

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Il concetto di funzione:  
storia, applicazioni, sviluppi**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.re**  
**Paolo Negrini**

**Presentata da:**  
**Federica Bianchedi**

**I Sessione**  
**Anno Accademico 2015/2016**



*“Un buon insegnante è come una candela,  
si consuma per illuminare la strada per gli altri.”  
-Proverbio turco-*



# Introduzione

Il concetto di funzione è tra i più rilevanti, ma anche tra i più controversi concetti matematici. In questo lavoro di tesi ho esaminato questo concetto a partire dalle sue origini, risalenti persino alla matematica babilonese e greca classica, fino ad analizzare come viene presentato ai giorni nostri. Ho osservato anche come, in seguito alla creazione dell'analisi funzionale, questo concetto sia stato sviluppato dando origine a spazi di funzioni.

Nel primo capitolo si esporrà l'evolversi del concetto classico di funzione fin dalle sue prime origini per arrivare alla definizione bourbakista, che è quella insegnata a tutti gli studenti a partire dalla scuola secondaria fino ad arrivare all'università.

Nel secondo capitolo si analizzerà in che modo questo delicato concetto viene presentato agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado, osservando come le recenti Indicazioni Nazionali e Linee Guida danno suggerimenti per affrontare questo argomento ed esaminando alcuni libri di testo.

Infine nel terzo capitolo si esaminerà come il concetto di funzione abbia preso, in tempi relativamente recenti, un respiro più ampio dando luogo all'analisi funzionale, laddove le funzioni non sono più viste come corrispondenza punto a punto ma come oggetti che vengono osservati globalmente. Si considereranno infatti nuovi spazi i cui elementi sono funzioni.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Storia del concetto di funzione</b>	<b>5</b>
1.1 Prime idee di dipendenza di una variabile da un'altra . . . . .	5
1.2 Prime definizioni di funzione . . . . .	7
1.3 Nozione euleriana di funzione . . . . .	9
1.3.1 La funzione secondo Eulero . . . . .	10
1.4 Il problema della corda vibrante . . . . .	12
1.5 Il concetto di funzione si evolve . . . . .	16
1.5.1 Antoine Arbogast . . . . .	17
1.5.2 Nicolas de Condorcet . . . . .	18
1.5.3 Joseph-Louis Lagrange . . . . .	19
1.6 L'Ottocento e lo studio delle funzioni . . . . .	20
1.6.1 Jean Baptiste Fourier . . . . .	21
1.6.2 Niels Henrik Abel . . . . .	22
1.6.3 Augustin-Louis Cauchy . . . . .	22
1.6.4 Peter Gustav Dirichlet . . . . .	24
1.6.5 Nicolas Bourbaki . . . . .	27
<b>2 Un'analisi didattica del concetto di funzione</b>	<b>29</b>
2.1 Introduzione . . . . .	29
2.2 Introduzione del concetto di funzione nei programmi italiani .	30
2.3 Analisi delle Indicazioni Nazionali . . . . .	31
2.3.1 Primo biennio . . . . .	31
2.3.2 Secondo biennio . . . . .	33
2.3.3 Quinto anno . . . . .	34
2.4 Analisi delle Linee Guida per istituti tecnici . . . . .	35
2.5 Un'analisi sui libri di testo per un liceo scientifico . . . . .	37
2.5.1 Libri per il biennio . . . . .	37
2.5.2 Libri per il triennio . . . . .	40

<b>3 Spazi di funzioni</b>	<b>45</b>
3.1 Introduzione . . . . .	45
3.2 Richiami sugli spazi $L^p$ . . . . .	47
3.3 Spazi di Sobolev in una dimensione . . . . .	49
3.4 Funzioni assolutamente continue . . . . .	54
3.5 Gli spazi di Sobolev $W^{m,p}(I)$ . . . . .	58
3.6 Lo spazio $W_0^{1,p}(I)$ . . . . .	59
3.7 Esempio: l'equazione del calore . . . . .	59
<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>66</b>



# Capitolo 1

## Storia del concetto di funzione

### 1.1 Prime idee di dipendenza di una variabile da un'altra

La nascita del concetto di funzione può essere considerata come il risultato dello sviluppo di numerose idee.

La realtà ci ha da sempre offerto numerosi esempi di quantità variabili, in costante movimento e soggette a perenni trasformazioni. Se quindi la matematica deve essere anche un mezzo potente ed un utile aiuto per coloro che studiano la natura, dovrà necessariamente comprendere alcune discipline volte alla considerazione di enti, pensati come qualcosa di mutevole o variabile.

La nozione di dipendenza di una variabile da un'altra è quindi antica come la matematica stessa.

In Mesopotamia sono state ritrovate tavolette risalenti al periodo che va dal XVII sec.a.C. al VII sec.a.C. che raccolgono tavole di moltiplicazione, tavole di reciproci e tavole di quadrati, cubi, radici quadrate, cubiche, redatte nella notazione sessagesimale cuneiforme. Allo stesso periodo risalgono tavolette con tabelle contenenti potenze successive di un numero, tavole di “funzioni” esponenziali e logaritmiche.

Nel IV sec.a.C. la civiltà greca inizia a studiare le relazioni che intercorrono tra quantità geometriche, non utilizzando alcuna espressione algebrica. Iniziano inoltre ad avere a che fare con grandezze incommensurabili. La necessità di poter confrontare tali grandezze con grandezze commensurabili ha

portato al conseguente sviluppo della teoria delle proporzioni in Eudosso e, successivamente, in Euclide. La definizione V del libro quinto degli Elementi:

*“Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, quando, se presi comunque degli equimultipli della prima e della terza e presi comunque degli equimultipli della seconda e della quarta, i primi equimultipli sono rispettivamente maggiori, uguali o minori dei secondi presi nell’ordine corrispondente.”*

riassume bene questo sviluppo: compare in maniera implicita l’idea di corrispondenza e, in questo modo, compaiono alcune delle idee che saranno utilizzate due millenni dopo per risolvere il problema della caratterizzazione dei numeri reali e quindi del continuo.

Occorre aspettare il XVII secolo perchè gli studiosi comincino a prestare attenzione al concetto di funzione. Infatti fino a quel momento vi era stato uno scarso interesse all’argomento a causa della mancanza di prerequisiti algebrici, vista la poca chiarezza sulla continuità dei numeri reali e l’assente sviluppo della notazione simbolica. Inoltre mancavano esempi su cui utilizzare una possibile definizione di funzione.

Tra il 1450 e il 1650, numerosi avvenimenti contribuirono a creare le condizioni per lo sviluppo successivo del concetto di funzione:

- Si svolgono studi approfonditi sui numeri reali e complessi ad opera di Bombelli, Stifel ed altri.
- Personaggi come Viète e Cartesio contribuirono alla creazione dell’algebra simbolica.
- Si assiste ad un’unione tra algebra e geometria grazie a matematici come Fermat e Cartesio.
- Keplero, Galileo ed altri studiano i moti dei corpi grazie ai quali si ha la prima intuizione di una legge che esprima la variazione di una grandezza rispetto ad un’altra.

Cartesio mette in dialogo gli strumenti dell’algebra con quelli della geometria consentendo così di creare relazioni quantitative tra “formule e figure”. Scriveva infatti:

*“Un’equazione in  $x$  e in  $y$  è un mezzo per introdurre una dipendenza tra quantità variabili, in modo tale da poter calcolare i valori di una, in corrispondenza di dati valori dell’altra.”*

Il suo contributo è fondamentale in vista della scoperta da parte di Fermat del principio fondamentale della geometria analitica:

*“Ogniquale volta in un’equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l’estremità dell’una descrivendo una linea retta o curva.”*

Fermat introduce per primo l’idea di rapporto incrementale come strumento per il calcolo di massimi e minimi a curve algebriche.

Il concetto di funzione, inteso come lo intendiamo oggi, benché non esplicitato, è comparso nella storia con sfumature di significato differenti che costituiscono il bagaglio concettuale intuitivo a cui tale concetto si riferisce. Tali idee sono disperse nelle tavole di valori dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche, nei simboli dell’algebra, nelle formule della fisica, nella concezione di curve come sezioni o moti.

## 1.2 Prime definizioni di funzione

Nella seconda metà del diciassettesimo secolo Newton e Leibniz inventano indipendentemente il calcolo infinitesimale moderno presentando il metodo delle flussioni e del calcolo differenziale rispettivamente.

Il termine “funzione” si trova per la prima volta in Leibniz e Johann Bernoulli. In un manoscritto del 1673, dal titolo *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*, Leibniz usò il termine funzione per denotare una qualsiasi quantità variabile da punto a punto di una curva come, ad esempio, la lunghezza della tangente o della normale. Della curva veniva detto che era data da un’equazione. Nella sua *Historia* (1714), Leibniz adoperò la parola funzione per denotare, in generale, quantità che dipendono da una variabile. Leibniz introdusse anche i termini “costante”, “variabile” e “parametro”, usando quest’ultimo con riferimento a una famiglia di curve.

Lavorando con le funzioni, Johann Bernoulli scriveva  $X$  o  $\xi$  per denotare una funzione generale di  $x$ . Nel 1718, però, adottò la notazione  $\varphi x$ . Leibniz approvò questo cambiamento, ma propose anche di adoperare  $x^1$  e  $x^2$  per

indicare delle funzioni di  $x$  quando erano in gioco più funzioni.

Nel 1718, Bernoulli darà la sua definizione di funzione:

*“Chiamo funzione di una grandezza variabile una quantità formata in una maniera qualsiasi da variabili e da costanti.”*

Con le parole “una maniera qualsiasi” egli intendeva riferirsi sia alle espressioni algebriche sia a quelle trascendenti.

Questa definizione sarà quella più adottata negli anni successivi e “consacrata” all’uso da Eulero.

Con Newton emerge, sulla base di motivazioni fisiche, la stretta relazione fra il concetto di funzione e quello di variazione. Per Newton il movimento dei corpi è al centro della ricerca e l’impostazione analitica è rivolta alla considerazione delle quantità variabili in funzione di un parametro temporale, denominate fin dalle prime origini del calcolo infinitesimale (cioè a partire dal 1655) “fluenti”, e delle loro derivate prime, denominate “flussioni”. Il metodo delle flussioni offre gli strumenti matematici per descrivere le variazioni delle “grandezze fluenti” (cioè le funzioni), cose queste che “hanno veramente luogo in natura”:

*“Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da parti molto piccole, ma come descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e quindi generate, non dalla giustapposizione delle loro parti, ma dal moto continuo dei punti [. . .]. Questa genesi ha effettivamente luogo in natura e può essere vista quotidianamente nel moto dei corpi”* [Newton, Tractatus de quadratura curvarum, 1676].

Quest’idea, non così esplicita nelle definizioni di Leibniz e Bernoulli, è fondamentale poiché porta con sé quel bagaglio di intuizione geometrica e fisica che farà da contraltare alle idee legate al formalismo di Leibniz e Bernoulli, ed inoltre sarà motore per lo sviluppo del concetto di funzione nel futuro.

L’approccio di Bernoulli sarà poi adottato ed ampliato da Eulero, che per la prima volta definirà in modo esplicito una funzione come un’espressione analitica.

## 1.3 Nozione euleriana di funzione

Leonhard Euler, italianizzato in Eulero, nacque a Basilea il 15 aprile 1707. Suo padre era un pastore protestante che sperava che il figlio entrasse nella carriera ecclesiastica. Il giovane Eulero, però, studiò sotto la guida di Jean (o Johann) Bernoulli e collaborò con i suoi figli Daniel e Nicolaus. Grazie anche a loro scoprì la sua vocazione. Comunque Eulero godette di un'educazione di vasto respiro aggiungendo allo studio della matematica quello della teologia, della medicina, dell'astronomia, della fisica e delle lingue orientali.

Questa vastità di conoscenze gli permise di essere chiamato come membro della sezione di medicina e fisiologia all'Accademia di Pietroburgo istituita in quegli'anni da Caterina I di Russia. Qui i giovani Bernoulli si erano trasferiti come professori di matematica e lo avevano raccomandato. Nel 1730 Eulero occupò così la cattedra di filosofia naturale, invece che quella di medicina. Nel frattempo però l'amico Nicolaus Bernoulli era morto e Daniel Bernoulli decise così di lasciare la Russia ed accettare la cattedra di matematica a Basilea. Eulero diventò quindi, a soli 26 anni, il matematico più importante dell'Accademia.

Fin dall'inizio della sua attività Eulero contribuì alla stesura di una fitta serie di articoli per la rivista scientifica fondata dall'Accademia di Pietroburgo, i *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Di lui si diceva che era in grado di fare calcoli senza nessuno sforzo apparente. L'attività di Eulero fu instancabile e si calcola che nel corso della sua vita abbia pubblicato più di 500 lavori mentre con la comparsa di quelli postumi la sua bibliografia raggiunge il numero di 886 scritti: si tratta di testi di tutti i livelli, dal manuale d'uso nelle scuole, ad articoli per concorsi, da articoli di ricerca a grandi opere enciclopediche. Oltre alle opere di stampo teorico, non mancano opere di carattere applicativo (ricevette una menzione d'onore da parte dell'Académie des Sciences di Parigi per un saggio sull'alberatura delle navi).

La reputazione di Eulero varcò molto rapidamente i confini della Russia e nel 1741 venne invitato come membro dell'Accademia di Berlino da Federico il Grande. Qui lavorò per venticinque anni (incontrerà anche il compositore Johann Sebastian Bach), poi, nel 1766 ritornò a Pietroburgo. Nel frattempo perse la vista prima da un'occhio poi da entrambi: nonostante questo il suo ritmo di produzione scientifica non diminuì fino al termine della sua vita.

Morì improvvisamente a San Pietroburgo il 18 settembre 1783, men-

tre prendeva il tè con un nipote. Nel suo elogio funebre, Condorcet, un matematico francese illustre, scrisse: *“Ha cessato di calcolare e di vivere”*.

