Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'OPERATORE DEL CALORE

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Cupini

Presentata da:
Mirea Di Tonno

I Sessione
Anno Accademico 2015/2016

Al nonno Antonio,
perché possiamo essere lontani quanto vuoi
ma tu sei sempre qui.

Indice

Introduzione

Questa tesi nasce dall'intento di comprendere meglio un operatore a derivate parziali usato per formulare e risolvere un problema fisico quale la propagazione del calore, l'operatore del calore.
Prima di inoltrarci nell' elaborato vero e proprio stabiliamo le notazioni.
Nel capitolo 1 richiamiamo utili teoremi come quello di Integrazione per parti e quello della Divergenza.
Nel capitolo 2 introduciamo l'operatore del calore e le funzioni caloriche mostrandone alcuni esempi.
Di seguito, deduciamo la soluzione fondamentale dell'operatore H evidenziandone alcune importanti proprietà.
Procediamo, poi, con l'introduzione dell'Identità di Green per l'operatore del calore e da questa ricaviamo la formula di media per le funzioni caloriche.
Grazie a tale formula di media evidenziamo una cruciale proprietà delle funzioni caloriche: la loro regolarità C^∞.
Alla fine del capitolo 2 deduciamo un'espressione migliorata per la formula di media calorica avente come vantaggio quello di avere un nucleo limitato.
Nel capitolo 3 ci dedichiamo interamente ad alcune conseguenza dell'espressione migliorata appena dimostrata: ricaviamo in modo diretto la disuguaglianza di Harnack e il principio di massimo forte.
Nel capitolo 4 studiamo il problema di Cauchy relativo all'operatore del calore sottolineandone la buona posizione: mostriamo, infatti, esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali della soluzione.
Nell'ultimo capitolo analizziamo i teoremi di Liouville per le funzioni caloriche.

Notazioni

Nel seguito stabiliamo le notazioni che useremo nei prossimi capitoli.
Sia N $\in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^N$ denota l'insieme delle n-uple ordinate

$$x = (x_1, ..., x_N)$$

dove $x_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, ..., N$.
Dati $x = (x_1, ..., x_N)$ e $y = (y_1, ..., y_N)$ due vettori di $\mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora definiamo

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_N + y_N)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_N).$$

Dati, inoltre, x e y come sopra è possibile definire un prodotto interno di x e y in $\mathbb{R}^N$ come

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{N} x_j y_j.$$

La norma Euclidea di $x = (x_1, ..., x_N)$ è

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{< x, x >}.$$

Definiamo, ora, tre operatori importanti, il gradiente, la divergenza e l'operatore di Laplace.
Il gradiente Euclideo è definito come

$$\nabla := (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$$

dove $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}}, j = 1, ..., N$.
La divergenza Euclidea, invece, è un operatore che agisce su una funzione $F = (f_1, ..., f_N)$ di classe almeno C^1 nel seguente modo:

$$divF = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j} f_j.$$

L'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^N$ è definito come

$$\Delta := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2.$$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, denotiamo con $C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, lo spazio delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con la derivata continua fino all'ordine k.
Sia $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ un multi-indice poniamo

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}},$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Integrazione per parti e Teorema della Divergenza

Definizione 1.1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice che Ω è un aperto regolare di $\mathbb{R}^N$ con $N \geqslant 2$ se

i) Ω è un aperto limitato,

ii) la frontiera $\partial\Omega$ è una (N-1)-varietà di classe almeno C^1,

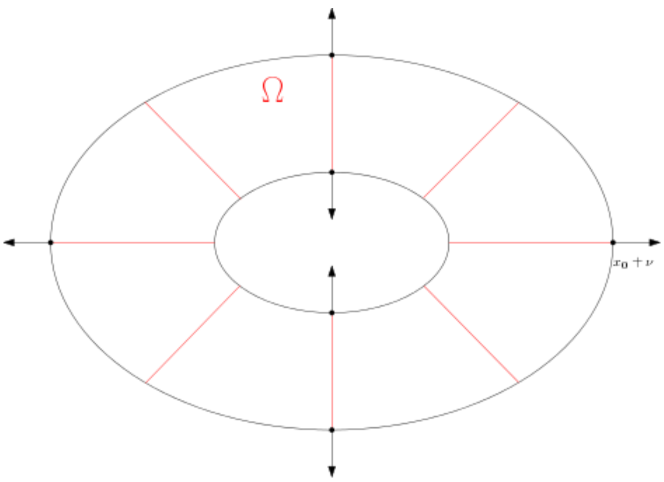
iii) in ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$ esiste la normale esterna.

Definizione 1.2. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \partial\Omega$ si dice che esiste la normale esterna in x_0 se esiste $\nu \perp \partial\Omega$ in x_0 con $|\nu| = 1$ tale che

i) $x_0 + t\nu \notin \overline{\Omega} \quad \forall t \in]0, \delta[$

ii) $x_0 - t\nu \in \Omega \quad \forall t \in]0, \delta[$

per un opportuno $\delta > 0$.



Teorema 1.1. *Sia* Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$. *Allora* $\forall j = 1, ..., N$

$$\int_\Omega \partial_{x_j} f dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j d\sigma$$

dove ν_j *indica la j-esima componente della normale esterna.*

Un teorema analogo al Teorema 1.1 è il Teorema sulla Divergenza.

Teorema 1.2 (Teorema della Divergenza)**.** *Sia* Ω *un aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$. *Allora*

$$\int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > d\sigma.$$

Dimostrazione.

$$\int_\Omega divF dx = \sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial Fj}{\partial x_j} dx = \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j d\sigma =$$

portando la sommatoria all'interno del segno d'integrale si ottiene il prodotto interno Euclideo quindi

$$= \int_{\partial\Omega} < F, \nu > d\sigma.$$

$\square$

Esempio (Area della superficie sferica)**.** Definiamo con $B(\alpha, r)$=palla euclidea di centro α e raggio $r = \{x \in \mathbb{R}^N | \, |x - \alpha| < r\}$.

$$|B(\alpha, r)| = \int_{B(\alpha,r)} dx = (x = \alpha + ry, dx = r^N dy) = \int_{B(0,1)} r^N dy = r^N \int_{B(0,1)} dy =$$
$$= r^N |B(0, 1)| = r^N \omega_n$$

Quindi $|B(\alpha, r)| = r^N \omega_n$ dove $\omega_n = |B(0, 1)|$.
D'altra parte, considerando la funzione $F(x) = \frac{x-\alpha}{N}$ con $x \in \mathbb{R}^N$ si ottiene

$$divF = \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} \frac{x_j - \alpha}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} = 1.$$

Utilizzando, quindi, il Teorema 1.2 si ottiene:

$$|B(\alpha, r)| = \int_{B(\alpha,r)} dx = \int_{B(\alpha,r)} divF(x) dx = \int_{B(\alpha,r)} div(\frac{x-\alpha}{N}) dx =$$
$$= \int_{\partial B(\alpha,r)} < \frac{x-\alpha}{N}, \nu > d\sigma =$$

dato che per ogni punto $x \in \partial B(\alpha, r)$ la normale esterna a $B(\alpha, r)$ risulta data da $\nu = \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|}$

$$= \int_{\partial B(\alpha,r)} < \frac{x-\alpha}{N}, \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|} > d\sigma = \int_{\partial B(\alpha,r)} \frac{r}{N} d\sigma = \frac{r}{N} \int_{\partial B(\alpha,r)} d\sigma = \frac{r}{N} |\partial B(\alpha, r)|.$$

Dalle due formule sopra ottenute si ha:

$$r^N \omega_n = \frac{r}{N} |\partial B(\alpha, r)|$$

Quindi

$$|\partial B(\alpha, r)| = N r^{N-1} \omega_n.$$

Si osserva, inoltre, che

$$|\partial B(\alpha, r)| = \frac{d}{dr} |B(\alpha, r)|.$$

1.2 Formula di Coarea

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo

$$M_t := \{x \in \Omega \,|\, F(x) = t\}.$$

Dato $t \in \mathbb{R}$ si dice che t è un livello critico per F se esiste $x \in \Omega$ tale che

$$F(x) = t \text{ e } \nabla F(x) = 0.$$

Allora, se $t \in \mathbb{R}$ non è un livello critico di F, M_t è una (N-1)-varietà di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1.
Il Lemma di Sard ci assicura che l'insieme

$$\{t \in \mathbb{R} \,|\, t \text{ è un livello critico di } F\}$$

ha misura nulla; di conseguenza per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$

$$M_t = \emptyset \text{ oppure } M_t = \text{(N-1)-varietà di classe} C^1.$$

Teorema 1.3 (Teorema di Federer della Coarea)**.** *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile nel senso di Lebesgue allora*

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{F=t\}} f(x) \frac{d\sigma(x)}{|\nabla F(x)|} \right) dt.$$

Esempio (di applicazione)**.** Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = |x|$.
Si osserva che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\}, \mathbb{R})$ e $|\nabla F(x)| = \left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$.
Nel seguente caso $M_t = \{x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \,|\, |x| = t\} = \partial B(0, t)$.
Dal Teorema 1.3 si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N \backslash \{0\}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial B(0,t)} f(x) d\sigma(x) \right) dt.$$

In conclusione si ottiene,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,\rho)} f(x)d\sigma(x) \right) d\rho.$$

Da questa formula si deduce direttamente

$$\int_{B(0,r)} f(x)dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(0,\rho)} f(x)d\sigma(x) \right) d\rho.$$

Inoltre, se la funzione f è una funzione radiale, cioè $f(x) = f(|x|)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,\rho)} f(|x|)d\sigma(x) \right) d\rho = \int_0^\infty f(\rho) \left(\int_{\partial B(0,\rho)} d\sigma(x) \right) d\rho =$$
$$= \int_0^\infty f(\rho) N\omega_n \rho^{N-1} d\rho = N\omega_n \int_0^\infty \rho^{N-1} f(\rho)d\rho.$$

Capitolo 2

L'operatore del calore

2.1 Operatore del calore e funzioni caloriche

L'operatore differenziale del secondo ordine

$$H := \Delta - \partial_t, \quad \text{dove } \Delta = \Delta_x := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2$$

è chiamato *operatore del calore* in $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. In questo capitolo denoteremo i punti di $\mathbb{R}^{N+1}$ con $z = (x, t), x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$.
Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, la funzione

$$u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

è detta *calorica* in Ω se

i) $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ cioè le funzioni $\partial_{x_j} u, \partial_{x_i x_j} u, \partial_t u$ esistono in ogni punto di Ω e sono continue in Ω, per ogni $i, j = 1, ..., N$.

ii)
$$Hu(z) = \Delta u(z) - \partial_t u(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega.$$

L'insieme delle funzioni caloriche in Ω è denotato con

$$\mathcal{C}(\Omega).$$

Ovviamente, $\mathcal{C}(\Omega)$ è un sottospazio lineare di $C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$, cioè dati $u, v \in \mathcal{C}(\Omega)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora $\lambda u + \mu v \in \mathcal{C}(\Omega)$.
Osserviamo inoltre che l'operatore del calore è *invariante per traslazioni*, cioè, dato $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ e $\beta \in \mathbb{R}^{N+1}$ si ha

$$H(u(z + \beta)) = (Hu)(z + \beta) \quad \forall z \in -\beta + \Omega.$$

Inoltre, H è un operatore *omogeneo di grado due* rispetto alle *dilatazioni caloriche*, cioè date le dilatazioni anisotropiche

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \quad \delta_\lambda(z) = \delta_\lambda(x,t) = (\lambda x, \lambda^2 t),\ \lambda > 0. \tag{2.1}$$

si ha

$$H(u(\delta_\lambda(z))) = \lambda^2 (Hu)(\delta_\lambda(z))$$

per ogni $\lambda > 0$ e $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\delta_\lambda(z) \in \Omega$.
Vediamo, ora, alcuni esempi di funzioni caloriche.

Esempio. Consideriamo la funzione polinomiale

$$u : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x,t) = < Ax, x > + bt \qquad \text{con } A \text{ matrice N x N reale e simmetrica e } b \in \mathbb{R}.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$Hu = 2tr(A) - b.$$

Quindi u è calorica in $\mathbb{R}^{N+1}$ se e solo se $b = 2tr(A)$.

Osservazione 1. Ogni funzione polinomiale $u : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ omogenea di grado due rispetto alla dilatazione (2.1) può essere scritta nel seguente modo

$$u(x,t) = < Ax, x > + bt.$$

Esempio. Consideriamo la funzione esponenziale

$$u : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x,t) = exp(< \alpha, x > + bt) \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^N \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$Hu = (|\alpha|^2 - b)u.$$

Quindi u è calorica in $\mathbb{R}^{N+1}$ se e solo se $b = |\alpha|^2$.

Esempio. Consideriamo la funzione esponenziale

$$u(x,t) = exp(i < \alpha, x > + bt) = e^{bt}(\cos < \alpha, x > + i \sin < \alpha, x >) \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}^N \text{ e } b \in \mathbb{R}.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$Hu = (-|\alpha|^2 - b)u.$$

Quindi u è calorica se e solo se $b = -|\alpha|^2$.

Osservazione 2. La funzione complessa

$$u(x,t) = exp(i < \alpha, x > - |\alpha|^2 t)$$

è calorica, e la sua parte reale

$$v(x,t) = e^{-|\alpha|^2 t} \cos(< \alpha, x >)$$

e la sua parte immaginaria

$$w(x,t) = e^{-|\alpha|^2 t} \sin(< \alpha, x >)$$

sono funzioni reali caloriche in $\mathbb{R}^{N+1}$.

