ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea in Fisica**

# Operatori lineari su spazi di Hilbert

**Relatore:**
**Chiar.ma Prof.ssa**
**Elisa Ercolessi**

**Correlatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Fabio Ortolani**

**Presentata da:**
**Mario Angelelli**

**I Sessione**
**2015/2016**

# INDICE

# SOMMARIO

La trattazione che segue fornisce un'introduzione agli operatori lineari. Il primo capitolo contiene dei cenni sugli spazi di Hilbert di dimensione infinita, in modo da poter lavorare con operatori definiti non solo su spazi finito dimensionali, che sono generalmente rappresentati da matrici. Nel secondo capitolo si prosegue con lo studio degli operatori lineari limitati, proponendo come esempio l'operatore di proiezione. Viene definito anche l'importante concetto di operatore aggiunto, generalizzato nel capitolo successivo. Il capitolo finale tratta gli operatori non limitati, che possono essere analizzati con più facilità se soddisfano una proprietà topologica, che è la chiusura. Si affronta anche il concetto di spettro di un operatore, soprattutto nel caso di un operatore autoaggiunto, concludendo con l' esempio di un importante operatore, cioè l'operatore differenziale, fondamentale in meccanica quantistica.

# 1. SPAZI DI HILBERT

Gli operatori lineari, che verranno trattati nel seguito, sono definiti e agiscono all'interno di opportuni spazi vettoriali, detti **spazi di Hilbert**, i quali sono definiti nel seguente modo:

**Definizione 1.1.** Uno **spazio di Hilbert** $H$ è uno spazio completo infinito dimensionale, dotato di una metrica generata dal prodotto scalare.

Spesso il dominio di un operatore non è tutto lo spazio di Hilbert, ma è ristretto ad un sottoinsieme di $H$:

**Definizione 1.2.** Si chiama **varietà lineare** nello spazio di Hilbert $H$ un insieme $L$ di elementi di $H$ tale che se $f, g \in H$, allora $\alpha f + \beta g \in L$ per qualunque numero complesso $\alpha$ e $\beta$.

Una varietà lineare chiusa si dice **sottospazio**.

Il prodotto scalare di $H$ permette di ottenere lo spazio di Hilbert, attraverso la somma diretta di suoi sottospazi che hanno determinate proprietà. Si definisce prima il complemento ortogonale di un sottospazio.

**Definizione 1.3.** Se $M$ è un sottospazio di uno spazio di Hilbert $H$, si definisce il **complemento ortogonale** $M^{\perp}$, come l'insieme dei vettori ortogonali a tutti gli elementi di M:

$$M^{\perp} = \{g \in H; \langle g, f \rangle = 0, \forall f \in M\}. \tag{1.1}$$

Si ha il seguente importante teorema.

**Teorema 1.0.1.** *Se $M$ è un sottospazio (chiuso) dello spazio $H$, ogni elemento $f \in H$ è rappresentabile unicamente nella forma $f = h + h'$, dove $h \in M$ e $h' \in M^{\perp}$, cioè*

$$H = M \oplus M^{\perp}. \tag{1.2}$$

Il complemento ortogonale di un sottospazio $M$ viene anche indicato con $H \ominus M$. La nozione di somma diretta può essere generalizzata per un numero finito o numerabile di sottospazi ortogonali tra loro, cioè:

$$H = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n \oplus ... \quad . \tag{1.3}$$

Come per gli spazi vettoriali a $n$ dimensioni, anche gli spazi di Hilbert ammettono una base, ma in questo caso essa è costituita da infiniti elementi. Sono di particolare importanza le basi ortonormali, di cui ora si darà un cenno.

**Definizione 1.4.** Sia $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ un sistema ortogonale normalizzato nello spazio $H$ e $f$ un elemento di $H$. Si faccia corrispondere all'elemento $f$ una successione di numeri

$$c_k = \langle f, e_k \rangle \qquad k = 1, 2, ..., \tag{1.4}$$

che verranno chiamati coordinate o coefficienti di Fourier dell'elemento $f$ rispetto al sistema $\{e_k\}$, e la serie

$$\sum_{k=1} c_k e_k, \tag{1.5}$$

che verrà chiamata serie di Fourier dell'elemento $f$ rispetto al sistema $\{e_k\}$.

**Definizione 1.5** (Uguaglianza di Parseval)**.** Un sistema ortonormale è detto **chiuso** se e solo se

$$\|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2. \tag{1.6}$$

In pratica se il sistema ortonormale è chiuso, significa che è una base di $H$ e ogni elemento $h \in H$ può essere decomposto secondo la relazione:

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k. \tag{1.7}$$

Inoltre la relazione di Parseval rappresenta il caso particolare, in cui vale l'uguaglianza nella disuguaglianza di Bessel, cioè:

$$\|h\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k \rangle|^2 \tag{1.8}$$

L'uguaglianza vale solo se il sistema ortonormale scelto è anche una base.

Vale a questo punto il seguente importante teorema:

**Teorema 1.0.2.** *Una successione ortonormale infinita*

$e_1, e_2, ..., e_n, ...$

*è completa in $H$, cioè non esiste un sistema ortonormale più grande in $H$, se e solo se la successione è chiusa in $H$.*

Un esempio fondamentale di spazio di Hilbert, che viene impiegato molto spesso in meccanica quantistica, è quello delle funzioni quadrato sommabili (secondo Lebesgue) su un intervallo (a,b) finito o infinito sull'asse reale, cioè

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \qquad \forall f \in L^2(a,b). \tag{1.9}$$

In $L^2(a,b)$ il prodotto scalare é definito come segue

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \qquad \forall f, g \in L^2(a,b). \tag{1.10}$$

Conseguentemente la disuguaglianza di Schwarz equivale a

$$|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt} \quad \forall f, g \in L^2(a,b). \tag{1.11}$$

# 2. OPERATORI LINEARI

## 2.1 Generalità sugli operatori

Sia $D$ un sottoinsieme dello spazio $H$. Una funzione $T$ che associa a ogni elemento $f \in D$ l'elemento $Tf = g \in H$ è chiamato operatore nello spazio $H$ con **dominio** $D$. L'insieme $\mathcal{R}$, che contiene gli elementi $g = Tf$ con $f \in D$ è chiamato **range** di $T$.

Se l'operatore $T$ è iniettivo e suriettivo, cioè ad ogni elemento di $D$ corrisponde un solo elemento di $\mathcal{R}$, allora ammette l'inverso $T^{-1}$ e si ha che

$$D_{T^{-1}} = \mathcal{R}_T, \qquad \mathcal{R}_{T^{-1}} = D_T \tag{2.1}$$

Se il dominio $D_T$ di un operatore $T$ contiene il dominio $D_S$ di un operatore $S$ e inoltre $Tf = Sf$ per ogni $f \in D_S$, allora l'operatore $T$ è chiamato un' **estensione** di S e si scrive $S \subset T$.

Un operatore $T$ si dice che è **continuo** in un punto $f_0 \in D_T$ se

$$\lim_{f \to f_0} Tf = Tf_0 \tag{2.2}$$

con $f \in D_T$. L'operazione di limite nello spazio $H$ ha senso, avendo definito un prodotto scalare, che induce una norma.

## 2.2 Operatori lineari limitati

Un operatore $T$ è lineare se il suo dominio di definizione è una varietà lineare e se

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg \tag{2.3}$$

per ogni $f, g \in D$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Un operatore lineare $T$ con dominio $D$ si dice **limitato** se esiste una costante reale $M$, tale che

$$\|Tf\| \leq M\|f\| \quad \forall f \in D. \tag{2.4}$$

La proprietà di limitatezza e di continuità di un operatore sono strettamente collegate, come dimostra il teorema seguente, il quale permette di definire il concetto di norma di un operatore.

**Teorema 2.2.1.** *Sia $T$ un operatore lineare con dominio $D$. Allora le seguenti definizioni sono equivalenti:*

1. *$T$ è continuo.*
2. *$T$ è continuo nell'origine.*
3. *$T$ mappa insiemi limitati in insiemi limitati.*
4. *$T$ è limitato.*
5. *Esiste l'estremo superiore:*

$$\sup_{f\in D, \|f\|\leq 1} \|Tf\| = M < \infty. \tag{2.5}$$

*Inoltre vale la seguente catena di uguaglianze:*

$$\begin{aligned}\sup_{f\in D, \|f\|\leq 1} \|Tf\| = \sup_{f\in D, \|f\|=1} \|Tf\| = \sup_{f\in D, \|f\|\neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} \\ = inf\{M\in\mathbb{R}; \|Tf\|\leq M\|f\| \quad \forall f\in D\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

A questo punto è possibile definire la norma di un operatore come la più piccola costante reale che maggiora la (2.4), cioè

$$\|T\| = \sup_{f\in D, \|f\|\leq 1} \|Tf\| \tag{2.7}$$

o analogamente come uno degli altri membri della (2.6).

Un'importante operazione che si svolge sugli operatori è quella di trovarne l'operatore aggiunto, la cui definizione è riportata più avanti. Prima di definire l'aggiunto di un operatore (in questo caso limitato), è opportuno definire il funzionale bilineare.

