

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**RICOSTRUZIONE DI CONVESSI E
ROBOTICA**

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
ADELE VALERII

Sessione I
Anno Accademico 2015/2016

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione	7
1 Premesse Matematiche	9
1.1 Politopo	9
1.2 Mappa di Gauss	10
2 Premesse Robotiche	13
2.1 Posa di un oggetto	13
2.2 Peg in the hole	14
2.3 Shape from X	16
3 Immagine Gaussiana Estesa	17
3.1 Teorema di Minkowski	17
3.2 Teorema di Alexandrov	17
3.3 Applicazione al metodo EGI	18
3.4 Manipolazione Meccanica di Pezzi Orientati a caso	20
4 Conclusioni	25
Bibliografia	26

Introduzione

Uno dei maggiori ostacoli all'uso esteso dei robot consiste nel “vedere” un oggetto in un mucchio di pezzi disposti alla rinfusa e nel dirigere un braccio per afferrarlo. Vi sono stati progressi significativi nella visione meccanica e la topografia dei pezzi rimane un primo passo per arrivare alla descrizione del metodo.

Questo elaborato analizza metodi di risoluzione del problema di determinare l'identità, la posizione e l'assetto di un pezzo tramite la topografia tridimensionale della sommità del contenitore dei pezzi. Il metodo più utilizzato in robotica risulta essere quello chiamato sistema stereo fotometrico, il quale determina l'orientazione superficiale di ciascuna piccola parte della superficie di un oggetto. Teoremi classici del secolo scorso garantiscono infatti che, per segmentare, identificare e trovare l'assetto di un oggetto nello spazio, è necessaria solo l'orientazione superficiale locale. Ogni possibile orientazione di una superficie corrisponde all'orientazione di un punto su una sfera e ogni punto separato sulla sfera ha un'orientazione diversa. La retta che fornisce l'orientazione di un punto su una superficie arbitraria è quindi parallela alla retta che fornisce l'orientazione di un punto sulla sfera. Ne segue anche che si può specificare qualunque orientazione nello spazio dando due coordinate, diciamo la latitudine e la longitudine, di un punto sulla sfera unitaria detta *sfera gaussiana*.

In particolare, nel capitolo 1, riguardante le premesse matematiche, sarà introdotta la nozione di politopo insieme alla nozione di *mappa di Gauss*, con l'estensione alla definizione di *mappa gaussiana estesa* in riferimento alla curvatura

gaussiana.

Nel capitolo 2 verranno date alcune definizioni fondamentali in ambito robotico. Ritroviamo infatti la definizione di posa di un oggetto, il problema del “*peg in the hole*” e la *forma da X*.

Nel capitolo 3 affronteremo il problema del determinare l'*immagine gaussiana estesa* di un oggetto, partendo dai teoremi di Minkowski e Alexandrov e passando alla loro applicazione al metodo EGI, per poi affrontare, infine, il problema della manipolazione meccanica di pezzi orientati a caso.

Capitolo 1

Premesse Matematiche

1.1 Politopo

Un politopo d -dimensionale o d -politopo è l'analogo di un poligono nel piano ($d=2$) e di un poliedro nello spazio usuale ($d=3$) generalizzato ad uno spazio euclideo reale \mathbb{R}^d . I poligoni si possono quindi anche chiamare 2-politopi e i poliedri 3-politopi.

Particolarmente importanti sono i politopi convessi.

Definizione 1.1.1. Si dice V -politopo la chiusura convessa di un insieme finito di punti di uno spazio \mathbb{R}^d .

Definizione 1.1.2. Si dice H -politopo una intersezione di un certo numero di semispazi di uno spazio \mathbb{R}^d che sia limitato, cioè che non contenga nessuna semiretta.

Proposizione 1.1.1. *Un sottoinsieme di \mathbb{R}^d è un V -politopo se e solo se è un H -politopo.*

I contenuti di questo paragrafo sono tratti da [5] [13].

1.2 Mappa di Gauss

Definizione 1.2.1. [4] La *mappa di Gauss* di una superficie \mathcal{S} bordo di un solido è l'applicazione che ad ogni punto ordinario P di \mathcal{S} associa il punto della sfera unitaria \mathbb{S}^2 avente lo stesso versore normale esterno, come viene mostrato in [fig1.1].