### 1.3.1 La funzione secondo Eulero

Il trattato euleriano *“Introductio in Analysin infinitorum”* può essere considerato come la chiave di volta dell’analisi. Da allora il concetto di “funzione” diventò il cardine sul quale costruire tutto il castello dell’analisi. Questo fatto assume importanza inedita fino ad ora nella concezione della matematica: ciò implica infatti la riunione di una grandissima parte di risultati sotto un unico punto di vista ed asserisce inoltre che tale punto di vista ha come oggetto di indagine proprio il concetto di funzione. È in questo senso che è necessario introdurre una definizione il più possibile precisa e strutturata di tale concetto. Eulero esprime il concetto di dipendenza funzionale tra quantità variabili con le seguenti parole:

*“Una funzione di quantità variabili è un’espressione analitica composta in modo qualunque da quelle quantità e da numeri o quantità costanti.”* [Eulero, *Introductio Analysin Infinitorum*, 1748]

È questa la definizione che si legge in apertura del primo volume dell’*Introductio in analysin infinitorum*.

Qui è già del tutto assente ogni riferimento fisico al movimento dei corpi e il concetto di funzione viene espresso in termini puramente formali come combinazione di quantità (variabili e costanti) e di segni d’operazione.

Oggi tale definizione è inaccettabile, perchè non spiega cosa sia una *“espressione analitica”*. Presumibilmente Eulero aveva in mente un’espressione composta da grandezze simboliche e numeri mediante operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice, *“alle quali bisogna aggiungere ancora la risoluzione delle equazioni”*) oppure trascendenti, quali l’esponenziale e il logaritmo *“e innumerevoli altre che ci fornisce il calcolo integrale”*.

A questa distinzione è correlata, per Eulero, quella tra funzioni algebriche e trascendenti: le prime sono ottenibili mediante un numero finito di operazioni elementari (le equazioni algebriche sono in linea di principio risolubili algebricamente, è opinione di Eulero) mentre per le seconde egli ritiene senz’altro che si possano sviluppare in serie (o comunque mediante un numero infinito di operazioni elementari), senza porsi il problema né della dimostrazione né della legittimità di tali estensioni.

Eulero ero convinto che ogni funzione di una variabile si potesse rappresentare in serie di potenze di quella variabile del tipo:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots$$

come egli aveva mostrato per le usuali funzioni, incluse le trascendenti circolari  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arctan x$ , e le esponenziali e logaritmiche  $e^x$  e  $\log(1+x)$ .

*“Se qualcuno ne dubita, affermava Eulero, il dubbio sarà tolto dallo sviluppo di ciascuna funzione”.*

In ogni caso, non essendo in grado di dimostrare la sviluppabilità di una funzione qualunque  $f(z)$  in serie di potenze, Eulero lascia aperta la possibilità di considerare esponenti qualunque per la  $z$  nello sviluppo considerato, possibilità che esprime nei termini seguenti:

*Affinché questa spiegazione valga nella maniera più estesa, oltre alle potenze di  $z$  che hanno esponenti interi positivi si debbono ammettere anche potenze a esponente qualunque. Così non vi sarà più alcun dubbio che ogni funzione della stessa  $z$  si possa in questo modo trasformare in una espressione infinita, denotando  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ecc. numeri qualunque.*

Dunque una funzione qualunque di  $z$  è rappresentabile dalla somma (infinita o no)

$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + \dots$$

ed è proprio questa la proprietà che Eulero ha in mente e utilizza negli sviluppi di funzioni in serie, frequenti nell'Introductio.

È il caso, ad esempio, della trascendente elementare  $\log(1+x)$ , di cui Eulero dà lo sviluppo:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Certamente non è difficile, dal nostro punto di vista, rilevare l'inadeguatezza della classificazione euleriana di funzioni algebriche e trascendenti. Infatti il carattere algebrico o trascendente di una funzione non si lascia rivelare dal particolare tipo di “espressione analitica” impiegata nella definizione: così serie di potenze possono definire funzioni sia algebriche, come è il caso di

$$y(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots = \sqrt{1+x} \quad \text{per } |x| < 1,$$

sia trascendenti come

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots = \log(1+x) \quad \text{per } |x| < 1.$$

Tuttavia alcune procedure, oggi ritenute illegittime, non sono non rigorose per Eulero: lo sono rispetto ai nostri criteri di rigore, passati attraverso il filtro di duecento anni di sviluppo dell'analisi.

Il rigore in matematica è anch'esso un concetto storico e dunque in divenire. Appellarsi all'esigenza di rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi standard di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica o addirittura da problemi in certo senso esterni alla matematica che, trattati matematicamente, impongono mutamenti del quadro teorico.

Così non è un caso che la fisica matematica e più in generale la matematica applicata siano state un motore formidabile per lo sviluppo della matematica pura.

## 1.4 Il problema della corda vibrante

Fu a partire dal problema della “corda vibrante” che prese origine uno dei dibattiti più interessanti riguardo alla definizione del concetto di funzione: il problema era quello di studiare le vibrazioni di una corda omogenea non soggetta ad alcuna forza esterna posta in un piano e fissata alle estremità.

Dal confronto tra i più illustri matematici dell'epoca riguardo a questo problema avverrà la consapevolezza di due grossi problemi che rappresentavano i punti deboli della definizione di funzione di Eulero, e, più in generale, della sua concezione dell'analisi: da una parte l'importanza di utilizzare strumenti matematici adeguati alla realtà suggerita dalla fisica degli oggetti, dall'altra parte la necessità di fondare in maniera maggiormente coerente i concetti dell'analisi.

Il problema della ricerca di una soluzione per le corde vibranti è stato affrontato a più riprese: in primo luogo da Johann Bernoulli (1667-1748), in seguito da D'Alembert e da Eulero ed infine anche da Daniel Bernoulli e Lagrange. Il dibattito tra questi ultimi quattro matematici si svolgerà tra il



1749 ed il 1762.

Nei primi approcci la corda vibrante era considerata un “rosario”: si supposeva cioè che essa contenesse  $n$  pesi uguali, posti a distanza uguale, uniti l'uno all'altro da pezzi di filo pensato privo di peso, flessibile e inestensibile. Per trattare la corda continua si supposeva che il numero dei pesi diventasse infinito mentre la loro massa diminuiva in modo che la massa totale del numero crescente dei singoli “grani” tendesse alla massa della corda continua. C'erano delle difficoltà matematiche nel passaggio al limite, ma queste erano considerate sottigliezze e venivano ignorate.

Il caso di un numero discreto di masse era stato trattato da Johann Bernoulli nel 1727. Era passato poi a trattare il caso di una corda continua: la sua conclusione è che la corda ad ogni istante  $t$  assume una forma sinusoidale, la cui equazione si ottiene integrando l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -ku$$

un risultato, questo, che era stato ottenuto qualche tempo prima da Taylor (1685-1731).

La conclusione di Bernoulli viene respinta da D'Alembert in un lavoro pubblicato nel 1749, *Recherches sur les vibrations des cordes*, dove si propone di mostrare che vi sono infinite altre soluzioni oltre a quella sinusoidale. Egli non segue lo stesso procedimento di Bernoulli e ricava direttamente l'equazione che segue, considerando  $u$  come funzione non solo dello spazio  $x$ , ma anche del tempo  $t$  trovando il primo esempio nella storia di equazione unidimensionale delle onde:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Poiché la corda, di lunghezza  $l$ , è fissata alle estremità  $x = 0$  e  $x = l$ , la soluzione deve soddisfare le condizioni al contorno

$$u(0; t) = 0; \quad u(l; t) = 0;$$

per  $t \geq 0$ .

Inoltre se indichiamo con  $f(x)$  la forma iniziale della curva, con  $g(x)$  la velocità iniziale nel movimento perpendicolare all'asse  $x$ , in ciascun punto della curva, si hanno le seguenti condizioni:

- il profilo della corda al tempo iniziale è quello dato da  $f(x)$ :

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in [0, l]$$

- la velocità iniziale dei punti della corda coincide con la funzione  $g(x)$ :

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x).$$

D'Alembert inoltre sottolinea il fatto che la funzione  $f(x)$  è soggetta a “legge di continuità” (espressione con cui D'Alembert intende che  $f(x)$  è data da un'unica espressione analitica). Facendo queste assunzioni ricava la soluzione particolare:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + vt) - f(x - vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(t) dt$$

che, per arbitrarietà di  $f$  e  $g$  assume di fatto infinite forme oltre alle soluzioni sinusoidali.

Considerando la stessa equazione di partenza, Eulero, in una memoria del 1750, *Sur la vibration des cordes*, risolve analogamente a D'Alembert il problema ma sente la necessità di fare qualche obiezione alle assunzioni sulla funzione  $f(x)$  evidenziate da D'Alembert.

Motivato dall'esperienza concreta della corda pizzicata, Eulero afferma che non è assolutamente necessario che  $f(x)$  sia sottoposta ad una qualche legge di continuità (ricordiamo ancora che si sta parlando di continuità intesa alla Eulero): basti pensare che il profilo di una corda prima di essere lasciata vibrare è proprio quello di una spezzata che, secondo la concezione euleriana di funzione continua, non è sottoposta ad alcuna “legge di continuità”. D'Alembert accoglie la critica ma prova a difendersi:

*“Non si può, mi sembra, esprimere analiticamente y in maniera più generale che supponendola una funzione di t e di x. Ma con questa supposizione si trova la soluzione del problema solo nel caso in cui le diverse figure della corda vibrante possono essere comprese in una stessa equazione.”* [D'Alembert, Addition au memoire sur les vibrations des cordes, 1752]

Si comprende ora il motivo per cui il concetto di funzione sia del tutto insoddisfacente nella formulazione euleriana: la realtà fisica del problema impone infatti un'evidenza che non può essere trattata nel modo opportuno con

le regole dell'analisi matematica come ben illustra D'Alembert. Addirittura egli stesso nel 1758 scriverà:

*“In ogni altro caso il problema non potrà risolversi, almeno col mio metodo, e mi domando se pure non sia superiore alle forze dell'analisi conosciuta.”*

E ancora Eulero scriverà a D'Alembert nel 1760:

*“La considerazione di tali funzioni non soggette ad alcuna legge di continuità apre davanti a noi un campo dell'analisi interamente nuovo.”*

È però lo stesso Eulero a spingersi oltre, motivato dalla natura fisica del problema. È del tutto ragionevole supporre, infatti, che la corda, allorché viene posta in vibrazione, assuma una forma iniziale arbitraria (tipicamente, se si “pizzica” la corda per farla vibrare, la configurazione iniziale può essere descritta da una funzione che presenta un punto angoloso e che quindi non è ivi derivabile):

*“La prima vibrazione dipende soltanto da noi giacché si può, prima di lasciar la corda, darle una figura qualunque; il che fa sì che il movimento vibratorio della stessa corda possa variare all'infinito, a seconda che le si dia la tale o la tal'altra forma all'inizio del movimento”.*

Coerentemente, Eulero conclude che:

*“[...] le diverse parti di questa curva non sono dunque legate fra loro da alcuna legge di continuità [di analiticità] e sono tenute insieme solo dalla descrizione [del fenomeno]; [...] la sola considerazione del tratto di curva [compresa fra  $x = 0$  e  $x = l$ ] è sufficiente a farci conoscere il movimento della corda, senza assoggettarlo al calcolo.”*

La fisica del problema della corda vibrante è la molla che spinge Eulero a enunciare il suo nuovo concetto di funzione. D'Alembert e Eulero usano lo stesso termine “funzione”, ma intendono cose diverse: il primo giunge alla conclusione che «per non andar contro le regole dell'analisi» la soluzione è sensata quando  $y$  sia un'espressione analitica di  $x$  e  $t$ , Eulero al contrario non richiede alcuna «legge di continuità» per la curva e dunque alcuna espressione analitica per la  $y$ .

Nelle *Institutiones calculi differentialis* [1750] Eulero darà una definizione assai generale di funzione (anche se in pratica si limiterà alle funzioni analitiche):

*“Se delle quantità dipendono da altre in modo tale che dalle mutazioni di queste anche le prime subiscano delle variazioni, esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione ha un'estensione molto ampia e comprende in sé tutti i modi con i quali una quantità si può determinare per mezzo di altre. Se dunque  $x$  rappresenta una quantità variabile, allora tutte le quantità che dipendono da  $x$  in un modo qualunque o possono determinarsi per mezzo di essa, sono chiamate funzioni di essa.”*

Nel 1753 si inserisce nella discussione il figlio di Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli e nel 1759 fece il suo ingresso nella controversia anche Lagrange. Il dibattito continuò a infuriare per tutti gli anni '60 e '70.

Il problema della corda vibrante ha l'ottimo merito di aver stimolato quindi la discussione circa il concetto di funzione. Presto infatti il problema verrà accantonato per concentrarsi su alcune questioni generali, come ad esempio se si possa liberare dal riferimento intuitivo la definizione di funzione e di continuità, oppure se sia sufficiente per le applicazioni una definizione formale di funzione, o se si possano chiamare funzioni espressioni non analitiche.

Saranno necessari ancora molti anni perché, non solo nella teoria, ma anche nell'uso comune, si utilizzi una concezione di funzione sganciata dall'idea geometrica di “movimento uniforme” che aveva caratterizzato in parte la concezione euleriana.