**Definizione 2.1.** Si chiama funzionale bilineare in $H$ una funzione che a ogni coppia $f, g \in H$ associa un numero complesso $\Omega(f, g)$ e tale che:

1. $$\Omega(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1\Omega(f_1, g) + \alpha_2\Omega(f_2, g), \tag{2.8}$$

2.
$$\Omega(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \overline{\beta_1}\Omega(f, g_1) + \overline{\beta_2}\Omega(f, g_2), \tag{2.9}$$

3.
$$\sup_{\|f\|\leq 1, \|g\|\leq 1} |\Omega(f, g)| < \infty. \tag{2.10}$$

Analogamente al caso degli operatori lineari si definisce la norma di un funzionale bilineare come:

$$\begin{aligned} \|\Omega\| = \sup_{\|f\|\leq 1, \|g\|\leq 1} |\Omega(f, g)| &= \sup_{\|f\|=1, \|g\|=1} |\Omega(f, g)| \\ &= \sup_{\|f\|\neq 0, \|g\|\neq 0} \frac{|\Omega(f, g)|}{\|f\|\|g\|}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Per i funzionali bilineari vale un teorema analogo a quello di Fischer-Riesz:

**Teorema 2.2.2.** *Ogni funzionale bilineare $\Omega(f, g)$ ha una rappresentazione della forma*
$$\Omega(f, g) = \langle Af, g \rangle, \tag{2.12}$$
*dove $A$ è un operatore lineare limitato e definito in $H$ e unicamente determinato da $\Omega$. Inoltre $\|A\| = \|\Omega\|$.*

Adesso è possibile definire l'operatore aggiunto. Dato un arbitrario operatore lineare limitato $A$ definito in $H$, l'espressione $\langle f, Ag \rangle$ definisce un funzionale bilineare su $H$ con norma $\|A\|$. Per il teorema precedente esiste un unico operatore limitato $A^\dagger$ definito su $H$ con norma $\|A^\dagger\| = \|A\|$ tale che

$$\langle f, Ag \rangle = \langle A^\dagger f, g \rangle \quad \forall f, g \in H. \tag{2.13}$$

L'operatore $A^\dagger$ è chiamato l' **aggiunto** di $A$. Se ha è limitato e $A^\dagger = A$, allora $A$ è detto **autoaggiunto**. Per l'aggiunto valgono le seguenti proprietà:

1. $A^{\dagger\dagger} = A$,
2. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

## 2.3 Rappresentazione matriciale di operatori limitati

Si consideri un operatore $A$ definito ovunque in uno spazio di Hilbert $H$ e si scelga inoltre una base ortonormale $\{e_k\}_1^\infty$. Sia

$$Ae_k = c_k \quad con\ k = 1, 2, 3, ... \tag{2.14}$$

e

$$\langle Ae_k, e_i \rangle = a_{ik} \quad con\ i, k = 1, 2, 3, ... \tag{2.15}$$

Allora per la completezza di $\{e_k\}_1^\infty$ e per la disuguaglianza di Bessel si ha che:

$$c_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} e_i \quad con\ k = 1, 2, 3, ... \tag{2.16}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty \tag{2.17}$$

È a questo punto immediato introdurre la matrice $(a_{ik})$ la cui k-esima colonna contiene le componenti del vettore, in cui l'operatore $A$ mappa la k-esima coordinata del vettore di partenza. Le seguenti relazioni mostrano come agisce l'operatore $A$ su ogni componente di un vettore $f$ generico:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k, \tag{2.18}$$

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \tag{2.19}$$

dove

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} x_i. \tag{2.20}$$

**Definizione 2.2.** Se un operatore $A$, definito ovunque in $H$, agendo su un vettore del tipo (2.18) dà come risultato la (2.19) con gli $y_k$ definiti dalla (2.20), allora $A$ ammette una rappresentazione matriciale relativa alla base $\{e_k\}_1^\infty$. In questo caso si scrive $A \sim (a_{ik})$

Se $A \sim (a_{ik})$ e $B \sim (b_{ik})$, allora

$$AB \sim (c_{ik}) \tag{2.21}$$

con

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{ir} b_{rk} \quad con\ i, k = 1, 2, 3, ... \quad . \tag{2.22}$$

Inoltre se $A \sim (a_{ik})$ e $A^\dagger \sim (a_{ik}^\dagger)$ allora

$$a^{\dagger}_{ik} = \overline{a}_{ik}. \tag{2.23}$$

Un esempio di operatore limitato che ammette una rappresentazione matriciale è l'operatore di Hilbert-Schmidt definito in $L^2(\infty, -\infty)$ dalla seguente formula:

$$g(s) = Af(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)f(t)dt \tag{2.24}$$

dove $K(s,t)$ è denominato il kernel dell'operatore e soddisfa la seguente condizione

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dsdt < \infty. \tag{2.25}$$

Dalla (2.25) è possibile stimare la norma dell'operatore. Infatti per la disuguaglianza di Schwarz si ha che

$$\begin{aligned}|g(s)|^2 = |\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)f(t)dt|^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \|f(t)\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dt.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Integrando in $s$ si ottiene infine

$$\|g(s)\|^2 = \|Af(s)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^2 ds \leq \|f(t)\|^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dsdt. \tag{2.27}$$

Quindi

$$\|A\| \leq \sqrt{\iint_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dsdt}. \tag{2.28}$$

Adesso si cercherà la rappresentazione matriciale dell'operatore di Hilbert-Schmidt. Sia $\{\varphi_k(t)\}_1^{\infty}$ una base ortonormale in $L^2(-\infty, \infty)$ e si definisca

$$a_{ik} = \iint_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{\varphi_i(s)}\varphi_k(t)dsdt \tag{2.29}$$

Sia inoltre $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$ con

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\varphi_k(t)}dt. \tag{2.30}$$

I coefficienti di Fourier

$$y_i = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\overline{\varphi_i(t)}ds \tag{2.31}$$

della funzione $g(s)$ ottenuta dalla (2.24) sono dati da

$$y_i = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\{\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{\varphi_i(t)}ds\}dt \tag{2.32}$$

Dato che il prodotto di due funzioni in $L^2(-\infty,\infty)$ è ancora in $L^2(-\infty,\infty)$, allora per la (1.7) si ha che

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{\varphi_i(t)}ds \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\overline{\varphi_k(t)} \quad con\ k = 1,2,3,... \tag{2.33}$$

e

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k(t). \tag{2.34}$$

Allora

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad con\ k = 1,2,3,.... \tag{2.35}$$

Dalla (2.33) e sapendo che le $\varphi$ sono normalizzate segue subito che

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{\varphi_i(t)}ds \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2. \tag{2.36}$$

D'altra parte per l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 ds = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(s,t)\overline{\varphi_i(t)}ds \right|^2 \tag{2.37}$$

e perciò, integrando in t e sfruttando la (2.36) si ha che

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |K(s,t)|^2 dsdt = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2. \tag{2.38}$$

## 2.4 Convergenza e compattezza

In questa sezione vengono esposte le definizioni di due tipi di convergenza in uno spazio di Hilbert $H$, attraverso le quali è possibile definire una particolare classe di operatori, ovvero quella degli operatori completamente continui.

**Definizione 2.3.** Una successione di vettori $f_k \in H$ $(k = 1, 2, ...)$ converge **debolmente** ad un vettore $f$ se

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_k, h\rangle = \langle f, h\rangle \tag{2.39}$$

con $h \in H$.

**Definizione 2.4.** Una successione di vettori $f_k \in H$ $(k = 1, 2, ...)$ converge **fortemente** ad un vettore $f$ se

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0. \tag{2.40}$$

**Definizione 2.5.** Un insieme è detto **compatto** se da ogni successione appartenente all'insieme è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. In base al tipo di convergenza che si sta utilizzando, si parla di compattezza debole o forte.

**Definizione 2.6.** Un operatore lineare $A$ definito su tutto uno spazio di Hilbert $H$ è detto **completamente continuo** se mappa un insieme limitato in un insieme fortemente compatto.

## 2.5 Operatori di proiezione e operatori unitari

### 2.5.1 Operatori di proiezione

Si è visto nel capitolo 1 che è possibile scomporre uno spazio di Hilbert $H$ attraverso la somma diretta di due o più sottospazi tra loro ortogonali. Se $h \in H = G \oplus F$ con $h = g + f$, dove $g \in G$ e $f \in F$, è possibile definire un operatore di **proiezione**, che fa corrispondere a ogni elemento $h$ di $H$ la sua proiezione $g$ sul sottospazio $G$:

$$Ph = P_G h = g. \tag{2.41}$$

Un operatore di proiezione è evidentemente lineare. In più è limitato e la sua norma è uguale a 1. Infatti dall'ortogonalità degli spazi $G$ e $F$ si ha che

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2, \tag{2.42}$$

dunque

$$\|g\| \leq \|h\| \Rightarrow \|P\| \leq 1. \tag{2.43}$$

Tuttavia se $h \in G$ allora $g = h$ e nella (2.43) vale l'uguaglianza. In conclusione $\|P\| = 1$.

Un operatore di proiezione soddisfa due importanti proprietà:

- $P^2 = P$,
- $P = P^\dagger$.

