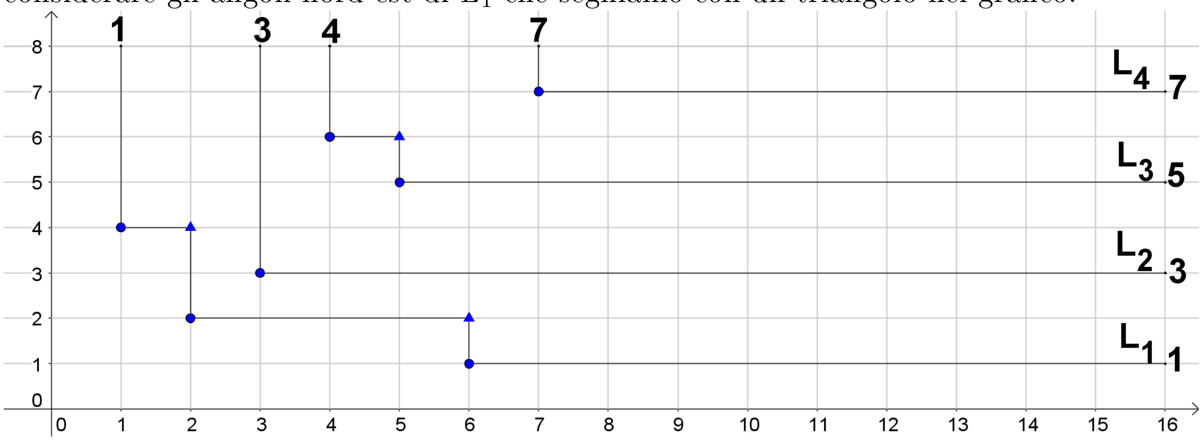
Ora eliminiamo i punti della permutazione che appartengono alla prima linea d'ombra e ripetiamo il procedimento ottenendo la seconda linea d'ombra L_2, procediamo così finchè ogni elemento di σ appartenga a una linea d'ombra. Osserviamo che ogni linea d'ombra L_i è costituita da segmenti e da una semiretta orizzontale e una verticale, indichiamo con b_i l'ordinata della semiretta orizzontale (l'ordinata di L_i) e con a_i l'ascissa della semiretta verticale (l'ascissa di L_i). Nel nostro esempio abbiamo quattro linee d'ombra, le cui ascisse e ordinate sono segnate rispettivamente sopra e a destra:



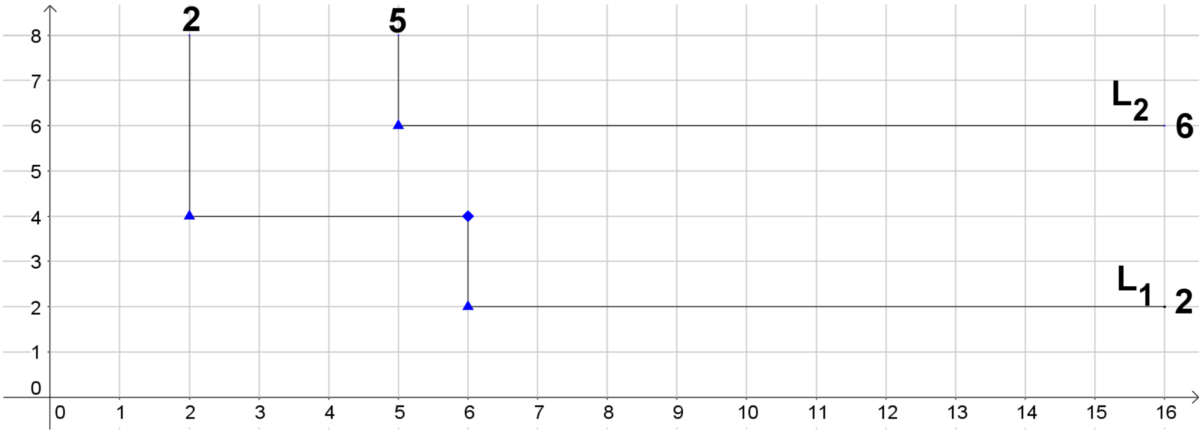
Le tabelle standard associate a σ tramite R-S sono:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 \\ \cline{1-2} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