## 1.5 Il concetto di funzione si evolve

Dalla discussione sul problema della corda vibrante ci si iniziò a concentrare sulla definizione euleriana di funzione, allora standard, e in particolare sulle funzioni continue e discontinue, e sul cercare di comprendere, rispetto a quelle, quale fosse la natura degli oggetti matematici ottenuti dall'integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Non fu infatti strano che nel 1787 l'Accademia di Pietroburgo bandisse un premio per chi avesse risolto meglio il problema di determinare:

*“Se le funzioni arbitrarie cui si perviene mediante l’integrazione di equazioni a tre o più variabili, rappresentino delle curve o superfici qualunque, sia algebriche o trascendenti, sia meccaniche, discontinue, o generate da un movimento arbitrario della mano; o se queste funzioni comprendano soltanto delle curve continue rappresentate da un’equazione algebrica o trascendente.”*

### 1.5.1 Antoine Arbogast

Tale premio fu vinto da L. F. A. Arbogast (1759-1803), di cui l’aspetto più interessante è la distinzione che egli fa tra funzioni “discontinue” e funzioni “discontigue”:

*“[...] la legge di continuità consiste nel fatto che una quantità non può passare da uno stato ad un altro senza passare attraverso tutti gli stati intermedi che sono soggetti alla stessa legge.*

*Le funzioni algebriche sono considerate continue, poiché i differenti valori di queste funzioni dipendono nella stessa maniera da quelli della variabile, e supponendo che la variabile cresca continuamente, la funzione subirà variazioni in modo corrispondente, ma non passerà da un valore ad un altro senza passare attraverso tutti i valori intermedi.*

*Quindi l’ordinata  $y$  di una curva algebrica, quando l’ascissa  $x$  varia, non può passare bruscamente da un valore ad un altro; non ci può essere un salto fra un’ordinata e un’altra che differisce da essa di una quantità prefissata, ma tutti i successivi valori di  $y$  devono essere collegati fra loro da una stessa legge [...].*

*Questa continuità può essere vanificata in due modi:*

- *La funzione può cambiare la sua forma, vale a dire la legge secondo cui la funzione dipende dalla variabile può cambiare del tutto.*

*Una curva formata dall’unione di alcune porzioni di curve differenti è di questo tipo.*

*Non è neppure necessario che la funzione  $y$  debba essere espressa da un’equazione in un certo intervallo della variabile; essa può continuamente cambiare la sua forma e la linea che la rappresenta, al posto di essere l’unione di curve regolari, può essere tale che in ognuno dei suoi punti diventi una curva differente, in altre parole può essere interamente irregolare e non seguire alcuna legge per ogni intervallo comunque piccolo. Tale sarebbe una curva tracciata a caso dal libero movimento della mano. Questo tipo di curve non può essere rappresentato né da una né da più equazioni algebriche o trascendenti.*

- *La legge di continuità viene meno anche quando le differenti parti di una curva non si congiungono fra loro.* [Arbogast, 1791]

La distinzione di Arbogast tra funzioni “discontinue” e “discontigue” tende a distinguere tra funzioni discontinue e funzioni continue, anche se definite in diversi intervalli da diverse dipendenze funzionali. Inoltre, nonostante lo scritto sembra aprirsi ad una concezione più ampia di funzione, Arbogast si affretta a precisare l’idea intuitiva che ha in mente nello stilare tale definizione, invocando l’immagine tutt’altro che moderna “della mano che si muove sul foglio”. Questo fatto dimostra la difficoltà di liberarsi da un riferimento geometrico intuitivo del concetto di funzione.

### 1.5.2 Nicolas de Condorcet

In uno dei suoi scritti, M. A. N. Condorcet (1734-1794), forse più noto come uomo politico e come riformatore nel campo dell’istruzione che come matematico, scrive:

*“Suppongo di avere un certo numero di quantità  $x, y, z, \dots, F$  e che ogni valore determinato di  $x, y, z, \dots, F$  abbia uno o più valori determinati che corrispondono ad essi. Io dico allora che  $F$  è una funzione di  $x, y, z, \dots$ . Infine, so che, allorché  $x, y, z, \dots$  saranno determinati, lo sarà anche  $F$ ; anche se non conoscerò né la maniera di esprimere  $F$  mediante  $x, y, z, \dots$  né la forma dell’equazione tra  $F$  e  $x, y, z, \dots$  io saprò che  $F$  è funzione di  $x, y, z, \dots$ .”* [Condorcet, 1765]

Questo è quanto Condorcet intende per funzione “analitica”: una funzione di natura del tutto arbitraria, dove il termine “analitico” sta a designare che lo studio di simili oggetti avviene nel contesto dell’analisi. Condorcet distingue inoltre tre diversi tipi di funzioni:

- funzioni di cui si conosce la forma (in altre parole, funzioni esplicite);
- funzioni introdotte da equazioni tra  $F$  e  $x, y, z, \dots$  (vale a dire funzioni implicite);
- funzioni date mediante certe condizioni (per esempio equazioni differenziali).

Nonostante il notevole grado di generalità, Condorcet riconduce lo studio di funzioni arbitrarie allo studio della serie di Taylor di queste, che viene assunto come fondamento di tutta l’analisi. In questo, oltre che da Eulero,

Condorcet è influenzato dalle idee di Lagrange.

### 1.5.3 Joseph-Louis Lagrange

Il tentativo più coerente di stabilire una teoria delle funzioni, e quindi un fondamento sicuro per il calcolo integrale, fu dato da Lagrange nel suo *Theorié des fonctions analytiques* del 1797. Infatti i matematici, oltre ad appoggiarsi notevolmente ai significati fisici e intuitivi, avevano generalmente in mente il modello fornito dalle funzioni polinomiali e razionali, ed estendevano a tutte le funzioni le loro proprietà: la continuità, l'esistenza di derivate e di integrali e la sviluppabilità in serie di potenze. Quando furono però obbligati, soprattutto in seguito alle ricerche sul problema della corda vibrante, ad estendere il concetto di funzione e a considerare anche funzioni non analitiche, non poterono più usare come guida le funzioni più semplici e dovettero procedere, in realtà, senza alcuna base sicura.

Lagrange prende come suo oggetto di studio la teoria delle funzioni e i principi del calcolo differenziale “liberati da ogni considerazione di infinitesimi, di quantità evanescenti, di limiti e flussioni, e ricondotti all'analisi algebrica di quantità finite”. La sua opera si apre con la seguente definizione di funzione:

*“Si chiama funzione di una o più quantità ogni espressione del calcolo nella quale queste quantità entrano in maniera qualunque, insieme o no con altre quantità che si considerano come aventi dei valori dati e costanti, mentre le quantità della funzione possono assumere ogni valore possibile.”* [Lagrange, *Theorié des fonctions analytiques*, 1797]

Tale definizione si richiama direttamente a Leibniz e Johann Bernoulli. Per Lagrange questa valutazione sarà il punto di partenza di tutta la sua teoria, poiché il passo immediatamente successivo è di far vedere che una funzione qualunque è sviluppabile in serie di potenze. Scrive infatti Lagrange:

*“Consideriamo una funzione  $f(x)$  di una variabile qualunque  $x$ . Se al posto di  $x$  si mette  $x + h$ , dove  $h$  è una quantità indeterminata qualunque, essa diventerà  $f(x + h)$ , e, mediante la teoria delle serie, si potrà sviluppare in una serie della forma  $f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$ , nella quale le quantità  $p, q, r, \dots$ , coefficienti delle potenze di  $h$ , saranno delle nuove funzioni di  $x$ , derivate dalla funzione primitiva  $f(x)$  e indipendenti dalla quantità  $h$  [...]. La formazione e il calcolo di queste diverse funzioni sono, a dire il vero,*

*l'autentico oggetto dei nuovi tipi di calcolo, cioè del cosiddetto calcolo differenziale*" [Lagrange, 1797].

Prima di procedere a dimostrare che ogni funzione  $f(x)$  può essere espressa nella forma

$$f(x+h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + sh^4 + \dots$$

dove i coefficienti  $p, q, r, s, \dots$  dipendono in generale da  $x$  ma non da  $h$ , Lagrange vuole essere sicuro che un tale sviluppo in serie di potenze sia sempre possibile. Come dice lui stesso questo fatto ci è noto da un gran numero di esempi familiari, ma ammette che ci sono dei casi eccezionali, ad esempio quelli in cui la funzione, o qualche sua derivata, diventa "infinita". Queste eccezioni capitano però soltanto in punti "isolati" e perciò, per Lagrange, non contano.

In realtà, l'assunzione lagrangiana che ogni funzione possa essere sviluppata in serie di potenze è il punto debole di tutto lo schema. Nonostante i difetti, l'approccio lagrangiano al calcolo infinitesimale incontrò per un certo periodo un grande favore. I matematici dell'Ottocento, ad iniziare da Abel e Cauchy, avevano criticato l'"analisi algebrica" di Lagrange perchè poco rigorosa e insufficiente per la fondazione del calcolo infinitesimale. Nonostante ciò, Lagrange contribuì, come già aveva fatto Eulero, a separare i fondamenti del calcolo infinitesimale dalla geometria e dalla meccanica e nel fare questo la sua influenza fu decisiva.

## 1.6 L'Ottocento e lo studio delle funzioni

Tra il Settecento e l'Ottocento si verifica una profonda frattura sul piano politico, sociale ed economico ad opera della Rivoluzione francese, un fatto che ha un'importanza decisiva anche rispetto alla storia della matematica. Infatti come esito della radicale trasformazione operata dalla Rivoluzione francese anche la matematica esce profondamente mutata, sia nel ruolo sociale dei matematici che negli orientamenti della ricerca. Infatti i matematici non svolgono più la loro attività all'ombra delle accademie, senza obblighi di insegnamento, con un appannaggio assicurato dal mecenatismo dei principi e dei sovrani, ma vengono fondate le prime grandi scuole francesi, costituite con compito preciso di formare una estesa classe di ingegneri e di tecnici adeguata alle esigenze militari e produttive della Francia rivoluzionaria. Il tipo di insegnamento impartito nelle scuole uscite dalla Rivoluzione è fondato



sulla matematica, “pura e applicata”.

Fin dalla fine del Settecento un problema fisico di grande interesse teorico e pratico aveva attirato l'interesse di numerosi fisici e matematici: lo studio della natura e della propagazione del calore. Si sta cominciando ad intuire la possibilità di usare il calore come fonte di energia: numerosi tecnici lavorano alla cosa facendo sì che compaiano macchine a vapore nei processi industriali e nelle fabbriche tessili. Ma se in Inghilterra c'è sostanzialmente interesse pratico per la cosa, in Francia numerosi matematici pubblicarono memorie a riguardo.

### 1.6.1 Jean Baptiste Fourier

Questa questione fu affrontata anche da J. B. Fourier (1768-1830) che, nella sua opera, impose un'ulteriore revisione al concetto di funzione e comportò un sostanziale ampliamento della classe di funzioni ammissibili in analisi. Infatti nel suo lavoro *Teorie analytique de la chaleur* del 1822, integrando le equazioni differenziali ottenute, egli fece uso di serie trigonometriche determinandone opportunamente i coefficienti: si tratta delle serie di Fourier. Inoltre è esplicito nell'affermare che la sua serie può rappresentare funzioni non necessariamente definite da un'unica espressione analitica e non necessariamente continue. Scrive infatti:

*“In generale la funzione  $f(x)$  rappresenta una successione di valori o di ordinate ciascuna delle quali è arbitraria. [...] Noi non supponiamo che queste ordinate siano soggette a una legge comune; esse si succedono l'una all'altra in maniera qualsiasi.”* [Fourier, 1822]

Nell'entusiasmo della sua scoperta egli afferma che con tali serie si possano rappresentare funzioni completamente arbitrarie. Anche se Fourier trattava soltanto funzioni dotate di un numero finito di discontinuità in ogni intervallo limitato, la sua opera segnò la definitiva rottura con la concezione delle funzioni analitiche come prototipo di tutte le funzioni. Poiché le proprietà delle funzioni analitiche non potevano più essere estese a tutte le funzioni, sorse il problema di individuare, al di là del riferimento grafico intuitivo, il significato preciso da dare ai concetti di funzione, di continuità, di derivabilità, di integrabilità e così via.

La matematica deve trovare nella realtà esterna stimoli e motivazioni: questa “concretezza” è l'indicazione che emerge con chiarezza dall'opera di Fourier.

### 1.6.2 Niels Henrik Abel

Nel 1826 in una lettera al professor Christopher Hansteen, il matematico Niels Henrik Abel lamentava:

*“[L’analisi] manca a tal punto di un piano e di una struttura che è assolutamente stupefacente che possa essere studiata da tanta gente, e il peggio è che non è fatta per nulla con rigore. Non ci sono che pochissime proposizioni, nell’analisi superiore, che siano dimostrate con indiscutibile rigore. [...] le funzioni di cui l’analisi si è occupata finora possono, nella maggioranza dei casi, essere espresse per mezzo di potenze. Non appena ne intervengono altre, cosa che invero accade piuttosto raramente, allora le cose non tornano più e da conclusioni false derivano una serie di proposizioni scorrette, ad esse concatenate.”*

Il concetto di funzione, di continuità, di somma di una serie infinita, di funzioni, di limite..., non sono sufficientemente ben formulati da rendere rigorosi le deduzioni in campo analitico. Vi è quindi la lucida consapevolezza che non sono solo necessari criteri di rigore esterni alla logica dell’analisi ma anche derivanti da fondamenta sicure su cui poggiarne i concetti basilari.

### 1.6.3 Augustin-Louis Cauchy

Una delle figure dominanti della matematica moderna, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), si impegnò in un sistematico lavoro di ricostruzione rigorosa dei concetti fondamentali del calcolo differenziale.

Le principali opere di Cauchy sui fondamenti dell’analisi sono *“Cours d’Analyse algébrique”* (1821), *“Résumé des leçons su le calcul infinitésimal”* (1823), *“Leçons sur le calcul différentiel”* (1829).

In realtà il rigore conseguito da Cauchy in queste opere è insufficiente rispetto agli standard moderni, ma paragonando le sue opere con quelle di Lagrange ci si rende conto della differenza tra la matematica del Settecento e quella dell’ Ottocento.

Soprattutto l’obiettivo del *Cours* era quello di rendere rigorosa l’analisi. Questo volume diventò il manifesto della nuova analisi e, come scrisse Abel, *“deve essere letto da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche”*.

Nel libro Cauchy definisce la continuità delle funzioni, la derivata, l’integrale, la convergenza e la divergenza di una serie, nonché la sua somma. Tutto ciò

lo definisce a partire dal concetto di limite.

Dopo aver dato la definizione di limite, infatti, è per lui possibile presentare le usuali operazioni di calcolo (somma, prodotto, ...), l'esponenziale, il logaritmo e le funzioni trigonometriche.

È poi nel primo capitolo che si trova la definizione di funzione di una (o più) variabile reale:

*“Allorché delle quantità variabili sono legate tra loro in modo tale che, dato il valore di una, si possa ricavare il valore di tutte le altre, queste, espresse per mezzo della variabile indipendente, sono chiamate funzioni di questa variabile.”*

Inoltre, dopo aver definito infinitesimi di primo ordine e degli ordini successivi, Cauchy dà la seguente definizione di continuità di una funzione:

*“Sia  $f(x)$  una funzione della variabile  $x$ , e supponiamo che, per ogni valore intermedio di  $x$  entro due limiti dati, la funzione ammetta sempre un valore finito. Se partendo da un valore di  $x$  compreso entro questi due limiti, si attribuisce alla variabile  $x$  un incremento infinitesimo  $a$ , la funzione stessa riceverà per incremento la differenza  $f(x+a) - f(x)$  che dipenderà al tempo stesso dalla nuova variabile  $a$  e dal valore di  $x$ . Ciò posto, la funzione  $f(x)$  sarà, entro i due limiti assegnati alla variabile  $x$ , funzione continua di questa variabile se, per ogni valore di  $x$  compreso tra questi due limiti, il valore numerico della differenza  $f(x+a) - f(x)$  decrescerà indefinitivamente insieme a quello di  $a$ .”*

E ancora:

*“La funzione  $f(x)$  resterà continua rispetto a  $x$  fra due limiti dati, se, entro questi limiti un incremento infinitesimo della variabile produce un incremento infinitesimo della funzione stessa.”*

La definizione di funzione di Cauchy appare del tutto svincolata dall'esprimibilità attraverso un'espressione analitica della variabile dipendente (com'era ad esempio per Lagrange). Inoltre la definizione di funzione continua comprende anche funzioni con punti angolosi e dunque non derivabili. L'idea di continuità diviene locale.