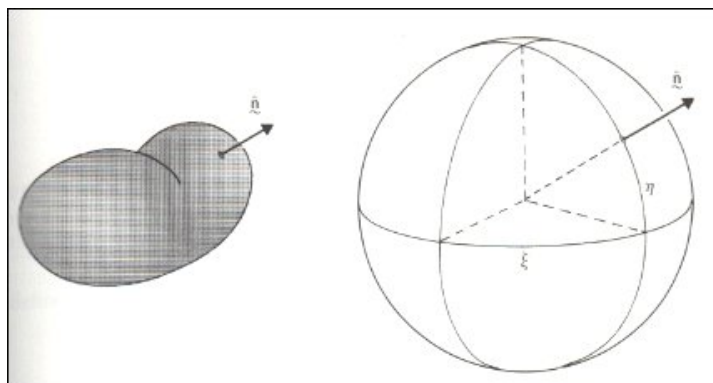


Figura 1.1: *mappa di Gauss*

Nel caso del bordo di un poliedro, la mappa di Gauss ha come immagine un insieme finito di punti corrispondenti alle facce 2-dimensionali del poliedro.

Chiamiamo *mappa gaussiana estesa* l'applicazione da \mathcal{S} ad $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ che ad ogni punto P di \mathcal{S} associa la coppia della sua immagine gaussiana e del valore della curvatura gaussiana in P . Nel caso del bordo di un poliedro invece della curvatura si avrà l'area della faccia corrispondente del poliedro [fig1.2].

Definizione 1.2.2. In geometria differenziale, ad ogni punto di una superficie differenziabile nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 sono associate due curvature principali k_1 e k_2 : queste sono il massimo ed il minimo della curvatura di una curva contenuta nella superficie e passante per il punto.

Definizione 1.2.3. La *curvatura gaussiana* K di una superficie è il prodotto delle curvature principali, k_1 e k_2 : $K = k_1 k_2$.

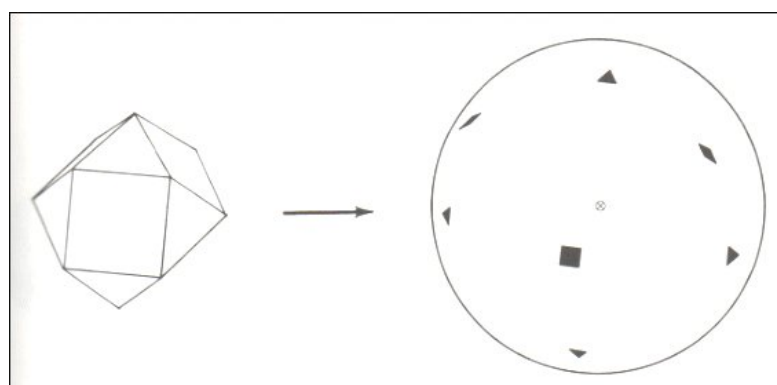


Figura 1.2: *mappa gaussiana estesa*

Capitolo 2

Premesse Robotiche

2.1 Posa di un oggetto

Durante la manipolazione industriale un braccio robotico non può prendere un oggetto senza conoscerne la posa. Letteralmente per posa di un oggetto si intende la posizione e l'orientamento rispetto all'osservatore.

In particolare, il problema del determinare la posa di un oggetto risulta molto importante nel contesto del “*peg in the hole*” [fig2.1].

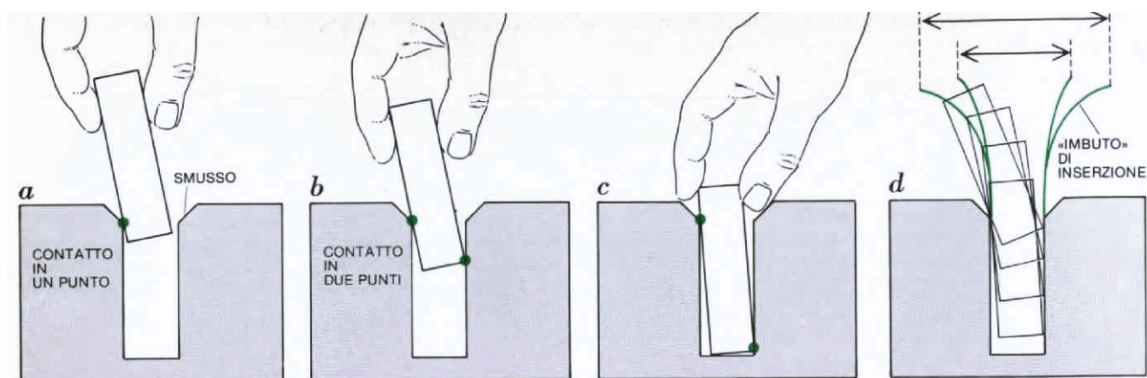


Figura 2.1: “*peg in the hole*”