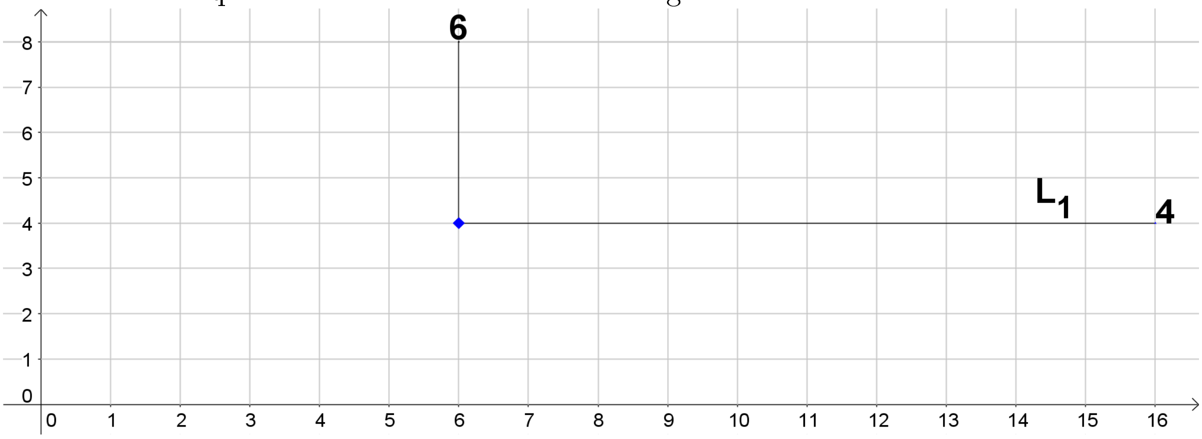
Possiamo notare che la prima riga di P coincide con la sequenza $b_1b_2b_3b_4$ e la prima riga di Q con la sequenza $a_1a_2a_3a_4$. Per ottenere la seconda riga di P e di Q dobbiamo considerare gli angoli nord-est di L_1 che segniamo con un triangolo nel grafico:



Iteriamo la costruzione del diagramma d'ombra partendo dalla "permutazione" data da questi angoli e otteniamo, così, le ascisse e le ordinate dei nuovi punti, che sono rispettivamente gli elementi della seconda riga di Q e della seconda riga di P, come possiamo vedere nel seguente grafico:



Se uno di questi angoli ha coordinate (k, x'), allora x' deve essere stato scalzato dalla prima riga di P quando è stato inserito x_k, ecco perchè questi angoli corrispondono agli elementi inseriti nella seconda riga durante la costruzione di P.
Procedendo in questo modo troveremo le altre righe delle tabelle:



Teorema 1.4.2.
Sia $\sigma \xrightarrow{R-S} (P(\sigma), Q(\sigma))$ *allora* $\sigma^{(i)} \xrightarrow{R-S} (P(\sigma)^{(i)}, Q(\sigma)^{(i)})$. *Dove* $\sigma^{(i)}$ *è la permutazione parziale e* $P^{(i)}$ *e* $Q^{(i)}$ *sono costituiti dalle righe di indice* $\geq i$ *in* P *e* Q. *Inoltre,* $P_{i,j} = y_{L_j^{(i)}}$ *e* $Q_{i,j} = x_{L_j^{(i)}}$ *per ogni* i, j.

Possiamo concludere che il risultato del Teorema 1.4.1 è una conseguenza immediata della costruzione geometrica di Viennot; poichè il diagramma della permutazione inversa di σ è il simmetrico di quello di σ rispetto alla diagonale $x = y$. □

Corollario 1.4.3.
σ *è un' involuzione (cioè* $\sigma = \sigma^{-1}$*) se e solo se* $P(\sigma) = Q(\sigma)$.

Consideriamo l'involuzione $\sigma = 21435$ e applichiamo l'algoritmo R-S:

$$
\begin{array}{ccc}
P & \qquad & Q \\
\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array} & & \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \\[2em]
\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} & & \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \\[2em]
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} & & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \\[2em]
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} & & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} \\[2em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}
\end{array}
$$

Otteniamo $P = Q$.

Osservazione 2.
In particolare, si avrà una corrispondenza biunivoca tra le involuzioni di S_n e le tabelle standard con n caselle.

Definizione 1.7 (Ribaltamento e complemento di una permutazione)**.** Sia $\sigma = x_1 ... x_n$ una permutazione di S_n; chiamiamo il *ribaltamento* di σ la permutazione $\sigma^r = x_n x_{n-1}, ..., x_1$ e il *complemento* di σ la permutazione $\sigma^c = (n+1-x_1)(n+1-x_2)...(n+1-x_n)$.

Per esempio, data $\sigma = 7416523$, avremo $\sigma^r = 3256147$ e $\sigma^c = 1472365$.
Possiamo notare che data la permutazione di ribaltamento $\psi = n\ n-1\ ...\ 2\ 1$, abbiamo: $\sigma^c = \psi\sigma$ e $\sigma^r = \sigma\psi$.
Allora per ogni $i = 1...n$ abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\sigma :&\quad i \longrightarrow \sigma(i) \\
\sigma^c = \psi\sigma :&\quad i \longrightarrow n+1-\sigma(i) \\
\sigma^r = \sigma\psi :&\quad i \longrightarrow \sigma(n+1-i) \\
\sigma^{rc} = \psi\sigma\psi :&\quad i \longrightarrow n+1-\sigma(n+1-i)
\end{aligned}
$$

Definizione 1.8 (Diagramma sghembo)**.** Siano λ, μ due diagrammi di Young, con $\mu \subseteq \lambda$.
Il corrispondente *diagramma sghembo* è definito come:
$\lambda/\mu = \{c; c \in \lambda, c \notin \mu\}$.