L'opera analitica di Cauchy fu importante anche perché in essa troviamo una robusta sistemazione teorica di alcune nozioni geometriche introdotte a partire dalla fine del XVII secolo in termini intuitivi, cui successivamente

erano state applicate le tecniche analitiche.

#### 1.6.4 Peter Gustav Dirichlet

Nel 1837 P. G. Dirichlet pubblicò un articolo nel primo numero della rivista *“Repertorium der Physik”* nel quale egli riprendeva sostanzialmente risultati già esposti in precedenti memorie, con l’aggiunta però delle definizioni di alcuni concetti fondamentali di cui faceva uso, tra cui quello di “continuità di una funzione in un intervallo”.

La notorietà acquisita da questo lavoro risiede probabilmente nell’ultima definizione, come anche Kronecker lascia intendere, chiamandola semplicemente “la memoria sulla continuità”, mentre l’effettivo argomento era la “rappresentazione di funzioni del tutto arbitrarie mediante serie di seni e coseni”. Ecco la definizione in questione:

*“Si pensi di indicare con  $a$  e  $b$  due valori fissati e con  $x$  una grandezza variabile, che possa assumere tutti i valori compresi fra  $a$  e  $b$ . Ora, ad ogni  $x$ , corrisponda un unico  $y$  finito e tale che, mentre  $x$  percorre con continuità l’intervallo da  $a$  a  $b$ ,  $y = f(x)$  vari in maniera del tutto simile; allora  $y$  si dice funzione continua di  $x$  in quest’intervallo. Perciò, non è affatto necessario che  $y$  sia dipendente da  $x$  secondo la stessa legge nell’intero intervallo; neppure occorre pensare a una dipendenza esprimibile attraverso operazioni matematiche.*

*Rappresentata geometricamente, cioè pensate la  $x$  e la  $y$  come ascisse e ordinate, una funzione continua appare come una curva connessa (zusammenhängende Kurve) di cui ad ogni valore dell’ascissa compreso fra  $a$  e  $b$  corrisponde un solo punto.*

*Questa definizione non impone un’unica legge per le varie parti della curva; questa si può pensare composta delle più diverse parti o disegnata del tutto arbitrariamente.*

*Ne segue che una simile funzione si deve considerare completamente determinata su un intervallo quando o è data graficamente per l’intero intervallo oppure, matematicamente, quando è sottoposta per le varie parti dell’intervallo a leggi valide in esse. Anche quando si sia determinata una funzione per una parte dell’intervallo, rimane del tutto arbitraria la maniera in cui prolungare la funzione nella parte restante dell’intervallo.”*[Dirichlet, 1837]

Commentando questa definizione, Hankel scriveva nel 1870 che i risultati di Fourier, che avevano ampliato la classe delle funzioni ammissibili in analisi alle funzioni discontinue, avevano definitivamente rivelato insosteni-

bile l'ipotesi tacita, ma decisiva, che le proprietà delle funzioni analitiche si potessero comunque estendere a tutte le funzioni: perciò il vecchio concetto di funzione, che richiedeva che una qualunque funzione fosse rappresentabile analiticamente, si rivelava inadeguato. “Reciso questo nodo”, dice Hankel, la via era spianata per una definizione di funzione come la seguente:

*“Si dice che  $y$  è funzione di  $x$  se ad ogni valore della grandezza variabile  $x$  all'interno di un certo intervallo corrisponde un determinato valore di  $y$ , senza riguardo al fatto che su tutto l'intervallo  $y$  dipenda o no da  $x$  secondo la stessa legge, e che la dipendenza sia o no esprimibile da operazioni matematiche.”*[Hankel, 1870]

È questa la forma in cui Hankel presenta la definizione di Dirichlet, andando ben oltre, dunque, le intenzioni e lo scritto dello stesso Dirichlet. Scrive infatti Hankel:

*“Questa definizione puramente nominale, cui nel seguito assocerò il nome di Dirichlet, poiché essa sta a fondamento del suo lavoro sulle serie di Fourier, che hanno mostrato senza ombra di dubbio l'indifendibilità del precedente concetto, non basta affatto alle esigenze dell'analisi, poiché funzioni di questo tipo non possiedono proprietà generali e perciò vengono meno tutte le relazioni fra i valori delle funzioni corrispondenti ai diversi valori dell'argomento.”* [Hankel, 1870]

Così, dice Hankel, c'è una grande confusione su che cosa si debba intendere come funzione, come si vede anche da un rapido sguardo ai migliori manuali: c'è chi la definisce come Eulero, chi come Dirichlet, chi dice che una dipendenza funzionale è data secondo una legge e chi non dà alcuna definizione; “tutti tuttavia traggono dai loro concetti conseguenze che non sono affatto contenute in essi [Hankel, 1870]”.

C'era dunque bisogno, continua Hankel, di dare una definizione di funzione che consentisse di stabilire una teoria e un calcolo con le funzioni coerente con la definizione data, non troppo generale da diventare “puramente nominale e priva di contenuto reale” e tuttavia in grado di individuare una vasta classe di oggetti matematicamente interessanti e significativi.

Anche K. Weierstrass (1815-1897), nelle sue lezioni introduttive alla teoria delle funzioni analitiche (1886), andava sostenendo che la definizione di Dirichlet, a causa della sua grande generalità, permetteva in pratica di “fare poche cose”, e se comunque veniva utilizzata era perché si trasportavano “ta-

citamente le proprietà che possiedono tutte le funzioni considerate a queste funzioni generali”.

Le interpretazioni di Hankel e Weierstrass della definizione di funzione continua data da Dirichlet sono state fatte proprie dai moderni storici della matematica: così E. T. Bell vi ha visto la prima formulazione del moderno concetto di applicazioni fra insiemi e ha scritto (1945) che “la definizione di Dirichlet di una funzione (a valori numerici) di una variabile reale come una tavola o corrispondenza, o correlazione, fra due insiemi di numeri, lascia intendere una teoria dell’equivalenza degli insiemi di punti”, dando con ciò prova di una notevole libertà interpretativa.

C. B. Boyer, da parte sua, dà questa versione dei fatti:

*“Lejeune-Dirichlet [...] nel 1837 propose una definizione molto ampia di funzione: se una variabile  $y$  ha una relazione con una variabile  $x$  tale che, ogniqualvolta venga assegnato un valore numerico alla  $x$ , esista una regola in base alla quale viene determinato un valore univoco di  $y$ , si dice che  $y$  è una funzione della variabile indipendente  $x$ . Questa definizione presenta un’affinità con l’idea moderna di corrispondenza fra due insiemi di numeri, anche se a quel tempo i concetti di «insieme» e di «numero reale» non erano ancora entrati stabilmente nel campo della matematica. Per sottolineare la natura assolutamente arbitraria della regola di corrispondenza, Dirichlet propose una funzione molto «irregolare»: quando  $x$  è razionale, sia  $y = c$ , e quando  $x$  è irrazionale, sia  $y = d \neq c$ .”*[Boyer, 1968, p. 635]

A questo proposito osserva però Bottazzini (1981):

*“Tutto ciò è molto suggestivo, ma purtroppo non ha nulla a che fare con la storia reale: né Dirichlet propose quella definizione né tantomeno diede l’esempio di funzione «patologica» citato per illustrare l’arbitrarietà della regola di corrispondenza.*

*Quello che sembra essere loro sfuggito in primo luogo è l’aggettivo «continua» che accompagna il termine funzione, senza il quale appunto si finisce per non comprendere nulla delle idee di Dirichlet. Egli è interessato a definire esplicitamente ciò che Fourier intendeva per funzione arbitraria e si collega alla lunga discussione originata dalla definizione euleriana di funzione continua e dalla nuova definizione di continuità (alla Cauchy).*

*Ciò che Dirichlet vuole chiarire è semplicemente che una funzione continua si può dare o arbitrariamente con un grafico (e qui la sua idea di funzione continua mostra di essere largamente intuitiva) oppure con una formula matema-*

*tica, non necessariamente la stessa in ogni parte dell'intervallo.*"[Bottazzini, 1981, p. 156]

L'idea di fondo di Dirichlet è che ogni funzione continua, per quanto arbitrariamente data, sia sviluppabile in serie di Fourier. Da ciò che egli scrive nella stessa memoria del 1837 emerge quanto Dirichlet fosse distante da quello che oggi viene generalmente chiamato «il concetto di Dirichlet di funzione».

Il quadro concettuale cambierà solo con la fondazione del calcolo infinitesimale sul concetto di “numero reale”, che sta al centro del programma di “aritmetizzazione dell'analisi”.

### 1.6.5 Nicolas Bourbaki

Alle ricerche sul continuo e ad una sistemazione rigorosamente aritmetica della continuità si dedicarono molti importanti matematici fra il XIX e il XX secolo; in particolare ricordiamo C. Méray (1835-1911), K. Weierstrass (1815-1897), H. E. Heine (1821-1881), G. Cantor (1845-1918) e R. Dedekind (1831-1916). Costoro, in un certo senso, rappresentano il culmine di oltre due secoli di ricerche sulla natura della funzione e del numero, cominciate verso la metà del Seicento con il “metodo delle flussioni” di Newton.

Nel fascicolo dei risultati del primo libro degli *Eléments de mathématique* di Bourbaki [1939], dedicato alle strutture fondamentali dell'analisi, si legge questa definizione di funzione:

*“Siano  $E$  e  $F$  due insiemi distinti o no. Una relazione fra una variabile  $x$  di  $E$  e una variabile  $y$  di  $F$  è detta relazione funzionale in  $y$ , o relazione funzionale di  $E$  verso  $F$ , se qualunque sia  $x \in E$ , esiste un elemento  $y$  di  $F$ , e uno solo, che stia nella relazione considerata con  $x$ . Si dà il nome di funzione all'operazione che associa così ad ogni elemento  $x \in E$ , l'elemento  $y$  di  $F$  che si trova nella relazione data con  $x$ ; si dice che  $y$  è il valore della funzione per l'elemento  $x$  e che la funzione è determinata dalla relazione funzionale considerata. Due relazioni funzionali equivalenti determinano la stessa funzione.”* [Bourbaki, 1939]

Il concetto di funzione appare qui definitivamente basato sulla teoria degli insiemi: una relazione funzionale tra due insiemi è definita come un particolare sottoinsieme del prodotto cartesiano  $E \times F$ .

In maniera analoga si trova definita la nozione di funzione nelle opere più recenti di Dieudonné [1969] o di Kolmogorov e Fomin [1974].

La definizione in termini insiemistici è quindi l'esito di una discussione che ha accompagnato la storia dell'analisi dalle origini del calcolo infinitesimale nella seconda metà del Seicento. Nella formulazione oggi usuale del concetto di funzione come applicazione fra insiemi astratti va però perduta una delle idee centrali, di natura fisica, che originariamente stavano alla base dell'analisi, l'idea di studiare matematicamente il movimento dei corpi e dunque la "variazione delle grandezze". È questo il passo che separa nettamente la matematica classica, tipicamente la geometria della Grecia antica, tramandata dagli arabi e "riscoperta" nei testi di Euclide e Archimede nel sedicesimo secolo, dalla matematica moderna. Nel 1870 il matematico tedesco Hankel (1839-1873) scriveva:

*“La matematica moderna data dal momento in cui Descartes va oltre la trattazione puramente algebrica delle equazioni per indagare le variazioni delle grandezze che un'espressione algebrica subisce quando una grandezza generica in essa contenuta percorre una successione continua di valori.”* [Hankel, 1870]

Si tratta di un passo decisivo, che trova nel calcolo infinitesimale il significato più compiuto e dà conto della radicale differenza che intercorre fra la moderna analisi e l'"algebra geometrica" degli antichi, ed anche fra la cinematica di Galilei e la dinamica di Newton.



# Capitolo 2

## Un'analisi didattica del concetto di funzione

### 2.1 Introduzione

Il concetto di funzione è, si può dire, uno dei concetti più importanti per la matematica: infatti la matematica è anche cercare le cause, le implicazioni, le conseguenze e l'utilità di una funzione è appunto quello di mostrare il legame che esiste fra le diverse cose.

Il concetto di funzione è quindi tra i più rilevanti, ma anche tra i più controversi concetti matematici poiché coinvolge aspetti morfologici, sintattici e semantici considerevoli (questi aspetti riconducono direttamente a domande quali: che relazione c'è tra funzione e sue rappresentazioni analitiche? Si possono avere funzioni uguali con diverse espressioni analitiche? E cosa significa che due funzioni sono uguali? È indispensabile avere un legame esplicito tra le variabili per parlare di funzioni? Quale rapporto c'è tra equazioni e funzioni?).

Per questo nella sua gestione sia tecnica che concettuale ci si imbatte continuamente in contraddizioni o riflessi epistemologici.

## 2.2 Introduzione del concetto di funzione nei programmi italiani

La storia della presenza delle funzioni nei programmi scolastici italiani è abbastanza interessante. In Italia le funzioni compaiono nei Programmi nel 1906, dopo i Programmi francesi del 1902 ed i Programmi tedeschi di Merano del 1905: il Regio Decreto 22 luglio 1906 n. 373 (Fusinato), programma specifico per il solo Istituto Tecnico di Bergamo, recita «funzioni di una variabile indipendente, continuità, nozione elementare di derivata e integrale, derivate e integrali delle funzioni algebriche e trascendenti più semplici».

Il Regio Decreto 28 settembre 1913 n. 1213 (Credaro), introduce le funzioni nei programmi nazionali del Liceo moderno che ebbe breve vita a causa dell'immediatamente successivo primo conflitto mondiale e l'avvento del fascismo.