L'inserimento di un piolo in un foro è infatti fondamentalmente un problema di posizionamento. I fori sono di solito smussati ai bordi per facilitare l'inserimento.

Scendendo lungo lo smusso ed entrando nel foro, il piolo tocca dapprima un lato della parte interna (contatto in un punto). Se il disallineamento angolare è forte, il piolo toccherà subito anche la parte opposta del foro (contatto tra due punti), con il rischio di blocco. Nel montaggio manuale la vista può aiutare a centrare lo smusso, ma una volta che il piolo è entrato nel foro, ci si deve basare sull'abilità ad avvertire le forze resistenti per poter manovrare il piolo fino in fondo. La geometria di piolo e foro mantiene il piolo dentro all'imbuto di inserzione, cioè entro il percorso tracciato dalla sua estremità superiore a stadi successivi di penetrazione.

I contenuti di questo paragrafo sono tratti da [9].

2.2 Peg in the hole

L'analisi della geometria delle parti di assemblaggio è importante nel processo di assemblaggio. Le caratteristiche geometriche delle parti di assemblaggio determinano come alcune parti possano interagire con altre. Da qui nasce il problema del "*peg in the hole*".

Il problema del "*peg in the hole*" è letteralmente il problema dell'inserimento di un piolo in un foro [fig2.2].



Figura 2.2: esempio di "*peg in the hole*"

D. E. Whitney [12] ha analizzato l'inserimento di un piolo in un foro smussato. Un meccanismo conforme è stato progettato per l'inserimento della parte asimmetrica

per compensare positivamente l'incertezza di posizione e orientamento durante il processo di assemblaggio. M. E. Caine [3] ha analizzato l'inserimento di un piolo rettangolare senza smussamenti. R. H. Sturges [11] ha analizzato l'inserimento di un piolo rettangolare tridimensionale. D. R. Strip [10] ha esteso l'approccio di Caine ad una strategia ibrida di forza posizione "*active compliance*" per i pioli convessi tridimensionali. Ha inoltre inventato un meccanismo passivo di inserimento tridimensionale. Successivamente ci si è focalizzati sulla determinazione di posizioni e forze tra i punti di contatto tra un piolo circolare e un foro. Adesso le attività di ricerca si concentrano su:

- analisi tridimensionale;
- inserimento di parti con forme complicate;
- modellazione della situazione di contatto;
- progetto dei dispositivi di montaggio.

L'inserimento multiplo del "*peg in the hole*" rappresenta una classe di compiti pratici e complicati nel campo dell'assemblamento robotico automatico [fig2.3].



Figura 2.3: *robot automatico*

2.3 Shape from X

Definizione 2.3.1. [4] In visione artificiale c'è una corrente di ricerca chiamata *forma da X* (“shape from X”), il cui obiettivo è quello di determinare la forma di un oggetto da particolari caratteristiche dell'immagine o delle immagini. Ecco una lista:

- forma dalla stereoscopia;
- forma dal moto;
- forma dall'ombreggiatura;
- forma da messa a fuoco - sfocatura;
- forma dalla tessitura;
- forma da luce strutturata.

Obiettivo comune di questi metodi è determinare un'applicazione che ad ogni punto (in realtà ad ogni pixel) dell'immagine associ o il valore di profondità (cioè distanza dall'osservatore) del punto P corrispondente nella scena o la direzione della retta normale alla superficie dell'oggetto in P.

Capitolo 3

Immagine Gaussiana Estesa

3.1 Teorema di Minkowski

H. Minkowski ha dimostrato che un politopo convesso è univocamente determinato (a meno di traslazioni) dall'area delle sue facce e dal versore normale a ciascuna faccia.