Dato un diagramma sghembo, la definizione di *tabella sghemba* si definisce in modo ovvio, di cui riportiamo un esempio:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & 7 \\ \hline & & 5 \\ \cline{1-3} 8 & 9 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

N.B. In seguito utilizzeremo tabelle sghembe solo nel caso in cui μ è costituita da una sola casella.
Ora mostriamo alcune operazioni che si possono fare sulle tabelle di Young standard.

Definizione 1.9 (Il "jeu de taquin" di Schützenberger)**.** Sia T una tabella standard con n caselle. *Il "jeu de taquin"* è un' operazione applicata alle caselle di T che consiste nei seguenti passaggi:
1. poniamo $c=$ la casella nord-ovest di T;
2. cancelliamo il simbolo nella casella c;
3. finchè c non è una casella esposta di T, eseguiamo: se $c = (i, j)$, poniamo $x=$ il minimo tra l'elemento nella casella $(i + 1, j)$ e quello nella casella $(i, j + 1)$. Se una di queste caselle è vuota, poniamo $x=$ l'elemento nell'altra casella. Mettiamo x nella casella c e poniamo $c=$la casella in cui si trovava x.
Al termine della procedura, otteniamo una coppia formata da una tabella standard con $n - 1$ caselle, che indichiamo con $\Delta(T)$, e un casella esposta c.

Esempio.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline c & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & c & 5 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & c \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Definizione 1.10 (Evacuazione)**.** Data una tabella standard T in $\{1, 2, ..., n\}$, si dice *evacuata* di T e si indica $ev(T)$, una nuova tabella ottenuta tramite l'operazione di *evacuazione*, che consiste nel modo seguente: applichiamo l'operazione il "jeu de taquin" al primo elemento della prima riga della tabella T, inserendo poi il simbolo n nella casella c_1 associata a $\Delta(T)$. Ripetiamo il "jeu de taquin" per il primo elemento della prima riga di $\Delta(T)$ e mettiamo il simbolo $n - 1$ nella casella c_2 associata a $\Delta^2(T)$. Iterando questa operazione per ogni elemento, otterremo infine la tabella cercata $ev(T)$, che è una tabella standard della stessa forma di T.

Troviamo la tabella evacuata di T applicando il procedimento descritto precedentemente:

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline c_1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline c_1 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline c_1 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \mathbf{5} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline c_2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & c_2 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & c_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{5} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline c_3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline c_3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{5} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline c_4 & 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 5 & c_4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{5} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|} \hline c_5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{5} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$ev(T) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Teorema 1.4.4.
Data una permutazione σ e la coppia di tabelle associata tramite la corrispondenza R-S (P, Q), si ha: $Q(\sigma^r) = ev(Q(\sigma))^T$.

Vediamo un esempio: sia $\sigma = 52413$

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$\sigma^r = 31425$

$$P(\sigma^r) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} = P(\sigma)^T, \quad Q(\sigma^r) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} = ev(Q(\sigma))^T$$

dato che avevamo trovato:

$$ev(Q(\sigma)) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Infine, grazie a questo teorema possiamo completare le caratterizzazioni delle immagini di $\sigma^r, \sigma^c, \sigma^{rc}$ attraverso la corrispondenza di R-S. Data una permutazione σ e la tabella associata $P(\sigma)$ abbiamo:
$\sigma^r \xrightarrow{R-S} (P(\sigma)^T, ev(Q(\sigma))^T)$
$\sigma^c \xrightarrow{R-S} (ev(P(\sigma))^T, Q(\sigma)^T)$
$\sigma^{cr} \xrightarrow{R-S} (ev(P(\sigma)), ev(Q(\sigma)))$
Non dimostreremo queste corrispondenze biunivoche, ma ne vediamo un esempio. Data la permutazione $\sigma = 52413$ e le tabelle di partenza ad essa associate P, Q dell'esempio precedente, allora abbiamo già $P(\sigma^r), Q(\sigma^r)$. Inoltre, $\sigma^c = 14253$ è associata a

$$P(\sigma^c) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} = ev(P(\sigma))^T, \quad Q(\sigma^c) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} = Q(\sigma)^T$$

mentre $\sigma^{cr} = 35241$ è associata a

$$P(\sigma^{cr}) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = ev(P(\sigma)), \quad Q(\sigma^{cr}) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} = ev(Q(\sigma))$$

Osservazione 3.
La funzione di evacuazione $T \longrightarrow ev(T)$ è involutoria, cioè $ev(ev(T)) = T$.

Definizione 1.11 (Permutazione centrosimmetrica)**.** Data una permutazione σ di S_n, si dice *centrosimmetrica* se $\sigma^{rc} = \sigma$, cioè $\sigma(n+1-i) = n+1-\sigma(i)$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$ o, equivalentemente, $\sigma = \psi\sigma\psi$.

Ad esempio, $\sigma = 2514736$ è centrosimmetrica.

