Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IMMERSIONI POSSIBILI DI OGGETTI IMPOSSIBILI

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
SARA DE MARCHI

Sessione I
Anno Accademico 2015/2016

"... e giorno dopo giorno
è silenziosamente costruire
e costruire è sapere e potere
rinunciare alla perfezione..."
Niccolò Fabi, *Costruire*

Ai miei nonni Alba ed Egisto,
che mi hanno insegnato
a rialzarmi sempre
e a non arrendermi mai...

Indice

Introduzione

Fin dall'antichità, arte e geometria sono state spesso accostate, ma mai come nel caso delle opere di Maurits Cornelis Escher. Le celebri litografie del grafico olandese, infatti, traggono quasi sempre ispirazione dal mondo geometrico, in particolare le cosiddette "stampe impossibili", in cui compaiono edifici irrealizzabili, costruzioni illusorie e fenomeni che non rispettano le leggi della fisica. Oltre che su illusioni ottiche, esse sono basate su concetti matematici veri e propri, così come vedremo durante l'elaborato.

Questa tesi, partendo dal Capitolo 8 del libro *Yearning for the impossible* di John Stillwell, studia gli spazi in cui immergere le costruzioni impossibili di Escher per renderle realizzabili, basandosi in particolare sul concetto di varietà topologica e di proiezione di rivestimento.

Dopo un primo capitolo introduttivo sulla vita di Escher e sulle opere che andremo ad approfondire, la trattazione procede con un capitolo in cui si definiscono alcuni strumenti matematici: essi saranno utilizzati per giustificare la consistenza dei soggetti delle litografie precedentemente mostrate.
Nell'ultima sezione ci dedichiamo a mostrare come tali strumenti matematici possano rendere *possibili* le visioni del grafico olandese, esplicando caso per caso come intervengano nella realizzazione e come conducano a un risultato impossibile nella realtà tridimensionale in cui viviamo ma non nello spazio in cui vengono immerse.

Capitolo 1

L'opera artistica di Escher

1.1 La vita e la formazione

Maurits Cornelis Escher nacque il 17 giugno del 1898 a Leeuwarden, in Olanda. Dal 1912 al 1918 frequentò il liceo e, forse anche a causa degli scarsi risultati ottenuti, fu proprio questo il periodo in cui nacque la sua passione per il disegno e a cui risalgono alcune incisioni su linoleum.
Come molti artisti del tempo, compì un viaggio in Italia, cosa che gli diede modo di osservare e di rimanere profondamente affascinato dai massimi capolavori del passato che ebbe modo di ammirare. Qui ebbe l'ispirazione per numerosi schizzi paesaggistici.
Pochissimo portato per gli studi, fu costretto a iscriversi alla facoltà di architettura per compiacere il padre, ma ben presto la passione per il disegno prese il sopravvento. Resistette solo pochi mesi prima di abbandonare l'università per iscriversi ai corsi di disegno di S. Jesserun de Mesquita, il quale ebbe un notevole influsso sul suo futuro sviluppo di artista grafico. Successivamente si recò anche in Spagna, dove rimase profondamente colpito dall'Alhambra, che trovò particolarmente interessante per la sua "ricchezza ornamentale" e per "la prodigiosa complessità, nonché per la concezione matematica", riferendosi in particolare alla decorazione dei mosaici moreschi. In queste sue affermazioni si avvertono alcune delle caratteristiche che faranno poi da base e da sfondo teorico a molte sue produzioni, in considerazione anche del fatto che fu proprio in Spagna che scoprì la tecnica dei "disegni periodici", caratterizzati da una divisione regolare della superficie, una costante di certe sue illustrazioni che lo renderanno celebre ed inconfondibile, nonché simbolo di un'arte contaminata dal pensiero scientifico.
Da quel momento in poi Escher si concentrò sempre di più sulle immagini interiori,

tralasciando a poco a poco la rappresentazione della natura. In seguito, definì l'anno in cui si trasferì in Svizzera come quello in cui maturò la svolta della sua vita: "In Svizzera e in Belgio ho trovato molto meno interessanti sia i paesaggi che l'architettura rispetto a ciò che avevo visto nel Sud Italia. Mi sono così sentito spinto ad allontanarmi sempre di più dall'illustrazione più o meno diretta e realistica della realtà circostante. Non vi è dubbio che queste particolari circostanze sono state responsabili di aver portato alla luce le mie visioni interiori".
Le sue opere grafiche sono infatti celebri per l'uso fantasmagorico degli effetti ottici. Il campionario sviluppato da Escher contempla le sorprese più spettacolari che vanno da illusionistici paesaggi, prospettive invertite, costruzioni geometriche minuziosamente disegnate e altro ancora, frutto della sua inesauribile vena fantastica, che incantano e sconcertano.
Nelle opere di Escher, insomma, l'ambiguità visiva diventa ambiguità di significato, con la conseguenza che i concetti di positivo e negativo, corretto e scorretto sono intercambiabili. Traspaiono dall'opera e dalle invenzioni di questo artista i suoi molteplici interessi e le variegate fonti di ispirazione, che vanno dalla psicologia alla matematica, dalla poesia alla fantascienza.
Nel 1954 stabilì un primo contatto con il mondo scientifico grazie alla sua esposizione al Museo Stedelijk di Amsterdam, che coincise con il Congresso internazionale dei matematici.
Dopo tre anni venne pubblicato *Divisione regolare delle superfici* e, sempre nel 1958, Escher realizzò la sua prima litografia dedicata alle sue celeberrime costruzioni impossibili, *Belvedere*.
Il 27 marzo del 1972 morì nella casa delle diaconesse di Hilversum.
Per la biografia di Maurits Cornelis Escher si è fatto riferimento al sito web *http://www.mcescher.altervista.org/biografia.htm*.