Infatti se $Ph = g$ allora $Pg = g$ e dunque $P^2h = Ph \Rightarrow P^2 = P$. Per dimostrare che $P$ è autoaggiunto, basta scegliere due vettori $h_1, h_2 \in H$, tali che

$$h_1 = g_1 + f_1, \qquad h_2 = g_2 + f_2, \tag{2.44}$$

dove $g_1 = Ph_1$ e $g_2 = Ph_2$. Allora si ha

$$\langle g_1, h_2\rangle = \langle g_1, g_2\rangle = \langle h_1, g_2\rangle \Longrightarrow \langle Ph_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle. \tag{2.45}$$

L'ultimo passaggio implica che $P^\dagger = P$.

Dalle due proprietà appena dimostrate è possibile caratterizzare un operatore di proiezione, per il quale vale il seguente teorema.

**Teorema 2.5.1.** *Se un operatore $P$ è definito su tutto $H$, in modo che per due arbitrari vettori $h_1, h_2 \in H$*

$$\langle P^2h_1, h_2\rangle = \langle Ph_1, h_2\rangle, \tag{2.46}$$

$$\langle Ph_1, h_2\rangle = \langle h_1, Ph_2\rangle \tag{2.47}$$

*allora esiste un sottospazio $G \subset H$, tale che $P$ è l'operatore di proiezione su $G$.*

*Dimostrazione.* L'operatore $P$ è limitato. Infatti

$$\|Ph\|^2 = \langle Ph, Ph\rangle = \langle P^2h, h\rangle = \langle Ph, h\rangle \Longrightarrow \|Ph\|^2 \leq \|Ph\|\|h\| \tag{2.48}$$

e quindi

$$\|Ph\| \leq \|h\|. \tag{2.49}$$

Quindi l'operatore $P$ è limitato e la sua norma non supera 1.

Sia ora $G$ l'insieme dei vettori $g \in H$ tali che $Pg = g$. $G$ è una varietà lineare, ma per la tesi del teorema occorre dimostrare che $G$ è chiuso e dunque è un sottospazio. Per questo scopo si prenda una successione $g_n \in G$ con $g_n \to g$. Allora $g_n = Pg_n$ e

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n), \tag{2.50}$$

e quindi per la disuguaglianza di Schwartz

$$\|Pg - g_n\| \leq \|g - g_n\|. \tag{2.51}$$

Con $n \to \infty$

$$\|Pg - g\| \le 0 \tag{2.52}$$

e quindi $Pg = g$.

Il limite $g$ della successione appartiene a $G$, quindi $G$ è chiuso ed è un sottospazio. Rimane ora da dimostrare che $P = P_G$, cioè che $P$ è proprio l'operatore di proiezione su $G$. Per ogni $h \in H$ il vettore $Ph$ appartiene a $G$, poiché per la (2.46) $P(Ph) = Ph$. Il sottospazio $G$ contiene anche $P_G h$. È sufficiente dimostrare che

$$\langle Ph, g' \rangle = \langle P_G h, g' \rangle \qquad \forall g' \in G. \tag{2.53}$$

Ma questo segue dall' equazione (2.47), per la quale

$$\langle Ph, g' \rangle = \langle h, Pg' \rangle = \langle h, g' \rangle \tag{2.54}$$

e da

$$\langle P_G h, g' \rangle = \langle h, P_G g' \rangle = \langle h, g' \rangle. \tag{2.55}$$

□

Se si definisce l'operatore di proiezione su $G$, è possibile definire anche l'operatore su $F = H \ominus G$ con $\mathbb{1} - P$, dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità.

### *2.5.2 Operatori unitari*

**Definizione 2.7.** L'operatore $U$ con dominio $H$ e range $H$ è unitario se

$$\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle \qquad \forall f, g \in H. \tag{2.56}$$

Si dimostra facilmente che un operatore unitario $U$ ammette un operatore inverso $U^{-1}$. A tal fine bisogna prima di tutto provare che U è iniettivo, cioè se $Uf = Ug$, allora $f = g$. Infatti se $Uf = Ug$

$$\begin{aligned} 0 = \langle Uf - Ug, Uf - Ug \rangle &= \langle Uf, Uf \rangle - \langle Uf, Ug \rangle - \langle Ug, Uf \rangle + \langle Ug, Ug \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle = \langle f - g, f - g \rangle, \end{aligned} \tag{2.57}$$

quindi $f = g$. L'operatore $U^{-1}$ esiste e il suo dominio e il suo range coincidono con l'intero spazio $H$. Quindi si possono scegliere due elementi $f', g' \in H$, tali che $f = U^{-1} f'$ e $g = U^{-1} g'$. Allora $Uf = f'$ e $Ug = g'$ e sfruttando la (2.56) si ha che

$$\langle f', g' \rangle = \langle U^{-1} f', U^{-1} g' \rangle \tag{2.58}$$

quindi $U^{-1}$ è unitario.

L'operatore $U$ ha un'altra importante proprietà:

$$\langle Uf, g\rangle = \langle f, U^{-1}g\rangle. \tag{2.59}$$

Infatti se $U^{-1}g = g'$, cioè $g = Ug'$, allora per l'unitarietà di $U$

$$\langle Uf, Ug'\rangle = \langle f, g'\rangle, \tag{2.60}$$

che è equivalente alla (2.59). Quindi l'inverso di un operatore unitario coincide con il suo aggiunto. Inoltre un operatore unitario è necessariamente lineare. Infatti preso $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ e $g \in H$ si ottiene che

$$\begin{aligned}\langle Uf, g\rangle &= \langle f, U^{-1}g\rangle = \alpha_1\langle f_1, U^{-1}g\rangle + \alpha_2\langle f_2, U^{-1}g\rangle \\ &= \alpha_1\langle Uf_1, g\rangle + \alpha_2\langle Uf_2, g\rangle = \langle \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2, g\rangle, \end{aligned} \tag{2.61}$$

quindi $Uf = \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2$.

# 3. OPERATORI LINEARI NON LIMITATI

## 3.1 Operatori chiusi e operatori aggiunti

Finora sono stati trattati operatori lineari limitati, ovvero continui. Tuttavia è possibile cominciare a studiare operatori non necessariamente continui, introducendo una nuova proprietà topologica, che è la **chiusura** di un operatore.

**Definizione 3.1.** Un operatore $T$ è **chiuso** se dalle relazioni

$$f_n \in D_T, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} Tf_n = g \tag{3.1}$$

si può affermare che

$$f \in D_T, \quad Tf = g. \tag{3.2}$$

Si osserva che la proprietà di chiusura di un operatore è meno restrittiva della continuità. Infatti per affermare che un operatore è chiuso non è necessario che, data una serie convergente $\{f_n\}_1^\infty$, allora esista il limite $\lim_{n\to\infty} Tf_n$; tuttavia se la serie $\{f_n\}_1^\infty$ converge e accade che esiste il limite di $Tf_n$, allora la proprietà di chiusura di $T$ garantisce che il limite $f$ della successione $\{f_n\}_1^\infty$ appartiene al dominio di $T$ e che $\lim_{n\to\infty} Tf_n = Tf$.

Per la definizione di chiusura (intesa come operatore) si fa riferimento alla definizione di grafico di un operatore che viene esposta nel seguito. Ulteriori approfondimenti sul grafico di un operatore sono sviluppati nella sezione 3.5.

Si consideri l'insieme di tutte le coppie ordinate $\{f, g\}$ con $f, g \in H$. Da questo insieme è possibile definire uno spazio vettoriale attraverso le seguenti relazioni:

$$\alpha\{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\}, \tag{3.3}$$

$$\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\}. \tag{3.4}$$

In questo spazio vettoriale con il prodotto scalare definito da

$$\langle\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}\rangle = \langle f_1, f_2\rangle + \langle g_1, g_2\rangle \tag{3.5}$$

si ottiene uno spazio di Hilbert indicato con $\mathbf{H}$. Sia $T$ un operatore in $H$. Allora l'insieme $\mathbf{M}(T)$ di tutte le coppie ordinate $\{f, Tf\}$ è chiamato il **grafico** dell'operatore $T$. Ogni punto di $\mathbf{M}(T)$ è determinato univocamente dalla sua ascissa.

**Definizione 3.2.** Un operatore lineare $T$ è detto chiuso se il suo grafico $\mathbf{M}(T)$ è chiuso (la definizione è equivalente a quella di sopra). Un operatore lineare è detto chiudibile se la chiusura $\overline{\mathbf{M}(T)}$ del grafico di $T$ è il grafico di un operatore, detto appunto **chiusura** di $T$ e indicato con $\overline{T}$.

Per gli operatori non limitati è possibile generalizzare il concetto di operatore aggiunto introdotto nella sezione 2.2. In questo caso però non si può più fare riferimento alla rappresentazione generale di un funzionale bilineare, che dipende da un operatore limitato, e di conseguenza non si può affermare che per ogni elemento $g \in H$ l'espressione $\langle Tf, g\rangle$, intesa come funzione di $f \in D_T$, è rappresentabile nella forma $\langle f, g^*\rangle$. Comunque si può affermare in generale che l'equazione

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle \tag{3.6}$$

è soddisfatta per qualche coppia $g$ e $g^*$: infatti è sempre verificata per $g = g^* = 0$. Ma l'esistenza del vettore $g^*$ non basta per poter definire l'aggiunto $T^\dagger$, perché bisogna anche richiedere che $g^*$ sia determinato univocamente da $g$. Se il dominio di $T$ è denso in $H$, l'unicità è garantita. Infatti è noto che se un insieme non è denso in $H$, allora è possibile trovare un vettore $h$ ortogonale all'insieme. Dunque se $D_T$ non è denso in $H$, allora

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g^*\rangle = \langle f, g^* + h\rangle \qquad \forall f \in D_T. \tag{3.7}$$

Se invece $D_T$ è denso in $H$, si ha che per ogni $f \in D_T$

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g_1^*\rangle,$$
$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, g_2^*\rangle,$$

allora $\langle f, g_1^* - g_2^*\rangle = 0$, cioè $g_1^* = g_2^*$.