2.2 Soluzione fondamentale di H

Abbiamo osservato che la funzione complessa

$$u(x,t) = exp(i < \alpha, x > -|\alpha|^2 t)$$

è calorica.
Consideriamo, ora,

$$\gamma(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\xi,x>-t|\xi|^2} d\xi.$$

Se $t < 0$ l'integrale diverge, quindi occorre prendere $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.
Nel caso $t > 0$, applicare l'operatore H a γ equivale ad applicare H all'integrale, inoltre, poiché è possibile portare le derivate sotto al segno d'integrale si ottiene $H\gamma = 0$, cioè la funzione γ è anch'essa calorica.
In definitiva,

$$\gamma(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\xi,x>-t|\xi|^2} d\xi$$

è una soluzione dell'operatore del calore in $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$.
Facciamo il cambiamento di variabile $\sqrt{t}\xi = \eta$, $\xi = \frac{1}{\sqrt{t}}\eta$, $d\xi = (\frac{1}{\sqrt{t}})^N d\eta$ quindi si ottiene

$$\gamma(x,t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i<\frac{\eta}{\sqrt{t}},x>-|\eta|^2} d\eta = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{x_j \eta_j}{\sqrt{t}} - \eta_j^2} d\eta_j$$

Ora,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{iy\eta-\eta^2} d\eta = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\eta-\frac{iy}{2})^2} e^{-\frac{y^2}{4}} d\eta = e^{-\frac{y^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\eta-\frac{iy}{2})^2} d\eta =$$

$$= \text{cambiamento di variabile } (\eta - \frac{iy}{2} = z) = e^{-\frac{y^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = e^{-\frac{y^2}{4}} \sqrt{\pi}.$$

In definitiva,

$$\gamma(x,t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N} \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}(\frac{x_j}{\sqrt{t}})^2} = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{N}{2}} \pi^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Per ogni fissato t si ha una gaussiana. Vogliamo normalizzare la nostra funzione, consideriamo allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} dx = \text{ cambiamento di variabile}$$

$$= \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} = y,\ x = 2y\sqrt{t},\ dx = (2\sqrt{t})^N dy\right) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{N}{2}} (2\sqrt{t})^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-y^2} dy =$$

$$= \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{N}{2}} (2\sqrt{t})^N \pi^{\frac{N}{2}} = (2\pi)^N.$$

Dividiamo, quindi, γ per $(2\pi)^N$ per normalizzarla,

$$\frac{1}{(2\pi)^N}\gamma(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Definiamo, in conclusione,

$$\Gamma : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x,t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (\frac{1}{4\pi t})^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} & t > 0 \end{cases}$$

Γ così fatta è chiamata *soluzione fondamentale dell'operatore H.*

Proposizione 2.1. *La funzione Γ ha le seguenti proprietà:*

i) Per ogni $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t)dx = 1;$$

ii) $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$;

iii) $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$*;*

iv) Γ *è calorica in* $\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\}$;

v) $H\Gamma = -\delta$ *nel senso debole delle distribuzioni.*

Dimostrazione. i) Deriva direttamente da come ci siamo costruiti Γ.

ii) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ compatto.
Allora, esistono $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $T_1 < T_2$ tali che $K \subseteq \mathbb{R}^N \times]T_1, T_2[$. Si ha, quindi,

$$\int_K \Gamma(z)dz \leq \int_{\mathbb{R}^N \times]T_1,T_2[} \Gamma(z)dz \leq \int_{T_1}^{T_2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(z)dz\right)dt \leq \text{ per i)}$$
$$\leq \int_{T_1}^{T_2} dt = T_2 - T_1 < \infty.$$

iii) Osserviamo che

$$\Gamma(0,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty.$$

Quindi $\limsup_{z\to 0} \Gamma(z) = +\infty$ ma $\liminf_{z\to 0} \Gamma(z) = 0$. Quindi si ha una singolarità in 0.
Abbiamo che $\Gamma \in C^\infty\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \,|\, t \neq 0\}$.
Se $t < 0\, \Gamma = 0$, quindi è zero una sua qualsiasi derivata.
Per dimostrare che $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$ occorre far vedere che per ogni multi-indice $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{N+1})$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, si ha

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} D^\beta\Gamma(x,t) = 0. \tag{2.2}$$

Per provare (2.2) premettiamo il seguente lemma.

Lemma 2.2. *Sia $\beta = (\beta_1, ..., \beta_{N+1})$ un multi-indice definiamo l'altezza calorica di β come*

$$|\beta|_c = \sum_{j=1}^{N} \beta_j + 2\beta_{N+1}.$$

Allora per ogni muti-indice β in $\mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ risulta

$$D^\beta \Gamma(x,t) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}} p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\Gamma(x,t)$$

dove $p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ è una funzione polinomiale in $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione del lemma. Ricordiamo che per $t > 0$

$$\Gamma(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$

Allora

$\partial_{x_j}\Gamma(x,t) = \Gamma(x,t)\left(\frac{x_j}{2t}\right) = t^{-\frac{1}{2}}\Gamma(x,t)p_j\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \Big($ in questo caso $\beta = (0, ..., 1_j, ..., 0, 0)$ quindi $|\beta|_c = 1\Big) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}}\Gamma(x,t)p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

$\partial_{x_i x_j}\Gamma(x,t) = \Gamma(x,t)\left(-\frac{\delta_{ij}}{2t} + \frac{x_i x_j}{4t^2}\right) = t^{-1}\Gamma(x,t)\left(-\frac{\delta_{ij}}{2} + \frac{x_i x_j}{4t}\right) = \Big($ in questo caso $\beta = (0, ..., 1_i, 0, ..., 1_j, 0..., 0, 0)$ quindi $|\beta|_c = 2\Big) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}}\Gamma(x,t)p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

$\partial_t\Gamma(x,t) = \Gamma(x,t)\left(-\frac{N}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right) = t^{-1}\Gamma(x,t)\left(-\frac{N}{2} + \frac{|x|^2}{4t}\right) = \Big($ in questo caso $\beta = (0, ..., 0, 1)$ quindi $|\beta|_c = 2\Big) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}}\Gamma(x,t)p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

$\square$

Dal lemma 5.1 si ha che per ogni (x,t) con $t > 0$

$$D^\beta\Gamma(x,t) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}-\frac{N}{2}} p_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)(4\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = O\left(t^{-\frac{|\beta|_c}{2}-\frac{N}{2}-q+m}\right)$$

con $q \in \mathbb{N}$ che dipende dal polinomio e $m \in \mathbb{N}$ più grande di tutto il resto quindi

$$D^\beta\Gamma(x,t) = O\left(t^{-\frac{|\beta|_c}{2}-\frac{N}{2}-q+m}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

iv) Sappiamo da *iii)* che $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\})$, inoltre utilizzando il lemma precedente possiamo calcolare $\Delta\Gamma(x,t)$; infatti

$$\Delta\Gamma(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2 \Gamma(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma(x,t)\left(\frac{x_j^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) = \Gamma(x,t)\left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t}\right).$$

Sempre dal lemma precedente abbiamo che

$$\partial_t \Gamma(x,t) = \Gamma(x,t)\left(-\frac{N}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2}\right)$$

In conclusione, abbiamo che

$$H\Gamma(x,t) = (\Delta - \partial_t)\Gamma(x,t) = \Gamma(x,t)\left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t} - \frac{|x|^2}{4t^2} + \frac{N}{2t}\right) = 0$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\Gamma(x,t)$ è calorica in $\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{0\}$.

v) Consideriamo φ funzione test.
Vogliamo provare che $H\Gamma = -\delta$ con δ =delta di Dirac.
Osserviamo che

$$H\Gamma = -\delta \Leftrightarrow < H\Gamma, \varphi >= - < \delta, \varphi >= -\varphi(0) \Leftrightarrow < \Gamma, H^*\varphi >= -\varphi(0)$$

con H^* aggiuno dell'operatore del calore$=\Delta + \partial_t$.
Dobbiamo quindi dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z) H^*\varphi(z)dz = -\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}).$$

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(z) H^*\varphi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[} \Gamma(x,t) H^*\varphi(x,t)dxdt =$$

poiché Γ è localmente sommabile

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t) H^*\varphi(x,t)dx\right)dt$$

D'altra parte

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t) H^*\varphi(x,t)dx\right)dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x,t) \Delta\varphi(x,t)dx\right)dt + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \Gamma(x,t) \partial_t\varphi(x,t)dt\right)dx$$

Integrando per parti rispetto a x nel primo integrale e rispetto a t nel secondo

$$
\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Delta\Gamma(x,t)\varphi(x,t)dx\right)dt-\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\partial_t\Gamma(x,t)\varphi(x,t)dt\right)dx=\int_{\varepsilon}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}H\Gamma(x,t)\varphi(x,t)dxdt\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx=(\Gamma \text{ è calorica in } \mathbb{R}^{N+1}_+)=\\
&-\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx.
\end{aligned}
$$

Allora

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,t)H^*\varphi(x,t)dx\right)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}-\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx.
$$

Osserviamo che

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx-\varphi(0,0)=&\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\Gamma(x,\varepsilon)\Big)\Big(\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(0,0)\Big)dx=\\
&\Big(\text{cambiamento di variabile } x=2\sqrt{\varepsilon}y,\\
&dx=(2\sqrt{\varepsilon})^N dy\Big)\\
&=(\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}e^{-|y|^2}\Big(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)-\varphi(0,0)\Big)dy.
\end{aligned}
$$

Possiamo passare il limite sotto al segno d'integrale, quindi otteniamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)dx-\varphi(0,0)=&\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-|y|^2}\Big(\varphi(2\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)-\varphi(0,0)\Big)dy\\
=&0
\end{aligned}
$$

□

2.3 Identità di Green per H

In questo paragrafo vogliamo introdurre la *formula di reciprocità* per l'operatore del calore H, dalla quale, poi, ricaveremo l' *identità di Green.*
Per ottenere la *formula di reciprocità* è cruciale usare H^*, l'operatore aggiunto di H:

$$
H^*=\Delta+\partial_t.
$$

Risulta fondamentale, inoltre, ricordare la *formula di reciprocità* per l'operatore di Laplace.

Proposizione 2.3 (Formula di reciprocità per l'operatore di Laplace.). *Dato* Ω *aperto regolare di* $\mathbb{R}^N$ *di classe* $C^k, k \geq 1$ *e* $u, v \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$*, si ha:*

$$div(v\nabla u - u\nabla v) = v\Delta u - u\Delta v. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Iniziamo calcolando $div(v\nabla u)$.

$$div(v\nabla u) = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}(v\partial_{x_j} u) = \sum_{j=1}^{N} v\partial_{x_j}^2 u + \partial_{x_j} v\partial_{x_j} u = v\Delta u + < \nabla v, \nabla u > .$$

Quindi si ha

$$div(v\nabla u) = v\Delta u + < \nabla v, \nabla u > .$$

Analogamente, invertendo il ruolo di u e v, si ottiene

$$div(u\nabla v) = u\Delta v + < \nabla u, \nabla v > .$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$div(v\nabla u - u\nabla v) = v\Delta u + < \nabla v, \nabla u > -u\Delta v - < \nabla u, \nabla v >= v\Delta u - u\Delta v.$$

□

Ora siamo pronti per ricavare la *formula di reciprocità* per l'operatore del calore H. Siano $u, v \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, si ha:

$$\begin{aligned} uH^*v - vHu &= u(\Delta_x + \partial_t)v - v(\Delta_x - \partial_t)u = u\Delta_x v - v\Delta_x u + u\partial_t v + v\partial_t u = \\ &\text{utilizzando la formula di reciprocità per l'operatore di Laplace 2.3} \\ &= div_x(u\nabla_x v - v\nabla_x u) + \partial_t(uv). \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la *formula di reciprocità per l'operatore del calore*

$$uH^*v - vHu = div_x(u\nabla_x v - v\nabla_x u) + \partial_t(uv). \tag{2.4}$$

Dato che nel membro di destra dell'equazione (2.4) compare una divergenza è possibile integrare usando il Teorema della Divergenza, ricordato nel capitolo precedente. Consideriamo a tal proposito Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^{N+1}$.
Denotiamo, poi, con

$$\nu = (\nu_x, \nu_t), \quad \nu_x \in \mathbb{R}^N, \quad \nu_t \in \mathbb{R},$$

la normale esterna a Ω, e con

$$\frac{\partial}{\partial_{\nu_x}} :=< \nabla_x, \nu_x >$$

la derivata normale rispetto a ν_x.
Allora, date $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, dalla *formula di reciprocità* (2.4) integrando su Ω e usando il Teorema sulla Divergenza otteniamo

$$\int_{\Omega} (uH^*v - vHu)dz = \int_{\partial\Omega} \left(\left(u\frac{\partial v}{\partial_{\nu_x}} - v\frac{\partial u}{\partial_{\nu_x}} \right) + uv\nu_t \right) d\sigma. \tag{2.5}$$

La formula (2.5) appena trovata è chiamata *identità di Green* per l'operatore H.
Se prendiamo $v = 1$ in (2.5) abbiamo

$$\int_{\Omega} Hudz = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial_{\nu_x}} - u\nu_t \right) d\sigma. \tag{2.6}$$

In particolare, se $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ e u è calorica in Ω allora

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial_{\nu_x}} - u\nu_t \right) d\sigma = 0.$$

2.4 Formula di media per le funzioni caloriche

L'obiettivo si questo paragrafo è quello di mostrare che le funzioni caloriche soddisfano una formula di media.
A tal proposito è bene introdurre alcuni concetti nuovi.

Definizione 2.1 (Palla del calore)**.** Per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $r > 0$ possiamo definire

$$\Omega_r(z_0) := \{z \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \Gamma(z_0 - z) > \left(\frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{N}{2}} \}.$$

$\Omega_r(z_0)$ è chiamata palla del calore di centro z_0 e raggio r.

Osservazione 3. $z_0 \in \partial\Omega_r(z_0)$.

Osservazione 4. Sia $z_0 = (x_0, t_0)$ allora abbiamo

$$\Omega_r(z_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} \; |0 < t_0 - t < r, \, |x_0 - x|^2 < 2N(t_0 - t) \log \left(\frac{r}{t_0 - t} \right) \}.$$

Osservazione 5. $\partial\Omega_r(z_0) \backslash z_0$ è una varietà di classe C^∞ e di dimensione N, mentre $\partial\Omega_r(z_0)$ è una varietà di classe C^1.

Definizione 2.2. Dato $z = (x, t)$ con $t \neq 0$ possiamo definire

$$W(z) = W(x, t) := \frac{1}{4} \left(\frac{|x|}{t} \right)^2.$$

Ora siamo pronti per introdurre la formula di Poisson-Jensen calorica.
Da questa ne dedurremo, poi, la formula di media per le funzioni caloriche.