Osservazione 4.
σ è centrosimmetrica $\Longleftrightarrow$ σ^{-1} è centrosimmetrica.

Teorema 1.4.5.
Sia $\sigma \xrightarrow{R-S} (P(\sigma), Q(\sigma))$*,* σ *è centrosimmetrica se e solo se* $ev(P(\sigma)) = P(\sigma)$ *e* $ev(Q(\sigma)) = Q(\sigma)$.

Data $\sigma = 14325$ è centrosimmetrica ed è un' involuzione, allora in questo particolare esempio si ha $P(\sigma) = Q(\sigma)$. Troviamo la tabella evacuata di P, che sarà la stessa di Q.

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} \end{array} = ev(P(\sigma))$$

Allora $P(\sigma) = ev(P(\sigma))$.

Definizione 1.12 (Tabella autoevacuata)**.** Una tabella standard T si dice *autoevacuata* se $ev(T) = T$.

Osservazione 5.
In particolare, possiamo osservare che le tabelle autoevacuate corrispondono biiettivamente alle involuzioni centrosimmetriche.

Capitolo 2

I numeri Euleriani

2.1 Discese di una permutazione e di una tabella standard

Descriviamo un risultato riguardante le discese di una permutazione e le discese della sua tabella guida associata tramite la corrispondenza R-S. Ma prima diamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.1 (Discese e salite di una permutazione)**.** Sia $\sigma = x_1 x_2 ... x_n$ una permutazione di S_n, si dice che i è una *discesa* di σ se $x_i > x_{i+1}$, mentre si dice che i è una *salita* di σ se $x_i < x_{i+1}$. Consideriamo come discese e salite il numero delle posizioni e non gli elementi di σ. L'insieme delle discese di σ è indicato con $Des(\sigma)$ e la sua cardinalità con $d(\sigma)$, ovviamente avremo $0 \leq d(\sigma) \leq n - 1$.

Ad esempio: data $\sigma = 37156482$, si ha che $Des(\sigma) = \{2, 5, 7\}$ infatti $\sigma = 3\mathbf{7}15\mathbf{6}4\mathbf{8}2$ dove i numeri in grassetto indicano le discese, allora $d(\sigma) = 3$.

Osservazione 6.
In particolare, notiamo che se $d(\sigma) = k$ allora σ è la giustapposizione di $k+1$ sottosequenze crescenti costituite da elementi consecutivi. Queste sono chiamate le parti crescenti di σ.

Riprendendo l'esempio precedente visto che $d(\sigma) = 3$ allora le parti crescenti di σ sono 4 : 37, 156, 48, 2.($\sigma = 37|156|48|2$)

Definizione 2.2 (Discese per una tabella di Young)**.** Sia T una tabella di Young. Si dice che i è una discesa di T se $i + 1$ compare in una riga di T più bassa della riga che

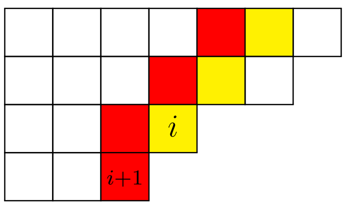
contiene i. Anche in questo caso l'insieme delle discese di T è indicato con $Des(T)$.
Per esempio la tabella T:

1	2	3	5	7
4	6	8		

ha le discese 3,5,7.

Teorema 2.1.1.
Sia σ una permutazione, l'insieme delle discese di σ coincide con l'insieme delle discese della tabella guida $Q(\sigma)$, associata a σ tramite la corrispondenza di R-S.

Dimostrazione. Diamo un cenno della dimostrazione di questo teorema. Sia $\sigma = x_1 x_2 ... x_n$ e troviamo le tabelle associate (P, Q) tramite l'algoritmo R-S. Supponiamo che σ abbia una discesa nella posizione i e poniamo $x_i = a$ e $x_{i+1} = b$. Consideriamo le rotte di inserimento nella tabella Q: R_a di a e R_b di b. Entrambe le rotte terminano con una casella esposta della tabella costruita fino a quel momento. Siccome $a > b$ e nella tabella P inserisco prima a e poi b, R_a rimane sempre alla destra di R_b oppure la interseca senza però mai passare alla sua sinistra. In entrambi i casi, l'ultima casella di R_a sta in una riga più alta dell'ultima casella di R_b poichè tutte e due sono caselle esposte, allora in $Q(\sigma)$ il simbolo $i+1$ compare in una riga più bassa di quella che contiene i. Abbiamo dimostrato che a una discesa di σ corrisponde una discesa nella tabella guida $Q(\sigma)$, allora $Des(\sigma) = Des(Q(\sigma))$.