Se il dominio di un operatore $T$ è denso in $H$, allora ammette l'operatore aggiunto $T^\dagger$. Il dominio $D_{T^\dagger}$ è composto da tutti quegli elementi $g$, che definiscono univocamente un elemento $g^*$ che soddisfa la (3.6) per ogni $f \in D_T$. Si ha che

$$T^\dagger g = g^*. \tag{3.8}$$

L'operatore aggiunto gode delle seguenti proprietà:

- l'operatore $T^\dagger$ è lineare,
- se $S \subset T$, allora $S^\dagger \supset T^\dagger$,
- l'operatore $T^\dagger$ è chiuso,

- se l'operatore $T$ ammette la chiusura $\overline{T}$, allora $(\overline{T})^\dagger = T^\dagger$,
- se esiste l'operatore $T^{\dagger\dagger}$, allora $T \subset T^{\dagger\dagger}$,
- se $T$ ha dominio e range densi in $H$ e ammette l'inverso, allora $(T^\dagger)^{-1} = (T^{-1})^\dagger$.

## 3.2 Autovettori, sottospazi invarianti, riducibilità di operatori lineari

**Definizione 3.3.** Un numero complesso $\lambda$ è chiamato **autovalore** di un operatore lineare $T$ se esiste un vettore $f \neq 0$ tale che

$$Tf = \lambda f. \tag{3.9}$$

L'elemento $f$ è chiamato un **autovettore** di $T$ che appartiene all'autovalore $\lambda$.

L'insieme di tutti i vettori che soddisfano la (3.9) (incluso l'elemento zero che però non è un autovettore) forma un **autospazio** di $T$. La molteplicità di un autovalore è definita come la dimensione del corrispondente autospazio. Se l'operatore è chiuso allora l'autospazio è chiuso ed è dunque un sottospazio. Dall'equazione (3.9) si osserva che se si applica ad un autovettore l'operatore $T$, il risultato dell'applicazione è un "multiplo" del vettore di partenza. In pratica l'azione di $T$ su un elemento dell'autospazio è ancora un elemento dell'autospazio. Una generalizzazione del concetto autospazio è quello di spazio invariante.

**Definizione 3.4.** Un sottospazio $H_1 \subset H$ è detto spazio invariante di un operatore $T$ se la relazione $f \in D_T \cap H_1$ implica che

$$Tf \in H_1. \tag{3.10}$$

L'operatore $T$ determina un operatore $T_1$ definito sul sottospazio $H_1$ tale che

$$D_{T_1} = D_T \cap H_1 \qquad T_1 \subset T. \tag{3.11}$$

L'operatore $T_1$ è chiamato la restrizione dell'operatore $T$ a $H_1$. A questo punto ci si può chiedere se è possibile studiare l'azione di un operatore $T$ su un vettore attraverso le sue restrizioni, se sono ammesse. La risposta è affermativa come dimostra il seguente teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Se $H_1$ e il suo complemento ortogonale $H_2$ sono spazi invarianti dell'operatore $T$ e se $P_{H_1} D_T \subset D_T$, dove $P_{H_1}$ è l'operatore di proiezione su $H_1$, allora per ogni $f \in D_T$,*

$$Tf = T_1 f_1 + T_2 f_2, \tag{3.12}$$

*dove $T_1$ e $T_2$ sono le restrizioni di $T$ a $H_1$ e $H_2$ e $f_1$ e $f_2$ sono le proiezioni di $f$ su $H_1$ e $H_2$.*

Se il sottospazio $H_1$ soddisfa le condizioni del teorema precedente, si dice che $H_1$ riduce l'operatore $T$. Il teorema che segue fornisce un criterio per decidere se un sottospazio riduce un operatore.

**Teorema 3.2.2.** *Sia $P$ l'operatore di proiezione su un dato sottospazio $G$. Allora $G$ riduce $T$ se e solo se*

- $Pf \in D_T$,
- $PTf = TPf$,

*per $f \in D_T$, cioè $P$ commuta con $T$.*

*Dimostrazione.* Viene mostrata la necessità del teorema. La sufficienza si dimostra analogamente. Se il sottospazio $G$ riduce $T$, allora il fatto che $f \in D_T$ implica per il teorema 3.2.1 che $Pf \in D_T$, quindi il primo punto è dimostrato. Per verificare il secondo punto si supponga che

$$f = g + h, \tag{3.13}$$

dove

$$g = Pf. \tag{3.14}$$

Siccome $G$ riduce $T$,

$$Tf = Tg + Th \tag{3.15}$$

dove $Tg \in G$ e $Th \in H \ominus G$. Perciò

$$PTf = PTg = Tg = TPf \Longrightarrow PTf = TPf. \tag{3.16}$$

$\square$

## 3.3 Operatori simmetrici e operatori isometrici

**Definizione 3.5.** Un operatore lineare $A$ è detto **simmetrico** se:

- il suo dominio $D_A$ è denso in $H$,
- $\forall f, g \in D_A$ segue che $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$.

Dalle proprietà dell'operatore aggiunto elencate nella sezione 3.1 si deduce che l'aggiunto di un operatore simmetrico $A$ è un'estensione di $A$, cioè $A \subset A^\dagger$. Se un operatore simmetrico $A$ coincide con il suo aggiunto, cioè $A$ soddisfa le condizioni della definizione 3.5 e inoltre $D_A = D_{A^\dagger}$, si dice che è autoaggiunto.

**Teorema 3.3.1.** *Se il range $\mathcal{R}_A$ di un operatore simmetrico $A$ è tutto lo spazio $H$, allora $A$ è autoaggiunto.*

*Dimostrazione.* Poiché $A \subset A^\dagger$ è sufficiente verificare che ogni elemento $g \in D_{A^\dagger}$ appartiene a $D_A$. Sia $g \in D_{A^\dagger}$ e $A^\dagger g = g^\dagger$. Siccome $\mathcal{R}_A = H$, deve esistere un elemento $h \in D_A$ tale che $Ah = g^\dagger$. Di conseguenza per ogni $f \in D_A$,

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, g^\dagger\rangle = \langle f, Ah\rangle = \langle Af, h\rangle. \tag{3.17}$$

Sfruttando ancora il fatto che $\mathcal{R}_A = H$, si ha che $g = h$. Quindi $g \in D_A$ e il teorema è dimostrato. □

**Teorema 3.3.2.** *Gli autovalori di un operatore simmetrico sono reali.*

*Dimostrazione.* Se $Af = \lambda f \; f \neq 0$ , allora

$$\lambda\langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle Af, f\rangle = \langle f, Af\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \overline{\lambda}\langle f, f\rangle \tag{3.18}$$

da cui $\lambda = \overline{\lambda}$. □

**Teorema 3.3.3.** *Gli autovalori $f_1$ e $f_2$ che appartengono rispettivamente a due autovalori differenti $\lambda_1$ e $\lambda_2$ di un operatore simmetrico sono ortogonali tra loro.*

*Dimostrazione.* Ponendo $Af_1 = \lambda_1 f_1$ e $Af_2 = \lambda_2 f_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ottiene che

$$\lambda_1\langle f_1, f_2\rangle = \langle \lambda_1 f_1, f_2\rangle = \langle Af_1, f_2\rangle = \langle f_1, Af_2\rangle = \\ \langle f_1, \lambda_2 f_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle f_1, f_2\rangle. \tag{3.19}$$

Perciò $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle f_1, f_2\rangle = 0$ e $\langle f_1, f_2\rangle = 0$. □

Nel capitolo precedente sono stati introdotti gli operatori unitari, i quali sono stati definiti con dominio e range coincidenti con l'intero spazio di Hilbert $H$. Esiste una generalizzazione del concetto di operatore unitario che è quella di operatore **isometrico**.

**Definizione 3.6.** L'operatore $V$ con dominio $H_1$ e range $H_2$ è isometrico se

$$\langle Vf, Vg\rangle_2 = \langle f, g\rangle_1 \quad \forall f, g \in H_1. \tag{3.20}$$

$H_1$ e $H_2$ sono due spazi di Hilbert o eventualmente sottospazi di uno spazio $H$. I pedici 1 e 2 rappresentano rispettivamente il prodotto scalare in $H_1$ e in $H_2$.

Per i due teoremi che seguono si considerano operatori isometrici, i cui dominio e range sono sottospazi di uno stesso spazio $H$.