Teorema 2.4 (Formula di Poisson-Jensen calorica)**.** *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ *aperto e sia* $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$. *Allora, per ogni* $z_0 \in \Omega$ *e* $r > 0$ *tale che* $\overline{\Omega_r(z_0)} \subseteq \Omega$, *si ha*

$$u(z_0) = M_r(u)(z_0) - N_r(Hu)(z_0), \tag{2.7}$$

dove

$$M_r(u)(z_0) := \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z_0)} u(z)W(z_0 - z)dz$$

e

$$N_r(f)(z_0) := \frac{N}{2r^{\frac{N}{2}}} \int_0^r \rho^{\frac{N}{2}-1} \left(\int_{\partial\Omega_\rho(z_0)} \left(\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \right) f(z)dz \right) d\rho.$$

Dimostrazione. Per prima cosa per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$A_\varepsilon := \Omega_r(z_0) \cap \{t < t_0 - \varepsilon\}.$$

Consideriamo, quindi, l'identità di Green per H in A_ε per la coppia di funzioni u e v dove

$$v := \Gamma(z_0 - z).$$

Quindi si ha

$$-\int_{A_\varepsilon} vHudz = \int_{\partial A_\varepsilon} \left(\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu_x} - v\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) + uv\nu_t \right) d\sigma \tag{2.8}$$

Osserviamo che $\partial A_\varepsilon = \partial_\varepsilon \Omega_r(z_0) \cup \Sigma_\varepsilon$ dove

$$\partial_\varepsilon \Omega_r(z_0) = \partial\Omega_r(z_0) \cap \{t \leq t_0 - \varepsilon\}$$

e

$$\Sigma_\varepsilon = \Omega_r(z_0) \cap \{t = t_0 - \varepsilon\}.$$

Quindi (2.8) diventa

$$\begin{aligned} -\int_{A_\varepsilon} vHudz = &\int_{\partial_\varepsilon\Omega_r(z_0)} \left(\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu_x} - v\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) + uv\nu_t \right) d\sigma \\ &+ \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu_x} - v\frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) + uv\nu_t \right) d\sigma = \\ &= J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Iniziamo analizzando il termine di sinistra dell'equazione (2.9); dato che $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ abbiamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{A_\varepsilon} vHudz = -\int_{\Omega_r(z_0)} vHudz.$$

Consideriamo, ora , il termine J_ε^2.
Osserviamo preliminarmente, però, che

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon = &\Omega_r(z_0) \cap \{t = t_0 - \varepsilon\} = \text{ per l'osservazione 4 } = \\ = &\{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0|^2 < 2N\varepsilon \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\}. \end{aligned}$$

Grazie a quanto appena sottolineato è possibile riscrivere J_ε^2 nel seguente modo:

$$J_\varepsilon^2 = \int_{B_\varepsilon} u(x, t_0 - \varepsilon)\Gamma(x_0 - x, \varepsilon)dx$$

dove

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < r(\varepsilon)\} \quad \text{con } r(\varepsilon) = \sqrt{2N\varepsilon \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}.$$

Consideriamo, ora, il cambiamento di variabile $x = x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}y,\ dx = (2\sqrt{\varepsilon})^N dy$ allora otteniamo

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon^2 =&\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{B_\varepsilon} u(x, t_0 - \varepsilon)e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4\varepsilon}}dx = \\
=&\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} (4\varepsilon)^{\frac{N}{2}} \int_{|y|<\frac{r(\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}, t_0 - \varepsilon)e^{|y|^2}dy = \\
=&\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{|y|<\frac{r(\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}, t_0 - \varepsilon)e^{|y|^2}dy.
\end{aligned}$$

Adesso, poiché

$$\frac{r(\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{2N\varepsilon \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}}{2\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{N}{2}\log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon^2 =& \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{|y|<\frac{r(\varepsilon)}{2\sqrt{\varepsilon}}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}, t_0 - \varepsilon)e^{|y|^2}dy = \\
=&\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} u(x_0, t_0)e^{|y|^2}dy = u(x_0, t_0)\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{N}{2}} (\pi)^{\frac{N}{2}} = \\
=&u(x_0, t_0) = u(z_0).
\end{aligned}$$

Consideriamo, ora, il termine J_ε^1.
Osserviamo innanzitutto che su $\partial_\varepsilon\Omega_r(z_0)$

$$v = \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}}$$

quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon^1 &= \int_{\partial_\varepsilon\Omega_r(z_0)} u\frac{\partial v}{\partial \nu_x}d\sigma + \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\partial_\varepsilon\Omega_r(z_0)} \left(u\nu_t - \frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right)d\sigma = \\
&= I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Adesso,

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon^2 =& \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\partial_\varepsilon \Omega_r(z_0)} \left(u\nu_t - \frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right) d\sigma = \\
=& \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\partial A_\varepsilon} \left(u\nu_t - \frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right) d\sigma + \int_{\Sigma_\varepsilon} O(1) d\sigma = \text{ dall'equazione (2.6)} \\
=& -\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{A_\varepsilon} Hu dz + O((r(\varepsilon))^N).
\end{aligned}
$$

Allora,

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon^2 = -\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z_0)} Hu dz.
$$

Per valutare I_ε^1 ricordiamo che

$$
\nu(z) = -\frac{\nabla_z \Gamma(z_0 - z)}{|\nabla_z \Gamma(z_0 - z)|}, \quad z \in \partial_\varepsilon \Omega_r(z_0).
$$

Di conseguenza

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \nu_x}(z) =& < \nabla_x \Gamma(z_0 - z), -\frac{\nabla_x \Gamma(z_0 - z)}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} >= \\
=& \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} < \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)}, \left(-\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} >= \\
=& -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \frac{1}{4} \left(\frac{|x_0 - x|}{(t_0 - t)}\right)^2 e^{\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}\right)^2} = \\
=& (z \in \partial_\varepsilon \Omega_r(z_0)) = -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \left[\frac{1}{4} \left(\frac{|x_0 - x|}{(t_0 - t)}\right)^2\right] = \\
=& -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N W(z_0 - z).
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon^{(1)} =& \lim_{\varepsilon \to 0} -\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \int_{\partial_\varepsilon \Omega_r(z_0)} u(z) W(z_0 - z) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} d\sigma(z) = \\
=& -\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \int_{\partial \Omega_r(z_0)} u(z) W(z_0 - z) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} d\sigma(z).
\end{aligned}
$$

In conclusione, dall'equazione (2.9) facendo il limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_r(z_0)} vHu dz =& u(z_0) - \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \int_{\Omega_r(z_0)} Hu dz \\
& - \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \int_{\partial \Omega_r(z_0)} u(z) W(z_0 - z) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(z_0 - z)|} d\sigma(z)
\end{aligned}
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
u(z_0) =& \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N \int_{\partial\Omega_r(z_0)} u(z)W(z_0 - z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0 - z)|}d\sigma(z) \\
&- \int_{\Omega_r(z_0)} \left(\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^N\right) Hudz.
\end{aligned}
$$

Si osserva, inoltre, che l'identità appena trovata è valida per ogni $\rho \in]0, r[$ quindi

$$
\begin{aligned}
u(z_0) =& \left(\frac{1}{4\pi \rho}\right)^N \int_{\partial\Omega_\rho(z_0)} u(z)W(z_0 - z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0 - z)|}d\sigma(z) \\
&- \int_{\Omega_\rho(z_0)} \left(\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi \rho}\right)^N\right) Hudz.
\end{aligned}
$$

Moltiplicando entrambi i membri per ρ^α con $\alpha = \frac{N}{2} - 1$ e integrando rispetto a ρ tra 0 e r abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \rho^\alpha u(z_0)d\rho =& \left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int_0^r \rho^{\alpha - N}\left(\int_{\partial\Omega_\rho(z_0)} u(z)W(z_0 - z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0 - z)|}d\sigma(z)\right)d\rho \\
&- \int_0^r \rho^\alpha \left(\int_{\Omega_\rho(z_0)} \left(\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi \rho}\right)^N\right) Hudz\right)d\rho.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Consideriamo il membro di sinistra di (2.11)

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \rho^\alpha u(z_0)d\rho =& u(z_0)\int_0^r \rho^{\frac{N}{2}-1}d\rho = u(z_0)\left[\frac{2\rho^{\frac{N}{2}}}{N}\right]_0^r = \\
=& \frac{2}{N}r^{\frac{N}{2}}u(z_0).
\end{aligned}
$$

Valutiamo, ora, il membro di destra di (2.11)

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{4\pi}\right)^N \int_0^r \rho^{\alpha - N}\left(\int_{\partial\Omega_\rho(z_0)} u(z)W(z_0 - z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0 - z)|}d\sigma(z)\right)d\rho \\
&- \int_0^r \rho^\alpha \left(\int_{\Omega_\rho(z_0)} \left(\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi \rho}\right)^N\right) Hudz\right)d\rho = V_1 + V_2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_1 =&\left(\frac{1}{4\pi}\right)^N\int_0^r \rho^{-\frac{N}{2}-1}\left(\int_{\partial\Omega_\rho(z_0)} u(z)W(z_0-z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0-z)|}d\sigma(z)\right)d\rho=\\
=&\left(\frac{1}{4\pi}\right)^N\int_0^r \rho^{-\frac{N}{2}-1}\left(\int_{\Gamma=\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}}} u(z)W(z_0-z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0-z)|}d\sigma(z)\right)d\rho=\\
&\left(\text{cambiamento di variabile } \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}}=s,\ \rho=\frac{1}{4\pi}s^{-\frac{2}{N}},\ d\rho=-\frac{2}{N}\frac{1}{4\pi}s^{-\frac{2}{N}-1}ds\right)=\\
=&-\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{N+1}\frac{2}{N}\int_\infty^{(\frac{1}{4\pi r})^{\frac{N}{2}}}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-\frac{N}{2}-1}\left(\int_{\Gamma=s} u(z)W(z_0-z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0-z)|}d\sigma(z)\right)ds=\\
=&\frac{2}{N}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\int_{(\frac{1}{4\pi r})^{\frac{N}{2}}}^\infty\left(\int_{\Gamma=s} u(z)W(z_0-z)\frac{1}{|\nabla_x\Gamma(z_0-z)|}d\sigma(z)\right)ds=\\
=&\frac{2}{N}(4\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\Omega_r(z_0)} u(z)W(z_0-z)dz.
\end{aligned}
$$

In definitiva, dopo le dovute osservazioni da (2.11) otteniamo

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{N}r^{\frac{N}{2}}u(z_0)=&\frac{2}{N}(4\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\Omega_r(z_0)}u(z)W(z_0-z)dz\\
&-\int_0^r\rho^\alpha\left(\int_{\Omega_\rho(z_0)}\left(\Gamma(z_0-z)-\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^N\right)Hudz\right)d\rho
\end{aligned}
$$

Dividendo entrambi i membri per $\frac{N}{2}r^{-\frac{N}{2}}$ si ottiene in conclusione

$$
\begin{aligned}
u(z_0)=&(4\pi r)^{-\frac{N}{2}}\int_{\Omega_r(z_0)}u(z)W(z_0-z)dz\\
&-\frac{N}{2}r^{-\frac{N}{2}}\int_0^r\rho^{\frac{N}{2}-1}\left(\int_{\Omega_\rho(z_0)}\left(\Gamma(z_0-z)-\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^N\right)Hudz\right)d\rho=\\
=&M_r(u)(z_0)-N_r(Hu)(z_0).
\end{aligned}
$$

Siamo così giunti alla formula di Poisson-Jensen calorica. □

Corollario 2.5 (Teorema di Pini-Watson, formula di media per le funzioni caloriche)**.** *Sia* $\Omega\subseteq\mathbb{R}^{N+1}$ *aperto e sia* $u\in C(\Omega)$. *Allora, per ogni* $z_0\in\Omega$ *e* $r>0$ *tale che* $\overline{\Omega_r(z_0)}\subseteq\Omega$, *si ha*

$$
u(z_0)=M_r(u)(z_0)=\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}}\int_{\Omega_r(z_0)}u(z)W(z_0-z)dz \tag{2.12}
$$

Dimostrazione. Poiché per ipotesi u è calorica si ha che $Hu=0$ e di conseguenza $N_r(Hu)(z_0)=0$.
Allora la formula di Poisson-Jensen (2.7) diventa

$$
u(z_0)=M_r(u)(z_0)=\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}}\int_{\Omega_r(z_0)}u(z)W(z_0-z)dz.
$$

Il teorema è quindi dimostrato. □

Partendo dal Teorema di Pini-Watson (Corollario 2.5) è possibile osservare che l'operatore W che compare nella formula (2.12) è chiamato nucleo e risulta essere non negativo.
Inoltre prendendo $u = 1$ nella formula (2.12) otteniamo

$$\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z_0)} W(z_0 - z)dz = 1$$

per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $r > 0$. Allora, $M_r(u)(z_0)$ definito nella formula di Poisson-Jensen è ben definito ed è finito per ogni funzione continua u definita in un aperto contenente $\overline{\Omega_r(z_0)}$.

2.5 Caratterizzazione delle funzioni caloriche mediante la proprietà di media

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di provare che la proprietà di media caratterizza le funzioni caloriche. A tal fine, iniziamo con il fissare alcune definizioni.