Le funzioni si ritrovano nei Programmi del 1945 predisposti dalla Commissione nominata dai Governi Alleati, emanati per i territori occupati e poi estesi a tutta Italia, mai pubblicati sul Bollettino Ufficiale, né sulla Gazzetta Ufficiale, ma introdotti come Circolare Ministeriale 2 gennaio 1945 n. 155 (Arangio Ruiz), e applicati a partire dall'Anno scolastico 1945 - 1946.

Tutto sommato il ritardo con cui il concetto di funzione è stato trasferito dagli studi universitari alla scuola non è stato grandissimo. Per questo non ci sarebbe da stupirsi se tra qualche decennio si riconoscesse indispensabile utilizzare nell'insegnamento anche quegli argomenti che attualmente sono riservati all'Università e che oggi entrano nella preparazione degli insegnanti, ma spesso senza che venga compiuta un'armonizzazione con la nozione di funzione che viene poi insegnata nelle scuole pre-universitarie.

Oggi i programmi scolastici seguono le Indicazioni Nazionali per i licei e le Linee Guida per gli istituti tecnici e professionali, riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi della scuola secondaria di secondo grado.

## 2.3 Analisi delle Indicazioni Nazionali

Per quanto riguarda la materia di matematica, andando ad analizzare nel dettaglio le Indicazioni Nazionali, una delle competenze che ogni studente liceale dovrà acquisire è quella di “conoscere i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sè considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico”.

Inoltre nel documento, tra i gruppi di concetti e metodi attesi per lo studente al termine del suo percorso liceale, si trovano anche numerosi altri riferimenti ai contenuti disciplinari del nostro lavoro, in particolare: “funzioni elementari dell’analisi”, “nozioni elementari del calcolo differenziale”, “modelli matematici di classi di fenomeni”.

Più nello specifico si può andare ad analizzare la sezione chiamata “Relazioni e funzioni”. Per quanto riguarda i licei artistico, classico, linguistico, musicale e delle scienze umane, le indicazioni date per il primo e il secondo biennio e per il quinto anno sono le stesse. Interessante può essere confrontare queste con quelle del liceo scientifico.

### 2.3.1 Primo biennio

Per i licei artistico, classico, linguistico, musicale e delle scienze umane le indicazioni riguardanti la sezione “Relazioni e funzioni” sono:

*Obiettivo di studio sarà il **linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.)**, anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all’introduzione del concetto di modello matematico.*

*In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un’equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.*

*Lo studente studierà le **funzioni del tipo**  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = a/x$ ,  $f(x) = x^2$  sia in termini strettamente matematici sia in funzione della descrizione e soluzione di problemi applicativi. Saprà studiare le*

*soluzioni delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, e conoscerà le tecniche necessarie alla loro risoluzione grafica e algebrica. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa.*

*Lo studente sarà in grado di **passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale)**, anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.*

Per il liceo scientifico invece le Indicazioni Nazionali sono leggermente diverse e più dettagliate:

*Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.*

*Lo studio delle funzioni del tipo  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e la **rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano** consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.*

*Lo studente studierà le funzioni  $f(x) = |x|$ ,  $f(x) = a/x$ , le **funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi**. Apprenderà gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa. **Il contemporaneo studio della fisica offrirà esempi di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica**, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie.*

*Lo studente sarà in grado di **passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale)**, anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.*

Ciò che cambia nel primo biennio per lo studio delle funzioni è che gli studenti dovranno apprendere, oltre alla retta, anche la parabola generica del tipo

$y = ax^2 + bx + c$  con le loro rispettive rappresentazioni. Inoltre in aggiunta allo studio delle funzioni  $f(x) = |x|$  e  $f(x) = a/x$ , il discente studierà anche *le funzioni lineari a tratti, le funzioni circolari sia in un contesto strettamente matematico sia in funzione della rappresentazione e soluzione di problemi applicativi*. Infine da notare anche che lo studio contemporaneo della fisica potrà fornire ulteriori esempi da studiare.

### 2.3.2 Secondo biennio

Per quanto riguarda il secondo biennio, nei licei artistico, classico, linguistico, musicale e delle scienze umane:

*Lo studente apprenderà lo **studio delle funzioni quadratiche**; a risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado e rappresentare e risolvere problemi utilizzando equazioni di secondo grado.*

*Studierà le **funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare le funzioni polinomiali, razionali, circolari, esponenziale e logaritmo**.*

*Apprenderà a costruire **semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici**, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.*

*Non sarà richiesta l'acquisizione di particolare abilità nella risoluzione di equazioni e disequazioni in cui compaiono queste funzioni, abilità che sarà limitata a casi semplici e significativi.*

Per il liceo scientifico:

*Un tema di studio sarà il problema del numero delle soluzioni delle equazioni polinomiali.*

*Lo studente acquisirà la conoscenza di semplici esempi di successioni numeriche, anche definite per ricorrenza, e saprà trattare situazioni in cui si presentano progressioni aritmetiche e geometriche.*

***Approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo**. Sarà in grado di costruire semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo.*

*Infine, lo studente apprenderà ad **analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse**. Un tema importante di studio sarà il **concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione**.*

Nel secondo biennio invece, mentre negli altri licei si studieranno le funzioni elementari dell'analisi con i relativi grafici (anche lo studio delle funzioni quadratiche), nel liceo scientifico se ne *approfondirà* lo studio, imparando ad *analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni* ed a *operare su funzioni composte e inverse*. Un'altra sostanziale differenza sarà lo studio, al liceo scientifico, del *concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione*.

### 2.3.3 Quinto anno

Arrivati all'ultimo anno, nei licei artistico, classico, linguistico, musicale e delle scienze umane:

*Lo studente approfondirà lo **studio delle funzioni fondamentali dell'analisi** anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il **concetto di limite di una successione e di una funzione** e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.*

*Lo studente acquisirà i principali concetti del **calcolo infinitesimale** in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi).*

*Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già studiate, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici.*

*L'obiettivo principale sarà soprattutto quello di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. In particolare, si tratterà di conoscere l'idea generale di ottimizzazione e le sue applicazioni in numerosi ambiti.*

Per gli studenti dei licei scientifici, invece, le indicazioni per il quinto anno sono:

*Lo studente proseguirà lo studio delle funzioni fondamentali dell'analisi anche attraverso esempi tratti dalla fisica o da altre discipline. Acquisirà il concetto di limite di una successione e di una funzione e apprenderà a calcolare i limiti in casi semplici.*

*Lo studente acquisirà i principali concetti del calcolo infinitesimale in particolare la continuità, la derivabilità e l'integrabilità anche in relazione con le problematiche in cui sono nati (velocità istantanea in meccanica, tangente di una curva, calcolo di aree e volumi).*

*Non sarà richiesto un particolare addestramento alle tecniche del calcolo, che si limiterà alla capacità di derivare le funzioni già note, semplici prodotti, quozienti e composizioni di funzioni, le funzioni razionali e alla capacità di integrare funzioni polinomiali intere e altre funzioni elementari, nonché a determinare aree e volumi in casi semplici.*

*Altro importante tema di studio sarà il concetto di equazione differenziale, cosa si intenda con le sue soluzioni e le loro principali proprietà, nonché alcuni esempi importanti e significativi di equazioni differenziali, con particolare riguardo per l'equazione della dinamica di Newton.*

*Si tratterà soprattutto di comprendere il ruolo del calcolo infinitesimale in quanto strumento concettuale fondamentale nella descrizione e nella modellizzazione di fenomeni fisici o di altra natura. Inoltre, lo studente acquisirà familiarità con l'idea generale di ottimizzazione e con le sue applicazioni in numerosi ambiti.*

Nel corso dell'ultimo anno, il lavoro sulle funzioni sarà simile in tutti i licei: si approfondiranno gli studi sulle funzioni fondamentali, verranno introdotti i concetti di limite, derivata, continuità e integrabilità. In comune anche il fatto che non sarà necessario apprendere un eccessivo tecnicismo nel calcolo di derivate, prodotti, quozienti, composizioni e integrali di funzioni.

## 2.4 Analisi delle Linee Guida per istituti tecnici

Per gli istituti tecnici si possono invece analizzare le Linee Guida, un documento che non si pone come un prescrittivo “programma ministeriale”, ma

che vuole costituire un sostegno all'autonomia delle istituzioni scolastiche, per un'adeguata definizione del piano dell'offerta formativa e una efficace organizzazione del curriculum.

Cercando di individuare i passaggi interessanti ai fini di questa analisi, nel paragrafo dedicato all'insegnamento della matematica al primo biennio, si legge che tra le conoscenze che lo studente dovrà apprendere ci sono anche *“le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica), il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), [...] funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa)”*.

Tra le abilità da acquisire, invece, sono presenti il saper *“rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate. Studiare le funzioni  $f(x) = ax + b$  e  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ”* ed il saper *“risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica”*.

Nel corso del secondo biennio e quinto anno, invece, lo studente dovrà studiare:

- rappresentazione nel piano cartesiano della circonferenza e della parabola;
- funzioni di uso comune nelle scienze economiche e sociali e loro rappresentazione grafica;
- continuità e limite di una funzione;
- limiti notevoli di successioni e di funzioni;
- il numero  $e$ ;
- concetto di derivata e derivazione di una funzione;
- proprietà locali e globali delle funzioni;
- approssimazione locale di una funzione mediante polinomi;
- integrale indefinito e integrale definito;
- algoritmi per l'approssimazione degli zeri di una funzione.



Infine, i suggerimenti per le competenze da acquisire sono *“calcolare limiti di successioni e funzioni”, “analizzare funzioni continue e discontinue”, “calcolare derivate di funzioni”, “calcolare l’integrale di funzioni elementari”, “costruire modelli matematici per rappresentare fenomeni delle scienze economiche e sociali, anche utilizzando derivate e integrali”, “risolvere problemi di massimo e di minimo”, “utilizzare strumenti di analisi matematica e di ricerca operativa nello studio di fenomeni economici e nelle applicazioni alla realtà aziendale”.*

## 2.5 Un'analisi sui libri di testo per un liceo scientifico

Ripercorrendo la storia dello studente nella sua formazione, s’incontrano le funzioni in momenti diversi, con finalità, linguaggi e registri semiotici diversi. La storia dello studente non segue però la storia dello sviluppo del concetto. Talvolta è predominante la funzione come procedura, altre volte la si considera come oggetto. Questi aspetti richiedono un’analisi approfondita delle difficoltà di apprendimento degli studenti.

La presenza contemporanea di due o più accezioni del concetto di funzione, ciascuna delle quali può essere trattata in modo statico o dinamico e avvalendosi di strumenti diversi di rappresentazione, richiede un’attenta diagnosi delle pre-concezioni e delle competenze dei singoli studenti. Le difficoltà intrinseche del concetto di funzione, che si sono messe in evidenza anche con la breve antologia storica, giustificano l’attenzione della ricerca didattica internazionale in educazione matematica.

Come si mostra nel seguito e come ben noto dalla letteratura di ricerca, ci sono molti modi per presentare le funzioni, ciascuno con i suoi aspetti, positivi e negativi.

### 2.5.1 Libri per il biennio

Nei libri di testo utilizzati per il biennio della scuola secondaria di secondo grado, c’è predominanza nell’introdurre il concetto di funzione tramite quello di relazione tra due insiemi, spesso spiegato nel capitolo precedente o nella

parte iniziale dello stesso capitolo.

In particolare ho analizzato un libro di testo in uso prima della riforma del 2010, ed uno in uso dopo.

Analizzando il libro di testo “**Matematica con ALGEBRA 1** - Cariani, Fico, Pelicioli - edizioni Loescher” del 2006, i concetti sopra citati sono espressi in questo modo:

*“Dati due insiemi  $A$  e  $B$  non vuoti, si dice relazione tra  $A$  e  $B$  ogni sottoinsieme  $\mathcal{R}$  del prodotto cartesiano  $A \times B$ ”.*

Interessante può essere anche la definizione di dominio e codominio di una relazione:

*“Si chiama dominio di una relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme degli elementi  $a \in A$  che hanno almeno un'immagine in  $B$ .”*

*Si chiama codominio di una relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme degli elementi  $b \in B$  che sono immagini di almeno un elemento di  $A$ ”.*

Infine, nello stesso capitolo viene presentato il concetto di funzione:

*“Si chiama funzione o applicazione di un insieme  $A$  in un insieme  $B$ , non vuoti, una relazione che fa corrispondere a ogni elemento di  $A$  uno e un solo elemento di  $B$ . Scriviamo  $f : A \rightarrow B$  oppure  $A \xrightarrow{f} B$ ”.*

*“L'insieme  $A$  viene chiamato dominio della funzione; il sottoinsieme proprio o improprio di  $B$  formato dagli elementi di  $B$  che sono immagini di almeno un elemento di  $A$  si chiama codominio, o immagine, e si indica con  $f(A)$ ”.*

Considerando invece il libro successivo alla riforma “**Lineamenti.MATH BLU 1** - Doderò, Baroncini, Manfredi, Fragni - edizioni Ghisetti e Corvi” in uso nel 2011, le definizioni di relazione, dominio e codominio sono presentate in questo modo:

*“Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice relazione tra  $A$  e  $B$  qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$ ”.*

*“Si dice dominio di una relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme degli elementi di  $A$  che sono associati ad almeno un elemento di  $B$ .*

*Si dice codominio di una relazione  $\mathcal{R}$  tra due insiemi  $A$  e  $B$  l'insieme degli elementi di  $B$  che sono associati ad almeno un elemento di  $A$ ”.*

Il concetto di funzione e suo dominio e codominio, in questo caso, viene presentato nel capitolo successivo:

*“Una relazione tra un insieme  $A$  e un insieme  $B$  si dice applicazione o funzione da  $A$  a  $B$  se ogni elemento di  $A$  è in relazione con uno e un solo elemento di  $B$ ”.*

*“L'insieme  $A$  è detto dominio di  $f$ . Il sottoinsieme di  $B$  costituito dagli elementi che sono immagine di almeno un  $x \in A$  è chiamato codominio o insieme delle immagini di  $f$  e si indica con  $f(A)$ ”.*

Come si vede, in entrambi i casi, la definizione di funzione si riallaccia chiaramente alla tradizione bourbakista.

Infatti è espressa nei termini di relazione tra insiemi, che viene, in precedenza, caratterizzata come insieme di coppie ordinate del piano cartesiano.