**Teorema 3.3.4.** *Ciascun autovalore di un operatore isometrico $V$ ha modulo unitario.*

*Dimostrazione.* Sia $Vf = \lambda f$ con $f \neq 0$. Allora

$$\langle f, f\rangle = \langle Vf, Vf\rangle = \langle \lambda f, \lambda f\rangle = |\lambda|^2\langle f, f\rangle, \tag{3.21}$$

da cui $|\lambda|^2 = 1$, dato che $\langle f, f\rangle \neq 0$. □

**Teorema 3.3.5.** *Se due autovettori $f_1$ e $f_2$ appartengono a due differenti autovalori $\lambda_1$ e $\lambda_2$ di un operatore isometrico $V$, allora sono ortogonali.*

*Dimostrazione.* Ponendo $Vf_1 = \lambda_1 f_1$ e $Vf_2 = \lambda_2 f_2$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ottiene che

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle Vf_1, Vf_2\rangle = \langle \lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\langle f_1, f_2\rangle. \tag{3.22}$$

Quindi $(1-\lambda_1\overline{\lambda_2})\langle f_1, f_2\rangle = 0$ e $\langle f_1, f_2\rangle = 0$, dato che $1-\lambda_1\overline{\lambda_2} \neq 0$. Infatti si ha che

$$|1-\lambda_1\overline{\lambda_2}|^2 = 2 - \overline{\lambda_1}\lambda_2 - \overline{\lambda_2}\lambda_1 = 2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2), \tag{3.23}$$

sapendo che $\lambda_1$ e $\lambda_2$ hanno modulo unitario. Il termine $2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2)$ si annulla solo se $\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2) = 1$. Indicando $\lambda_1$ con $a+ib$ e $\lambda_2$ con $c+id$ , si ha che $\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2) = ac+bd$. Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$ deve valere la disuguaglianza stretta per almeno una delle seguenti relazioni: $(a-c)^2 \geq 0$ e $(b-d)^2 \geq 0$. Conseguentemente vale la disuguaglianza stretta per almeno una delle due seguenti disuguaglianze:

$$\frac{a^2+c^2}{2} \geq ac \tag{3.24}$$

$$\frac{b^2+d^2}{2} \geq bd. \tag{3.25}$$

Ricordando infine che $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono a modulo unitario per il teorema precedente si ottiene che:

$$\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2) = ac + bd < \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2+d^2}{2} = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2} = 1 \tag{3.26}$$

Dunque $\mathrm{Re}(\overline{\lambda_1}\lambda_2) < 1$ e il teorema è dimostrato. □

## 3.4 Lo spettro di un operatore e il risolvente

Si supponga di voler studiare l'equazione

$$Tf - \lambda f = g, \tag{3.27}$$

dove $T$ è un operatore lineare chiuso, $f \in D_T$ e $\lambda$ è un qualsiasi numero complesso. Il primo membro dell'equazione precedente può essere scritto come $(T - \lambda\mathbb{1})f$, suggerendo che lo studio della (3.27) si riduce ad analizzare il range $\mathcal{R}_T(\lambda)$ dell'operatore $T - \lambda\mathbb{1} = T_\lambda$. $T_\lambda$ permette di realizzare una corrispondenza tra $D_T$ e $\mathcal{R}_T(\lambda)$, che nel caso particolare in cui sia biunivoca definisce l'operatore inverso di $T_\lambda$, cioè $(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$.

**Definizione 3.7.** Se $(T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ esiste ed è un operatore limitato definito in tutto $H$ (quindi il range di $T_\lambda$ è tutto $H$), allora $\lambda$ è chiamato un **punto regolare** dell'operatore $T$. Tutti gli altri punti del piano complesso rappresentano lo **spettro** di $T$.

**Teorema 3.4.1.** *La corrispondenza tra $D_T$ e $\mathcal{R}_T(\lambda)$ determinata da $T_\lambda$ è biunivoca se e solo se $\lambda$ non è un autovalore dell'operatore $T$.*

*Dimostrazione.* Se $T_\lambda$ non determina una corrispondenza biunivoca tra $D_T$ e $\mathcal{R}_T(\lambda)$, allora esistono due vettori $f_1, f_2 \in D_T$ e tali che $f_1 \neq f_2$ e

$$Tf_1 - \lambda f_1 = g, \quad Tf_2 - \lambda f_2 = g. \tag{3.28}$$

Allora

$$Tf = \lambda f, \tag{3.29}$$

dove $f = f_1 - f_2 \neq 0$ e quindi $\lambda$ è un autovalore dell'operatore $T$. L'affermazione inversa si dimostra analogamente. □

Si consideri ora l'importante caso in cui l'operatore è autoaggiunto.

**Teorema 3.4.2.** *Il numero $\lambda$ è un autovalore di un operatore autoaggiunto $A$ se e solo se*

$$\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} \neq H. \tag{3.30}$$

*Dimostrazione.* Sia $\lambda$ un autovalore di $A$, che è reale essendo $A$ autoaggiunto. Allora per ogni $h \in D_A$

$$\langle f, (A - \lambda\mathbb{1})h\rangle = \langle Af - \lambda f, h\rangle = 0, \tag{3.31}$$

che implica

$$f \perp \mathcal{R}_A(\lambda). \tag{3.32}$$

L'ultima relazione è possibile solo se $\mathcal{R}_A(\lambda)$ non è denso in $H$, cioè $\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} \neq H$. Si supponga ora che $\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} \neq H$. Allora esiste un vettore $f$ non nullo che è ortogonale allo spazio $\mathcal{R}_A(\lambda)$. Perciò per ogni vettore $h \in D_A$

$$\langle f, (A - \lambda\mathbb{1})h\rangle = 0. \tag{3.33}$$

Segue che $f \in D_{A^\dagger}$ e $A^\dagger f = \overline{\lambda} f$. Ma siccome $A$ è autoaggiunto $Af = \overline{\lambda} f$, cioè $\overline{\lambda}$ è un autovalore di $A$. Inoltre $\lambda$ è reale, essendo $A$ autoaggiunto. □

**Teorema 3.4.3.** *I punti non reali $\lambda$ nel piano complesso sono punti regolari di un operatore autoaggiunto $A$.*

*Dimostrazione.* Il numero complesso $\lambda = \xi + i\eta$ ($\eta \neq 0$) non può essere un autovalore di $A$. Allora per il teorema 3.4.1 l'operatore $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ esiste. Sia $(A - \lambda\mathbb{1})f = g$, allora

$$\begin{aligned}\|g\|^2 = \langle (A - \xi\mathbb{1})f - i\eta f, (A - \xi\mathbb{1})f - i\eta f\rangle = \\ \langle (A - \xi\mathbb{1})f\rangle^2 + i\eta\langle (A - \xi\mathbb{1})f, f\rangle - i\eta\langle f, (A - \xi\mathbb{1})f\rangle + \eta^2\|f\|^2 = \\ \|(A - \xi\mathbb{1})f\|^2 + \eta^2\|f\|^2,\end{aligned} \tag{3.34}$$

da cui

$$\|f\| \leq \frac{\|g\|}{|\eta|}, \tag{3.35}$$

cioè

$$\|(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}g\| \leq \frac{\|g\|}{|\eta|}. \tag{3.36}$$

Poiché l'ultima relazione vale per qualsiasi $g$ appartenente al range $\mathcal{R}_A(\lambda)$, allora l'operatore $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ è limitato. Dal teorema 3.4.2 il fatto che $\lambda$ non sia un autovalore di $A$ garantisce che $\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} = H$. Per verificare che $\lambda$ è un punto regolare resta da dimostrare che $\mathcal{R}_A(\lambda)$ è chiuso. Supponendo che $\mathcal{R}_A(\lambda)$ non sia chiuso, allora si può estendere l'operatore $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ a

$\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)}$. Questa estensione coincide con la chiusura di $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$, che perciò non è chiuso. Ma l'ultima affermazione è impossibile, dato che si dimostra che il fatto che l'operatore $A$ sia chiuso implica che l'operatore $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ è chiuso. □

Dal teorema precedente segue immediatamente che lo spettro di un operatore autoaggiunto è un sottoinsieme dell'asse reale.

**Teorema 3.4.4.** *Lo spettro di un operatore autoaggiunto è un insieme chiuso.*

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrare che l'insieme di punti regolari dell'operatore autoaggiunto $A$ è aperto. Sia $\lambda_0$ un punto regolare. Siccome $\lambda_0$ non annulla l'operatore $A_{\lambda_0}$ esiste un numero $k > 0$ tale che

$$\|Af - \lambda_0 f\| \geq k\|f\| \quad \forall f \in D_A. \tag{3.37}$$

Se $0 < \delta \leq \frac{k}{2}$ allora per $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ e applicando la disuguaglianza triangolare si ha che

$$\|Af - \lambda f\| \geq \|Af - \lambda_0 f\| - \delta\|f\| \geq \frac{k}{2}\|f\|. \tag{3.38}$$

Dall'ultima relazione si deduce in primo luogo che $\lambda$ non è un autovalore di $A$ e dunque per il teorema 3.4.2 $\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} = H$ e in secondo luogo che l'operatore $(A - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ esiste ed è limitato (la (3.38) è infatti una disuguaglianza analoga a quella ottenuta nella dimostrazione del teorema precedente). Il fatto che $\mathcal{R}_A(\lambda)$ sia chiuso segue dal fatto che $A$ è chiuso. Quindi ogni punto $\lambda$ dell'insieme $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$, che è aperto dato che $\delta \neq 0$, è regolare e il teorema è dimostrato. □

**Definizione 3.8.** Un punto $\lambda$ appartiene allo spettro discreto di un operatore autoaggiunto $A$ se $\overline{\mathcal{R}_A(\lambda)} \neq H$, mentre appartiene allo spettro continuo se $\mathcal{R}_A(\lambda) \neq \overline{\mathcal{R}_A(\lambda)}$.