Definizione 2.3. Diciamo che u soddisfa la proprietà di media calorica in Ω se

$$u(z_0) = M_r(u)(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega, \forall r > 0 \text{ tale che } \overline{\Omega_r(z_0)} \subseteq \Omega.$$

Dato, inoltre, $z_0 \in \Omega$ indichiamo con

$$R(z_0) := \sup\{r > 0 \,:\, \Omega_r(z_0) \subseteq \Omega\}.$$

Teorema 2.6. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ aperto e sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i) u soddisfa la proprietà di media calorica in Ω,

ii) $r \longrightarrow M_r(u)(z_0)$ è costante in $]0, R(z_0)[$ $\forall z_0 \in \Omega$,

iii) $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e $Hu = 0$ in Ω.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$ Se u soddisfa la proprietà di media calorica in Ω allora per definizione per ogni $r \in]0, R(z_0)[$ e per ogni $z_0 \in \Omega$ si ha $M_r(u)(z_0) = u(z_0)$ quindi effettivamente l'applicazione $r \longrightarrow M_r(u)(z_0)$ è costante.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Risulta essere verificata per il Teorema di Pini-Watson (Corollario 2.5).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Per $0 < r < R(z_0)$, dalla continuità di u si ha

$$\begin{aligned}&|u(z_0) - M_r(u)(z_0)| = |M_r(u(z_0) - u)(z_0)| \\ &\leq \sup_{\Omega_r(z_0)} |u - u(z_0)| \xrightarrow[r \to 0]{} 0\end{aligned}$$

Quindi per ogni $z_0 \in \Omega$ abbiamo

$$\lim_{r \to 0} M_r(u)(z_0) = u(z_0).$$

Allora, poiché $r \longrightarrow M_r(u)(z_0)$ è costante in $]0, R(z_0)[$ per ipotesi si ha

$$u(z_0) = M_r(u)(z_0) \quad \forall r \in]0, R(z_0)[$$

quindi (i) è soddisfatta.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Questa è la parte difficile della dimostrazione. Tale prova è basata sui seguenti lemmi.

Lemma 2.7. *Sia $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ aperto. Se u soddisfa la proprietà di media calorica in Ω allora u_ε, il mollificatore di Friedrichs di u, soddisfa la proprietà di media calorica in $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : dist(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.*

Dimostrazione. Sia $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R})$ con $suppJ \subseteq B(0,1)$. Assumiamo, inoltre, $J \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^{N+1}} J(\zeta) d\zeta = 1$.
Poniamo poi

$$J_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-N-1} J\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

e definiamo

$$u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R} \qquad u_\varepsilon(z) = \int_\Omega u(\zeta) J_\varepsilon(z - \zeta) d\zeta = \int_{B(0,\varepsilon)} u(z - \zeta) J_\varepsilon(\zeta) d\zeta.$$

Se u soddisfa la proprietà di media calorica in Ω allora

$$u(z) = \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z)} u(\zeta) W(z - \zeta) d\zeta = \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(0)} u(z - \zeta) W(\zeta) d\zeta$$

per ogni $z \in \Omega$ e $r \in]0, R(z)[$.
Consideriamo ora $z \in \Omega_\varepsilon$ e $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_r(z)} \subseteq \Omega_\varepsilon$.
Abbiamo

$$\begin{aligned}
(4\pi r)^{\frac{N}{2}} M_r(u_\varepsilon)(z) = & \int_{\Omega_r(0)} u_\varepsilon(z - \zeta) W(\zeta) d\zeta = \\
& = \int_{\Omega_r(0)} \left(\int_{B(0,\varepsilon)} u(z - \zeta - \eta) J_\varepsilon(\eta) d\eta \right) W(\zeta) d\zeta = \text{invertendo gli} \\
& \text{integrali } = \int_{B(0,\varepsilon)} J_\varepsilon(\eta) \left(\int_{\Omega_r(0)} u(z - \zeta - \eta) W(\zeta) d\zeta \right) d\eta = \\
& \text{poiché u soddisfa la proprietà di media calorica} \\
& = (4\pi r)^{\frac{N}{2}} \int_{B(0,\varepsilon)} u(z - \eta) J_\varepsilon(\eta) d\eta = (4\pi r)^{\frac{N}{2}} u_\varepsilon(z).
\end{aligned}$$

In definitiva, dividendo entrambi i membri per $(4\pi r)^{\frac{N}{2}}$ si ha

$$M_r(u_\varepsilon)(z) = u_\varepsilon(z)$$

per ogni $z \in \Omega_\varepsilon$ e $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_r(z)} \subseteq \Omega_\varepsilon$; ovvero u_ε verifica la proprietà di media calorica in Ω_ε. $\square$

Lemma 2.8. *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$. Se u soddisfa la proprietà di media calorica allora $Hu = 0$ in Ω.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo quindi che esista $z_0 \in \Omega$ tale che $Hu(z_0) \neq 0$. Possiamo assumere $Hu(z_0) > 0$, e per continuità esisterà $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_r(z_0)} \subseteq \Omega$ e $Hu(z) > 0$ per ogni $z \in \Omega_r(z_0)$.
Inoltre dato che $\Gamma(z_0 - z) - \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} > 0$ se $z \in \Omega_\rho(z_0)$ si ha che $N_r(Hu)(z_0) > 0$ di conseguenza dalla formula di Poisson-Jensen calorica otteniamo

$$u(z_0) > M_r(u)(z_0).$$

E questo contraddice la nostra ipotesi.
In definitiva necessariamente $Hu(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$. $\square$

Utilizzando i lemmi appena introdotti possiamo concludere la dimostrazione del teorema provando effettivamente che $(i) \Rightarrow (iii)$.
Se u soddisfa la proprietà di media calorica allora per il Lemma (2.7) si ha che esiste u_ε il mollificatore di Friedrichs di u, che soddisfa la proprietà di media calorica in Ω_ε.
D'altra parte $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R})$ quindi per il Lemma (2.8) si ha che $Hu_\varepsilon = 0$ in Ω_ε.
Sappiamo inoltre che

$$u_\varepsilon \underset{K}{\longrightarrow} u \text{ per } \varepsilon \to 0, \quad \forall K \subset \Omega, K \text{ compatto.}$$

Possiamo, allora, utilizzare il seguente teorema che enunciamo senza dimostrazione.

Teorema 2.9. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni caloriche in Ω. Supponiamo, inoltre, che esista $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che*

$$u_j \rightrightarrows u \quad \forall K \subset \Omega, K \textit{ compatto.}$$

Allora $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e $Hu = 0$ in Ω.

Dal teorema appena enunciato si evince che $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e $Hu = 0$ in Ω e questo conclude la dimostrazione. $\square$

2.6 Espressione migliorata per la formula di media calorica

In questo paragrafo vogliamo generalizzare la formula di media calorica per ottenere una nuova formula in cui il nucleo risulti essere limitato.
Consideriamo $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{N+1})$ e definiamo una nuova funzione in $\mathbb{R}^{N+m+1}$ con $m \in \mathbb{N}$

$$u_m(x,y,t) = u(x,t) \quad \text{con } y \in \mathbb{R}^m \text{ e } (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Definiamo, poi, un nuovo operatore

$$H_m = H + \Delta_y = \Delta_x + \Delta_y - \partial_t.$$

Poiché $u_m(x,y,t) = u(x,t)$, quindi è indipendente dalla variabile y, è facile osservare che

$$H_m u_m = Hu.$$

Ricordiamo, inoltre, che $\Gamma(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} exp\Big[-\frac{|x|^2}{4t}\Big]$ indica la soluzione fondamentale dell'operatore del calore H, e definiamo

$$\Gamma_m(x,y,t) = \Gamma(x,t)\Bigg[(4\pi t)^{-\frac{m}{2}} exp\bigg(-\frac{|y|^2}{4t}\bigg)\Bigg]$$

come la soluzione fondamentale del nuovo operatore introdotto H_m in $\mathbb{R}^{N+m+1}$.
Dimostriamo che, effettivamente, $H_m\Gamma_m = 0$.
Per semplicità introduciamo la seguente notazione

$$\Gamma_m(x,y,t) = \Gamma(x,t)K(y,t).$$

$$\begin{aligned} H_m\Gamma_m = (H+\Delta_y)\Big(\Gamma(x,t)K(y,t)\Big) = &\text{ poiché } H\Gamma(x,t) = 0 \text{ e } \Gamma(x,t) \\ \text{è indipendente da } y = \Gamma(x,t)\Big(HK(y,t)\Big) &+ \Gamma(x,t)\Big(\Delta_y K(y,t)\Big) = \\ = \Gamma(x,t)\Big((\Delta_x + \Delta_y - \partial_t)K(y,t)\Big) &= \Gamma(x,t)\Big((\Delta_y - \partial_t)K(y,t)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Prima di procedere occorre introdurre alcune notazioni.
Per $m \in \mathbb{N}$ fissato definiamo

$$\begin{aligned} &\phi(z_0 - z) = \bigg(\frac{1}{4\pi(t_0-t)}\bigg)^{\frac{m}{2}}\Gamma(z_0 - z) = \bigg(\frac{1}{4\pi(t_0-t)}\bigg)^{\frac{N+m}{2}} e^{\frac{-|x_0-x|^2}{4(t_0-t)}}, \\ &R_r^2(z_0 - z) = 4(t_0-t)ln\Big[(4\pi r)^{\frac{N+m}{2}}\phi(z_0 - z)\Big], \\ &\Omega_r^m(z_0) = \bigg\{z \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \phi(z_0 - z) > \bigg(\frac{1}{4\pi r}\bigg)^{\frac{N+m}{2}}\bigg\}. \end{aligned}$$

Inoltre ricordiamo che data $u \in C^{2,1}(\Omega, \mathbb{R})$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e $z_0 \in \Omega$ vale la formula di Poisson-Jensen calorica introdotta nei precedenti capitoli; quindi si ha

$$u(z_0) = M_r(u)(z_0) - N_r(Hu)(z_0).$$

Abbiamo anche visto che nel caso in cui u sia calorica è verificato il Teorema di Pini-Watson, quindi

$$u(z_0) = M_r(u)(z_0) = \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z_0)} u(z)W(z_0 - z)dz.$$

Consideriamo, ora, la versione $(N+m+1)-$ dimensionale della formula appena ricordata applicata alla funzione u_m. Denotiamo, a tal fine, con $\widehat{z} = (x, y, t)$ i punti di $\mathbb{R}^{N+m+1}$, con $z = (x, t)$ i punti di $\mathbb{R}^{N+1}$ e ricordiamo che $u_m(\widehat{z}) = u(z)$.
In definitiva si ha

$$u(z_0) = \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Gamma_m(\widehat{z_0}-\widehat{z})>(\frac{1}{4\pi r})^{\frac{N+m}{2}}} u(z)W(\widehat{z_0} - \widehat{z})d\widehat{z}. \tag{2.13}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$W(\widehat{z_0} - \widehat{z}) = \frac{1}{4}\left(\frac{|x_0 - x|}{t_0 - t}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{|y_0 - y|}{t_0 - t}\right)^2 = W(z_0 - z) + \frac{1}{4}\left(\frac{|y_0 - y|}{t_0 - t}\right)^2.$$

Vogliamo valutare (2.13), per farlo iniziamo analizzando meglio il dominio di integrazione.

$$\begin{aligned}
&\Gamma_m(\widehat{z_0} - \widehat{z}) > (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \\
\Longleftrightarrow &\Gamma(z_0 - z)K(y_0 - y, t_0 - t) > (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \\
\Longleftrightarrow &K(y_0 - y, t_0 - t) > \frac{(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}}{\Gamma(z_0 - z)} \\
\Longleftrightarrow &\Big(4\pi(t_0 - t)\Big)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}} > \frac{(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}}{\Gamma(z_0 - z)} \\
\Longleftrightarrow &e^{-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}} > \Big(4\pi(t_0 - t)\Big)^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}}{\Gamma(z_0 - z)} \\
\Longleftrightarrow &- \frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)} > ln\left[\Big(4\pi(t_0 - t)\Big)^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}}{\Gamma(z_0 - z)}\right] \\
\Longleftrightarrow &- |y_0 - y|^2 > 4(t_0 - t)ln\left[\Big(4\pi(t_0 - t)\Big)^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}}{\Gamma(z_0 - z)}\right] \\
\Longleftrightarrow &|y_0 - y|^2 < 4(t_0 - t)ln\left[(4\pi r)^{\frac{N+m}{2}} \phi(z_0 - z)\right] \\
\Longleftrightarrow &|y_0 - y|^2 < R_r^2(z_0 - z) \\
\Longleftrightarrow &|y_0 - y| < R_r(z_0 - z).
\end{aligned}$$

Se

$$(4\pi r)^{\frac{N+m}{2}}\phi(z_0 - z) > 1 \text{ cioè } \phi(z_0 - z) > (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \text{ e quindi } z \in \Omega_r^m(z_0).$$

Grazie a questa osservazione possiamo riscrivere (2.13) nel seguente modo

$$\begin{aligned}
u(z_0) =&\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} \left(\int_{|y_0-y|<R_r(z_0-z)} u(z)\left(W(z_0-z) + \frac{|y_0-y|^2}{4(t_0-t)^2}\right)dy\right)dz = \\
=&\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)W(z_0-z)\left(\int_{|y_0-y|<R_r(z_0-z)} dy\right)dz \\
&+\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)\left(\int_{|y_0-y|<R_r(z_0-z)} \frac{|y_0-y|^2}{4(t_0-t)^2}dy\right)dz = \\
=&\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)W(z_0-z)R_r^m(z_0-z)\omega_m dz \\
&+\left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)\omega_m \frac{m}{m+2}\frac{R_r^{m+2}(z_0-z)}{4(t_0-t)^2}dz = \\
=&\omega_m(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)R_r^m(z_0-z)\left[W(z_0-z) + \frac{m}{m+2}\frac{R_r^2(z_0-z)}{4(t_0-t)^2}\right]dz
\end{aligned}$$

dove ω_m denota la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^m$.
In conclusione siamo giunti al seguente risultato:

Proposizione 2.10. *Data $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{N+1})$ e calorica, dato $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$. Per ogni $r > 0$ si ha*

$$u(z_0) = \omega_m(4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)R_r^m(z_0-z)\left[W(z_0-z)+\frac{m}{m+2}\frac{R_r^2(z_0-z)}{4(t_0-t)^2}\right]dz. \tag{2.14}$$

Osservazione 6. Se $m = 0$ ponendo $\omega_0 = 1$ si ottiene

$$u(z_0) = (4\pi r)^{-\frac{N}{2}} \int_{\Omega_r(z_0)} u(z)W(z_0-z)dz$$

quindi ci riconduciamo al Teorema di Pini-Watson (2.5).