1.2 Le opere

Nel 1958 Escher realizzò la prima delle tante litografie dedicate alle costruzioni impossibili, la celebre *Belvedere*. Sebbene l'edificio che occupa la scena somigli molto alla proiezione di una struttura architettonica, osservando meglio la composizione si nota che essa mostra piuttosto qualcosa di soprannaturale: sembra infatti che la parte superiore di *Belvedere* giaccia ad angolo retto rispetto a quella inferiore. L'asse longitudinale del piano superiore giace nella direzione dello sguardo della donna che si sporge dalla balaustra, mentre l'asse del piano inferiore in quella del ricco mercante che guarda nella valle. Nella parte centrale, vediamo il bizzarro risultato di questa

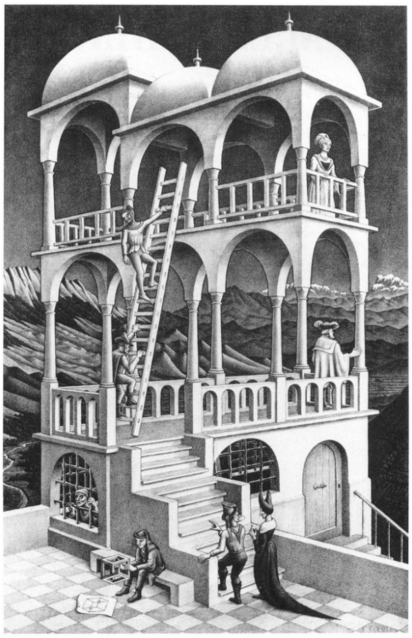

Figura 1.1: *Belvedere*, litografia, 1958.

costruzione: al centro appare una robusta scala a pioli, apparentemente diritta, solo che, mentre la sua parte più alta poggia contro la parte esterna del *Belvedere*, la sua parte inferiore si trova all'interno dell'edificio. Chi si trova a metà, sulla scala, non è in grado di dire se sia dentro o fuori dall'edificio. Visto dal basso, egli si troverebbe senza dubbio al suo interno ma, visto dall'alto, altrettanto chiaramente all'esterno. Se tagliassimo la composizione orizzontalmente, al centro, troveremmo che entrambe le sezioni sono del tutto normali. Solo la combinazione delle due dà vita a qualcosa di impossibile. Anche il giovane seduto sulla panca a sinistra sembra accorgersi che qualcosa non funziona, anche grazie al modellino semplificato che tiene in mano. Somiglia molto alla struttura di un cubo, ma la parte superiore è collegata a quella inferiore in un modo impossibile. Forse è addirittura impossibile tenere in mano un cuboide del genere - semplicemente perché una tale immagine non potrebbe nemmeno esistere nello spazio. L'unico modo per comprendere questa struttura impossibile diventa allora studiare con attenzione il disegno che si trova per terra davanti a lui. Escher infatti, nel suo primo libro, scriverà a proposito di quest'opera: "In basso a sinistra giace un pezzo di carta su cui sono disegnati gli spigoli di un cubo. Due piccoli cerchi marcano le posizioni ove gli spigoli si intersecano. Quale spigolo è verso di noi e quale sullo sfondo? E' un mondo tridimensionale allo stesso tempo vicino e lontano, è una cosa impossibile e quindi non può essere illustrato. Tuttavia

è del tutto possibile disegnare un oggetto che ci mostra una diversa realtà quando lo guardiamo dal di sopra o dal di sotto."
Il cubo cui Escher si riferisce in questo estratto è lo stesso che tiene in mano il ragazzo, noto con il nome di cubo di Necker [1].
Nel febbraio dello stesso anno, Roger Penrose pubblicò sul British Journal of Psychology il suo "triangolo impossibile" (Figura 1.2). Penrose lo definì una costruzione tridimensionale, rettangolare, pur non essendo di certo la proiezione di una intatta struttura spaziale. Il suo triangolo (o tribarra) - come disegno - sta insieme solo per

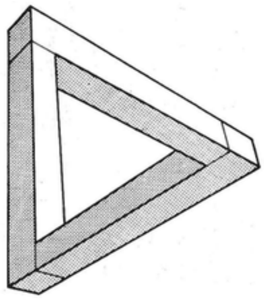

Figura 1.2: *Tribarra*, R. Penrose.

mezzo di collegamenti inesatti tra elementi del tutto regolari. I tre angoli retti sono normalissimi, ma sono legati fra loro in modo errato, un modo che non potrebbe sussistere nello spazio, tanto da costruire una specie di triangolo la cui somma degli angoli è di 270°.
Escher vide il disegno di Penrose nel 1961, quando si stava dedicando completamente alla costruzione di mondi impossibili, e il"triangolo impossibile" fu l'occasione per lui di realizzare la litografia *Cascata*. Gli schizzi preparatori evidenziano che, all'inizio, egli aveva in mente di disegnare tre colossali complessi architettonici. Poi, ad un tratto, gli venne l'idea che una cascata potesse illustrare l'assurdità del "triangolo". Nell'illustrazione un flusso d'acqua, cadendo dall'alto, mette in funzione un mulino il quale, a sua volta, spinge il flusso in un canale che, zigzagando, torna all'inizio della cascata. Questo è chiaramente impossibile nel mondo ordinario cui siamo abituati, poichè l'acqua ritorna in continuazione alla ruota del mulino in un movimento perpetuo che viola la legge di conservazione. L'ambiente circostante a questo corso d'acqua impossibile ha una duplice funzione: rafforzare il bizzarro effetto per mezzo del muschio molto ingrandito presente nel piccolo giardino e dei solidi poligonali posti in cima alle torri, e al tempo stesso diminuirlo per mezzo della casa attigua e del paesaggio terrazzato dello sfondo. L'affinità tra *Belvedere* e *Cascata* è lampante: anche il cuboide che sta alla base di *Belvedere* deve la sua esistenza ai collegamenti