Quindi, per compiere una riduzione al linguaggio insiemistico, servirebbe esprimere in tale linguaggio il concetto di coppia ordinata: ciò fatto, si potrebbe affermare di aver ricondotto il concetto di funzione a quello di insieme e, quindi, almeno in linea teorica, si potrebbe partire dagli insiemi per costruire il concetto di funzione.

Il fatto è che ricondurre il concetto di coppia ordinata a quello di insieme non è per nulla semplice e potrebbe andare al di là delle possibilità di comprensione per uno studente di scuola secondaria di secondo grado.

Forse i molti problemi noti nella letteratura specifica relativamente all'acquisizione del concetto di funzione potrebbero dipendere da questa possibile inopportunità didattica.

Tra l'altro la situazione relativa all'insegnamento/apprendimento del concetto di funzione è piuttosto paradossale: da una parte se ne riconosce l'importanza e l'aspetto fondante per la matematica; dall'altra, pur introducendo il concetto con il linguaggio insiemistico già nel primo anno di corso, con le funzioni si inizia a lavorare in modo sistematico solo nel quarto o quinto anno, con l'introduzione dell'analisi.

Comunque le definizioni sono tutto sommato simili, a parte alcune scelte linguistiche.

L'unica differenza è nella definizione di funzione: nel manuale del 2006 si parla di una "relazione che fa corrispondere", senza spiegare cosa si intenda per "corrispondere". Nel manuale del 2011 infatti si parla di una relazione dove ogni elemento di un insieme "è in relazione" con uno e un solo elemento di un altro insieme. In questo modo è più semplice e chiaro il collegamento con il prodotto cartesiano e le coppie ordinate utilizzati per definire le relazioni. Potrebbe però essere significativo il fatto che in questa maniera si perde il significato "dinamico" di applicazione, che si ritroverà negli anni successivi.

### 2.5.2 Libri per il triennio

Analizzando invece il libro di testo per il triennio della scuola secondaria di secondo grado "Nuovi elementi di matematica modulo A - Doderò, Baroncini, Manfredi - edizioni Ghisetti e Corvi" del 2006, nel terzo capitolo chiamato "Funzioni" si trova:

*"Dati due insiemi non vuoti  $A$  e  $B$  si dice applicazione o funzione da  $A$  a  $B$  una relazione tra i due insiemi che a ogni  $x \in A$  fa corrispondere uno e un solo  $y \in B$ ".*

Il fatto interessante è che in questo manuale per il triennio si utilizza il concetto di relazione ma non lo si definisce prima, come invece accadeva per il biennio.

Per quanto riguarda dominio e codominio nelle definizioni ci sono anche termini che oggi non si utilizzano più:

*"L'insieme  $A$  è detto dominio dell'applicazione e viene anche chiamato insieme di definizione o insieme di esistenza o campo di esistenza.*

*L'insieme degli elementi di  $B$  che hanno almeno una controimmagine in  $A$  è detto insieme delle immagini o codominio o insieme di variabilità dell'applicazione e si indica con  $f(A)$ . In generale è  $f(A) \subseteq B$ ".*

Vengono poi definite le "funzioni numeriche o funzioni matematiche", nel caso in cui gli insiemi  $A$  e  $B$  siano insiemi di numeri, solitamente  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $B \subseteq \mathbb{R}$ :

*"Una variabile reale  $y$  è funzione di una variabile reale  $x$  in un dominio  $D$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ), quando esiste una legge  $f$  che ad ogni  $x \in D$  faccia corrispondere uno e un solo valore di  $y$ , cioè  $y$  è funzione reale della variabile reale  $x$ ".*

Continua poi definendo le variabili indipendenti e dipendenti e l'equazione di una funzione, prima di definire:

*“Il dominio  $D$  della funzione, se non indicato, è l'insieme dei valori reali che possono attribuirsi alla variabile indipendente  $x$  affinché esista il corrispondente valore reale  $y$ , e prende anche il nome di insieme di esistenza o di definizione della funzione.*

*L'insieme  $C$  dei valori reali assunti dalla variabile dipendente  $y$  costituisce l'insieme di variabilità della funzione stessa, o codominio della funzione”.*

Il capitolo prosegue poi con la spiegazione del grafico di una funzione, con il quale si riprende il concetto di funzione come sottoinsieme di un prodotto cartesiano.

Nel libro di testo del 2013 **“Lineamenti.MATH BLU 3** - Baroncini, Manfredi, Fragni - edizioni Ghisetti e Corvi” la definizione di funzione non cambia da quella sul manuale appena analizzato.

Dalle definizioni di dominio e codominio però, sono stati rimossi i termini che di fatto non si utilizzano più, come ad esempio “insieme di definizione”, “insieme di esistenza” per il dominio o “insieme di variabilità” per il codominio.

Anche in questo libro di testo poi si susseguono le spiegazioni di variabili dipendenti e indipendenti, espressione analitica, funzione matematica con rispettivi dominio e codominio, grafico di funzione e altre proprietà.

Così, accanto quindi ad una concezione fortemente strutturale scoperta soprattutto al biennio, si ritrova, sia a livello di testi che a livello di prassi didattica, una concezione radicata nella storia del concetto di funzione e che trova nella formulazione di Eulero e di Dirichelet i suoi rappresentanti più significativi.

Tale concezione è riconoscibile nelle definizioni dalla presenza di termini quali “legge”, proprietà, criterio o simili, intesi tutti come legame tra variabili. E' inteso che il concetto di variabile fa riferimento ad un insieme di variabilità per cui questo legame di fatto risulta essere tra elementi di due insiemi.

E' interessante osservare come questa connotazione legata al “legame” tra variabili sia in generale molto più presente al triennio che al biennio, quando cioè il piano cartesiano assume un ruolo predominante rispetto al resto, favorendo altresì quell'identificazione delle proprietà della funzione con quelle

del suo grafico, di cui il programma di analisi del quinto anno delle superiori ne è il più chiaro esempio. Le problematiche connesse a questi due aspetti fanno esplicito riferimento al rapporto sintassi-semantica relativo al concetto di funzione.

I vari concetti di funzione si possono vedere messi in opera anche in altri aspetti coinvolgenti la prassi didattica. I diversi modi di indicare (quando esiste) la proposizione che individua una funzione fanno riferimento a rappresentazioni, interne ed esterne, e ad aspetti diversi, come differenti sono le informazioni implicite che si pensa di ricavare dalle funzioni stesse.

Vediamo brevemente le scritture più comunemente usate:

(a)  $f(x) = \dots$

(b)  $y = \dots$

(c)  $x \mapsto \dots$  (più raro, dove non è richiesto un particolare formalismo)

Possiamo riferire la terza forma ad una visione chiaramente dinamica del concetto di funzione, mentre la prima fa pensare alla funzione come “macchinetta” che, dato un valore di  $x$ , ne fornisce il risultato. Questa forma, utilizzata soprattutto nei problemi in cui si cercano legami o variazioni tra grandezze, non esprime esplicitamente una seconda variabile e quindi fa allontanare in un certo senso dall’idea di funzione come insieme di coppie ordinate, idea invece pesantemente presente in (b) in cui si passa ad una visione statica: la funzione è data in atto (il suo grafico ne è la migliore espressione), laddove in (c) e in (a) è data in potenza. Inoltre questo non fa altro che identificare la funzione con la “legge” che la determina, con tutti i rischi ad esso connessi.

E’ poi abbastanza discutibile la quasi completa identificazione tacita che viene fatta tra le funzioni e le funzioni con espressione analitica. Lo studente di scuola superiore non ha quasi mai occasione di incontrare funzioni che non abbiano espressione analitica e quindi di riflettere sulle richieste che si fanno talora su tutte le funzioni.

Oggi la definizione di tipo bourbakista si trova sui testi del biennio delle superiori e quindi è il primo approccio esplicito degli studenti col concetto, procedendo in senso inverso alla evoluzione storica della nozione. Poi, nel triennio, in argomenti di Analisi matematica, le funzioni sono oggetti matematici diversi (corrispondenze funzionali), senza che mutino di nome. Talora sono presenti anche aspetti geometrici legati alla rappresentazione delle funzioni e strettamente connessi con l’idea di curva. Infine nella prassi i due

aspetti di grafico e curva vengono spesso confusi.

Da tutte queste considerazioni è chiara la complessità e la criticità della nozione di funzione. L'apprendimento a-critico di un solo approccio rischia di banalizzare e nascondere la problematica e rischia di creare una lunga serie di dubbi e problemi nello studente, che quindi si trova destabilizzato.





# Capitolo 3

## Spazi di funzioni

### 3.1 Introduzione

Come si è visto finora, la definizione di funzione Bourbakista è quella che maggiormente viene insegnata oggi nei corsi di algebra e nelle scuole. Questa definizione algebrica è ormai definitiva, non lascia spazio ad equivoci e le differenze con le altre definizioni sono solo di tipo formale.

Negli ultimi anni del XIX secolo la definizione di funzione in termini insiemistici comincia però a rivelarsi insoddisfacente rispetto ad alcuni recenti sviluppi dell'analisi. Ed ecco che si sente il bisogno di considerare non più una funzione come un "insieme di punti" che si corrispondono tra loro, ma come essa stessa "punto" di nuovi spazi: nasce l'analisi funzionale.

Questa "nuova" disciplina acquista una precisa identità nel primo decennio del XX secolo. Le sue radici sono rintracciabili negli ultimi anni del XIX secolo, in particolare nei lavori di Salvatore Pincherle (1853-1936) e Vito Volterra (1860-1940) in Italia. Essa differisce dall'analisi classica del XIX sec. in quanto tratta di funzioni nelle quali la variabile indipendente o la variabile dipendente, o entrambe, non sono numeri reali o complessi, ma elementi di una classe di funzioni "ordinarie" o di un insieme astratto.

Infatti l'analisi funzionale non si limita a trattare una funzione per volta, o un numero finito di funzioni per volta, ma c'è interesse nel considerare una famiglia infinita di funzioni e nell'organizzare in qualche modo, in maniera da poter studiare le proprietà di questa famiglia organizzata, ciò che prende il nome di "spazio funzionale". L'analisi funzionale non utilizza più le funzioni a variabili reali come corrispondenza punto a punto ma come oggetti che vengono osservati globalmente. Si considerano nuovi spazi i cui elementi

sono funzioni.

Scrivono Kolmogorov e Fomin introducendo le funzioni “generalizzate”:

*In analisi si è portati spesso a considerare il termine “funzione” con un grado di generalità che varia secondo questioni studiate... Vi sono casi in cui la nozione classica di funzione, anche se intesa nel senso più generale, cioè come legge arbitraria che ad ogni valore di  $x$  appartenente al dominio di definizione della funzione fa corrispondere un numero  $y = f(x)$ , si rivela insufficiente.*

Un nuovo e decisivo impulso all’analisi funzionale venne a partire dal 1936 grazie alle ricerche di un fisico matematico russo S. L. Sobolev (1908-1989) sui fondamenti di una nuova teoria, detta delle distribuzioni, che generalizzava il concetto di funzione e che era connessa con la meccanica quantistica.

Sobolev, introdusse una nuova classe di spazi che portano il suo nome, costituiti da funzioni con potenza  $p$ -esima sommabile, che sono dotati di un tipo particolare di derivata debole, che appartengono alla stessa classe di funzioni.

Furono usati (e lo sono tuttora) molti simboli differenti ( $W^{m,p}$ ,  $P^{m,p}$ ,  $L_m^p$ , etc.) per denotare questi spazi e le loro varianti. Inoltre, prima di essere comunemente associati al nome di Sobolev, furono talvolta chiamati con altri nomi, come ad esempio gli “spazi di Beppo Levi”.

Infatti questi spazi, in particolare per il caso  $p = 2$ , erano già conosciuti fin dall’inizio del XX secolo, dai matematici italiani Beppo Levi e Guido Fubini. Furono i matematici francesi a proporre il nome di “spazi di Beppo Levi”, ma questa scelta sfortunatamente non piaceva proprio a Beppo, ancora in vita. Così il nome fu cambiato e la scelta ricadde sul nome di “spazi di Sobolev”, tuttora universalmente accettato.

Sobolev spese la maggior parte della sua vita studiando le equazioni differenziali, in particolare le equazioni delle onde. L’idea di generalizzare e ampliare il concetto di funzione gli è servito come strumento per questi suoi studi. Infatti per risolvere più facilmente alcuni problemi, in cui si era imbattuto, gli strumenti che aveva a disposizione non sembravano adeguati. Ecco perchè sembrava necessario introdurre questo nuovo strumento. Sobolev quindi ha il merito di aver utilizzato per primo in modo sistematico il concetto di spazio funzionale, per agevolare lo studio di certi problemi legati a equazioni differenziali, e di aver contribuito allo sviluppo della teoria delle ditribuzioni.

Nel 1945 fu però il matematico francese L. Schwartz, basandosi sulle ricerche di Sobolev e sulla teoria degli spazi topologici lineari localmente convessi,

a costruire la vera e propria teoria delle distribuzioni.

## 3.2 Richiami sugli spazi $L^p$

Ricordiamo brevemente alcune definizioni.

**Definizione 3.2.1.** Sia  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p < \infty$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto; poniamo

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ misurabile e } \int_{\Omega} |f|^p < +\infty \right\}$$

**Definizione 3.2.2.** Possiamo definire la seminorma per  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ :

$$\|f\|_p = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}.$$

Non è una norma, infatti se  $\|f\|_p = 0$  allora  $\int_{\Omega} |f(x)|^p = 0$  e quindi si ottiene  $f = 0$  q.o., ma non necessariamente  $f \equiv 0$ .

Per ottenere uno spazio normato introduciamo una relazione d'equivalenza:

**Definizione 3.2.3.** Siano  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ . Con la relazione d'equivalenza:

$$f \sim g \iff f = g \quad \text{q.o.}$$

si può definire

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p / \sim.$$

**Osservazione 3.2.1.** Si può osservare che in questo modo si perde del tutto la possibilità di dare un senso a  $f(x)$  per un dato  $x \in I$ . Quindi si ha una valutazione globale della funzione, perdendo quella puntuale.

**Osservazione 3.2.2.** Seguono le seguenti osservazioni:

- $\|f\|_p$  è una norma su  $L^p(\Omega)$ ;
- se  $p = 2$ ,  $f, g \in L^2(\Omega)$  allora

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

è un prodotto scalare.