Consideriamo, ora, $m \in \mathbb{N}$, $z, z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e introduciamo le seguenti notazioni

$$\begin{aligned}
&W_r^m(z_0-z) = (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}\omega_m R_r^m(z_0-z)\left(W(z_0-z) + \frac{m}{m+2}R_r^2(z_0-z)\frac{1}{4(t_0-t)^2}\right), \\
&u(z_0) = u_m(z_0) = u_r^m(z_0).
\end{aligned}$$

Grazie alle notazioni appena introdotte possiamo riscrivere la formula (2.14) nel seguente modo

$$u_r^m(z_0) = \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z)W_r^m(z_0-z)dz. \tag{2.15}$$

In definitiva, abbiamo ottenuto il risultato che segue.

Proposizione 2.11. *Sia $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^{N+1})$ soluzione di $Hu = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1}$, allora per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $r > 0$ si ha*

$$u(z_0) = \int_{\Omega_r^m(z_0)} u(z) W_r^m(z_0 - z) dz \tag{2.16}$$

dove $m \in \mathbb{N}$ è fissato arbitrariamente. Il vantaggio della formula (2.16) rispetto a (2.12) che compare nel Teorema di Pini-Watson (2.5) consiste nel fatto che il nuovo nucleo $W_r^m(z_0 - z)$ è limitato da sopra sulla palla parabolica $\Omega_r^m(z_0)$ a patto che m sia sufficientemente grande.
Si osserva, infatti, che se $m = 0$ ci riconduciamo alla formula del Teorema di Pini-Watson il cui nucleo è $W_r^0(z_0 - z) = W(z_0 - z)$ non è limitato sulla palla calorica $\Omega_r(z_0)$.

Capitolo 3

La disuguaglianza di Harnack e il principio di massimo forte

3.1 Disuguaglianza di Harnack

In questo paragrafo presentiamo una prova elementare della disuguaglianza di Harnack utilizzando un approccio diretto.
Osserviamo preliminarmente che per ogni $\theta > 1$ esiste $r_0 = r_0(\theta, H) > 0$ tale che per ogni $r \leq r_0$, $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $z \in \Omega_r^m(z_0)$, $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\theta^{-1} G(z_0 - z) \leq \Gamma(z_0 - z) \leq \theta G(z_0 - z) \tag{3.1}$$

dove $G(z_0 - z)$ è una Gaussiana generalizzata.
Usando l'equazione (3.1) è facile osservare che per ogni $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ fissato esiste $\delta = \delta(H, m, \varepsilon) > 0$ tale che dato $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $r \leq \frac{r_0}{2}$ e $z = (x, t) \in \Omega_r^m(z_0)$ se $t_0 - t \geq \varepsilon r$ allora

$$\Omega_{\delta r}^m(z) \subset \Omega_{2r}^m(z_0).$$

Questo risultato è fondamentale per dimostrare il seguente Teorema.

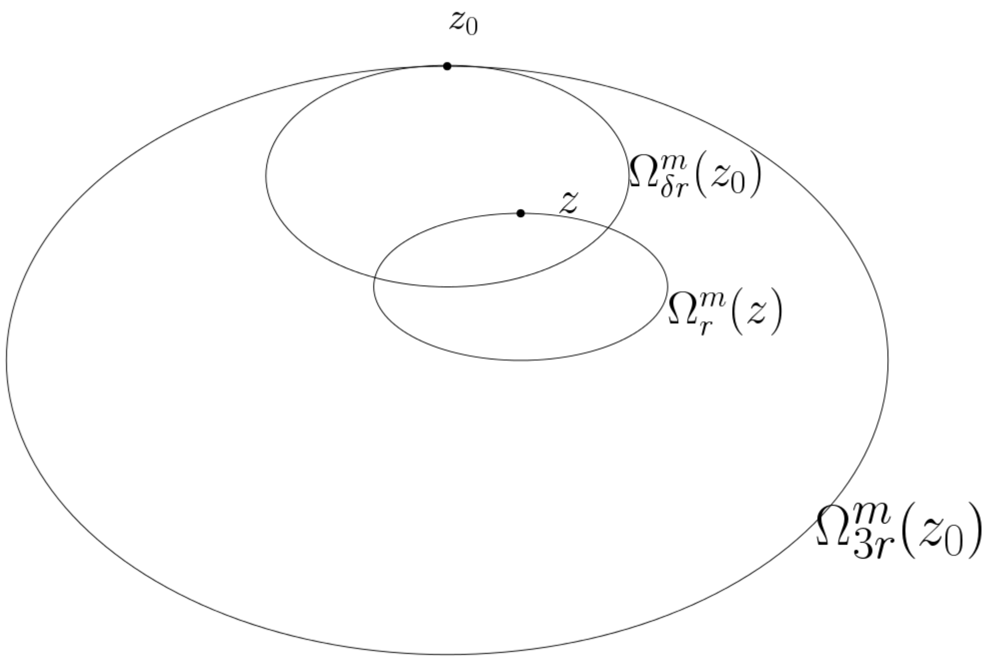
Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Harnack)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto e sia $u \geq 0$ una funzione calorica in Ω. Siano $z_0 \in \Omega$ e $r \leq \frac{r_0}{4}$ tali che $\Omega_{4r}^m(z_0) \subset \Omega$. Dato poi $\varepsilon > 0$ e $z \in \Omega_r^m(z_0)$ tale che $t_0 - t \geq \varepsilon r$ allora esiste una costante $C = C(H, m, \varepsilon) > 0$ tale che*

$$u(z) \leq C u(z_0). \tag{3.2}$$

Osservazione 7. Fissiamo in questo caso m numero intero > 2.

Dimostrazione. Dalla formula introdotta nel capitolo precedente si ha

$$u(z_0) = \int_{\Omega_{3r}^m(z_0)} u(\overline{z}) W_{3r}^m(z_0 - \overline{z}) d\overline{z}.$$



Poiché per ipotesi $u \geq 0$ e $\Omega^m_{\delta r}(z) \subset \Omega^m_{2r}(z_0)$ si ha

$$\begin{aligned} u(z_0) = &\int_{\Omega^m_{3r}(z_0)} u(\overline{z}) W^m_{3r}(z_0 - \overline{z}) d\overline{z} \geq \int_{\Omega^m_{\delta r}(z)} u(\overline{z}) W^m_{3r}(z_0 - \overline{z}) d\overline{z} \\ = &\int_{\Omega^m_{\delta r}(z)} u(\overline{z}) \frac{W^m_{3r}(z_0 - \overline{z})}{W^m_{\delta r}(z - \overline{z})} W^m_{\delta r}(z - \overline{z}) d\overline{z}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Per concludere la dimostrazione dobbiamo mostrare che esistono due numeri $C_1 = C_1(H, m, \varepsilon) > 0$ e $C_2 = C_2(H, m, \varepsilon) > 0$ tali che

$$\inf_{\overline{z} \in \Omega^m_{\delta r}(z)} W^m_{3r}(z_0 - \overline{z}) \geq C_1 r^{-(\frac{N}{2}+1)} \tag{3.4}$$

$$\sup_{\overline{z} \in \Omega^m_{\delta r}(z)} W^m_{\delta r}(z - \overline{z}) \leq C_2 r^{-(\frac{N}{2}+1)} \tag{3.5}$$

Iniziamo con il dimostrare che è verificata la prima disuguaglianza (3.4).
Ricordiamo che per $\overline{z} \in \Omega^m_{\delta r}(z)$

$$\begin{aligned} W^m_{3r}(z_0 - \overline{z}) = &(12\pi r)^{-\frac{N+m}{2}} \omega_m R^m_{3r}(z_0 - \overline{z}) \left[W(z_0 - \overline{z}) + \frac{m}{m+2} \frac{R^2_{3r}(z_0 - \overline{z})}{4(t_0 - \tau)^2} \right] \\ \geq &C_m r^{-\frac{N+m}{2}} R^{m+2}_{3r}(z_0 - \overline{z}) \frac{1}{(t_0 - \tau)^2} \end{aligned}$$

per una certa costante $C_m > 0$.
Adesso ,

$$R_{3r}^2(z_0 - \overline{z}) = 4(t_0 - \tau)ln\Big[(12\pi r)^{\frac{N+m}{2}}\varphi(z_0 - \overline{z})\Big]$$

ma su $\Omega_{2r}^m(z_0 - \overline{z})$

$$\varphi(z_0 - \overline{z}) > (8\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}$$

quindi su tale insieme

$$(12\pi r)^{\frac{N+m}{2}}\varphi(z_0 - \overline{z}) > \left(\frac{12\pi r}{8\pi r}\right)^{\frac{N+m}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{N+m}{2}}.$$

Allora si ha che per $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$R_{3r}^{m+2} \geq C_m^{'}(t_0 - \tau)^{\frac{m}{2}+1}$$

e di conseguenza

$$W_{3r}^m(z_0 - \overline{z}) \geq C_m^{''} r^{-\frac{N+m}{2}}(t_0 - \tau)^{\frac{m}{2}-1}.$$

Ma ricordiamo che, per ipotesi, per $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$(t_0 - \tau) \geq (t_0 - t) \geq \varepsilon r,$$

quindi si ottiene che per $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$W_{3r}^m(z_0 - \overline{z}) \geq C_m^{''} r^{-\frac{N+m}{2}}(\varepsilon r)^{\frac{m}{2}-1} = C_1 r^{-(\frac{N}{2}+1)}.$$

In definitiva, abbiamo provato che esiste una costante $C_1(H, m, \varepsilon) > 0$ tale che

$$\inf_{\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)} W_{3r}^m(z_0 - \overline{z}) \geq C_1 r^{-(\frac{N}{2}+1)},$$

cioè abbiamo dimostrato la disuguaglianza (3.4).
Vogliamo, ora, far vedere che anche la seconda disuguaglianza (3.5) è verificata.
Ricordiamo che per $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$W_{\delta r}^m(z - \overline{z}) = (4\pi\delta r)^{-\frac{N+m}{2}}\omega_m R_{\delta r}^m(z - \overline{z})\left[W(z - \overline{z}) + \frac{m}{m+2}\frac{R_{\delta r}^2(z - \overline{z})}{4(t-\tau)^2}\right].$$

Adesso per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\overline{z} \in \Omega_r^m(z)$, $r \leq r_0$

$$W(z - \overline{z}) = \frac{1}{4}\left(\frac{|x - \xi|}{t - \tau}\right)^2 \leq C\left(\frac{|x - \xi|^2}{(t-\tau)^2} + 1\right).$$

Ora per l'equazione (3.1) si ha che per un opportuna costante $C > 0$ vale

$$R_r^2(z - \overline{z}) = 4(t - \tau)ln\Big[(4\pi r)^{\frac{N+m}{2}}\varphi(z - \overline{z})\Big] \leq C(t - \tau)ln\left[\frac{Cr}{t - \tau}\right]$$

uniformemente per $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\overline{z} \in \Omega_r^m(z)$ e $r \leq r_0$.
Se consideriamo ora δr anzichè r otteniamo che per $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$R_{\delta r}^2(z-\overline{z}) \leq C(t-\tau)ln\left[\frac{Cr\delta}{t-\tau}\right].$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
W_{\delta r}^m(z-\overline{z}) =&(4\pi\delta r)^{-\frac{N+m}{2}}\omega_m R_{\delta r}^m(z-\overline{z})W(z-\overline{z})\\
&+\frac{m}{m+2}(4\pi\delta r)^{-\frac{N+m}{2}}\omega_m\frac{R_{\delta r}^{m+2}(z-\overline{z})}{4(t-\tau)^2}\\
\leq& Cr^{-\frac{N+m}{2}}(t-\tau)^{\frac{m}{2}}\left[ln\left(\frac{Cr}{t-\tau}\right)\right]^{\frac{m}{2}}\left(\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)^2}+1\right)\\
&+Cr^{-\frac{N+m}{2}}(t-\tau)^{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{(t-\tau)^2}\left[ln\left(\frac{Cr}{t-\tau}\right)\right]^{\frac{m+2}{2}}\\
=&Cr^{-\frac{N+m}{2}}(t-\tau)^{\frac{m}{2}}\left[ln\left(\frac{Cr}{t-\tau}\right)\right]^{\frac{m}{2}}\left[\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)^2}+1+\frac{1}{t-\tau}ln\left(\frac{Cr}{t-\tau}\right)\right]
\end{aligned}$$

ma quest'ultima parte della disuguaglianza è $\leq C_2 r^{-(\frac{N}{2}+1)}$.
Abbiamo quindi provato che per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\overline{z} \in \Omega_{\delta r}^m(z)$

$$W_{\delta r}^m(z-\overline{z}) \leq C_2 r^{-(\frac{N}{2}+1)}$$

quindi è verificata la disuguaglianza (3.5).
Possiamo, ora, concludere la dimostrazione del teorema applicando (3.4) e (3.5) all'equazione (3.3).
In definitiva,

$$\begin{aligned}
u(z_0) \geq& \int_{\Omega_{\delta r}^m(z)} u(\overline{z})\frac{W_{3r}^m(z_0-\overline{z})}{W_{\delta r}^m(z-\overline{z})}W_{\delta r}^m(z-\overline{z})d\overline{z}\\
\geq& \int_{\Omega_{\delta r}^m(z)} u(\overline{z})\frac{C_1 r^{-(\frac{N}{2}+1)}}{C_2 r^{-(\frac{N}{2}+1)}}W_{\delta r}^m(z-\overline{z})d\overline{z}\\
=&C' \int_{\Omega_{\delta r}^m(z)} u(\overline{z})W_{\delta r}^m(z-\overline{z})d\overline{z} = C' u(z).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

In conclusione abbiamo verificato che esiste una costante $C = \frac{1}{C'} = \frac{C_2}{C_1} > 0$ tale che

$$u(z) \leq Cu(z_0).$$

Il teorema sulla disuguaglianza di Harnack è quindi provato. □

Osservazione 8. Sia $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ fissato. Indichiamo con $P(z_0)$ la regione "parabolica", $P(z_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \,|\, |x-x_0|^2 < t_0 - t\}$.

Vogliamo far vedere che la disuguaglianza di Harnack risulta verificata anche nel caso in cui $z \in P(z_0)$. Precisamente, dimostriamo che per ogni funzione calorica $u \geq 0$ in $\mathbb{R}^{N+1}$ risulta

$$u(z) \leq Cu(z_0) \qquad \forall z \in P(z_0)$$

dove C è la costante positiva in (3.2).
Per fare ciò, occorre dimostrare che per ogni $z \in P(z_0)$ esistono $r > 0$ e $\varepsilon \in]0,1[$ tali che $z = (x,t) \in \Omega_r^m(z_0)$.