$Q(\sigma) =$


Viceversa, data una coppia di tabelle di Young standard (P, Q), consideriamo la tabella guida Q e mostriamo che se abbiamo una discesa, cioè il simbolo $i+1$ compare in una riga più bassa di quella che contiene i, questa corrisponde a una discesa nella permutazione σ associata alla coppia di tabelle (P, Q). Cancelliamo le caselle che contengono i simboli i e $i+1$ in Q e applichiamo l'algoritmo di eliminazione alle caselle corrispondenti in P, chiamiamo R_i e R_{i+1} le rotte di eliminazione rispettive nella tabella P. Vediamo che R_{i+1} non è mai alla destra di R_i, quindi verrà eliminato un elemento sicuramente più piccolo di quello eliminato tramite R_i. Questo implica che nella permutazione σ si ha $\sigma(i+1) < \sigma(i)$; allora abbiamo trovato una discesa. $\square$

Vediamo un esempio, data $\sigma = 37156482$, $Des(\sigma) = \{2, 5, 7\}$. Applichiamo a σ l'algoritmo di R-S e le tabelle associate sono:

$$P(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 & 8 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad Q(\sigma) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1} 8 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Abbiamo trovato che $Des(Q(\sigma)) = \{2, 5, 7\}$. Allora $Des(\sigma) = Des(Q(\sigma))$ proprio come asserisce il teorema.

2.2 Polinomi Euleriani

In questa sezione parleremo di particolari numeri, detti numeri Euleriani, che sono legati alle discese di una permutazione, descrivendone le proprietà, le simmetrie che li riguardano e come cambiano e si conservano queste in base alle permutazioni di S_n che prendiamo in considerazione. In particolare, vedremo che sono i coefficienti di determinati polinomi, detti polinomi Euleriani:

Definizione 2.3 (Polinomio Euleriano)**.** L'n-esimo *polinomio Euleriano* è definito come:

$$A_n(x) = \sum_{\sigma \in S_n} x^{d(\sigma)}$$

$A_n(x)$ è un polinomio di grado n a coefficienti interi positivi, che indichiamo con $A(n, k)$, dove $A(n, k) = \sharp\{\sigma \in S_n; d(\sigma) = k\}$, cioè:

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A(n, k) x^k$$

Gli interi $A(n, k)$ sono detti *numeri Euleriani*.

Vediamo alcune proprietà dei numeri Euleriani:
Per ogni intero n abbiamo $A(n, 0) = 1 = A(n, n-1)$, dato che l'unica permutazione con 0 discese è la permutazione identica $id = 1\ 2\ ...n$ e l'unica permutazione con $n-1$ discese è la permutazione ribaltamento $\psi = n\ n-1\ ...1$. In particolare, per queste proprietà si ha che $A_n(x)$ ha il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1 e il termine di grado zero è sempre 1.

La matrice dei numeri Euleriani

Nelle celle della seguente tabella sono rappresentati i primi numeri Euleriani $A(n, k)$:

$n \diagdown k$	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1
	...				

Teorema 2.2.1.

I numeri Euleriani hanno la seguente simmetria:

$$A(n, k) = A(n, n-1-k).$$

Dimostrazione. Se la permutazione $\sigma \in S_n$ ha k discese si ha che la sua ribaltata σ^r ha k salite e quindi $n-1-k$ discese. Siccome la funzione $\sigma \to \sigma^r$ è biiettiva, il numero di permutazioni con k discese è uguale al numero di permutazioni con $n-1-k$ discese; allora la tesi del teorema è verificata. □

Teorema 2.2.2.

I numeri Euleriani soddisfano la seguente ricorrenza:

$$A(n, k) = (k+1)A(n-1, k) + (n-k)A(n-1, k-1).$$

Dimostrazione. Per verificare questa ricorrenza, consideriamo che ci sono due modi per ottenere una permutazione σ di S_n con k discese da una permutazione σ' di S_{n-1} inserendo il simbolo n in σ':

Caso 1: σ' ha k discese e l'inserimento di n non crea una nuova discesa. Questa situazione si verifica quando n viene inserito o alla fine di σ' o tra due elementi che formano una delle k discese di σ'. Quindi, in tutto abbiamo $k+1$ scelte per la posizione in cui inserire n.
Caso 2: σ' ha $k-1$ discese e l'inserimento di n crea una nuova discesa. Questo avviene quando n viene inserito all'inizio di σ' oppure tra due elementi che formano una delle $(n-2)-(k-1)$ salite di σ', quindi in totale avremo $n-k$ scelte dove inserire n.
In conclusione, si ha che $A(n,k) = (k+1)A(n-1,k) + (n-k)A(n-1,k-1)$. □

Vediamo un esempio: sia $\sigma' = 37156482$ in S_8, $d(\sigma) = 3$. Se inseriamo in σ' il simbolo 9, otteniamo una permutazione σ_i di S_9 con 3 oppure 4 discese. Nel primo caso vogliamo che σ_i abbia 3 discese, allora possiamo inserire 9 alla fine di σ': $\sigma_1 = 371564829$ oppure tra due elementi di colore diverso: $\sigma_2 = 379156482$, $\sigma_3 = 371569482$, $\sigma_4 = 371564892$. Mentre nel secondo caso vogliamo che σ_i abbia 4 discese, allora possiamo inserire 9 all'inizio di σ': $\sigma_5 = \mathbf{9}37156482$ oppure tra due elementi dello stesso colore, cioè che formano la stessa salita: $\sigma_6 = 3\mathbf{9}7156482$, $\sigma_7 = 371\mathbf{9}56482$, $\sigma_8 = 3715\mathbf{9}6482$, $\sigma_9 = 371564\mathbf{9}82$.