Figura 1.3: Cascata, litografia, 1961.

volontariamente rovesciati istituiti tra i vertici del cubo [1].
Un'altra litografia appartenente alle cosiddette stampe impossibili è *Salita e discesa*, del 1960. Essa rappresenta un complesso di case i cui abitanti, che paiono monaci, camminano in un percorso circolare fatto di scalini.
Apparentemente tutto sembra svolgersi normalmente ma, osservando attentamente la Figura 1.4, ci si accorge che, pur essendo la scala circolare, i monaci compiono continuamente un percorso sempre in discesa o sempre in salita, lungo una scala impossibile: impossibile perché, dopo un giro, pur essendo saliti (o scesi), i monaci si ritroveranno esattamente al punto di partenza, senza essersi innalzati (o abbassati) di un centimetro. Potrebbero venirci dubbi sulla raffigurazione degli scalini ma, se osserviamo attentamente la Figura 1.4 e seguiamo uno dei piccoli monaci passo passo, senza il minimo dubbio potremo affermare che egli sale sempre più in alto di un gradino. In ciò consiste anche l'affinità con *Cascata*. Anche in questo caso, Escher ritrovò l'idea della quasi salita all'infinito (o della discesa) in un articolo di Penrose. Ma come è possibile questo fenomeno? L'inganno si chiarisce se cerchiamo di tagliare "a fette" l'edificio: la sezione in alto a sinistra la vediamo ad un livello molto più basso. I settori non giacciono allora su piani orizzontali, ma corrono in forma di spirali verso l'alto (o verso il basso). La linea orizzontale è, in realtà, un movimento in forma di spirale verso l'alto e solo la scala giace su un piano orizzontale. Così l'intero fascino dell'idea è andato perso: saliamo due gradini e ne scendiamo

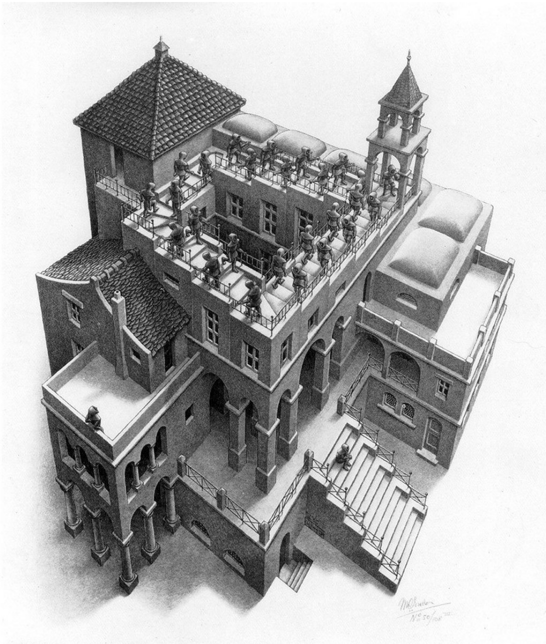

Figura 1.4: *Salita e discesa*, litografia, 1960.

altrettanti e non ci meravigliamo di tornare al punto di partenza [1].

Capitolo 2

Cosa ci sta dietro: gli strumenti matematici

Andiamo ora ad introdurre gli strumenti matematici che ci permetteranno, nel Capitolo 3, di capire cosa renda “possibili” le costruzioni impossibili di Escher.

2.1 Varietà e proiezione di rivestimento

Innanzitutto, strumento fondamentale per capire più profondamente le opere introdotte nel Capitolo 1 è il concetto di varietà topologica. Introduciamo prima qualche nozione fondamentale per arrivare poi a definire il concetto di varietà.

Definizione 2.1. Siano $U \subset \mathbb{E}^k, V \subset \mathbb{E}^l$ insiemi aperti. Un'applicazione $f : U \longrightarrow V$ si dice *di classe* C^r $(r \in \mathbb{N})$ se è continua e tutte le derivate parziali $\frac{\partial^h f}{\partial x_{i1} \partial x_{ih}} (h \in \mathbb{N}_r)$ esistono e sono continue.
Più in generale, dati insiemi arbitrari $X \subset \mathbb{E}^k, Y \subset \mathbb{E}^l$, un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$ si dice di classe C^r se, per ogni x $\in$ X, esistono un intorno aperto U di x ed un'applicazione di classe C^r $g : U \longrightarrow \mathbb{E}^l$ tale che $f|_{U \cap X} = g|_{U \cap X}$. Si scriverà $f \in C^r(X, Y)$ o semplicemente $f \in C^r$.

Definizione 2.2. Un *diffeomorfismo* di classe C^r $f : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione biettiva di classe C^r, tale che $f^{-1} \in C^r(Y, X)$.

Definizione 2.3 (Varietà topologica)**.** Un insieme $M \subset \mathbb{E}^k$ è detto *varietà* di classe $C^r(r \in \mathbb{N})$ di dimensione n se per ogni $x \in M$ vi è un diffeomorfismo di classe C^r $f : W \longrightarrow U$, dove W è un intorno di x in M (nella topologia indotta da E^k) e U è un sottoinsieme aperto di E^n.