Dimostrazione. Consideriamo $z = (x,t)$. Dall'ipotesi sappiamo che $|x - x_0|^2 < t_0 - t$ poichè $z \in P(z_0)$.
Dobbiamo, anzitutto, dimostrare che esiste $r > 0$ tale che

$$z \in \Omega_r^m(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^{N+1} | \varphi(z_0 - z) > (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}\}.$$

Allora,

$$\varphi(z_0 - z) = \left(\frac{1}{4\pi(t_0 - t)}\right)^{\frac{N+m}{2}} e^{\frac{-|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} > \left(\frac{1}{4\pi(t_0 - t)}\right)^{\frac{N+m}{2}} e^{-\frac{1}{4}}.$$

Preso $r > (t_0 - t)e^{\frac{1}{2(N+m)}}$ si ha, effettivamente, che $\varphi(z_0 - z) > (4\pi r)^{-\frac{N+m}{2}}$.
Resta da dimostrare che esiste $\varepsilon \in]0,1[$ tale che

$$t < t_0 - \varepsilon r.$$

Fissiamo $\varepsilon \in]0,1[$ tale che

$$\varepsilon < e^{-\frac{1}{2(N+m)}}.$$

Dopo di ciò scegliamo $r > 0$ tale che

$$\varepsilon < \frac{t_0 - t}{r} < e^{-\frac{1}{2(N+m)}}.$$

Abbiamo, così, contemporaneamente

$$t < t_0 + \varepsilon r$$

e

$$r > (t_0 - t)e^{\frac{1}{2(N+m)}}.$$

Abbiamo quindi fatto vedere che, effettivamente, esistono sempre $r > 0$ come sopra e $\varepsilon \in]0,1[$ tali per cui $z \in \Omega_r^m(z_0)$. $\square$

3.2 Principio di massimo forte

In questo paragrafo analizzeremo una particolarità delle funzioni caloriche: le funzioni caloriche in un dominio connesso assumono il loro massimo nei punti interni senza essere costanti.
Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -(\frac{1}{t})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} & t > 0 \end{cases}$$

sull'aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R}$.
La funzione u è calorica, assume il suo massimo ($\max\limits_{\Omega} u = 0$) nei punti $(x,t) \in \Omega$ con $t \leq 0$ ma non è costante in Ω.
In ogni modo le funzioni caloriche verificano una sorta di Principio del massimo forte: il massimo interno delle funzioni caloriche si propaga lungo una *H-traiettoria*.

Definizione 3.1. Si chiama *H-traiettoria* di classe C^1 una mappa di classe C^1 $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ con $-\infty < a < b < \infty$ tale che se $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ allora

$$t'(s) < 0 \, \forall s \in [a,b].$$

Definizione 3.2. Una *H-traiettoria continua* è una traiettoria costituita dalla somma di *H-traiettorie* di classe C^1.

Definizione 3.3. Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e un punto $z_0 \in \Omega$ si definisce l'*insieme di propagazione di* z_0 *in* Ω $P(z_0, \Omega)$ nel seguente modo:

$$P(z_0, \Omega) := \{z \in \Omega \mid \text{esiste una H-traiettoria } \gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega \text{ tale che } \gamma(a) = z_0,\ \gamma(b) = z\}.$$

Osservazione 9. É facile osservare che $P(z_0, \Omega)$ è un sottoinsieme aperto di Ω.

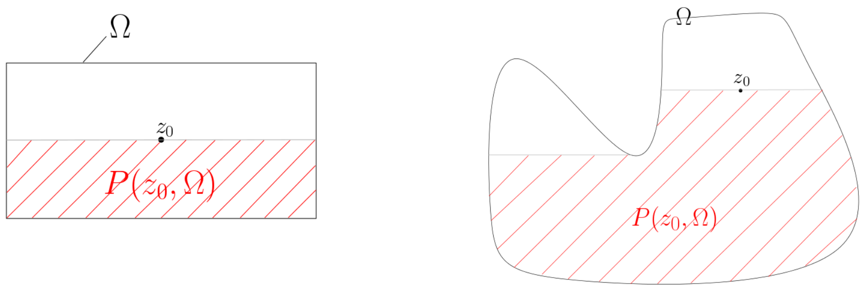


Figura 3.1: Esempi di insieme di propagazione.

Teorema 3.2 (Principio di massimo forte)**.** *Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia u una funzione calorica in Ω. Se esiste un punto $z_0 \in \Omega$ tale che $u(z_0) = \max_{\Omega} u$. Allora u è costante sull'insieme di propagazione di z_0 in Ω, cioè*

$$u \equiv u(z_0) \text{ in } P(z_0, \Omega).$$

Per dimostrare questo teorema occorre enunciare un lemma.

Lemma 3.3. *Sia $A \subseteq \Omega$ tale che*

i) $z_0 \in A$,

ii) $\forall z \in A$ *e* $r > 0$ *tale che* $\Omega_r(z) \subseteq \Omega$ *esiste un* r *tale per cui* $\Omega_r(z) \subseteq A$.

Allora

$$P(z_0, \Omega) \subseteq A.$$

Dimostrazione. Per dimostrare il lemma occorre far vedere che $\forall z \in P(z_0, \Omega)$ allora $z \in A$.
Consideriamo, quindi, ad arbitrio $z \in P(z_0, \Omega)$. Dalla definizione di insieme di propagazione di z_0 in Ω si ha che esiste una *H-traiettoria* γ tale che $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z$. Il lemma sarà quindi provato se riuscissimo a far vedere che $z = \gamma(b) \in A$.
Osserviamo preliminarmente che $\Omega_r(z_0) \subseteq D(z_0, \alpha\sqrt{r})$ con $\alpha = \sqrt[4]{1 + \left(\frac{2N}{\varepsilon}\right)^2}$ e che per ragioni di compattezza esiste $r > 0$ tale che $\Omega_r(\gamma(s)) \subseteq \Omega$ $\forall s \in [a, b]$.
Possiamo inoltre afferamare che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\gamma(\sigma) \in \Omega_r(\gamma(s)) \text{ per } a \leq s < \sigma \leq s + \delta \text{ e } \sigma \leq b. \tag{3.7}$$

Dando per buona tale affermazione, che poi dimostreremo, è possibile completare la dimostrazione del lemma.
Definiamo, quindi,

$$\Sigma = \{s \in [a, b] \mid \gamma(s) \in A\}.$$

Dall'ipotesi *i)* si ha che $z_0 = \gamma(a) \in A$, quindi $a \in \Sigma$.
Dall'ipotesi *ii)* si osserva che se $s \in \Sigma$ $(\gamma(s) \in A)$ allora $\Omega_r(\gamma(s)) \subseteq A$ per un certo valore di r.
Da (3.7) si ha che $\gamma(\sigma) \in \Omega_r(\gamma(s)) \subseteq A$ cioè $\gamma(\sigma) \in A$ $(\sigma \in \Sigma)$ $\forall \sigma \in [s, s + \delta] \cap [a, b]$.
In definitiva, abbiamo fatto vedere che se $s \in \Sigma$ allora $[s, s + \delta] \cap [a, b] \subseteq \Sigma$ ovvero $[a, b] = \Sigma$. In particolare, quindi, $b \in \Sigma$ cioè $\gamma(b) = z \in A$.
Ora, per concludere la dimostrazione del lemma, occorre verificare la validità dell'affermazione fatta precedentemente.
Vogliamo quindi provare che $\exists\ \delta > 0$ tale che $\gamma(\sigma) \in \Omega_r(\gamma(s))$ per $a \leq s < \sigma \leq s + \delta$ e $\sigma \leq b$.
Ma dire che $\gamma(\sigma) \in \Omega_r(\gamma(s))$ equivale a dire che $\Gamma(\gamma(s) - \gamma(\sigma)) > (4\pi r)^{-\frac{N}{2}}$.
Proviamo quindi che

$$\Gamma(\gamma(s) - \gamma(\sigma)) > (4\pi r)^{-\frac{N}{2}} \quad \text{per } a \leq s < \sigma \leq s + \delta \text{ e } \sigma \leq b. \tag{3.8}$$

Denotiamo innanzitutto $\gamma(s) = (x(s), t(s))$. Osserviamo, poi, che poichè γ è una *H-traiettoria*, γ è C^1 a tratti e l'applicazione $s \longmapsto t(s)$ è strettamente decrescente.
Inoltre esistono due costanti positive M e m tale che su un sottoinsieme finito di $[a,b]$ si ha

$$|x'(s)| \leq M \qquad \text{e} \qquad t'(s) \leq -m.$$

Di conseguenza

$$\frac{|x(s)-x(\sigma)|^2}{t(s)-t(\sigma)} \leq \frac{M^2}{m}(b-a) \;\text{ per } a \leq s < \sigma \leq b.$$

Ora, sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$(4\pi\varepsilon)^{-\frac{N}{2}} exp\bigg(-\frac{M^2}{4m}(b-a)\bigg) > (4\pi r)^{-\frac{N}{2}}$$

scegliamo $\delta > 0$ tale per cui

$$t(s) - t(\sigma) < \varepsilon \;\text{ per } a \leq s < \sigma \leq s + \delta \text{ e } \sigma \leq b.$$

Di conseguenza, con la scelta di un δ siffatto, abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma(\gamma(s)-\gamma(\sigma)) &= (4\pi(t(s)-t(\sigma)))^{-\frac{N}{2}} exp\bigg(-\frac{|x(s)-x(\sigma)|^2}{4(t(s)-t(\sigma))}\bigg)\\ &> (4\pi\varepsilon)^{-\frac{N}{2}} exp\bigg(-\frac{M^2}{4m}(b-a)\bigg) > (4\pi r)^{-\frac{N}{2}}.\end{aligned}$$

Abbiamo cioè provato che esiste $\delta > 0$ tale che (3.8) sia verificata; e siamo giunti al termine della dimostrazione del lemma. □

Ora siamo pronti per dimostrare il Teorema del Principio di massimo forte calorico.

Dimostrazione. Definiamo

$$A = \{z \in \Omega \,|\, u(z) = \max_{\Omega} u\}.$$

Per ipotesi $z_0 \in A$. Consideriamo ora $z \in A$ e $r > 0$ tale che $\Omega_r(z) \subseteq \Omega$.
Allora per $\rho \in]0, r[$ si ha che $\overline{\Omega_\rho(z)} \subseteq \Omega$ e per la formula di media (Teorema di Pini-Watson) si ha

$$u(z) = \left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_\rho(z)} u(\zeta) W(z-\zeta) d\zeta.$$

Nel capitolo precedente avevamo fatto vedere che vale la seguente equazione

$$\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_\rho(z)} W(z-\zeta) d\zeta = 1.$$

Da questa segue che

$$\left(\frac{1}{4\pi\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\Omega_\rho(z)} \Big(u(\zeta) - u(z)\Big) W(z-\zeta) d\zeta = 0 \tag{3.9}$$

Dato che $z \in A$, $u(z) \geq u(\zeta)$ quindi $u(\zeta) - u(z) \leq 0$ in $\Omega_\rho(z)$.
D'altra parte $W(z-\zeta) > 0$ in $\Omega_\rho(z)$ su un insieme di misura nulla. Quindi, poichè u è continua, da (3.9) si deduce che necessariamente $u(\zeta) - u(z) = 0$; cioè $u(\zeta) = u(z) = \max_\Omega u$ per $\zeta \in \Omega_\rho(z)$. Ne viene che $\Omega_\rho(z) \subseteq A$ per ogni $\rho \in]0, r[$ e quindi che $\Omega_r(z) \subseteq A$.
In definitiva abbiamo appena mostrato che sono valide le due ipotesi del lemma precedente (3.3); di conseguenza si ha che $P(z_0, \Omega) \subseteq A$ cioè

$$\forall z \in P(z_0, \Omega) \qquad u(z) = \max_\Omega u.$$

Il teorema del Principio di massimo forte calorico è quindi provato. □

Capitolo 4

Il problema di Cauchy

4.1 Problema di Cauchy

In questo capitolo vogliamo trattare il problema di Cauchy per l'operatore del calore. Ricordiamo che nei capitoli precedenti abbiamo introdotto la *soluzione fondamentale di* H come

$$\Gamma : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma(x,t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ (\frac{1}{4\pi t})^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} & t > 0 \end{cases}$$

Con tale funzione Γ è possibile risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\\ u_{|t=0} = \varphi \end{cases} \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. *Se φ è continua e limitata ($\varphi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) allora il problema di Cauchy (4.1) ha una soluzione u data da*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy.$$

Precisamente:

i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[, \mathbb{R})$;

ii) $Hu = 0$ *in* $\mathbb{R}^N \times]0, \infty[$;

iii) $\lim_{(x,t) \to (x_0, 0)} u(x,t) = \varphi(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Inoltre,

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times]0,\infty[} |u| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. i)

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy.$$

Poichè si può derivare rispetto a x e rispetto a t sotto il segno d'integrale si ottiene che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[, \mathbb{R})$.

ii) Dato che Γ è calorica

$$Hu(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} (\Delta_x - \partial_t)\Big(\Gamma(x-y,t)\varphi(y)\Big)dy = 0$$

quindi anche u è calorica.

iii) Dato $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fissato; si ha

$$\begin{aligned} u(x,t) - \varphi(x_0) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy - \varphi(x_0)\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\Big(\varphi(y) - \varphi(x_0)\Big)dy. \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} |u(x,t) - \varphi(x_0)| &\le \int_{\mathbb{R}^N} |\Gamma(x-y,t)||\varphi(y) - \varphi(x_0)|dy = \\ & \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y) - \varphi(x_0)|dy \\ & \text{consideriamo il cambiamento di variabile } z = \frac{|x-y|}{2\sqrt{t}}, \\ & x - y = 2\sqrt{t}z,\ dy = (2\sqrt{t})^N dz \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} (4t)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{|z|^2}||\varphi(x - 2\sqrt{t}z) - \varphi(x_0)|dz. \end{aligned}$$

Quindi, dato che è possibile passare il limite sotto al segno d'integrale, si ottiene

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} |u(x,t) - \varphi(x_0)| = \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \frac{1}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{|z|^2}|\varphi(x - 2\sqrt{t}z) - \varphi(x_0)|dz = 0.$$

Infine, per completare la dimostrazione del teorema, osserviamo che per $t > 0$

$$|u(x,t)| \le \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)|\varphi(y)|dy \le \sup_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)dy = \sup_{\mathbb{R}^N} |\varphi|.$$

Quindi, si ha

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times]0,\infty[} |u| \le \sup_{\mathbb{R}^N} |\varphi|,$$

e questo conclude la dimostrazione del teorema. □

4.2 Unicità del problema di Cauchy

In questo paragrafo vogliamo mostrare per prima cosa che l'assunzione fatta nel Teorema (4.1) sui dati iniziali può essere fortemente migliorata.