Nel caso  $f = g$  si ottiene

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} f(x)^2 dx = \|f\|_2^2;$$

- se  $p \neq 2$ ,  $f, g \in L^p(\Omega)$  allora  $\int_{\Omega} f(x)g(x)dx$  non è in generale definito.

**Definizione 3.2.4.** Poniamo

$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile ed esiste una costante } C \text{ tale che } |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$

e

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{Inf}\{C; |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}.$$

Inoltre  $\|\cdot\|_\infty$  è una norma.

**Notazione.** Sia  $1 \leq p \leq \infty$ ; denotiamo con  $p'$  l'esponente coniugato, cioè,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  (intendendo  $p' = +\infty$  se  $p = 1$ ).

**Teorema 3.2.1.** (Disuguaglianza di Hölder) Supponiamo che  $f \in L^p$  e  $g \in L^{p'}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Allora  $fg \in L^1$  e

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}. \quad (3.2.1)$$

**Definizione 3.2.5.** Si dice che  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto, se  $\forall K \subseteq \Omega$  compatto, allora  $f \in L^1(K)$ .

### 3.3 Spazi di Sobolev in una dimensione

Sia  $I$  un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a, b$  e sia  $C_0^\infty(I)$  lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili con continuità e con supporto contenuto in  $I$ .

**Definizione 3.3.1.** Data  $u \in L_{loc}^1(I)$  diremo che  $g \in L_{loc}^1(I)$  è la derivata debole di  $u$  se

$$\int_a^b u\varphi' dx = - \int_a^b g\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

L'unicità di  $g$  è assicurata grazie al seguente teorema:

**Teorema 3.3.1.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$  e  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$  tale che

$$\int fg = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega).$$

Allora  $f = 0$  q.o. in  $\Omega$ .

Osserviamo che la derivata quasi ovunque di una funzione non sempre coincide con la derivata debole.

**Esempio 3.3.1.** Sia  $I = (0, 2)$  e definiamo

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

La funzione  $u$  è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Proviamo che  $v$  è anche la derivata debole di  $u$ , cioè

$$\int_0^2 u\varphi' dt = - \int_0^2 v\varphi dt,$$

per ogni  $\varphi \in C_0^\infty(I)$ . Infatti

$$\int_0^2 u\varphi' dt = \int_0^1 t\varphi' dt + \int_1^2 \varphi' dt = [t\varphi]_0^1 - \int_0^1 \varphi dt + [\varphi]_1^2 = - \int_0^1 \varphi dt = - \int_0^2 v\varphi dt.$$

Consideriamo ora la funzione

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

La funzione  $u$  è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è ancora data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

In questo caso si vede che  $v$  non è la derivata debole di  $u$ , infatti per una generica  $\varphi \in C_0^\infty(I)$ , si ha

$$\int_0^2 u\varphi' dt = \int_0^1 t\varphi' dt + 2 \int_1^2 \varphi' dt = - \int_0^1 \varphi dt - \varphi(1) \neq - \int_0^2 v\varphi dt.$$

Sia ora  $I = ]a, b[$  un intervallo limitato o non e sia  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Definizione 3.3.2.** Lo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(I)$  è definito da

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tale che } \int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \right\}.$$

Per  $u \in W^{1,p}(I)$  denotiamo con  $u'$  la funzione  $g$ .

**Osservazione 3.3.1.** Nella definizione di  $W^{1,p}$ ,  $\varphi$  è una funzione test.

**Definizione 3.3.3.** Dato un qualsiasi insieme  $I \in \mathbb{R}$  ed una funzione  $f : I \rightarrow C$ , definiamo supporto di  $f$ , e denotiamo con  $\text{supp}(f)$ , la chiusura del sottoinsieme di  $I$  in cui  $f$  è diversa da zero.

Lo spazio delle funzioni test (dette anche funzioni di prova) è lo spazio

$$D(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \text{supp}(\varphi) \text{ è limitato} \}.$$

**Osservazione 3.3.2.** Se  $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$  e se  $u' \in L^p$  (qui  $u'$  è derivata usuale di  $u$ ) allora  $u \in W^{1,p}(I)$ . Inoltre la derivata usuale di  $u$  coincide con la derivata di  $u$  nel senso  $W^{1,p}$ .

In particolare, se  $I$  è limitato, allora

$$C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

**Notazione.** Lo spazio  $W^{1,p}(I)$  è uno spazio vettoriale normato con la seguente norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p.$$

Questa evoluzione del concetto di funzione, come detto nell'introduzione, vede la funzione non più come corrispondenza "punto a punto" ma come un oggetto visto nella sua globalità.

Ma allora cos'è? Si può ancora parlare di funzione?

I seguenti teoremi di regolarità mostrano che in qualche modo gli elementi di questi spazi non sono poi tanto diversi dalle funzioni intese nel senso classico. Si vedrà che anche le derivate di queste mantengono alcune proprietà delle derivate classiche.

**Osservazione 3.3.3.** Se  $1 \leq p < +\infty$ ,  $W^{1,p}(I)$  è uno spazio di Banach. Sia  $u_n$  una successione di Cauchy in  $W^{1,p}(I)$  allora  $u_n$  e  $u'_n$  sono di Cauchy in  $L^p$  e quindi convergono rispettivamente a  $u$  e a  $v$ . Si vede facilmente che  $u' = v$  infatti:

$$\int_I v\varphi dx = \lim_k \int_I u'_k \varphi dx = - \lim_k \int_I u_k \varphi' dx = \int_I u \varphi' dx.$$

**Osservazione 3.3.4.** Per  $p = 2$ ,  $W^{1,2}(I)$  è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v)_{1,2} = (u, v)_2 + (u', v')_2 = \int_a^b u'v' dx + \int_a^b uv dx.$$

Le funzioni di  $W^{1,p}$  sono “grosso modo” delle primitive di funzioni di  $L^p$ . Più precisamente si ha il

**Teorema 3.3.2.** Sia  $[u] \in W^{1,p}$ ; allora esiste una funzione  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tale che

$$[u] = [\tilde{u}].$$

Inoltre vale:

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

**Osservazione 3.3.5.** Notiamo che, come visto nell’osservazione 3.2.1, non è possibile assegnare un valore a  $u'(t)$ , quindi la scrittura ha un significato formale.

**Osservazione 3.3.6.** Dal momento che le funzioni in  $W^{1,p}(I)$  che sono uguali quasi ovunque in  $I$  sono identificate grazie alla relazione di equivalenza, il teorema precedente afferma che ogni funzione  $u \in W^{1,p}(I)$  ammette un unico rappresentante continuo cioè esiste una funzione continua che appartiene alla stessa classe di equivalenza di  $u$ . In seguito si fa riferimento al rappresentante continuo di  $u$ , che sarà denotato ancora con  $u$ . Tuttavia va osservato che dire che esiste un rappresentante continuo è diverso dall’affermare che  $u$  è quasi ovunque continua.

**Osservazione 3.3.7.** Osserviamo inoltre che se  $u \in W^{1,p}$  e se  $u' \in C(\bar{I})$ , allora  $u \in C^1(\bar{I})$  (più precisamente  $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ , ma come già detto, non si distinguerà tra  $u$  e  $\tilde{u}$ .)

Alla dimostrazione del teorema 3.3.2 si premettono due lemmi.

**Lemma 3.3.1.** Sia  $f \in L^1_{loc}(I)$  tale che

$$\int_I f \varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_0(I). \quad (3.3.1)$$

Allora esiste una costante  $C$  tale che  $f = C$  q.o.



*Dimostrazione.* Fissiamo una funzione  $\psi \in C_0(I)$  tale che  $\int \psi = 1$ . Per ogni funzione  $w \in C_0(I)$  esiste  $\varphi \in C_0^1(I)$  tale che

$$\varphi' = w - \left( \int_I w \right) \psi.$$

Infatti la funzione  $h = w - \left( \int_I w \right) \psi$  è continua, a supporto compatto contenuto in  $I$  e, poiché  $\int_I h = 0$ ,  $h$  ammette una primitiva (unica) a supporto compatto. Si deduce da 3.3.1 che

$$\int_I f \left[ w - \left( \int_I w \right) \psi \right] = 0 \quad \forall w \in C_0(I)$$

cioè

$$\int_I \left[ f - \left( \int_I f \psi \right) \right] w = 0 \quad \forall w \in C_0(I)$$

e di conseguenza (teorema 3.3.1),  $f - \left( \int_I f \psi \right) = 0$  q.o., cioè  $f = C$  q.o. con

$$C = \int_I f \psi.$$

□

**Lemma 3.3.2.** Sia  $g \in L_{loc}^1(I)$ , per  $y_0$  fissato in  $I$  poniamo

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t) dt \quad x \in I$$

Allora  $v \in C(I)$  e

$$\int_I v \varphi' = - \int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

*Dimostrazione.* Si ha:

$$\begin{aligned} \int_I v \varphi' &= \int_I \left[ \int_{y_0}^x g(t) dt \right] \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t) \varphi'(x) dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t) \varphi'(x) dt. \end{aligned}$$

Applicando il teorema di Fubini si deduce che

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= - \int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx \\ &= - \int_I g(t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

□

*Dimostrazione.* (**Teorema 3.3.2**) Fissiamo  $y_0 \in I$  e poniamo  $\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$ . In base al lemma 3.3.2 si ha

$$\int_I \bar{u}\varphi' = - \int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Dunque  $\int (u - \bar{u})\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(I)$ . Dal lemma 3.3.1 segue allora che  $u - \bar{u} = C$  q.o. La funzione  $u(x) = \bar{u}(x) + C$  ha le proprietà desiderate. □

**Osservazione 3.3.8.** Il lemma 3.3.2 mostra che la primitiva  $v$  di una funzione  $g$  di  $L^p$  appartiene a  $W^{1,p}$  se  $v \in L^p$ , e ciò si verifica sempre allorché  $I$  è limitato.

**Osservazione 3.3.9.** Si ha dunque che una funzione con derivata debole nulla coincide quasi ovunque con una funzione costante.

## 3.4 Funzioni assolutamente continue

**Definizione 3.4.1.** Si dice che una funzione  $u$  è assolutamente continua se e solo se:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni successione finita di intervalli disgiunti  $]a_k, b_k[$  di  $I$  tali che  $\sum |b_k - a_k| < \delta$ , allora  $\sum |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon$ .

**Teorema 3.4.1.** Si può dimostrare che se una funzione  $u : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è assolutamente continua, allora esiste  $v \in L^1(I)$  tale che per ogni  $x, y \in I$ , si ha

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t) dt.$$

In altre parole  $u$  è la funzione integrale di una funzione sommabile  $v$ .

Una funzione assolutamente continua è quindi derivabile nel senso debole e la sua derivata debole è funzione sommabile. Segue per il teorema precedente che  $W^{1,1}(I)$  coincide con l'insieme delle funzioni assolutamente continue.

Occorre però prestare attenzione nel considerare queste estensioni del concetto di funzioni e di derivata. Il seguente esempio mette in luce ciò:

**Esempio 3.4.1.** E' interessante dare un esempio di una funzione monotona continua per cui è verificata la disuguaglianza forte

$$\int_a^x u'(t) dt < u(x) - u(a),$$

per tutti gli  $x > a$ . Consideriamo quindi un insieme di Cantor sull'intervallo  $[0, 1]$  e definiamo dapprima  $u$  sugli intervalli contigui, ponendo

$$u(t) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-t}$$

sul  $k$ -esimo intervallo di rango  $n$  (inclusi i suoi estremi). Quindi,

$$\begin{aligned} u(t) &= 1/2 & \text{per } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ u(t) &= 1/4 & \text{per } 1/9 \leq t \leq 2/9, \\ u(t) &= 3/4 & \text{per } 7/9 \leq t \leq 8/9 \end{aligned}$$

e via di seguito. In tal modo  $u$  è definita quasi ovunque sull'intervallo  $[0, 1]$ , tranne sui punti non appartenenti né agli intervalli contigui né all'insieme dei loro estremi. Definiamo ora  $u$  nei punti rimanenti come segue. Sia  $t^*$  uno di questi punti e  $\{t_n\}$  una successione crescente di punti (gli estremi degli intervalli contigui) convergente a  $t^*$ . Allora esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n); \tag{3.4.1}$$

analogamente, esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u'(t_n) \tag{3.4.2}$$

se  $\{t'_n\}$  è una successione decrescente di punti convergente a  $t^*$ ; i limiti 3.4.1 e 3.4.2 sono uguali. Prendendo per  $u(t^*)$  questo valore comune, otterremo una funzione monotona definita e continua su tutto l'intervallo  $[0, 1]$ , detta "scala di Cantor". La sua derivata è, evidentemente, nulla in ciascun punto di ogni intervallo contiguo, cioè quasi ovunque. Quindi per questa funzione abbiamo

$$0 = \int_a^x u'(t)dt < u(x) - u(0) = u(x)$$

per ogni  $x$  appartenente all'intervallo semiaperto  $0 < x \leq 1$ .

In conclusione, la funzione di Cantor è continua ovunque, derivabile quasi dappertutto con derivata nulla, però non è assolutamente continua, come si sarebbe potuto pensare.

**Teorema 3.4.2.** Esiste una costante  $C$  (dipendente solo da  $|I| \leq \infty$ ) tale che:

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

In altri termini  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$  con iniezione continua per ogni  $1 \leq p \leq \infty$ . Inoltre se  $I$  è limitato si ha:

- l'iniezione  $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$  è compatta per  $1 < p \leq \infty$ ;
- l'iniezione  $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$  è compatta per  $1 \leq q < \infty$ .

Per le funzioni  $u \in W^{1,p}(I)$  le derivate deboli hanno alcune proprietà analoghe alle derivate classiche:

**Teorema 3.4.3.** Siano  $u, v \in W^{1,p}(I)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Allora  $uv \in W^{1,p}(I)$  e

$$(uv)' = u'v + uv'. \quad (3.4.3)$$

Inoltre si ha la formula di integrazioni e per parti:

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I}. \quad (3.4.4)$$

*Dimostrazione.* Dal teorema 3.4.2 segue che  $u \in L^\infty$  e dunque che  $uv \in L^p$ . Cominciamo con il caso  $1 \leq p < \infty$ ; siano  $(u_n)$  e  $(v_n)$  due successioni di  $C_0^1(\mathbb{R})$  tali che  $u_{n|I} \rightarrow u$  e  $v_{n|I} \rightarrow v$  in  $W^{1,p}(I)$ . Allora  $u_n \rightarrow u$  e  $v_n \rightarrow v$  in  $L^\infty(I)$  (teorema 3.4.2); di conseguenza  $u_n v_n \rightarrow uv$  in  $L^\infty(I)$  e in  $L^p(I)$ . Si ha

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \rightarrow u'v + uv' \quad \text{in } L^p(I).$$

Ne segue che  $uv \in W^{1,p}(I)$  e che  $(uv)' = u'v + uv'$  (procedendo come nell'osservazione 3.3.3). Infine si ottiene 3.4.4, integrando 3.4.3.