Teorema 3.1.1. [2] *Sia $d \geq 2$ e siano due politopi convessi in \mathbb{R}^d tali che, per ogni faccia di dimensione $d - 1$ di ciascun politopo, la faccia parallela dell'altro politopo abbia lo stesso volume $(d - 1)$ -dimensionale. Allora i politopi sono congruenti e paralleli fra loro.*

Questa è una trascrizione dell'enunciato originario; come “congruenza e parallelismo” si intende che un politopo sia ottenuto dall'altro mediante traslazioni.

Teorema 3.1.2. [8] *Due corpi convessi con le stesse funzioni di curvatura continue possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante traslazioni.*

3.2 Teorema di Alexandrov

Il seguente enunciato è una generalizzazione del Teorema di Alexandrov, che permette di dimostrare, insieme ad un'estensione del Teorema di Gauss, che la sfera \mathbb{S}^2 è l'unica superficie convessa chiusa con *curvatura gaussiana* costante.

Teorema 3.2.1. *Se due superfici convesse chiuse \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 hanno la proprietà che due qualunque domini su queste superfici con la stessa immagine sferica hanno aree uguali, allora \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 sono congruenti e traslate l'una rispetto all'altra.*

3.3 Applicazione al metodo EGI

L'*Extended Gaussian Image* (EGI) di un oggetto registra la variazione dell'area superficiale con l'orientazione superficiale rappresentando in modo unico oggetti convessi.

Le mappe orientate possono essere generate, per esempio, dallo "shape from shading".

Dalla trasformazione dei vettori normali di una superficie di un oggetto ad un punto comune, la rappresentazione dell'orientazione di una distribuzione superficiale è creata ed è chiamata *Extended Gaussian Image* (EGI) [fig3.1].

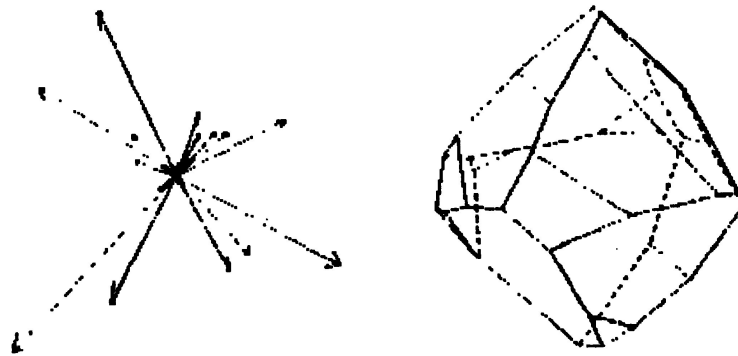


Figura 3.1: *Extended Gaussian Image*

La figura mostra l'*immagine gaussiana estesa* di un poliedro e l'oggetto corrispondente.

Horn e Ikeuchi [6] hanno dimostrato la praticabilità dell'usare il metodo EGI per la determinazione della posa confrontando l'*immagine gaussiana estesa* di un politopo con una dell'*immagine gaussiana estesa* acquisita. La ricostruzione del metodo che usa i volumi misti suggerisce un nuovo metodo per la determinazione della

posa. Questo metodo è più pratico e robusto del confronto diretto delle *immagini gaussiane estese*.

Presentiamo di seguito la costruzione di tale metodo.

Gli oggetti possono avere superfici con sfaccettature piane. In questo contesto definiamo poliedro convesso l'intersezione di semispazi. Chiamiamo politopo quello che nel capitolo 1 è stato definito come H-politopo o V-politopo. Definiamo orientazione di una faccia del politopo la direzione del versore normale ω verso l'esterno; essa può essere identificata con un punto della sfera unitaria \mathbb{S}^2 .

L'insieme delle orientazioni delle facce del politopo, Ω , viene indicizzata con $1, \dots, n$. Un piano J supporta il corpo convesso C se C si trova su uno dei semispazi aventi origine nel piano e C ha almeno un punto in comune con J . Per qualsiasi orientazione ω c'è un unico piano di supporto J per C con equazione $\langle \omega, x \rangle = c$.

La funzione supporto per l'orientazione può essere definita:

$$H(\omega) = c, \text{ dove } \langle \omega, x \rangle = c \text{ è il piano di supporto.}$$

Un politopo in questa configurazione può essere rappresentato da $H = (h_1, h_2, \dots, h_n) = (H(\omega_1), H(\omega_2), \dots, H(\omega_n))$, i valori della funzione supporto in Ω .