Teorema 4.2. *Sia* $\varphi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *tale che*

$$|\varphi(x)| \leq ce^{a|x|^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{4.2}$$

per due opportune costanti positive c *e* a.
Allora

$$u_\varphi(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy$$

è ben definita e calorica sulla striscia

$$S_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[\qquad \textit{con } 0 < T < \frac{1}{8a}.$$

Inoltre

$$\lim_{S_T \ni (x,t) \to (x_0,0)} u_\varphi(x,t) = \varphi(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N$$

e per una opportuna costante $M > 0$ *vale*

$$|u_\varphi(x,t)| \leq Me^{2a|x|^2} \qquad \forall (x,t) \in S_T. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Assumiamo per ora $\varphi \geq 0$.
Sia $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali e regolari in $\mathbb{R}^N$ tale che $0 \leq \psi_n \leq 1$, $\psi_n(x) = 1$ se $|x| \leq n$, $\psi_n(x) = 0$ se $|x| \geq n+1$.
Definiamo $\varphi_n = \varphi_{\psi_n}$. Allora per il Teorema (4.1) u_{φ_n} è ben definita e calorica in $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$. Inoltre $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, $u_{\varphi_n} \leq u_{\varphi_{n+1}}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Dal teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_{\varphi_n}(x,t) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(y)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy \in [0,\infty]\end{aligned} \tag{4.4}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$.
Vogliamo provare che l'ultimo integrale è $< \infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < t < T$. Ne verrà che u_φ è ben definito, finito e calorico in $\mathbb{R}^N \times]0,T[$.
Osserviamo quindi che

$$\begin{aligned}u_{\varphi_n}(x,t) =& \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi_n(y)dy \\ & \text{cambiamento di variabile } \xi = \frac{x-y}{2\sqrt{t}},\ dy = 2\sqrt{t}d\xi \\ =& \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{N}{2}} (4t)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2} \varphi_n(x - 2\sqrt{t}\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Utilizzando (4.2) e ponendo $d = max\{c, 1\}$ si ottiene

$$e^{-|\xi|^2}\varphi_n(x - 2\sqrt{t}\xi) \leq de^{-|\xi|^2+a|x-2\sqrt{t}\xi|^2} \leq de^{2a|x|^2-|\xi|^2(1-8aT)} \tag{4.5}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N$ e $0 < t < T$.
Allora da (4.5) e (4.4) se ne deduce che

$$\begin{aligned} u_{\varphi_n}(x,t) =& \pi^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2}\varphi_n(x - 2\sqrt{t}\xi)d\xi \\ \leq& \pi^{-\frac{N}{2}} de^{2a|x|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2(1-8aT)}d\xi = \\ & \text{cambiamento di variabile } u^2 = |\xi|^2(1-8aT) \\ =& \frac{de^{2a|x|^2}}{\pi^{\frac{N}{2}}(1-8aT)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-u^2}du = \frac{de^{2a|x|^2}}{(1-8aT)^{\frac{N}{2}}} \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < t < T$.
Quindi,

$$|u_\varphi(x,t)| \leq \frac{d}{(1-8aT)^{\frac{N}{2}}} e^{2a|x|^2} = Me^{2a|x|^2},$$

cioè (4.3) è verificata ponendo $M = d(1-8aT)^{-\frac{N}{2}}$.
Infine, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \lim_{S_T \ni (x,t) \to (x_0,0)} u_\varphi(x,t) =& \lim_{S_T \ni (x,t) \to (x_0,0)} \pi^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2}\varphi(x - 2\sqrt{t}\xi)d\xi \\ =& \pi^{-\frac{N}{2}}\varphi(x_0) \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2}d\xi = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Qui, abbiamo utilizzato il teorema della convergenza dominata di Lesbegue grazie alla stima (4.5) rimpiazzando φ_n con φ.
Questo prova il teorema nel caso $\varphi \geq 0$.
Il caso generale segue applicando i risultati precedenti a

$$\varphi^+ = max\{\varphi, 0\} \qquad \varphi^- = max\{0, -\varphi\}$$

e osservando che $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e $u_\varphi = u_{\varphi^+} - u_{\varphi^-}$. □

D'ora in poi indicheremo con S_T, $0 < T < \infty$ la striscia

$$S_T = \mathbb{R}^N \times]0, T[.$$

Teorema 4.3. *Sia $0 < T \leq \infty$ e u una funzione calorica sulla striscia S_T, continua fino a $t = 0$ e tale che*

$$u(x, 0) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.6}$$

Supponiamo che

$$|u(x,t)| \leq ce^{A|x|^2} \qquad \forall (x,t) \in S_T \tag{4.7}$$

per due opportune costanti positive c e A.
Allora $u \equiv 0$ in S_T.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$w(x,t) = \left(\frac{1}{1-4At}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left(A\frac{|x|^2}{1-4At}\right)$$

calorica in $\mathbb{R}^N \times]-\infty, \frac{1}{4A}[$.
Poniamo $T_0 = min\{T, \frac{1}{8A}\}$ e sulla striscia S_{T_0} consideriamo la funzione

$$u_\varepsilon = u - \varepsilon w, \qquad \varepsilon > 0 \text{ fissato ad arbitrio.}$$

Sicuramente u_ε è calorica in S_{T_0}, e u_ε è continua fino a $t = 0$, inoltre

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,0) - \varepsilon w(x,0) = 0 - \varepsilon exp(A|x|^2) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e

$$\limsup_{S_{T_0} \ni z \to \infty} u_\varepsilon(z) = -\infty.$$

Infatti dall'ipotesi (4.7) del teorema e dalla definizione di w si ottiene che

$$u_\varepsilon(x,t) \le exp(2A|x|^2)\left(c\, exp(-A|x|^2) - \varepsilon 2^{\frac{N}{2}}\right).$$

Allora possiamo applicare la seguente proposizione che enunceremo senza dimostrazione.

Proposizione 4.4. *Sia u una funzione calorica in S_T e continua fin sulla chiusura. Se $u(x,0) \le 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e*

$$\limsup_{S_T \ni z \to \infty} u(z) \le 0$$

allora $u \le 0$ in S_T.

Dalla proposizione (4.4) segue che $u_\varepsilon \le 0$ in S_{T_0}. Mandando ε a zero otteniamo quindi che $u \le 0$ in S_{T_0}. Possiamo giungere alla stessa conclusione considerando $-u$ quindi $-u \le 0$ in S_{T_0}.
Ne segue che, necessariamente, $u \equiv 0$ in S_{T_0}. Se $T_0 = T$ la dimostrazione è conclusa. Altrimenti si può terminare la prova del teorema iterando il precedente risultato. □

Corollario 4.5. *Consideriamo $\varphi \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tale che*

$$|\varphi(x)| \le ce^{a|x|^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

per due opportune costanti positive c e a.
Dal Teorema (4.2) abbiamo visto che la funzione

$$u_\varphi(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy$$

è ben definita e calorica sulla striscia

$$S_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[\qquad con\ 0 < T < \frac{1}{8a}$$

e verifica

$$\lim_{S_T \ni (x,t) \to (x_0,0)} u_\varphi(x,t) = \varphi(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Affermiamo ora che la funzione u_φ è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } S_T, \quad 0 < T < \frac{1}{8a} \\ u_{|t=0} = \varphi \end{cases}$$

che soddisfa la condizione

$$|u_\varphi(x,t)| \leq M e^{2a|x|^2} \qquad \forall (x,t) \in S_T \tag{4.8}$$

per una opportuna costante $M > 0$.

Il nostro prossimo teorema di unicità è legato alla temperatura e quindi alle funzioni caloriche non negative. Per dimostrare, però, il prossimo risultato di unicità abbiamo bisogno di due lemmi e di alcune osservazioni.

Lemma 4.6. *Sia $\varphi : \mathbb{R}^N \longmapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e a supporto compatto e sia*

$$u_\varphi(x,t) := \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)\varphi(y)dy.$$

Allora per ogni fissato $T > 0$

$$\lim_{S_T \ni z \to \infty} u_\varphi(z) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $M > 0$ tale che $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geq M$.
Allora se $|x| > M$ e $0 < t < T$ abbiamo

$$\begin{aligned} |u_\varphi(x,t)| =& \pi^{-\frac{N}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|\xi|^2} \varphi(x - 2\sqrt{t}\xi) d\xi \right| \\ =& \pi^{-\frac{N}{2}} \left| \int_{|x-2\sqrt{t}\xi| \leq M} e^{-|\xi|^2} \varphi(x - 2\sqrt{t}\xi) d\xi \right| \\ \leq& \pi^{-\frac{N}{2}} \sup_{\mathbb{R}^N} |\varphi| \int_{|\xi| \geq \frac{|x|-M}{2\sqrt{T}}} e^{-|\xi|^2} d\xi. \end{aligned}$$

Poichè, sulla striscia S_T, $z \to \infty$ se e solo se $|x| \to \infty$, dalla disuguaglianza precedente segue che

$$\lim_{S_T \ni z \to \infty} u_\varphi(z) = 0.$$

Il lemma (4.6) è così dimostrato. $\square$

Lemma 4.7. *Sia u una funzione calorica non negativa sulla striscia S_T, con $0 < T < \infty$. Allora, per ogni $\delta \in]0, T[$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)u(y,\delta)dy \leq u(x, t+\delta) \tag{4.9}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < t < T - \delta$.

Dimostrazione. Sia $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in $\mathbb{R}^N$ tale che $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(x) = 1$ se $|x| \leq n$ e $\varphi_n(x) = 0$ se $|x| \geq n+1$.
Per $(x,t) \in S_{T-\delta}$ definiamo

$$v_n(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)u(y,\delta)\varphi_n(y)dy - u(x,t+\delta).$$

Allora v_n è calorica in $S_{T-\delta}$ e continua fino a $t=0$,

$$v_n(x,0) = u(x,\delta)\varphi_n(x) - u(x,\delta) \leq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Inotre, dato che $u \geq 0$, dal lemma (4.6) segue che

$$\lim_{S_{T-\delta}\ni z\to\infty} v_n(z) \leq 0.$$

Allora per la proposizione (4.4) segue che $v_n \leq 0$ in $S_{T-\delta}$.
Quindi,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)u(y,\delta)\varphi_n(y)dy \leq u(x,t+\delta) \qquad (x,t) \in S_{T-\delta}.$$

Mandando n a infinito si ottieni l'equazione (4.9)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y,t)u(y,\delta)dy \leq u(x,t+\delta).$$

Il lemma (4.7) è, quindi, provato. □

Osservazione 10. Sia O un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia

$$\Omega = O\times]0,T[; \qquad 0 < T \leq \infty.$$

Sia u una funzione calorica su Ω e continua fino a $t=0$ e tale che $u(x,0)=0$ per ogni $x \in O$.
Allora la funzione

$$U(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

è calorica in $O\times]-\infty,T[$.

Osservazione 11. Sia Ω e u come nell'osservazione precedente. Definiamo

$$v(x,t) := \int_0^t u(x,s)ds, \qquad (x,t) \in \Omega.$$

Allora v è calorica in Ω.

Per dimostrare il teorema di unicità seguente abbiamo, inoltre, bisogno di enunciare alcuni preliminari riguardanti le funzioni armoniche.

Proposizione 4.8. *L'operatore di Laplace in* $\mathbb{R}^N$ *è definito come*

$$\Delta := \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2$$

Dato Ω *aperto di* $\mathbb{R}^N$ *e* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *funzione di classe* C^2 *si dice che* u *è armonica in* Ω *se*

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Anche per le funzioni armoniche vale una formula di Poisson-Jensen. In particolare, se supponiamo $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *e* $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \Omega$ *allora vale*

$$u(x_0) = M_r(u)(x_0) - N_r(\Delta u)(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx - N_r(\Delta u)(x_0).$$

Senza entrare nei particolari diciamo che nel caso in cui $\Delta u \geq 0$ *in* Ω *dalla formula di Poisson-Jensen segue che*

$$u(x_0) \leq \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} u(x)dx.$$

Ora, siamo pronti per enunciare e dimostrare il nostro teorema di unicità.