2.2.1 Polinomi Euleriani per le involuzioni di S_n

Indichiamo con Inv_n l'insieme delle involuzioni di S_n.

Definizione 2.4 (Polinomio Euleriano per le involuzioni)**.** L'n-esimo *polinomio Euleriano per le involuzioni* è definito come:

$$I_n(x) = \sum_{\sigma \in Inv_n} x^{d(\sigma)}.$$

Sia $I(n,k)$ il coefficiente di x^k in $I_n(x)$, dove $I(n,k) = \sharp\{\sigma \in Inv_n; d(\sigma) = k\}$, cioè:

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} I(n,k)x^k$$

Gli interi $I(n,k)$ sono detti *numeri Euleriani per le involuzioni.*

I numeri $I(n,k)$ conservano alcune proprietà dei numeri Euleriani. Per esempio per ogni n abbiamo che $I(n,0) = 1 = I(n,n-1)$, perchè sia la permutazione identica, l'unica permutazione con 0 discese, sia la permutazione ribaltamento, l'unica permutazione con $n-1$ discese, sono involuzioni. In generale, possiamo osservare che il ribaltamento di un' involuzione non è un' involuzione, ma possiamo comunque dimostrare che i numeri $I(n,k)$ presentano la stessa simmetria dei numeri Euleriani:

Teorema 2.2.3.
I numeri Euleriani per le involuzioni hanno la seguente simmetria:

$$I(n,k) = I(n, n-1-k).$$

Dimostrazione. Prendiamo σ un' involuzione con k discese e la sua tabella standard di Young associata $P = P(\sigma) = Q(\sigma)$, perchè σ è un' involuzione. Allora per il Teorema 2.1.1 il numero di discese di P è k. Ora consideriamo la tabella P^T che, a sua volta, ha $n-1-k$ discese. L' inversa della corrispondenza di R-S associa alla coppia (P^T, P^T) un' involuzione con $n-1-k$ discese. Siccome la funzione $P \to P^T$ è una biiezione, abbiamo definito una corrispondenza biunivoca tra involuzioni con k discese e involuzioni con $n-1-k$ discese.

□

2.2.2 Polinomi Euleriani per le involuzioni centrosimmetriche di S_n

Ora, vediamo un caso particolare dei numeri Euleriani per le involuzioni che sono centrosimmetriche, cioè tali che $\sigma(n+1-i) = n+1-\sigma(i)$ per ogni $i = 1, 2, ..., n$ e che, per l'*Osservazione 5*, corrispondono biiettivamente alle tabelle autoevacuate, cioè le tabelle standard fissate dall'operatore di evacuazione. Definiamo, prima di tutto, la distribuzione delle discese nelle involuzioni centrosimmetriche e descriviamo le eventuali proprietà che i numeri Euleriani delle involuzioni centrosimmetriche condividono con i numeri Euleriani. Indichiamo con CS_n l'insieme delle involuzioni centrosimmetriche di S_n.

Definizione 2.5. L'n-esimo *polinomio Euleriano per le involuzioni centrosimmetriche* è definito come:

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C(n,k)x^k$$

dove i coefficienti $C(n,k)$ sono interi positivi detti *numeri Euleriani per le involuzioni centrosimmetriche* e $C(n,k) = \sharp\{\sigma \in CS_n; d(\sigma) = k\}$.

Anche in questo caso per ogni intero n si ha: $C(n,0) = 1 = C(n, n-1)$, perchè sia la permutazione identica sia la permutazione ribaltamento sono involuzioni centrosimmetriche. Abbiamo inoltre:

Teorema 2.2.4.
Per ogni n e k con $k < n$, risulta:

$$C(n,k) = C(n, n-1-k).$$

Dimostrazione. L'insieme CS_n è chiuso rispetto al ribaltamento: $\sigma \to \sigma^r$. Quindi, se l'involuzione centrosimmetrica σ ha k discese, allora σ^r ha $n-1-k$ discese. □

Possiamo osservare che l'insieme delle discese di un' involuzione centrosimmetrica presenta un' altra particolare simmetria:

Teorema 2.2.5. *Sia σ un' involuzione centrosimmetrica, allora si ha:*

$$i \in Des(\sigma) \Longleftrightarrow n - i \in Des(\sigma).$$

Dimostrazione. Poniamo $\sigma = x_1 x_2 ... x_n$. Se $x_i > x_{i+1}$, si ha $x_{n+1-i} = n + 1 - x_i < n + 1 - x_{i+1} = x_{n-i}$, allora abbiamo trovato che $n - i$ è una discesa.
E vale il viceversa. □

Ad esempio: sia $\sigma = 47618325$ le discese sono le posizioni $2, 3, 8-2, 8-3$.