Sulla base del teorema 3.4.2 si deduce che lo spettro discreto di un operatore autoaggiunto è costituito dai suoi autovalori. A questo punto si definisce l'operatore risolvente.

**Definizione 3.9.** Si consideri un operatore lineare chiuso $T$, il cui dominio sia denso in $H$. L'operatore $R_\lambda = (T - \lambda\mathbb{1})^{-1}$, che dipende dal parametro $\lambda$ si chiama **risolvente** dell'operatore $T$ ed è definito per tutti i valori di $\lambda$ per i quali esiste e il suo dominio, cioè $\mathcal{R}_T(\lambda)$, è denso in $H$.

Per ogni punto regolare dell'operatore $T$ il risolvente è limitato e definito su tutto $H$.

**Teorema 3.4.5.** *(Relazione di Hilbert). Presi due punti regolari $\lambda$ e $\mu$ dell'operatore $T$, vale la seguente relazione:*

$$R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda. \tag{3.39}$$

*Dimostrazione.* Dato che $\lambda$ e $\mu$ sono punti regolari dell'operatore $T$, per ogni $h \in H$ si ha che

$$R_\lambda h = R_\mu (T - \mu \mathbb{1}) R_\lambda h, \tag{3.40}$$

$$R_\mu h = R_\mu (T - \lambda \mathbb{1}) R_\lambda h \tag{3.41}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene il risultato richiesto. □

Dalla relazione di Hilbert si ottiene facilmente che gli operatori risolvente relativi a due valori regolari distinti commutano.

Per l'operatore risolvente di un operatore autoaggiunto $A$ esistono delle relazioni tra il parametro $\lambda$ e $R_\lambda$ stesso:

1. Se $\lambda$ è un punto regolare di $A$, $R_\lambda$ è limitato e definito ovunque in $H$;

2. Se $\lambda$ appartiene allo spettro discreto, ma non appartiene allo spettro continuo, $R_\lambda$ è limitato e definito su un insieme non denso in $H$;

3. Se $\lambda$ appartiene allo spettro continuo, ma non appartiene allo spettro discreto, $R_\lambda$ non è limitato ed è definito su un insieme denso in $H$;

4. Se $\lambda$ appartiene sia allo spettro discreto che a quello spettro continuo, $R_\lambda$ non è limitato ed è definito su un insieme non denso in $H$.

## 3.5 Il grafico di un operatore

Si è visto all'inizio del capitolo che il grafico di un operatore è legato al concetto di chiusura. Tuttavia non tutti gli operatori $T$ ammettono la chiusura, dato che può succedere che la chiusura $\overline{\mathbf{M}(T)}$ del grafico di $T$ contenga punti che non sono univocamente definiti dalle loro ascisse. In questo caso $\overline{\mathbf{M}(T)}$ non è il grafico di nessun operatore. Invece se $\overline{\mathbf{M}(T)}$ non contiene punti distinti con la stessa ascissa, allora l'operatore $T$ ammette la chiusura e $\mathbf{M}(\overline{T}) = \overline{\mathbf{M}(T)}$.

D'ora in avanti $T$ è un operatore lineare.

Si definisce adesso l'operatore $\mathtt{U}$ su $\mathbf{H}$ dalla relazione

$$\mathtt{U}\{f, g\} = \{ig, -if\}. \tag{3.42}$$

L'operatore $\mathtt{U}$ è unitario in quanto il suo range è tutto $\mathbf{H}$ e

$$\langle \mathtt{U}\{f_1, g_1\}, \mathtt{U}\{f_2, g_2\}\rangle = \langle \{ig_1, -if_1\}, \{ig_2, -if_2\}\rangle = \\ \langle g_1, g_2\rangle + \langle f_1, f_2\rangle = \langle \{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}\rangle. \quad (3.43)$$

Si osserva inoltre che $\mathtt{U}^2 = \mathit{1}$, dove $\mathit{1}$ è l'identità in $\mathbf{H}$. Attraverso lo strumento del grafico di un operatore si vuole studiare la questione dell'esistenza del biaggiunto $T^{\dagger\dagger}$ e l'uguaglianza $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$. Per iniziare considerare l'equazione

$$\langle Tf, g\rangle - \langle f, g^\dagger\rangle = -i\langle \{iTf, -if\}, \{g, g^\dagger\}\rangle = -i\langle \mathtt{U}\{f, Tf\}, \{g, g^\dagger\}\rangle, \quad (3.44)$$

che vale per $f \in D_T$ e per qualsiasi coppia $g, g^\dagger \in H$. Dalla precedente equazione si deducono tre importanti conseguenze:

1. Affinché gli elementi $g, g^\dagger \in H$ soddisfino l'equazione $\langle Tf, g\rangle = \langle f, g^\dagger\rangle$ per ogni $f \in D_T$, è necessario e sufficiente che l'elemento $\{g, g^\dagger\}$ dello spazio $\mathbf{H}$ sia ortogonale allo spazio $\mathtt{U}\mathbf{M}(T)$, che è l'immagine del grafico dell'operatore $T$ attraverso $\mathtt{U}$;

2. se l'operatore $T^\dagger$ esiste e si prende $g^\dagger = T^\dagger g$, allora il suo grafico è dato da
$$\mathbf{M}(T^\dagger) = \mathbf{H} \ominus \overline{\mathtt{U}\mathbf{M}(T)}; \quad (3.45)$$

3. l'operatore $T^\dagger$ esiste se e solo se ciascun punto dell'insieme $\mathbf{H} \ominus \overline{\mathtt{U}\mathbf{M}(T)}$ è determinato univocamente dalla sua ascissa.

**Teorema 3.5.1.** *Se un operatore $T$ denso in $H$ ammette la chiusura, allora l'operatore $T^{\dagger\dagger}$ esiste ed è la chiusura dell'operatore $T$, cioè $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$.*

*Dimostrazione.* Si assuma all'inizio che $T$ sia chiuso. Allora l'insieme $\mathbf{M}(T)$ è chiuso e di conseguenza lo è anche $\mathtt{U}\mathbf{M}(T)$. Dunque la (3.45) diventa

$$\mathbf{H} = \mathtt{U}\mathbf{M}(T) \oplus \mathbf{M}(T^\dagger). \quad (3.46)$$

Applicando l'operatore $\mathtt{U}$ e osservando che $\mathtt{U}\mathbf{H} = \mathbf{H}$ si ha che

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}(T) \oplus \mathtt{U}\mathbf{M}(T^\dagger) \quad (3.47)$$

da cui

$$\mathbf{H} \ominus \mathtt{U}\mathbf{M}(T^\dagger) = \mathbf{M}(T). \quad (3.48)$$

Poiché i punti del grafico $\mathbf{M}(T)$ sono determinati univocamente dalla loro ascissa, segue dalla terza conseguenza, che l'operatore $T^{\dagger\dagger}$ esiste. Per la (3.48) e per la (3.45) $T^{\dagger\dagger}$ coincide con $T$. Quindi il teorema è dimostrato nel caso in cui $T$ è chiuso. Si assuma ora che $T$ non sia chiuso, ma ammette la chiusura $\overline{T}$. Allora per quanto provato $\overline{T}^{\dagger\dagger} = \overline{T}$. Ma siccome l'operatore aggiunto è chiuso, allora

$$\overline{T}^{\dagger\dagger} = [\overline{T}^{\dagger}]^{\dagger} = (T^{\dagger})^{\dagger} = T^{\dagger\dagger} \tag{3.49}$$

e perciò $T^{\dagger\dagger} = \overline{T}$ e il teorema è dimostrato. □

**Teorema 3.5.2.** *Se $T$ è un operatore lineare chiuso con dominio denso in $H$, allora il prodotto $T^{\dagger}T$ è un operatore autoaggiunto.*

*Dimostrazione.* Si nota immediatamente che:

$$\langle T^{\dagger}Tf, g\rangle = \langle Tf, Tg\rangle = \langle f, T^{\dagger}Tg\rangle \tag{3.50}$$

$$\langle T^{\dagger}Tf, f\rangle = \langle Tf, Tf\rangle \geq 0. \tag{3.51}$$

Poiché l'operatore $T$ è chiuso, vale la (3.47) e perciò l'elemento $\{h, 0\} \in \mathbf{H}$ ha un'unica rappresentazione della forma

$$\{h, 0\} \in \mathbf{H} = \{f_0, Tf_0\} + \mathtt{U}\{g_0, T^{\dagger}g_0\}, \tag{3.52}$$

cioè

$$\{h, 0\} \in \mathbf{H} = \{f_0, Tf_0\} + i\{T^{\dagger}g_0, -g_0\}. \tag{3.53}$$