Teorema 4.9. *Sia* u *una temperatura, e quindi una funzione calorica non negativa, sulla striscia* S_T, *con* $0 < T \leq \infty$. *Supponiamo che* u *sia continua fino a* $t = 0$ *e* $u(x, 0) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N$. *Allora*

$$u \equiv 0 \text{ in } S_T.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$v : \mathbb{R}^N \times]0, T[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad v(x, t) = \int_0^t u(x, s)ds.$$

Ovviamente v è continua su $\mathbb{R}^N \times [0, T[$ e dall'osservazione 11 sappiamo che è anche calorica in $\mathbb{R}^N \times]0, T[= S_T$. Abbiamo inoltre che $v \geq 0$ e $v(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.
Poichè v è calorica in S_T si ha

$$Hv(x, t) = \Delta v(x, t) - \partial_t v(x, t) = 0$$

e quindi

$$\Delta v(x, t) = \partial_t v(x, t) = u(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in S_T.$$

Vogliamo dimostrare che $v \equiv 0$ in S_T, ne verrà che $u \equiv 0$ in S_T che è la tesi del nostro teorema.
Sia $\delta \in]0, T[$ fissato, scegliamo $t_0 > 0$ tale che $t_0 + \delta < T$.
Dal lemma (4.7) applicato alla funzione v calorica e non negativa su S_T segue che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x - y, t_0)v(y, \delta)dy \leq v(x, t_0 + \delta) \tag{4.10}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $0 < t_0 < T - \delta$.
Considerando $x = 0$ (4.10) può essere riscritta nel seguente modo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y, t_0) v(y, \delta) dy \leq v(0, t_0 + \delta),$$

cioè

$$\left(\frac{1}{4\pi t_0}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} v(y, \delta) dy \leq v(0, t_0 + \delta).$$

Questo implica, moltiplicando entrambi i membri per $(4\pi t_0)^{\frac{N}{2}}$, che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} v(y, \delta) dy \leq (4\pi t_0)^{\frac{N}{2}} v(0, t_0 + \delta). \tag{4.11}$$

D'altra parte, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $|x| \geq 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} v(y, \delta) dy \geq & \int_{B(0,2|x|)} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} v(y, \delta) dy \\ \geq & e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} \int_{B(0,2|x|)} v(y, \delta) dy \\ \geq & e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} \int_{B(x,|x|)} v(y, \delta) dy \end{aligned} \tag{4.12}$$

Ora, per ipotesi sappiamo che $\Delta v \geq 0$ quindi per la proposizione (4.8) vale che

$$\int_{B(x,|x|)} v(y, \delta) dy \geq |B(x, |x|)| v(x, \delta).$$

Osserviamo, inoltre, che

$$|B(x, |x|)| = |x|^N \omega_N \quad \text{con } \omega_N = |B(0, 1)|$$

come ricordato nel Capitolo 1 dei Preliminari.
Dalle osservazioni fatte applicate a (4.12) segue che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{4t_0}} v(y, \delta) dy \geq & e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} |x|^N \omega_N v(x, \delta) \\ \geq & e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} \omega_N v(x, \delta). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Mettendo insieme (4.13) e (4.11) otteniamo

$$e^{-\frac{|x|^2}{t_0}} \omega_N v(x, \delta) \leq (4\pi t_0)^{\frac{N}{2}} v(0, t_0 + \delta)$$

quindi

$$v(x, \delta) \leq (4\pi t_0)^{\frac{N}{2}} v(0, t_0 + \delta) \omega_N^{-1} e^{\frac{|x|^2}{t_0}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $|x| \geq 1$.
Questo implica che

$$v(x,\delta) \leq Ce^{\frac{|x|^2}{t_0}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{4.14}$$

con $C = (4\pi t_0)^{\frac{N}{2}} \omega_N^{-1} v(0, t_0+\delta) + \sup\limits_{|x|\leq 1} v(x,\delta)$.
D'altra parte abbiamo visto che

$$\partial_t v(x,t) = u(x,t) \geq 0,$$

da questo segue

$$v(x,t) \leq v(x,\delta) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall t \in]0,\delta[.$$

Si ottiene, quindi,

$$v(x,t) \leq v(x,\delta) \leq e^{\frac{|x|^2}{t_0}} \qquad \forall (x,t) \in S_\delta.$$

In definitiva abbiamo fatto vedere che v è una funzione calorica in S_T con $0 < T \leq \infty$, continua fino a $t = 0$ e tale che $v(x,0) = 0\, \forall x \in \mathbb{R}^N$.
Vale inoltre che

$$|v(x,t)| \leq Ce^{A|x|^2} \qquad \forall x \in S_\delta$$

con $\delta \in]0,T[$ fissato e con $A = \frac{1}{t_0} > 0$.
Possiamo, allora, applicare a v il Teorema (4.3) ottenendo che $v \equiv 0$ in S_δ.
Ma questo vale per ogni $\delta \in]0,T[$; quindi $v \equiv 0$ in S_T.
La dimostrazione del nostro teorema di unicità è così conclusa.

$\square$

Capitolo 5

I teoremi di Liouville per le funzioni caloriche

Per le funzioni caloriche e non negative in $\mathbb{R}^{N+1}$ non vale il Teorema di Liouville, cioè una funzione calorica e non negativa in $\mathbb{R}^{N+1}$ non è necessariamente costante.
A conferma di quanto appena detto possiamo esporre il seguente esempio.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$u(x,t) = exp(x_1 + x_2 + ... + x_N + Nt)$$

con $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $t \in \mathbb{R}$.

$$Hu = \sum_{j=1}^{N} \partial_{x_j}^2 u - \partial_t u = Nu - Nu = 0.$$

La funzione u è quindi calorica e strettamente positiva ma non è costante.

Le funzioni caloriche non negative, però, soddisfano alcune speciali forme del teorema di Liouville.
In particolare, vale il seguente teorema.

Teorema 5.1. *Se u è una funzione calorica e limitata in $\mathbb{R}^{N+1}$ allora u è costante.*

Il Teorema (5.1) deriva dal teorema che segue, il quale afferma che “ le temperature sono costanti a $-\infty$ ”.

Teorema 5.2. *Sia u una funzione calorica e non negativa in $\mathbb{R}^{N+1}$. Allora*

$$\lim_{t \to -\infty} u(x,t)$$

esiste ed è indipendente da x. In particolare,

$$\lim_{t\to-\infty} u(x,t) = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u.$$

Dimostrazione. Sia $m := \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u$, definiamo

$$v := u - m.$$

Allora v è anch'essa una funzione calorica non negativa in $\mathbb{R}^{N+1}$ e $\inf_{\mathbb{R}^{N+1}} v = 0$.
Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che

$$v(z_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{5.1}$$

D'altra parte dal teorema sulla disuguaglianza di Harnack dimostrato nei capitoli precedenti si ha

$$v(z) \leq Cv(z_\varepsilon) \quad \forall z \in P(z_\varepsilon) \tag{5.2}$$

dove $P(z_\varepsilon)$ indica la regione "parabolica", $P(z_\varepsilon) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \,|\, |x - x_\varepsilon|^2 < t_\varepsilon - t\}$.
Ora, fissiamo $x \in \mathbb{R}^N$ ad arbitrio e consideriamo i punti (x,t) con $t \in \mathbb{R}$.
Esiste $t^*_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $(x,t) \in P(z_\varepsilon)$ per ogni $t \in \mathbb{R}, t < t^*_\varepsilon$.
Allora da (5.1) e (5.2) si ottiene

$$v(x,t) \leq Cv(z_\varepsilon) < C\varepsilon.$$

In definitiva, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t^*_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$v(x,t) \leq C\varepsilon \qquad \forall t < t^*_\varepsilon.$$

Poichè $v \geq 0$, questo prova che

$$\lim_{t\to-\infty} v(x,t) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

cioè

$$\lim_{t\to-\infty} u(x,t) = m := \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

□

Ora siamo pronti per dimostrare il Teorema (5.1).

Dimostrazione. Dalle ipotesi del teorema sappiamo che $Hu = 0$ e che

$$m \leq u \leq M \qquad m := \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u,\ M := \sup_{\mathbb{R}^{N+1}} u.$$

Consideriamo la funzione

$$v := u - m;$$

sicuramente $v \geq 0$, inoltre v è anch'essa una funzione calorica; applicando, quindi, il Teorema (5.2) alla nuova funzione v si ottiene

$$\lim_{t \to -\infty} v(x,t) = 0,$$

cioè

$$\lim_{t \to -\infty} u(x,t) = m := \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Consideriamo ora la funzione

$$w := M - u;$$

anche w è una funzione calorica non negativa quindi possiamo applicare di nuovo il Teorema (5.2) ottenendo così che

$$\lim_{t \to -\infty} w(x,t) = 0,$$

cioè

$$\lim_{t \to -\infty} u(x,t) = M := \sup_{\mathbb{R}^{N+1}} u \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Per l'unicità del limite si ha che necessariamente $m = M$ e quindi u è costante. $\square$

Bibliografia

[1] E. Lanconelli: *Equazioni a derivate parziali, note del corso di Ermanno Lanconelli*, Bologna, 2015

[2] E. Lanconelli: *Note del corso di equazioni a derivate parziali*, Bologna, 2015/16

[3] N. Garofalo,E. Lanconelli: *Asymptotic behavior of fundamental solutions and potential theory of parabolic operators with variable coefficients*, Mathematische Annalen, Springer-Verlag, 1989

Ringraziamenti

E così siamo giunti al termine di questa meravigliosa avventura, e alla fine di ogni viaggio vale la pena voltarsi indietro, riflettere su quanto accaduto, sulle esperienze vissute; rivivere i momenti più importanti siano essi sinonimo di felicità o di malinconia; e ringraziare quelli che sono stati i tuoi compagni di avventura.

Per questo motivo mi sento in dovere di ringraziare i miei compagni di avventura, tutte quelle persone che mi sono state vicine, fisicamente e non, durante questi anni e che hanno contribuito a rendere ogni giorno un giorno da ricordare.

Primi tra tutti i miei genitori che hanno reso possibile tutto questo, che mi hanno dato la possibiltà di rincorrere il mio sogno, che mi sono stati sempre vicini, anche se lontani non mi hanno mai fatto sentire sola.

In particolar modo, devo ringraziare la mamma perché è vero che la mamma è sempre la mamma, senza te mi sarei sentita persa dopo solo un giorno, hai appoggiato ogni mia scelta, hai condiviso con me i giorni felici ma anche quelli grigi, sei stata sempre presente. E lasciatelo dire, non devi buttarti mai a terra perchè sei il muro portante della famiglia, sei una mamma splendida, un'amica, una compagna di vita!

Ringrazio anche mio fratello Silvio perché nonostante il suo carattere introverso so bene quanto tiene a me. Ogni qual volta avrò bisogno anche solo di un consiglio so che potrò sempre contare su di te perchè per qualsiasi cosa tu ci sei sempre stato e certamente continuerai ad esserci!

E poi come non ringraziare te, Amore mio, tu che in prima persona mi hai affiancato in questi anni. Un libro non è sufficiente per raccogliere tutti i pensieri che in questo momento mi scorrono per la testa, tutte le cose che vorrei dirti per sottolineare anche in questo giorno cosa rappresenti tu per me; lasciami dire solo grazie, grazie perchè basta una tua parola, un tuo abbraccio per farmi tornare il sorriso, grazie perchè questi cinque anni non sarebbero stati gli stessi senza te, grazie perchè sei stato il primo a credere in me. Incontrarti è stata la cosa più bella che mi potesse accadere, viverti è magia, amarti è poesia.

E proprio voi, mamma, papà, Silvio e Fabrizio mi avete appoggiato nell'intraprendere questa nuova esperienza, una nuova vita iniziata in questa magnifica città, Bologna. Sembra ieri eppure sono passati cinque anni, e durante questi anni ho avuto la fortuna di incontrare tante persone meravigliose che hanno colorato le mie giornate; ringrazio a tal proposito Fatim, Vittoria, Lisa (Rinaldina Minestra), Francesca (Giovannina Alleva), Giulia (Andina Warhola) e Veronica (Luchina Butlera).

E proprio a te, Veronica, va un ringraziamento particolare perchè mi hai sopportato per ben tre anni, perchè in te non ho trovato una semplice coinquilina, nè solo un'amica ma una vera sorella. Ne abbiamo fatte tante insieme e devo ringraziarti per tutte le volte che mi hai sostenuto, per tutte i giorni in cui ci sei stata per me. Sei una persona favolosa!

E come non ringraziare anche voi di Via Pancaldi 41 (fissi e non), che più volte, in particolar modo in questo ultimo anno, mi avete 'adottata' e mi avete fatto sentire sempre a casa.

Ripercorrendo questi anni nella mia testa, è doveroso ricordare anche tutte quelle persone che per via della lontananza non sono stati al mio fianco in prima persona ma che lo sono stati dal punto di vista affettivo e con i quali ho passato i giorni al mio rientro a Loreto. Un grazie in particolare va quindi a Stefano, amico di una vita, Enrico, Ugo, Mario, Francesco e le mie Amiche, quelle che nonostante gli anni e le distanze ci sono sempre state per un caffè-sigaretta, per una serata o anche solo per la voglia di rivedersi e raccontarsi.

A tal proposito, devo ringraziare anche Francesca perchè mi ha dimostrato in questi anni che la nostra amicizia va al di là dei chilometri che ci separano e che i legami veri restano.

Grazie ai miei compagni di avventura sono arrivata fin qui, al termine della mia esperienza, e mi ritrovo oggi a scrivere questi ringraziamenti che concludono la mia tesi.

Infine, quindi, ma non per importanza, vorrei ringraziare le due persone che mi hanno invogliato e mi hanno sostenuto nella stesura di questo lavoro. Grazie di cuore, a tal proposito, al Professore Ermanno Lanconelli e al Professore Giovanni Cupini, che mi hanno seguito durante questi mesi sempre con grande pazienza e disponibilità, insegnandomi che preparazione e competenza non escludono generosità, umanità e simpatia. Il vostro credere in me e nelle mie competenze mi ha stupito fin da subito, mi ha spronato a mettermi in gioco e a vivere serenamente i compiti da voi assegnati; il vostro sostegno e i vostri consigli sono stati i pilastri che hanno reso possibile la realizzazione di questo lavoro.

Ho avuto la fortuna di conoscere il Professor Lanconelli già durante il mio primo anno universitario e di seguire più corsi da lui tenuti, e nel corso degli anni ho capito quale persona meravigliosa sia, un uomo che ama il suo lavoro, ama questa materia e riesce a farla amare a tutti, un Professore con la P maiuscola. E in questo ultimo anno ho avuto il piacere di incontrare anche il Professor Cupini e sono rimasta subito colpita dalla sua cordialità e disponibilità, e dalla passione che mette in ogni lezione.

Grazie davvero con tutto il cuore a questi due professori, due docenti che ogni ragazzo che intraprende questa carriera dovrebbe avere la fortuna di incontrare.

E a te lettore, se tra queste righe non hai visto il tuo nome allora ringrazio anche te, che hai avuto il piacere di leggere questi miei pensieri ed io ho avuto il piacere di conoscerti.

E per le mie coinquiline scusate se i miei ringraziamenti vi sono sembrati troppo seriosi ma sono stata ispirata da Paolo Cielo.