Le varietà sono, in parole povere, spazi che sono localmente simili allo spazio ordinario ma globalmente avvolti su se stessi[7].
Un'altra nozione da introdurre è quella di proiezione di rivestimento:

Definizione 2.4 (Proiezione di rivestimento)**.** Una *proiezione di rivestimento* di uno spazio X è una mappa $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ tale che ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto U con la proprietà che $p^{-1}(U)$ è unione disgiunta di aperti di $\tilde{X}$, ognuno dei quali è applicato omeomorficamente da p in U (U è *regolarmente ricoperto*). $\tilde{X}$ è detto *spazio di rivestimento* di X.

Come esempi di questo ritroviamo il cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ come spazio di rivestimento del Toro T_1 e il piano $\mathbb{E}^2$ come spazio di rivestimento del cilindro e del toro [2][3][4][6]. Ma lo vedremo meglio nella prossima sezione.

2.2 Alcuni esempi

Ora mostreremo alcuni esempi che ci possono far comprendere meglio questi strumenti.

Esempio 2.1 (Dalla retta alla circonferenza)**.** È possibile realizzare una proiezione della retta reale sulla circonferenza $\mathbb{S}^1$ tramite l'applicazione

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi i x}. \end{aligned}$$

In questo e negli esempi successivi $\mathbb{S}^1$ è intesa come sottoinsieme di $\mathbb{C}$ costituito dai numeri di modulo unitario.

Esempio 2.2 (Dal piano al cilindro)**.** Il cilindro $C = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ è l'immagine della proiezione del piano

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to C \\ (x, y) &\mapsto (x, e^{2\pi i y}), \end{aligned}$$

come illustrato in Figura 2.1.

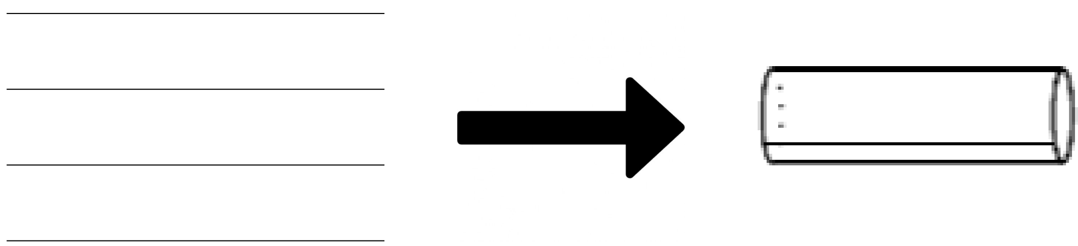

Figura 2.1: Proiezione del piano nel cilindro.

Esempio 2.3 (Dal cilindro al toro)**.** Nello spazio $\mathbb{R}^3$ la superficie descritta da una circonferenza B nel piano (x,z) nella rotazione intorno all'asse z è chiamata toro. Esso è unione di circonferenze: per ogni punto di B, individuato da un valore dell'angolo u, esiste una circonferenza orizzontale A_u con centro sull'asse z.

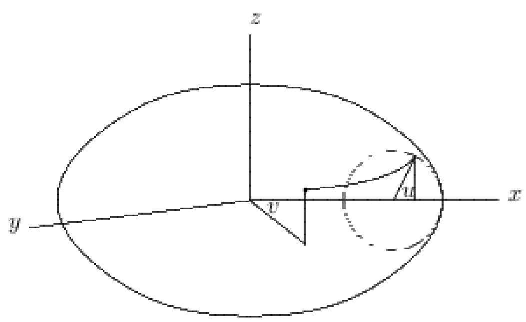

Figura 2.2: Rappresentazione del toro.

Questa superficie T è omeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, per cui la proiezione di rivestimento da C a T sarà

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (x, e^{2\pi i y}) &\mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \end{aligned}$$

il cui comportamento è rappresentato in Figura 2.2 [5].

Esempio 2.4 (Dal piano al toro)**.** Un piano con due rette periodiche come assi è chiamato toro. Così come si può costruire un cilindro da una striscia di piano unendo i lati opposti, così possiamo costruire un toro a partire da un piano così come in Figura 2.3, dove il piano per semplicità è raffigurato come un quadrato.

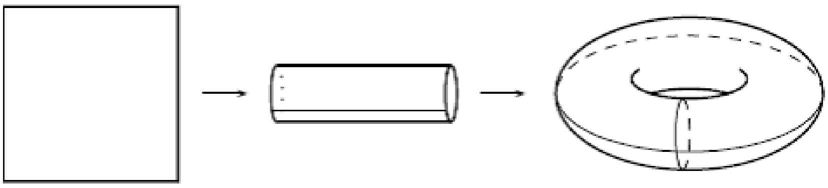

Figura 2.3: Proiezione del piano nel toro.

La corrispondente proiezione di rivestimento è data dall'applicazione

$$
\begin{aligned}
p &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\
(x, y) &\mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})
\end{aligned}
$$

.

Capitolo 3

L'impossibile diventa possibile: come matematica e arte si fondono

Riprendiamo in mano le opere introdotte nel Capitolo 1, alla luce degli strumenti mostrati nel capitolo precedente.