Due politopi P e Q in \mathbb{R}^3 sono simili se $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \exists t \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$P = \{x | \exists y \in Q, x = \lambda y + t\}.$$

Le aree e le orientazioni delle facce forniscono una funzione $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; se il politopo ha una faccia con orientazione ω_i il valore $A(\omega_i)$ è l'area della faccia, o altrimenti zero.

Questa funzione si può rappresentare come la n -pla di numeri $(A(\omega_1), \dots, A(\omega_n))$.

L'*immagine gaussiana estesa* di un politopo P può essere rappresentata come un insieme di vettori $N = \{n_j | n_j = \omega_j A, A = A(\omega_j)\}$.

Minkowski ha dimostrato che quando la somma di questi vettori è nulla N può rappresentare un solo politopo a meno di traslazioni.

La ricostruzione del metodo deriva dal Teorema di Minkowski, presentandosi dalle somme convesse dei corpi convessi. Il volume misto dei politopi P e Q , $V(P; Q)$, è il prodotto della funzione supporto di P e della funzione area di Q :

$$V(P, Q) = 1/3 \langle H_P, A_Q \rangle.$$

Come conseguenza delle somme convesse di politopi:

$$V(P, Q)^3 \geq V(Q)^2 V(P)$$

dove $V(P)$ è il volume di P . L'uguaglianza si ha solo nel caso in cui P e Q sono simili.

Il Teorema di Minkowski afferma che, tra tutti i politopi P di volume fissato, P che minimizza $V(P, Q)$ è simile a Q . La ricostruzione del metodo minimizza il volume misto per recuperare la forma di un oggetto.

I contenuti di questo paragrafo sono tratti da [7].

3.4 Manipolazione Meccanica di Pezzi Orientati a caso

Un sistema automatico in grado di “vedere” un oggetto in un mucchio di pezzi disposti alla rinfusa e di dirigere un braccio per afferrarlo permette di superare uno dei maggiori ostacoli all'uso esteso dei robot [fig3.2].

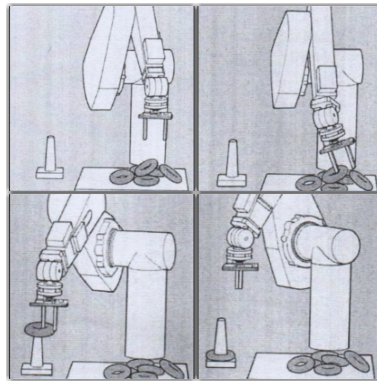


Figura 3.2: *sistema automatico*

Vi sono stati progressi significativi nella visione meccanica. Si è pensato che l'identità, la posizione e l'assetto di un pezzo possano essere dedotti facilmente, se

è conosciuta la topografia tridimensionale della sommità del contenitore di pezzi. La deduzione in realtà non è immediata, ma la topografia dei pezzi rimane un primo passo per arrivare alla descrizione. Il modo percettivo meglio conosciuto per ottenere una topografia tridimensionale da immagini bidimensionali è la percezione di profondità resa possibile dalla visione stereoscopica. Si può vedere in profondità, in parte, perché si hanno due occhi che formano immagini da punti di vista leggermente diversi. Molti sistemi visivi meccanici tentano di sfruttare la visione stereoscopica, ma sono complessi e costosi e possono trattare solo certi tipi di immagini.

Si è quindi scelto di adottare un metodo chiamato *sistema stereo fotometrico*. Il metodo determina l'orientazione superficiale di ciascuna piccola parte della superficie di un oggetto, ma non fornisce la distanza assoluta di un punto sull'oggetto. Si è scoperto che, per segmentare, identificare e trovare l'assetto di un oggetto nello spazio, è necessaria solo l'orientazione superficiale locale.

L'orientazione di una superficie in ogni punto (eccetto un punto su una piega o su uno spigolo) è definita dalla direzione di una retta perpendicolare al piano tangente alla superficie in quel punto. Ogni possibile orientazione di una superficie corrisponde all'orientazione di un punto su una sfera e ogni punto separato sulla sfera ha un'orientazione diversa. La retta che fornisce l'orientazione di un punto su una superficie arbitraria è quindi parallela alla retta che fornisce l'orientazione di un punto sulla sfera. Ne segue anche che si può specificare qualunque orientazione nello spazio dando due coordinate, diciamo la latitudine e la longitudine, di un punto sulla sfera unitaria detta *sfera gaussiana*.