2.3 Sequenze unimodali e sequenze log-concave

Definizione 2.6 (Sequenze unimodale)**.** Una sequenza di numeri reali positivi $a_1\ a_2\ ...\ a_n$ si dice *unimodale* se esiste un indice k, con $1 \leq k \leq n$, tale che $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ e $a_k \geq a_{k+1} \geq ... \geq a_n$.

La sequenza $A(n,0), A(n,1)...A(n,n-1)$ per ogni intero positivo n è unimodale. Prendiamo una qualunque riga ad esempio $n = 5$: 1 26 66 26 1, si ha l'unimodalità con $k = 3$.

Definizione 2.7 (Sequenza log-concava)**.** Una sequenza di numeri reali positivi $a_1\ a_2\ ...\ a_n$ si dice $log - concava$ se per ogni indice k si ha: $a_{k-1}a_{k+1} < a_k^2$.

Teorema 2.3.1.
Se una sequenza di interi positivi è log-concava allora è anche unimodale.

Teorema 2.3.2.
Per ogni intero positivo n, la sequenza dei numeri Euleriani $A(n,0), A(n,1)..., A(n,n-1)$ è log-concava e quindi unimodale.

Se, ad esempio prendiamo $n = 5$: 1 26 66 26 1
abbiamo $1 * 66 < 26^2$, $26 * 26 < 66^2$, $66 * 1 < 26^2$, è una sequenza log-concava e abbiamo visto nell' esempio precedente che è unimodale.
Invece, le sequenze dei numeri Euleriani per le involuzioni non sono log-concave. Infatti, possiamo vedere che per $I(n,k)$ non vale la formula per ogni indice k: $I(50,1)^2 = 390625 < 465570 = I(50,0)I(50,2)$. Mentre, l'unimodalità delle sequenze $I(n,0), ..., I(n,n-1)$ per ogni n è stata provata da Guo e Zeng nel 2006.

2.4 Eccedenze di una permutazione

Per concludere daremo un' altra interpretazione dei numeri Euleriani in termini di statistica sulle permutazioni. Enunceremo un teorema che lega i numeri Euleriani con il numero di eccedenze di una permutazione. Diamo, prima di tutto la definizione di eccedenza di una permutazione:

Definizione 2.8 (Eccedenza di una permutazione)**.** Si dice che una permutazione σ ha un' *eccedenza* in i se $\sigma(i) > i$, mentre si dice che σ ha un' *eccedenza debole* in i se $\sigma(i) \geq i$. Se, invece, $\sigma(i) < i$, i è detta *deficienza* e se $\sigma(i) \leq i$, i è detta *deficienza debole.*

Teorema 2.4.1.
Il numero Euleriano $A(n,k)$ conta il numero di permutazioni di S_n con k eccedenze.

Per provare il teorema utilizzeremo la mappa di Foata, che definiamo nel prossimo paragrafo:

2.4.1 Mappa di Foata

Definizione 2.9 (Minimi locali da sinistra)**.** Un *minimo locale da sinistra* di una permutazione σ è un valore $\sigma(i)$ tale che per ogni $j < i$, $\sigma(j) > \sigma(i)$. Ad esempio: se $\sigma = 937624518$ i minimi locali da sinistra sono $9, 3, 2, 1$.

Analogamente possiamo definire i concetti di *massimo locale da sinistra* e di *minimo locale* e di *massimo locale da destra.*

Definizione 2.10 (La mappa di Foata)**.** *La mappa di Foata (F)* è una biiezione di S_n in se stesso definita come segue:
· scomporre la permutazione $\sigma \in S_n$ in un prodotto di cicli disgiunti;
· scrivere ogni ciclo a partire dal suo elemento più piccolo;
· ordinare i cicli in ordine decrescente dei loro minimi;
· cancellare le parentesi della rappresentazione in cicli di σ.
Quello che otteniamo è la rappresentazione in una riga di una nuova permutazione $F(\sigma)$, che è definita come l'immagine di σ attraverso la mappa di Foata. E' evidente che F è una funzione biiettiva; infatti possiamo trovare la permutazione σ originaria partendo da $F(\sigma)$ tramite il seguente procedimento:
· considerare i minimi locali da sinistra di $F(\sigma)$;
· inserire una parentesi aperta prima di ogni minimo locale per segnalare l'inizio di un ciclo e di posizionare le rispettive parentesi chiuse;
Se si compongono i cicli cosi trovati, vediamo che riotteniamo σ.

Ad esempio:
$\sigma = 847523619 = (9)(376)(245)(18) \longrightarrow F(\sigma) = 937624518$
$F(\sigma) = \mathbf{93}7\mathbf{6}\mathbf{2}45\mathbf{1}8 \longrightarrow (9)(376)(245)(18) = 847523619 = \sigma.$

Ora possiamo dimostrare il Teorema 2.4.1. Vogliamo far vedere che la mappa di Foata fa corrispondere ad una permutazione con k discese una permutazione con $n-k-1$ eccedenze, da cui la tesi segue grazie alla simmetria dei numeri Euleriani, cioè $A(n,k) = A(n, n-1-k)$.