3.1 Rappresentazione e realtà

Avendo a che fare con le opere di Escher, ci si rende presto conto che ogni rappresentazione non deve necessariamente essere proiezione di una realtà tridimensionale. Tutto ciò diventa chiaro in *Belvedere*: sebbene localmente assomigli alla proiezione di una struttura architettonica, un edificio come quello che occupa la scena della litografia non può esistere nella realtà.
Come abbiamo detto nel Capitolo 1, la costruzione di questo edificio si basa sulla struttura di un cubo la cui parte superiore è collegata a quella inferiore in modo impossibile. Per capire meglio questa struttura, osserviamo ora i punti a, b e c in Figura 3.1: l'illustrazione superiore mostra la struttura di un cubo. Abbiamo già notato nel Capitolo 1 che in essa è possibile riconoscere la proiezione di due realtà diverse: la prima è ottenuta assumendo che i punti 1 e 4 si trovino vicino a noi e che i punti 2 e 3 siano lontani da noi, mentre nel caso dell'altra possibile realtà i punti 2 e 3 si trovano vicino a noi e 1 e 4 lontano. È però anche possibile vedere i punti 2 e 4 in posizione anteriore e i punti 1 e 3 in posizione posteriore. Questo però contraddice la nostra immagine di cubo e, per questo motivo, non possiamo arrivare da soli a questa interpretazione. Dato agli spigoli del cubo un volume, possiamo imporre all'osservatore questa interpretazione, facendo scorrere lo spigolo A-2 davanti allo spigolo 1—4 e C-4 davanti a 3—2. In questo modo otterremo l'ultima figura in

basso (punto *c*), la quale è la base stessa di *Belvedere*.

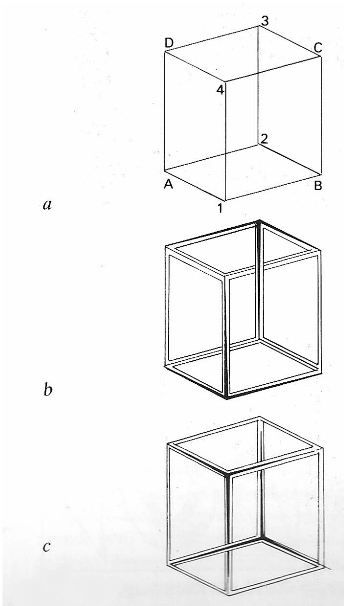

Figura 3.1: Diverse interpretazioni del cubo.

Torniamo quindi alla litografia: nelle otto colonne che collegano i due piani si riconosce qualcosa di molto simile al trucco attuato nell'esempio dei cubi, come si vede anche dai bozzetti preparatori in Figura 3.2. Solo le colonne dell'estrema destra e dell'estrema sinistra infatti sono regolari - così come lo spigolo AD e BC dei cubi in figura. Le altre sei colonne collegano in maniera alternata il lato anteriore con

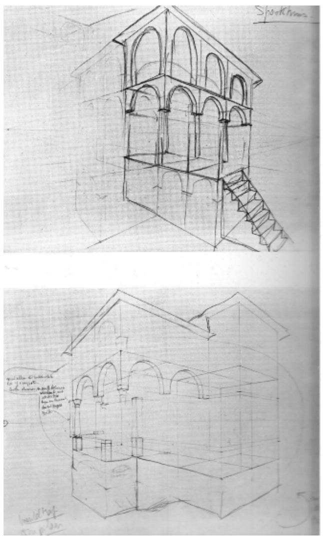

Figura 3.2: Studi per Belvedere.

quello posteriore e devono per forza fungere da diagonali. Il mercante sulla destra, avendo appoggiata la mano destra sulla colonna d'angolo, se ne accorgerebbe ben

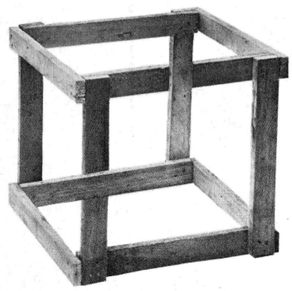

Figura 3.3: La "gabbia pazza", fotografata dal Dr. Cochran, Chicago.

presto se volesse appoggiare la mano sinistra sull'altra colonna [1]. Tutto cambia quindi a seconda di come guardiamo tale edificio, e di come consideriamo le colonne - o lati del quadrato - in relazione l'una con l'altra.
Non mancano tentativi di fabbricare un modello spaziale del cuboide che Escher ha utilizzato in *Belvedere*: un modello ben riuscito è rappresentato in Figura 3.3, in una foto del Dott. Cochran di Chicago. Tuttavia il suo modello consiste di due parti separate, la cui composizione è simile al cuboide se esse vengono considerate da un particolare punto [1].
Risulta quindi lampante che oggetti come quelli descritti da Escher non possano consistere nel mondo tridimensionale ordinario in cui viviamo. La domanda sorge allora spontanea: esistono altri spazi tridimensionali in cui questi oggetti diventino consistenti? L'obiettivo di questo capitolo sarà dimostrare che la risposta è affermativa e cercare di illustrare il più semplice di questi spazi.

3.2 La "tribarra" dei Penrose

Riprendiamo in considerazione la seconda opera di cui abbiamo parlato, *Cascata*. In quest'opera, Escher lega tre "tribarre di Penrose": il suo obiettivo, infatti, era di mostrare l'impossibilità di tale figura. Nei bozzetti preparatori per questa litografia (Figura 3.4) riconosciamo infatti il forte utilizzo della tribarra [1]. Apparentemente quest'oggetto sembra non fornirci informazioni utili a proposito del moto perpetuo che muove *Cascata*: tuttavia, serve ad illustrare la differenza tra "locale" e"globale". Quando ne viene osservata una piccola porzione alla volta, essa non sembra altro che una barra quadra con angoli retti: potremmo quindi dire che essa è localmente consistente. Ma non appena allontaniamo un po' la prospettiva, ci rendiamo conto che questa figura è globalmente inconsistente perché, come già detto precedentemente, nello spazio tridimensionale cui siamo abituati un solido di questo genere