Supponiamo ora che  $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ . Allora

$$uv \in L^\infty \quad \text{e} \quad u'v + uv' \in L^\infty(I).$$

Resta da verificare che

$$\int_I uv\varphi' = - \int_I (u'v + uv')\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

A tale scopo fissiamo un intervallo aperto limitato  $J \subset I$  tale che  $\text{supp}\varphi \subset J$ . Allora  $u, v \in W^{1,p}(J)$  per  $p < \infty$  e, in base a quanto precede, si sa che

$$\int_J uv\varphi' = - \int_J (u'v + uv')\varphi$$

ossia

$$\int_I uv\varphi' = - \int_I (u'v + uv')\varphi$$

□

**Teorema 3.4.4.** Sia  $G \in C^1(\mathbb{R})$  tale che  $G(0) = 0$  e sia  $u \in W^{1,p}(I)$ . Allora

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad \text{e} \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

*Dimostrazione.* Sia  $M = \|u\|_{L^\infty}$ . Poiché  $G(0) = 0$ , esiste una costante  $C$  tale che  $|G(s)| \leq C|s|$  per  $s \in [-M, M]$ . Dunque  $G \circ u \in L^p(I)$  in quanto  $|G \circ u| \leq C|u|$ . Analogamente  $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$ . Rimane da verificare che

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = - \int_I (G' \circ u)u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I). \quad (3.4.5)$$

Supponiamo dapprima  $1 \leq p < \infty$ . Allora esiste una successione  $(u_n)$  di  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $u_n \rightarrow u$  in  $W^{1,p}(I)$  e in  $L^\infty(I)$ . Dunque  $G \circ u_n \rightarrow G \circ u$  in  $L^\infty(I)$  e  $(G' \circ u_n)u'_n \rightarrow (G' \circ u)u'$  in  $L^p(I)$ . Ora si ha

$$\int (G \circ u_n)\varphi' = - \int (G' \circ u_n)u'_n\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

Da cui si deduce la 3.4.5.

Per il caso  $p = \infty$ , si procede come nel teorema 3.4.2.  $\square$

### 3.5 Gli spazi di Sobolev $W^{m,p}(I)$

**Definizione 3.5.1.** Siano dati un intero  $m \geq 2$  ed un numero reale  $p$  tale che  $1 \leq p \leq \infty$ . Definiamo per ricorrenza lo spazio

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Si verifica facilmente che  $u \in W^{m,p}(I)$  se e solo se esistono  $m$  funzioni  $g_1, g_2, \dots, g_m \in L^p(I)$  tali che

$$\int u D^j \varphi = (-1)^j \int g_j \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m,$$

dove  $D^j \varphi$  indica la derivata di ordine  $j$  di  $\varphi$ . Dal momento che  $u \in W^{m,p}(I)$ , si possono dunque considerare le derivate successive  $u' = g_1$ ,  $(u')' = g_2$ , fino all'ordine  $m$ ; indichiamole con  $Du, D^2u, \dots, D^m u$ .

Lo spazio  $W^{m,p}$  è munito della norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

**Osservazione 3.5.1.** Si possono estendere agli spazi  $W^{m,p}$  le proprietà dimostrate per  $W^{1,p}$ ; per esempio  $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$  con iniezione continua.

### 3.6 Lo spazio $W_0^{1,p}(I)$

**Definizione 3.6.1.** Dato  $1 \leq p < \infty$ , indichiamo con  $W_0^{1,p}(I)$  la chiusura di  $C_0^1(I)$  in  $W^{1,p}(I)$ .

Lo spazio  $W_0^{1,p}$  è munito della norma indotta da  $W^{1,p}$ .

**Teorema 3.6.1.** Sia  $u \in W^{1,p}(I)$ , allora  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se e solo se  $u = 0$  su  $\partial I$ .

**Osservazione 3.6.1.** Il teorema 3.6.1 giustifica il ruolo notevole giocato dallo spazio  $W_0^{1,p}$ . Infatti le equazioni differenziali (o alle derivate parziali) sono usualmente accoppiate con delle condizioni al contorno, vale a dire che il valore di  $u$  è assegnato su  $\partial I$ .

### 3.7 Esempio: l'equazione del calore

Per concludere questo percorso sull'evoluzione del concetto di funzione, mostriamo ora un esempio in cui la soluzione di un problema è una funzione che apparentemente appartiene ad uno spazio astratto, ma che a posteriori si rivelerà una funzione di tipo tradizionale. Cioè si cerca la soluzione in un ambiente più grande, se ne dimostra l'esistenza e si dimostra che in realtà si tratta di una funzione regolare.

**Notazione.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto di frontiera  $\Gamma$ . Poniamo

$$Q = \Omega \times ]0, +\infty[, \quad \Sigma = \Gamma \times ]0, +\infty[;$$

$\Sigma$  è la frontiera laterale del cilindro  $Q$ .

**Esempio 3.7.1.** Consideriamo il seguente problema. Determinare una funzione  $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{su } Q \\ (2) \quad & u = 0 \quad \text{su } \Sigma \\ (3) \quad & u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{su } \Omega \end{aligned}$$

ove

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

indica il Laplaciano rispetto alle variabili spaziali,  $t$  è la variabile temporale e  $u_0(x)$  è un'assegnata funzione.

L'equazione (1) prende il nome di equazione del calore in quanto essa modella la distribuzione della temperatura  $u$  nel dominio  $\Omega$  all'istante  $t$ .

La condizione (2) esprime il fatto che si mantiene il bordo di  $\Gamma$  di  $\Omega$  a temperatura nulla.

L'equazione (3) è la condizione iniziale o dato di Cauchy.

Risolveremo il problema (1), (2), (3) considerando  $u(x, t)$  come una funzione definita su  $[0, +\infty[$  a valori in uno spazio  $H$ , ove  $H$  è uno spazio di funzioni che dipendono solo da  $x$ ; ad esempio  $H = L^2(\Omega)$ , oppure  $H = H_0^1(\Omega)$ , ecc... Così con  $u(t)$  indicheremo un elemento di  $H$ , cioè la funzione  $x \rightarrow u(x, t)$  con  $t$  fissato.

I teoremi di immersione che manifestano la regolarità di tipo tradizionale delle funzioni negli spazi di Sobolev, permettono di concludere che la soluzione trovata con metodi di analisi funzionale in uno spazio astratto, in realtà è una funzione  $C^\infty$ .

**Teorema 3.7.1.** Supponiamo che  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Allora esiste un'unica funzione  $u(x, t)$  verificante (1), (2), (3) e

$$u \in C([0, \infty[; L^2(\Omega)) \cap C(]0, \infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$u \in C^1(]0, \infty[; L^2(\Omega)).$$



Inoltre

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [\varepsilon, \infty[) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

**Teorema 3.7.2.** Valgono tre considerazioni:

a) supponiamo che  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ , allora la soluzione di (1), (2), (3) verifica

$$u \in C([0, \infty[; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^2(\Omega))$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; L^2(\Omega)).$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} |\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 &= \\ = \frac{1}{2} |\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

b) Supponiamo che  $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , allora si ha

$$u \in C([0, \infty[; H^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^3(\Omega))$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, \infty; H^1(\Omega)).$$

c) Supponiamo che  $u_0 \in H^k(\Omega) \forall k$  e verifichi le relazioni di compatibilità

$$u_0 = \Delta u_0 = \dots \Delta^j u_0 = \dots = 0 \quad \text{su } \Gamma \quad \forall j \text{ intero,}$$

allora  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, \infty[)$ .

Si riesce quindi a trovare la soluzione in un ambiente astratto e poi a dimostrare che quella soluzione in effetti è, o meglio, ha un rappresentante che appartiene alla classe  $C^\infty$ .

Per concludere si può dire di aver un po' spiccato il volo rispetto alle definizioni bourbakiste ed euleriane di funzione che oggi ci insegnano nelle scuole. Si è cercato di mostrare alcuni sviluppi ed applicazioni che hanno visto il concetto di funzione evolversi, da "applicazione che associa punti" a "punto" di insiemi più grandi e astratti.

Infine con l'ultimo esempio si è voluto evidenziare che talvolta, in alcune applicazioni, nel finale si ritorna a una situazione in cui le funzioni non sono altro che quelle di tipo tradizionale, descritte nei capitoli precedenti.

# Bibliografia

- [Boyer, 1976] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori Editore, 1976.
- [Bottazzini, 1981] Umberto Bottazzini, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri Editore, 1981.
- [Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli, 1992] U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica: aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilità, logica*, Sansoni Editore, 1992.
- [Kolmogorov, Fomin, 1980] Andrej N. Kolmogorov, Sergej V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir Edizioni, 1980.
- [Cariani, Fico, Pelicioli, 2006] Gabriella Cariani, Mariapia Fico, Ileana Pelicioli, *Matematica con ALGEBRA 1*, Loescher Editore, 2006.
- [Dodero, Baroncini, Manfredi, Fragni, 2011] Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.MATH BLU 1*, Ghisetti e Corvi Editore, 2011.
- [Dodero, Baroncini, Manfredi, 2006] , Nella Dodero, Paolo Baroncini, Roberto Manfredi *Nuovi elementi di matematica*, Ghisetti e Corvi Editore, 2006.
- [Baroncini, Manfredi, Fragni, 2013] Paolo Baroncini, Roberto Manfredi, Ilaria Fragni, *Lineamenti.MATH BLU 3*, Ghisetti e Corvi Editore, 2013.
- [Adams, 1975] Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
- [Brezis, 1995] Haïm Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore, 1995.

- [Citti, 2013] Giovanna Citti, *Istituzioni di analisi superiore*, note del corso di Istituzioni di analisi superiore, Università di Bologna, A.A. 2012/13.

# Ringraziamenti

A conclusione di questo percorso vorrei innanzitutto ringraziare il professor Paolo Negrini, che in questi mesi si è sempre pazientemente reso disponibile ad aiutarmi con la stesura della tesi.

Questa è solo la prova finale di cinque anni che sono stati a tratti difficili ma anche soddisfacenti. Cinque lunghi anni di lezioni, studio ed esami, di giornate in dipartimento o in casa ad un tavolo. Mi hanno insegnato che nessuno è perfetto, che se hai un obiettivo chiaro, allora puoi raggiungerlo, che non ci si deve fermare di fronte alle difficoltà, che se cadi una, due, tre volte devi comunque rialzarti e riprovare e che nella vita ci sono cose ben più importanti di una delusione professionale.

In questi ultimi due anni di Magistrale più di tutti voglio ringraziare Richi, che ha sopportato scleri, pianti (inutili), serate di studio. Che ha gioito e festeggiato con me per i bei risultati ottenuti non lasciandomi mai sola. Che da tempo crede in me e non smette mai di dirmelo.

Ringrazio la mia splendida famiglia, mamma, babbo, Marco, Ila (e adesso anche il neocognato Ale). Come nei primi tre anni (e per tutta la vita passata), ci sono sempre stati. Mi hanno sempre capita ed aiutata nelle difficoltà; grazie al loro esempio imparo tutti i giorni il significato di famiglia.

Ringrazio la nonna Anna perché è una presenza fissa nella mia vita. Di sicuro le sue mille preghiere e fazzolettini benedetti mi hanno aiutato a passare tutti gli esami (e non solo). Ringrazio anche il nonno Andrea, il nonno Carlo e la nonna Gè, che da lassù di sicuro mi hanno sempre tenuta d'occhio.

Ringrazio Chiara, mia amica e compagna di studi. Le giornate forzate nelle nostre case sono diventate mattinate e pomeriggi anche divertenti. Le tirate, i doppi caffè, i deliri, i soliti discorsi ripetuti ad ogni esame, le passeggiate mentre ripetevamo, l'ottavo piano.. Alla fine si dimenticano le fatiche

e rimangono solo ricordi belli e divertenti!

Ringrazio le mie Rafiki del cuore, Sma, Giuli, Erika, Agne, Frency, Gaia, Niki, Isa, Lina, Sofy, Ice. Mi sono sempre rimaste accanto condividendo con me gioie e dolori di esami falliti o superati. Nei momenti di difficoltà mi hanno ascoltata e rincuorata ripetendomi in continuazione: Sarai una prof bravissima, sei sempre stata brava a spiegarci le cose!. È anche grazie ai momenti passati in classe che ho capito chi volevo diventare e perché. Spero che i miei futuri studenti possano pensarla allo stesso modo, io ce la metterò tutta!

Ringrazio gli altri compagni e amici Nutellini: Riky, Tronco, Giò, Matte, Benny, Sarina, Daniele e anche Tommi. Con loro molte lezioni sono passate tra le risate. Diversamente sarebbe stata molto più noiosa la vita in dipartimento.

Ringrazio tutti i Giovani e ormai amici di Azione Cattolica. Le equipe e le serate insieme spesso sono state una pausa piacevole nei giorni di studio e non solo. In particolare ringrazio con affetto la Michi, la Mary, Budel, Osso, Dancing, l'Illa, la Luci e tantissimi altri con i quali ho creato un rapporto di fiducia e affetto che credo continuerà in futuro.

Ringrazio tutti i ragazzi con cui, in questi ultimi cinque anni, ho fatto e faccio tuttora le mie prime esperienze da "insegnante": oltre che un'ottima palestra professionale mi ricordano sempre che dietro uno studente c'è un ragazzo a cui potrei lasciare qualcosa di significativo o che, viceversa, mi potrebbe insegnare qualcosa di nuovo.

Infine, ma non per importanza, non posso che ringraziare colui senza il quale tutto questo non avrebbe nemmeno un senso. So che ci sei, e ti ringrazio di poter festeggiare questo traguardo in mezzo all'amore di così tante persone, che poi è la cosa che conta di più.