Dimostrazione. Sia $\sigma = a_1a_2...a_n$ una permutazione di S_n con k discese e $F^{-1}(\sigma)$ la sua immagine attraverso la mappa inversa di Foata. Una discesa di σ, cioè un indice i tale che $a_i > a_{i+1}$, può corrispondere in $F^{-1}(\sigma)$ a:
· la fine di un ciclo, cioè un indice i tale che $F^{-1}(a_i)$= il primo elemento del ciclo; notiamo che per costruzione quest'ultimo elemento è sicuramente $\leq a_i$ ed è $= a_i$ se abbiamo un ciclo di lunghezza 1, si ha che a_i è una deficienza debole di $F^{-1}(\sigma)$;
· due elementi consecutivi all' interno dello stesso ciclo, cioè a_i, a_{i+1} con $F^{-1}(a_i) = a_{i+1} < a_i$, allora a_i è una deficienza debole di $F^{-1}(\sigma)$.
Osserviamo che $\sigma(n)$ in $F^{-1}(\sigma)$ costituisce l' ultimo elemento dell'ultimo ciclo ed è quindi

un'altra deficienza debole di $F^{-1}(\sigma)$. Vediamo il viceversa, cioè che ad una deficienza debole di $F^{-1}(\sigma)$ corrisponde una discesa di σ. Se $F^{-1}(a_i) \leqslant a_i$, la posizione di a_i può essere all'interno di un ciclo di $F^{-1}(\sigma)$ allora i è una discesa di σ oppure alla fine di un ciclo allora per costruzione i è una discesa di σ. In conclusione, abbiamo visto che $F^{-1}(\sigma)$ ha $k+1$ deficienze deboli e quindi $n-k-1$ eccedenze. Abbiamo dimostrato che data una permutazione con k discese possiamo associarle tramite la mappa di Foata una permutazione con $n-k-1$ eccedenze, dunque il numero di permutazioni con k discese è uguale al numero di permutazioni con $n-k-1$ eccedenze e viceversa il numero di permutazioni con $n-k-1$ discese è uguale al numero di permutazioni con k eccedenze. Siccome $A(n,k) = A(n,n-k-1)$, allora $A(n,k)$ conta anche il numero di permutazioni con k eccedenze. □

Vediamo un esempio: data $\sigma = 39|4|28|7|6|15$, essa ha 5 discese indicate con una barra, vogliamo ricavare $F^{-1}(\sigma)$, cioè applicando la mappa inversa di Foata a σ. Troviamo i minimi locali di σ che sono $3, 2, 1$, inseriamo le parentesi per formare i cicli e componendo i cicli così trovati otteniamo la permutazione $F^{-1}(\sigma) = (394)(2876)(15) = 589312674$. Questa permutazione ha 6 deficienze deboli, che sono i numeri scritti in rosso, allora ha 3 eccedenze. Vale la simmetria $A(9,5) = A(9,3)$, allora $A(9,5)$ non solo conta il numero di permutazioni di S_9 con 5 discese ma anche il numero di permutazioni con 5 eccedenze.

Bibliografia

[1] Bruce E. Sagan "The Symmetric Group. Representation, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions", Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] William Fulton, "Young Tableaux: with applicatons to representation theory and geometry", Cambridge University Press, 1997.

[3] G.de B.Robinson, "On the Representation of the Symmetric Group", Amer. J. Math. 60 (1934), 745-760, 69 (1947), 286-298, 70 (1948), 277-294.

[4] C.Schensted, "Longest Increasing and Decreasing Subsequences", Canad. J. Math. 13 (1961), 179-191.

[5] M.P.Schützenberger, "Quelques Remarques sur une Construction de Schensted", Math.Scand. 12 (1963), 117-128.

[6] X.Viennot, Une Forme Géometrique de la Correspondence de Robinson-Schensted, in Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Lecture Notes in Math. n. 579, Springer-Verlag New York, D.Foata ed. (1977), 29-58.

[7] Greene, C., Nijenhuis, A. and Wilf, H. S. (1979). A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. Adv. in Math. 31, 104–109.

[8] D.E.Knuth, "Permutations, Matrices and Generalized Young Tableaux", Pacific J.Math. 34 (1970), 709-727.

[9] M.Barnabei, F.Bonetti, M.Silimbani, The descent statistic on involutions is not log-concave, European J. Combin. 30 (2009), 11-16.

[10] M.Barnabei, F.Bonetti, M.Silimbani, The Eulerian distribution on centrosymmetric involutions, Discrete Math. Theoret. Computer Science, Vol 11, No 1 (2009)

[11] M.Bòna, Combinatorics of Permutations, Chapman e Hall/CRC, 2004.

[12] V.J.Guo, J.Zeng, The Eulerian distribution on involutions is indeed unimodal, J. Combin. Theory Ser. A 113 (2006), no. 6, 1061–1071.