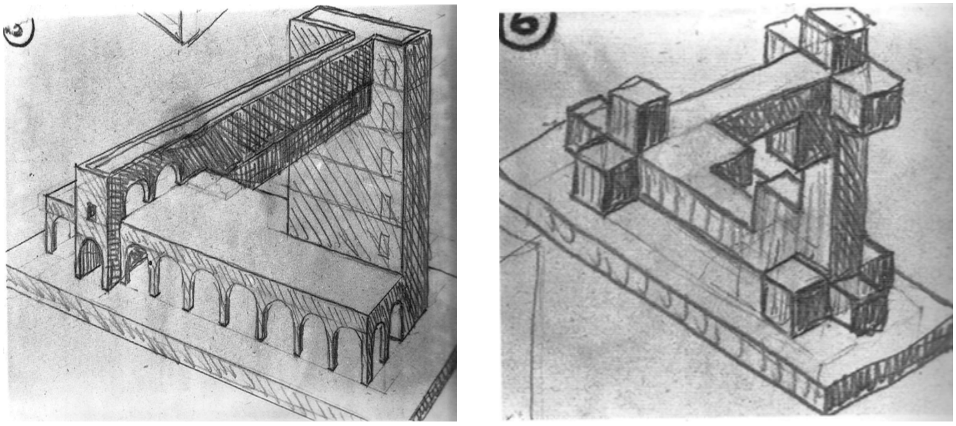

Figura 3.4: La tribarra nei bozzetti preparatori di *Cascata*.

non può esistere. La stessa cosa avviene per *Cascata*: seguendo il corso dell'acqua, tutto sembra perfettamente normale fino a che non ci si accorge di essere ritornati al punto di partenza, il che è, appunto, fisicamente impossibile.

Perché la tribarra sia consistente (e quindi anche la nostra *Cascata*), necessitiamo quindi di uno spazio che localmente si comporti come $\mathbb{R}^3$ ma globalmente in maniera differente. Proprio per questo motivo introduciamo il cilindro, il quale localmente si comporta come il piano, ma globalmente in maniera diversa, e differisce in un modo tale da essere adeguato ad ospitare alcuni oggetti paradossali. Risulta facile quindi costruire sul cilindro figure altrimenti impossibili sul piano.

Se infatti potessimo "arrotolare" lo spazio tridimensionale allo stesso modo in cui arrotoliamo un piano per formare un cilindro, potrebbe essere possibile creare una tribarra. Questo purtroppo non è fisicamente possibile, ma è possibile trovare un modo per farlo se guardiamo al cilindro in maniera differente - non come una striscia arrotolata, ma come un piano periodico.

Esiste un precedente storico di questa interpretazione: fra i tesori trafugati dal Museo Nazionale Iracheno nell'aprile del 2003 c'erano migliaia di piccoli cilindri di pietra con incisi disegni raffiguranti persone, animali e piante, realizzati dalla civiltà mesopotamica 5000 anni fa. Essi venivano fatti rotolare su tavolette di argilla morbida per trasferirvi il disegno circolare raffigurato sul cilindro: il risultato consisteva in un motivo periodico inciso sulle tavolette. Questi "sigilli di pietra", come venivano chiamati, non sono solitamente considerati per il loro valore matematico, ma effettivamente dimostrano che il cilindro è in un certo senso corrispondente al piano periodico [7].

Se rotolassimo un cilindro con sopra il disegno di un 2-gono ad angoli retti, poligono a due lati simile nello stile alla tribarra, esso stamperebbe un motivo a zigzag ad angoli retti come mostrato in Figura 3.5. Una creatura bidimensionale che vivesse

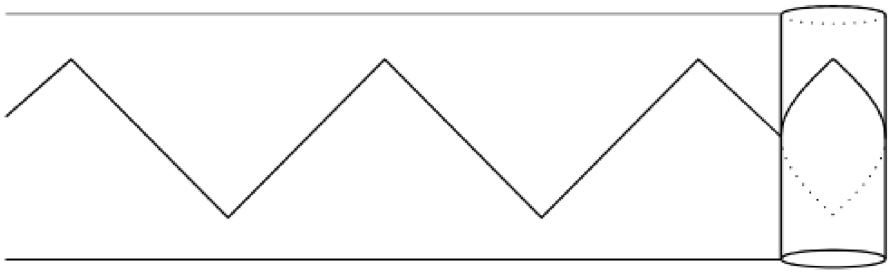

Figura 3.5: Cammino a zigzag corrispondente al 2-gono.

sul cilindro probabilmente preferirebbe pensare al cilindro come a qualcosa di piano, poiché esso è intrinsecamente piatto. Tale creatura vedrebbe pertanto il 2-gono come un percorso a zigzag, ma se percorresse il cammino sperimenterebbe probabilmente un forte senso di déjà vu. Questo non ci meraviglierebbe perché ogni visita al vertice in alto non *sembrerebbe* solo la stessa, *sarebbe* effettivamente la stessa. La creatura potrebbe confermarlo incidendo un segno sul vertice in alto, perché ritroverebbe lo stesso segno al vertice superiore “seguente”.
Ma se questa creatura non avesse coscienza della terza dimensione non sarebbe ancora capace di immaginare la rotondità del cilindro: sarebbe certamente più semplice per lui considerare il cilindro come un piano periodico, ovvero uno spazio in cui ogni oggetto si ripete ancora e ancora ad intervalli regolari. Se dei raggi di luce viaggiassero lungo le geodetiche del cilindro, allora la creatura riuscirebbe a vedere tutte queste ripetizioni, ammesso che guardi nella giusta direzione e non ci siano ostacoli sul tragitto. La sua visione sarebbe esattamente quella di una creatura sul piano periodico [7].
Questo esempio ci permette quindi di capire come nella litografia sia possibile ritornare sempre allo stesso punto della cascata: quest’ultima si comporta esattamente come il cammino a zigzag percorso della creatura bidimensionale, ovvero si ripete periodicamente ad intervalli regolari. Pertanto improvvisamente il punto più lontano e più basso del canale non solo *sembra* identico a quello più alto e più vicino, ma *corrisponde* effettivamente a quel punto, suscitando così l’impressione della continua caduta dell’acqua verso il basso e il movimento della ruota, un “perpetuum mobile”[1]!