Segue che

$$h = f_0 + iT^{\dagger}g_0 \tag{3.54}$$

$$0 = Tf_0 - ig_0, \tag{3.55}$$

da cui

$$h = (\mathbb{1} + T^{\dagger}T)f_0. \tag{3.56}$$

Dall'ultima relazione si deduce che l'equazione $(\mathbb{1} + T^{\dagger}T)f = h$ ha un'unica soluzione. Da ciò si deduce che $D_{T^{\dagger}T}$ è denso in $H$. Infatti sia $h$ un qualsiasi vettore che è ortogonale a $D_{T^{\dagger}T}$. È stato appena dimostrato che $h$ può essere rappresento nella forma (3.56). Perciò con $g \in D_{T^{\dagger}T}$ si ha che

$$0 = \langle h, g\rangle = \langle(\mathbb{1} + T^{\dagger}T)f, g\rangle = \langle f, (\mathbb{1} + T^{\dagger}T)g\rangle. \tag{3.57}$$

Se $g = f$ dall'ultima equazione si ottiene che

$$0 = \langle f, f\rangle + \langle f, T^{\dagger}Tf\rangle = \langle f, f\rangle + \langle Tf, Tf\rangle, \tag{3.58}$$

che implica che $f = 0$ e infine $h = 0$. Quindi $D_{T^{\dagger}T}$ è denso in $H$. Dalla proprietà di densità del dominio $D_{T^{\dagger}T}$ segue che sia $T^{\dagger}T$ che $(\mathbb{1} + T^{\dagger}T)$ sono operatori simmetrici. Inoltre, avendo appena dimostrato che il range di $(\mathbb{1} + T^{\dagger}T)$ è l'intero spazio $H$, $(\mathbb{1} + T^{\dagger}T)$ è autoaggiunto. D'altronde $T^{\dagger}T = (\mathbb{1} + T^{\dagger}T) - \mathbb{1}$, quindi $T^{\dagger}T$ è autoaggiunto. □

# 4. UN OPERATORE DIFFERENZIALE

In questo capitolo si vuole studiare l'operatore differenziale $\hat{p}$ in $L^2(a, b)$, che è definito dall'equazione

$$\hat{p}\phi = i\frac{d\phi}{dt}, \tag{4.1}$$

per ogni funzione $\phi(t)$ appartenente al dominio $D_{\hat{p}}$. Le condizioni che deve soddisfare $\phi(t)$, affinché appartenga al dominio dell'operatore differenziale, sono che $\phi(t)$ sia assolutamente continua[1] su ogni sottoinsieme finito di $[a, b]$ e che sia $\phi(t)$ che $\phi'(t)$ appartengano a $L^2(a, b)$. Queste proprietà di $\phi(t)$, verranno indicate come *condizione A*. Nel seguito vengono esaminati i tre casi in cui $-\infty < a < b < \infty$, $a = 0$ e $b = +\infty$, $a = -\infty$ e $b = +\infty$. A seconda dei casi in aggiunta alla *condizione A* vanno poste delle condizioni al contorno.

*Intervallo finito* $-\infty < a < b < \infty$ In questo caso si assume che l'intervallo sia $[0, 2\pi]$ e che le condizioni al contorno siano

$$\phi(0) = \phi(2\pi) = 0. \quad (\textit{condizione } B). \tag{4.5}$$

[1] Si ricorda la definizione di funzione assolutamente continua.

**Definizione 4.1.** Una funzione $f$, definita su un intervallo $[a, b]$, si dice assolutamente continua su questo intervallo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, qualunque sia la famiglia di intervalli aperti a due a due non intersecantisi

$$(a_k, b_k) \quad k = 1, 2, 3, ..., n \tag{4.2}$$

tali che la somma delle loro lunghezze sia minore di $\delta$

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta, \tag{4.3}$$

la disuguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon, \tag{4.4}$$

sia verificata.

L'insieme $D_{\hat{p}}$ che soddisfa le *condizioni* $A$ e $B$ è denso in $L^2(0,2\pi)$. Allora $\hat{p}$ è un operatore simmetrico, dato che

$$\langle \hat{p}\phi, \psi\rangle = \int_0^{2\pi} i\phi'(t)\overline{\psi(t)}dt =$$

$$i\{\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \phi(t)\overline{i\psi'(t)}dt \quad (4.6)$$

per $\phi, \psi \in D_{\hat{p}}$. Si deduce immediatamente che

$$\langle \hat{p}\phi, \psi\rangle = \langle \phi, \hat{p}\psi\rangle, \quad (4.7)$$

poiché il termine $i\{\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)}\}$ si annulla per la *condizione* $B$. La precedente espressione si annulla anche nel caso in cui $\phi \in D_{\hat{p}}$ e $\psi$ soddisfa solo la *condizione* $A$. Quindi ogni $\psi$ che soddisfa la *condizione* $A$ appartiene al dominio $\phi \in D_{\hat{p}^\dagger}$ dell'aggiunto di $\hat{p}$

$$\hat{p}^\dagger\psi(t) = i\psi'(t). \quad (4.8)$$

Bisogna dimostrare ora il contrario, cioè che dato $\psi \in D_{\hat{p}^\dagger}$ e $\hat{p}^\dagger\psi = \psi^\dagger$, il dominio di $\hat{p}^\dagger$ è costituito dalle funzioni che soddisfano la *condizione* $A$ e che $\hat{p}^\dagger\psi(t) = i\psi'(t)$. Allora per $\phi \in D_{\hat{p}}$

$$\langle \hat{p}\phi, \psi\rangle = \langle \phi, \psi^\dagger\rangle = \int_0^{2\pi} \phi(t)\overline{\psi^\dagger(t)}dt =$$

$$- i\int_0^{2\pi} \phi(t)\frac{d}{dt}\overline{\{-\int_0^t i\psi^\dagger(s)ds + C\}}dt, \quad (4.9)$$

dove $C$ è una costante arbitraria. Integrando per parti si ottiene che

$$\langle \hat{p}\phi, \psi\rangle = \int_0^{2\pi} i\phi'(t)\overline{\{-\int_0^t i\psi^\dagger(s)ds + C\}}dt. \quad (4.10)$$

Dalla (4.10) segue che con $\phi \in D_{\hat{p}}$

$$\int_0^{2\pi} \phi'(t)\overline{\{\psi(t) + \int_0^t i\psi^\dagger(s)ds - C\}}dt = 0. \quad (4.11)$$

La costante $C$ è definita dall'equazione

$$\int_0^{2\pi} \{\psi(t) + \int_0^t i\psi^\dagger(s)ds - C\}dt = 0 \quad (4.12)$$

e si sostituisce a $\phi(t)$ la funzione

$$\phi_0(t) = \int_0^t \{\psi(t') + \int_0^{t'} i\psi^\dagger(s)ds - C\}dt', \tag{4.13}$$

che evidentemente appartiene a $D_{\hat{p}}$ per come è stata definita $C$. Allora la (4.11) assume la forma

$$\int_0^{2\pi} |\psi(t) + \int_0^t i\psi^\dagger(s)ds - C|^2 dt = 0, \tag{4.14}$$

che porta a

$$\psi(t) + \int_0^t i\psi^\dagger(s)ds - C = 0. \tag{4.15}$$

Perciò per quasi tutti i $t$

$$i\psi'(t) = \psi^\dagger(t), \tag{4.16}$$

provando che $\hat{p}^\dagger\psi(t) = i\psi'(t)$ con $\psi(t)$, che soddisfa solo la *condizione* $A$. Dalla dimostrazione segue che $\hat{p}$ è simmetrico, ma non autoaggiunto, dato che le funzioni nel dominio $D_{\hat{p}}$ devono soddisfare le due *condizioni* $A$ e $B$, mentre le funzioni in $D_{\hat{p}^\dagger}$ soddisfano solo la *condizione* $A$. Si dimostra ora che $\hat{p}$ è chiuso. A tale scopo si vuole sfruttare il teorema 3.5.1, provando che

$$\hat{p}^{\dagger\dagger} = \hat{p}. \tag{4.17}$$

Dalla relazione $\hat{p} \subset \hat{p}^\dagger$ segue che $\hat{p}^{\dagger\dagger} \subset \hat{p}^\dagger$. Perciò esiste una funzione $\chi(t)$ in $D_{\hat{p}^{\dagger\dagger}}$ che soddisfa la *condizione* $A$ e $\hat{p}^{\dagger\dagger}\chi(t) = i\chi'(t)$. Quindi per ogni $\psi \in D_{\hat{p}^\dagger}$ si ha che

$$\int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{i\chi'(t)}dt = \langle\psi, \hat{p}^{\dagger\dagger}\chi\rangle = \langle\hat{p}^\dagger\psi, \chi\rangle = \int_0^{2\pi} i\psi'(t)\overline{\chi(t)}dt =$$
$$i\{\psi(2\pi)\overline{\chi(2\pi)} - \psi(0)\overline{\chi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \psi(t)\overline{i\chi'(t)}dt, \tag{4.18}$$

che implica che

$$\psi(2\pi)\overline{\chi(2\pi)} - \psi(0)\overline{\chi(0)} = 0. \tag{4.19}$$

Poiché i valori di $\psi(0)$ e $\psi(2\pi)$ sono arbitrari, l'ultima equazione è soddisfatta se e solo se

$$\chi(0) = \chi(2\pi) = 0, \tag{4.20}$$

cioè se e solo se $\chi(t) \in D_{\hat{p}}$. Quindi $\chi(t) \in D_{\hat{p}^{\dagger\dagger}} \Rightarrow \chi(t) \in D_{\hat{p}}$.