Si suppone che una sfera gaussiana sia illuminata da una sorgente di luce distante. Inoltre, si suppone che il materiale sulla superficie della sfera rifletta tutta la luce e appaia ugualmente brillante da qualunque direzione lo si guardi. Poiché la sorgente è molto lontana, la distanza tra essa e un punto sulla sfera non varia significativamente con la posizione del punto. La quantità di luce catturata e riflessa da una piccola parte di superficie della sfera dipende quindi solo dall'area

apparente di quella parte di superficie, vista dalla sorgente luminosa. L'area apparente dipende a sua volta dall'angolo di inclinazione di quella parte rispetto alla direzione della luce incidente. Poiché si assume che la luminosità della superficie sferica non vari con la direzione di vista, la parte più luminosa della superficie per qualunque osservatore è l'areola attorno al punto in cui l'orientazione della superficie corrisponde alla direzione della luce incidente, cioè in altre parole il punto in cui la sorgente di luce è esattamente allo zenit.

Si suppone di costruire una tabella di valori in cui le misure di luminosità effettuate sulla sfera siano confrontate con le orientazioni corrispondenti. Se viene messo al posto della sfera un nuovo oggetto di forma arbitraria, si possono determinare le orientazioni della sua superficie direttamente dalla tabella.

E' più efficiente disaggregare temporaneamente l'informazione che dà la posizione relativa delle varie areole superficiali e occuparsi invece soltanto delle orientazioni di una superficie. Si utilizza allora l'*immagine gaussiana estesa*, o EGI, introdotta in 3.3. Gli oggetti prototipo sono immagazzinati nella memoria del calcolatore in una forma matematica simile.

L'EGI di qualunque oggetto è una sfera su cui sono riportati i contributi di ciascuna orientazione della superficie dell'oggetto rapportati all'area totale dell'oggetto. Per identificare l'oggetto scelto nel campo di vista, si ruota astrattamente nel calcolatore l'EGI del prototipo finché non combacia con l'EGI dell'oggetto osservato il più possibile. La stessa operazione viene ripetuta per ciascun prototipo immagazzinato in memoria. Si assume che l'oggetto osservato si identifichi con il prototipo che, fra tutti, dà la miglior corrispondenza; contemporaneamente la corrispondenza fornisce l'assetto dell'EGI dell'oggetto.

Per capire come venga costruito l'EGI di un oggetto si ricorda che si può associare qualunque punto della superficie dell'oggetto con un punto avente la medesima orientazione sulla sfera gaussiana. Analogamente, si può associare un'areola dell'oggetto con un'areola della sfera gaussiana, facendo corrispondere ogni punto dell'oggetto con il punto analogo sulla sfera. L'emisfero visibile dell'EGI, che corrisponde alla superficie visibile dell'oggetto osservato, si può approssimare numeri-

camente con il diagramma ad aghi. La superficie della sfera gaussiana è tassellata, cioè suddivisa in tasselli o celle, e ogni cella corrisponde ad una piccola gamma di orientazioni possibili. Ogni pixel del diagramma ad aghi, la cui orientazione cade dentro la gamma delle orientazioni corrispondenti ad una delle celle, è assegnato a quella cella [fig3.3].

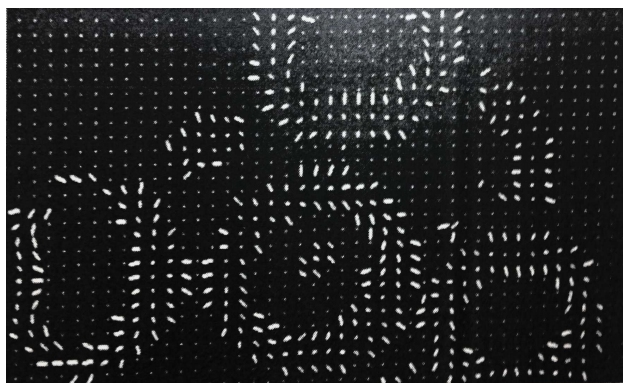


Figura 3.3: *Il diagramma ad aghi rappresenta l'orientazione delle areole superficiali del mucchio di oggetti disposti a caso. L'orientazione corrispondente a ciascun pixel della telecamera è data dalla direzione di un ago, cioè un segmento rettilineo di lunghezza costante. Gli aghi sono mostrati come se fossero attaccati alla superficie ad angolo retto come gli aculei di un porcospino e visti dalla telecamera. Il calcolatore divide l'immagine in segmenti connessi, uno dei quali è isolato per un'ulteriore elaborazione.*