3.3 Il quasi infinito

In molte delle sue composizioni, Escher ha cercato di rappresentare l'illimitato e l'infinito: una di queste è sicuramente *Salita e discesa*, in cui alcuni monaci sembrano salire e scendere all'infinito la scala esterna del loro monastero.
Per avere la possibilità di dimostrare come sia possibile disegnare una scala capace di tale prodigio, cercheremo di costruirne una a nostra volta (Figura 3.6). ABCD forma un quadrato che giace orizzontale sul piano. A metà di ciascun lato disegniamo una linea verticale. Chiaramente risulta facile disegnare gradini che rappresentino una scala che sale dal punto A al punto C passando per B (Figura 3.6a). La difficoltà comincia quando desideriamo tornare da C ad A passando per D. Nella Figura 3.6b succede proprio così, tanto che le scale ci portano verso il basso.

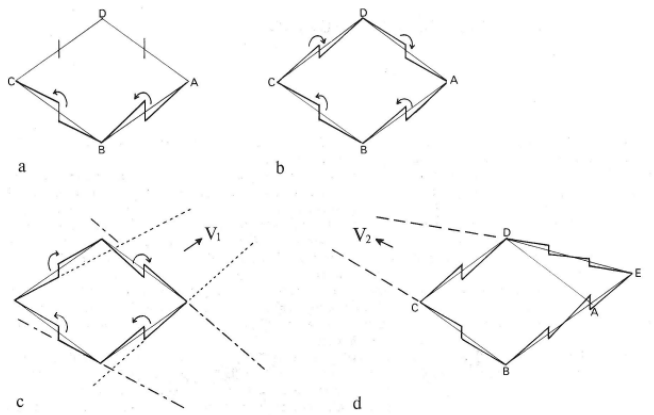

Figura 3.6: Costruzione di *Salita e discesa.*

Abbiamo scoperto dunque che cosa in questa composizione ci avesse ingannato, e cioè il fatto che la scala giaccia su di un piano del tutto orizzontale, mentre altri dettagli dell'edificio, per esempio i plinti delle colonne e i telai delle finestre, che dovrebbero in verità trovarsi anch'essi su di un piano orizzontale, si muovono in realtà in forma di spirale verso l'alto [1].
Una generalizzazione di questo fatto potrebbe essere data dal 3-cilindro, uno spazio tridimensionale che si comporta come una circonferenza in una direzione, e come un piano nelle direzioni perpendicolari alla circonferenza: esso è infatti definito come $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Una creatura che vivesse sul 3-cilindro, in questo caso uno dei monaci che sale (o scende) le scale, crederebbe di trovarsi nello spazio tridimensionale ordinario; tuttavia, lo spazio è periodico in una direzione. Come possiamo immaginarci una tale situazione? Un'opera di Magritte ci aiuta a realizzare ciò di cui stiamo parlando - chiaramente non è propriamente la realizzazione corretta, e Magritte non aveva

certo in mente il 3-cilindro quando realizzò quest'opera, ma ci fa fare un passo nella giusta direzione[7].

Figura 3.7: *La riproduzione vietata*, R. Magritte, 1937.

Un uomo sul 3-cilindro, guardando nella direzione periodica, vedrebbe il retro della propria testa, proprio come accade nello specchio in Figura 3.7. Tuttavia, nel 3-cilindro l'immagine della nuca apparirebbe infinite volte, a intervalli regolari. Se semplificassimo la testa a una sfera, la vista nella direzione periodica del 3-cilindro potrebbe essere quella raffigurata in Figura 3.8, attraverso una proiezione di rivestimento da $\mathbb{R}^3$ al 3-cilindro.

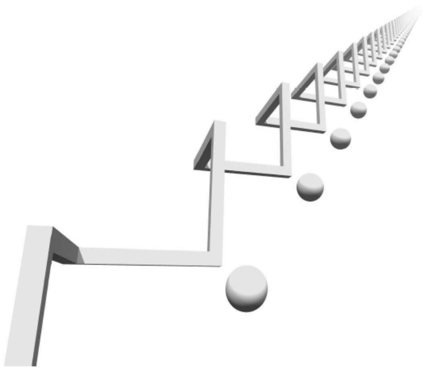

Figura 3.8: Una tribarra e una sfera nel 3-cilindro.

In questa immagine compare, accanto alla sfera, anche qualcosa che assomiglia ad una barra angolare periodica con angoli retti. Ma ovviamente, poiché ogni sfera nell'immagine è in realtà una nuova visualizzazione della medesima sfera, ogni angolo della barra vicino alla sfera è in realtà lo stesso angolo della barra chiusa. Risulta

quindi che la barra è propriamente una tribarra, perché i punti simili non si assomigliano solamente, bensì coincidono. Chiaramente possiamo solo affermare che la tribarra esiste sul 3-cilindro. Ma in che senso il 3-cilindro esiste? Lo spazio fisico reale probabilmente non è un 3-cilindro, ma probabilmente non è nemmeno lo spazio tridimensionale "ordinario" $\mathbb{R}^3$. Tuttavia, ci sono parecchi modi per realizzare il 3-cilindro matematicamente. Ognuna è analoga ad una realizzazione del cilindro ordinario, che potremmo chiamare 2-cilindro.
Vediamo alcune di queste modalità:

- Così come il 2-cilindro può essere definito come un oggetto in $\mathbb{R}^3$, contenente tutti i punti a distanza 1 dall'asse delle ascisse, il 3-cilindro può essere definito come un oggetto in $\mathbb{R}^4$ formato da tutti punti a distanza 1 dal piano(xy).