Dunque $\hat{p}^{\dagger\dagger} \subset \hat{p}$. Ricordando che la relazione $\hat{p} \subset \hat{p}^{\dagger\dagger}$ è sempre valida si ottiene finalmente $\hat{p}^{\dagger\dagger} = \hat{p}$.

Si vuole verificare adesso se l'operatore $\hat{p}$ ammette delle condizioni meno restrittive della *condizione* $B$ senza perdere la proprietà di simmetria, ovvero si vuole cercare un'estensione simmetrica $\tilde{\hat{p}}$ di $\hat{p}$. Poiché $\tilde{\hat{p}} \subset \hat{p}^{\dagger}$ le funzioni in $D_{\tilde{\hat{p}}}$ soddisfano la *condizione* $A$. Quindi per tutte le funzioni $\phi, \psi \in D_{\tilde{\hat{p}}}$ si ha che

$$\langle \tilde{\hat{p}}\phi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} i\phi'(t)\overline{\psi(t)}dt = i\{\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \phi(t)\overline{i\psi'(t)}dt = i\{\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)}\} + \langle \phi, \tilde{\hat{p}}\psi \rangle. \quad (4.21)$$

Siccome $\tilde{\hat{p}}$ è simmetrico, l'equazione

$$\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)} = 0 \quad (4.22)$$

deve essere soddisfatta. Siccome $\tilde{\hat{p}} \neq \hat{p}$ esiste una funzione $\psi_0(t) \in D_{\tilde{\hat{p}}}$ che non verifica la *condizione* $B$ e si assuma che $\psi_0(2\pi) \neq 0$. Ponendo $\psi(t) = \psi_0(t)$ nella (4.22) si ottiene per ogni funzione $\phi(t) \in D_{\tilde{\hat{p}}}$ la relazione

$$\phi(2\pi) = \theta\phi(0) \qquad (\textit{condizione } \tilde{B}) \quad (4.23)$$

dove

$$\theta = \frac{\overline{\psi_0(0)}}{\overline{\psi_0(2\pi)}}. \quad (4.24)$$

Dato che la relazione $\tilde{B}$ vale anche per $\phi(t) = \psi_0(t)$, deve essere $|\theta| = 1$. Riassumendo, tutte le funzioni in $D_{\tilde{\hat{p}}}$ devono soddisfare le *condizioni* $A$ e $\tilde{B}$, sapendo che la costante $\theta$ ha modulo unitario. Bisogna provare ora il contrario: ogni funzione $\psi(t)$ che soddisfa le *condizioni* $A$ e $\tilde{B}$ appartiene a $D_{\tilde{\hat{p}}}$. Per questo scopo si scelgono due funzioni $\psi(t)$ e $\psi_0(t)$ e una costante $\alpha$ tali che

$$\psi(0) - \alpha\psi_0(0) = 0 \qquad e \qquad \psi(2\pi) - \alpha\psi_0(2\pi) = 0 \quad (4.25)$$

Si pone poi

$$\phi(t) = \psi(t) - \alpha\psi_0(t). \quad (4.26)$$

Si verifica facilmente che $\phi(t)$ soddisfa le *condizioni* $A$ e $B$ e che dunque appartiene a $D_{\hat{p}}$. Ma essendo $D_{\hat{p}} \subset D_{\tilde{\hat{p}}}$, si ha che $\phi(t) \in D_{\tilde{\hat{p}}}$ e quindi anche la funzione

$$\psi(t) = \phi(t) + \alpha\psi_0(t) \quad (4.27)$$

appartiene a $D_{\tilde{\hat{p}}}$.

Dato che ogni estensione dipende da un coefficiente $\theta$ di modulo unitario, $\tilde{\hat{p}}$ verrà indicato con $\hat{p}_\theta$. Ricordando che $\hat{p} \subset \hat{p}_\theta \Rightarrow \hat{p}_\theta^\dagger \subset \hat{p}^\dagger$, si deduce dalla (4.21) che $D_{\hat{p}_\theta^\dagger}$ consiste di tutte le funzioni $\psi(t)$ di $D_{\hat{p}^\dagger}$ tali che

$$\phi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \phi(0)\overline{\psi(0)} = 0 \tag{4.28}$$

per ogni $\phi(t) \in D_{\hat{p}_\theta}$. Quindi i domini $D_{\hat{p}_\theta}$ e $D_{\hat{p}_\theta^\dagger}$ coincidono e dunque ogni estensione $\hat{p}_\theta$ dell'operatore $\hat{p}$ è un operatore autoaggiunto.

Si determina ora lo spettro dell'operatore $\hat{p}_\theta$ nel caso di $\theta = 1$. Si ha che

$$\hat{p}_1\phi = \lambda\phi \Rightarrow i\phi'(t) = \lambda\phi(t) \tag{4.29}$$

con la condizione al contorno

$$\phi(2\pi) = \phi(0). \tag{4.30}$$

La condizione al contorno impone che $\lambda$ sia intero e dunque con $\lambda = k$

$$\phi_k(t) = e^{-ikt} \qquad con \pm k = 0, 1, 2, .... \tag{4.31}$$

*Semi asse positivo* $[0, +\infty)$ Se la funzione $\phi(t)$ soddisfa la *condizione* $A$ nel caso del semiasse, allora il prodotto $\phi(t)\phi'(t)$ è assolutamente integrabile su questo intervallo. Quindi la relazione

$$\int_0^t \phi(s)\overline{\phi'(s)}ds = |\phi(t)|^2 - |\phi(0)|^2 - \int_0^t \phi'(s)\overline{\phi(s)}ds \tag{4.32}$$

mostra che $|\phi(t)|$ ammette un limite finito per $t \to +\infty$. Ma siccome $\phi(t) \in L^2(0, +\infty)$ bisogna avere che

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0. \tag{4.33}$$

Si imponga ora che nel dominio $D_{\hat{p}}$ sia verificato che $\phi(0) = 0$. Per ogni $\phi, \psi \in D_{\hat{p}}$ si ottiene che

$$\langle \hat{p}\phi, \psi\rangle = i\int_0^\infty \phi'(t)\overline{\psi(t)}dt = \int_0^\infty \phi(t)\overline{i\psi'(t)}dt = \langle \phi, \hat{p}\psi\rangle. \tag{4.34}$$

Quindi $\hat{p}$ è simmetrico. Come nel caso dell'intervallo finito non è difficile dimostrare che $D_{\hat{p}^\dagger}$ è l'insieme di tutte le funzioni che soddisfano la *condizione* $A$ e che $\hat{p}^\dagger\psi(t) = i\psi'(t)$. Quindi $\hat{p} \neq \hat{p}^\dagger$ e l'operatore $\hat{p}$ non è autoaggiunto. In questo caso però non si ha un'estensione simmetrica come nel caso dell'intervallo finito. Infatti il dominio $D_{\tilde{\hat{p}}}$ di un' eventuale estensione simmetrica dovrebbe contenere una funzione $\psi_0(t) \neq 0$ in $t = 0$. Ma allora si avrebbe che

$$\langle \tilde{\hat{p}}\psi_0, \psi_0 \rangle = i \int_0^{\infty} \psi_0'(s)\overline{\psi_0(s)}ds = \\ i|\psi_0(0)|^2 + \int_0^{\infty} \psi_0(s)\overline{i\psi_0'(s)}ds \neq \langle \psi_0, \tilde{\hat{p}}\psi_0 \rangle \quad (4.35)$$

che è impossibile. Allora l'operatore differenziale definito sul semiasse è un operatore simmetrico massimale.

*Asse reale* Per ogni funzione $\phi(t)$ che soddisfa la *condizione* $A$ le condizioni al contorno

$$\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = \lim_{t \to -\infty} \phi(t) = 0 \quad (4.36)$$

sono automaticamente soddisfatte. Quindi il dominio $D_{\hat{p}}$ è definito solo dalla *condizione* $A$ e si dimostra facilmente che $\hat{p}$ è autoaggiunto. L'operatore $\hat{p}$ non ha autovalori, poiché l'equazione

$$i\frac{d\phi}{dt} = \lambda\phi \quad (4.37)$$

ha solo la soluzione nulla in $L^2(-\infty, +\infty)$.

# 5. CONCLUSIONI

L'analisi effettuata sull'operatore differenziale dimostra che non è immediato stabilire se un operatore è autoaggiunto. La difficoltà principale sta, oltre che la scelta di opportune condizioni al contorno, nel verificare la coincidenza dei domini tra l'operatore di partenza e il suo aggiunto. Uno degli assiomi fondamentali della meccanica quantistica stabilisce che gli osservabili in fisica sono rappresentati formalmente da operatori autoaggiunti, i cui autovalori (reali per quanto visto sopra) costituisco il risultato della misura di quell'osservabile. Tuttavia si ribadisce che non è affatto facile controllare che l'operatore sia autoaggiunto e spesso questa proprietà viene assunta come un dato di fatto.

# BIBLIOGRAFIA


[1] N.I. Akhiezer, I.M. Glazman: *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications, Inc. New York (1993)

[2] Andrej N. Kolmogorov, Sergej V. Fomin: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Editori Riuniti university press. Mosca (1980).

[3] F. Ortolani: *Appunti di metodi matematici.* Bologna (2012).