Una volta che si conosce l'identità dell'oggetto osservato e l'assetto della sua EGI, si determina anche l'assetto dell'oggetto nello spazio; il controllo del braccio del robot a questo punto è relativamente facile. Il calcolatore deve determinare quali punti sulla superficie dell'oggetto siano i più adatti per la presa. In parte la decisione è dettata dalla forma dell'oggetto, ma è preferibile anche scegliere punti di presa che sporgano dall'oggetto per non interferire con gli oggetti circostanti nel contenitore. Val la pena di notare che i calcoli descritti non danno la posizione dell'oggetto. Il punto al centro della regione dell'oggetto nel piano dell'immagine della telecamera può definire grosso modo la posizione. Calcolando un diagramma

ad aghi dall'orientazione nota del prototipo si trova la posizione con una maggiore precisione. Si può confrontare il diagramma ad aghi calcolato con il diagramma ad aghi osservato. La posizione dell'oggetto nell'immagine della telecamera definisce un raggio, cioè una direzione, che parte dalla telecamera. Per comandare al braccio del robot di muoversi lungo il raggio, è necessario trasformare le coordinate spaziali misurate rispetto alla telecamera in coordinate spaziali misurate rispetto al braccio. I contenuti di questo paragrafo sono tratti da [1].

Capitolo 4

Conclusioni

Questa tesi si è focalizzata sulla topologia robotica. In particolare, in questo elaborato si è voluto sottolineare l'importanza della topografia dei pezzi nella visione robotica. Siamo partiti dalle definizioni di politopo e di *mappa gaussiana estesa*, per poi passare ad alcuni punti chiave della robotica, quali la definizione di posa di un oggetto, di “*peg in the hole*” e di *forma da X*. Questi punti ci hanno permesso di enunciare i teoremi di Minkowski ed Alexandrov che sono stati poi utilizzati nella costruzione del metodo EGI. Questo metodo è stato quindi utilizzato per determinare l'assetto di un oggetto nello spazio e permettere quindi al braccio del robot di afferrarlo.

Bibliografia

- [1] E Ackermann. «Ambienti di gioco programmabili: cos' è possibile per un bambino di quattro anni?» In: *Tecnologie Didattiche e Scienze Cognitive* 27.3 (2002), pp. 48–56.
- [2] Victor Alexandrov. «Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons». In: *Geometriae Dedicata* 107.1 (2004), pp. 169–186.
- [3] Michael E Caine, Tomás Lozano-Pérez e Warren P Seering. «Assembly strategies for chamferless parts». In: *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on.* IEEE. 1989, pp. 472–477.
- [4] Massimo Ferri. «Visione delle macchine: una sfida anche per i matematici». In: *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* 4.1 (2001), pp. 85–115.
- [5] Branko Grünbaum et al. *Convex polytopes*. Springer, 1967.
- [6] Berthold KP Horn e Katsushi Ikeuchi. «The mechanical manipulation of randomly oriented parts». In: *Scientific American* 251.2 (1984), pp. 100–111.
- [7] James J Little. «Determining Object Attitude from Extended Gaussian Images.» In: *IJCAI*. 1985, pp. 960–963.
- [8] Hermann Minkowski. «Volumen und Oberfläche». In: *Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie*. Springer, 1989, pp. 146–192.
- [9] Stuart J Russell e Peter Norvig. *Intelligenza artificiale. Un approccio moderno*. Vol. 1. Pearson Italia Spa, 2005.

-
- [10] David R Strip. «A passive mechanism for insertion of convex pegs». In: *Robotics and Automation, 1989. Proceedings., 1989 IEEE International Conference on*. IEEE. 1989, pp. 242–248.
- [11] RH Sturges. «A three-dimensional assembly task quantification with application to machine dexterity». In: *The International journal of robotics research* 7.4 (1988), pp. 34–78.
- [12] Daniel E Whitney. «Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts». In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 104.1 (1982), pp. 65–77.
- [13] Günter M Ziegler. *Lectures on polytopes*. Vol. 152. Springer Science & Business Media, 1995.