- Così come i punti sul 2-cilindro hanno coordinate (x,θ), dove x è un numero reale qualsiasi e θ è un qualsiasi angolo, i punti sul 3-cilindro hanno coordinate (x,y,θ), dove x e y sono numeri reali qualsiasi e θ è un angolo qualsiasi.

- Così come il 2-cilindro può essere costruito congiungendo lati opposti di una striscia di piano delimitata da due linee parallele, il 3-cilindro può essere costruito unendo i lati opposti di una lastra di spazio delimitata da due piani paralleli [7].

- Così come il 2-cilindro è lo spazio base di una proiezione di rivestimento da $\mathbb{R}^2$, così il 3-cilindro è lo spazio base di una proiezione di rivestimento da $\mathbb{R}^3$:

$$p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$$
$$(x, y, z) \mapsto (x, y, e^{2\pi i z}).$$

Abbiamo dunque mostrato che la tribarra può esistere all'interno di un particolare spazio. Questo ci permette di ammettere come "possibile" anche l'infinita salita e discesa dei monaci: anche loro, infatti, si muovono lungo un percorso molto simile a quello che abbiamo appena dimostrato essere una tribarra consistente, come illustrato in Figura 3.9. I monaci dunque, che dopo un giro di salita (o discesa)

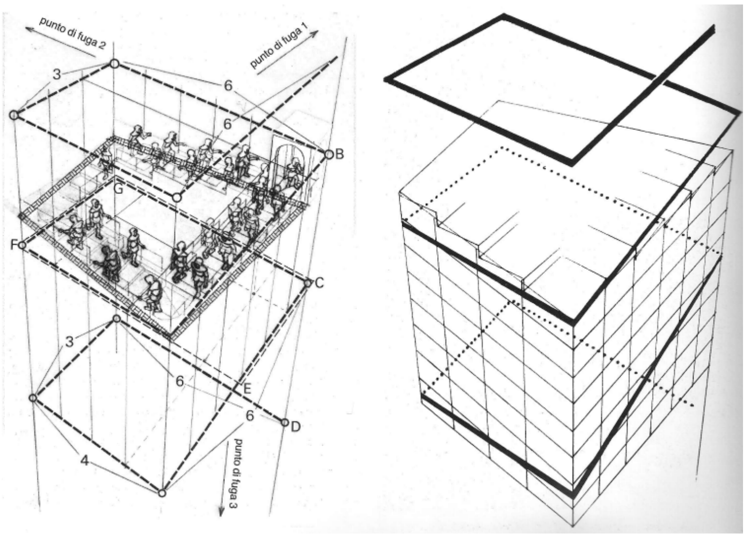

Figura 3.9: Periodicità di *Salita e discesa*.

dovrebbero sicuramente trovarsi più in alto (o più in basso), si ritroveranno invece in un punto che coincide esattamente col punto da cui hanno iniziato a salire (o a scendere). Da qui continueranno in eterno la loro salita o discesa, resa "possibile" dal nuovo spazio introdotto.

Conclusione

In questo elaborato abbiamo voluto mostrare come costruzioni impossibili, cioè non realizzabili nel mondo reale in cui viviamo, possano in realtà diventare verosimili se immerse in spazi opportuni.
Per far questo ci siamo avvalsi dell'aiuto dell'artista M. C. Escher e delle sue celebri "costruzioni impossibili", in particolare di *Belvedere*, *Cascata* e *Salita e discesa.*
Nella prima abbiamo riconosciuto, anche grazie ad indizi sparsi nella litografia stessa, l'utilizzo del cubo di Necker per realizzare lo strano incrocio di colonne diagonali che regge l'intero palazzo del *Belvedere*: in questo caso tutto si basava sul modo in cui ogni colonna veniva considerata rispetto alle altre.
In *Cascata*, invece, sono intervenute la periodicità del piano e la "tribarra" di Penrose: attraverso la prima, siamo riusciti a dimostrare che in realtà il canale d'acqua rappresentato nella litografia era una composizione di tribarre. Abbiamo poi mostrato la consistenza di quest'ultima proprio grazie alla periodicità del piano, la quale ci ha permesso di identificare inizio e fine del canale e di dare vita ad una cascata altrimenti impossibile.
Infine, in *Salita e discesa* abbiamo giustificato l'esistenza di una scala circolare percorsa da monaci che salivano (o scendevano) continuamente, immergendola nel 3-cilindro, spazio tridimensionale che si comporta come un cerchio in una direzione e come un piano nelle direzioni perpendicolari al cerchio. Come per la litografia precedente, tale immersione permetteva di identificare il punto iniziale con quello finale del cammino percorso dai vari monaci, e di rendere dunque consistente tale cammino.

Bibliografia

[1] B. Ernst, *Lo specchio magico di M. C. Escher*, Taschen (1976)

[2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press (2002), Cap. 1.3-2.1.a.

[3] C.R.F. Maunder, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press (1980).

[4] C.P. Rourke, B.J. Sanderson, *Introduction to piecewise-linear topology*, Springer-Verlag (1972).

[5] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri (1989), Cap. 3.

[6] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw Hill (1966), Cap. 2.1-2.6.

[7] J. Stillwell, *Yearning for the impossible*, A.K. Peters (2006), Cap. 8.