Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Invarianza di gauge in elettromagnetismo e nelle onde gravitazionali

Relatore:
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:
Stefano Bianchini

Sessione III
Anno Accademico 2015/2016

"...Mi sembra di essere soltanto un bambino
che gioca sulla spiaggia,
e di essermi divertito a trovare ogni tanto
un sasso o una conchiglia più bella
del solito, mentre l'oceano della verità
giaceva insondato davanti a me."
Sir Isaac Newton
Dedicato a tutti coloro che mi vogliono bene.

Indice

Abstract

In questa tesi si studia l'uso dell'invarianza di gauge e la sua applicazione alla fisica nello studio dell'Elettromagnetismo e della Gravità. In particolare si fa uso dell'invarianza di gauge per studiare le soluzioni in forma di onde piane delle equazioni di Maxwell e dell'equazione di campo di Einstein. Nella presente tesi si mostra dunque come sia possibile applicare uno stesso procedimento matematico a due fenomeni fisici distinti e trarne conclusioni simili.

Capitolo 1

Introduzione

La teoria della Relatività Ristretta si basa su due postulati, enunciati da Albert Einstein, dai quali può essere interamente costruita:

1.Principio di relatività: Le leggi fisiche hanno tutte la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali

2. Postulato della costanza della velocità luce: La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Il primo postulato è un estensione a tutte le leggi fisiche del principio di relatività galileiana, il quale fu enunciato solo per le leggi della meccanica, e definisce una legge di simmetria che tutte le leggi fisiche devono rispettare. Tale estensione rivela l'inadeguatezza delle trasformazioni di Galilei in quanto se applicate alle equazioni di Maxwell queste ultime non rimangono invariate per un cambio di sistema di riferimento inerziale. Le trasformazioni di Galilei vennero sostituite dunque da quelle di Lorentz, le uniche compatibili con i due postulati sopra enunciati, le quali si riducono per basse velocità relative tra i due sistemi di riferimento in questione alle prime. Il secondo postulato stabilisce l'indipendenza della velocità della luce dallo stato di moto della sorgente ed ha varie conseguenze come ad esempio la non assolutezza della simultaneità di due eventi. Il principio di relatività stabilisce che le leggi della fisica devono essere covarianti per trasformazioni di Lorentz ossia devono mantenere la medesima forma in tutti i sistemi di riferimento a seguito di una trasformazione di Lorentz.

Tensori

Il calcolo tensoriale studia il comportamento delle quantità rispetto alle trasformazioni delle coordinate , esso è dunque lo strumento matematico ideale per descrivere la relatività in quanto si adatta perfettamente al primo principio di quest'ultima. In generale per vettore o tensore si intende un ente matematico il quale si comporta come un vettore o un tensore rispetto ad una generica trasformazione. In relatività speciale si è interessati ad una particolare classe di trasformazioni, le trasformazioni di Lorentz, ed è proprio rispetto a tali trasformazioni che si definiscono i quadrivettori ed i quadritensori. Lo spazio ambiente della Relatività è uno spazio quadrimensionale formato da tre dimensioni spaziali ed una temporale detto spazio-tempo di Minkowski (**M**): ribattezziamo le coordinate t, x, y, z come $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. **M** è uno spazio dotato di metrica la quale è definita come

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è una matrice diagonale 4×4 tale che: $\eta = diag(1, -1, -1, -1)$ In tale espressione, ed in quelle che seguiranno, si fa uso della notazione di Einstein secondo la quale gli indici ripetuti vengono sommati. Ora che è stata introdotta la metrica nello spazio-tempo di Minkowski è possibile definire in maniera generale le trasformazioni di Lorentz. Una trasformazione di Lorentz omogenea è una trasformazione lineare e omogenea delle coordinate:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.2}$$

Tale trasformazione deve lasciare invariata la metrica dello spazio **M** e dunque essere soggetta alla relazione

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{1.3}$$

Le $\Lambda^\mu{}_\nu$ sono sedici quantità reali costanti di cui solo sei indipendenti (tre direzioni spaziali e tre angoli). Se si combina una trasformazione di Lorentz con una traslazione spaziale si ottiene una trasformazione non omogenea cioè le trasformazioni del gruppo di Poincaré

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.4}$$

anch'essa lascia invariata la metrica. Esprimendo le trasformazioni di Lorentz in forma differenziale si ottiene:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu \tag{1.5}$$

e, poiché

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{1.6}$$

si può concludere che

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \tag{1.7}$$

Si definisce quadrivettore controvariante A^μ un insieme di quattro quantità A^0, A^1, A^2, A^3 che si trasforma come le componenti di dx^μ:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{1.8}$$

Si definisce invece quadrivettore covariante A_μ un insieme di quattro quantità A_0, A_1, A_2, A_3 che si trasforma come le componenti di dx_μ:

$$A_\mu^{'} = \Lambda_\mu^{\ \nu} A_\nu \quad con \quad \Lambda_\mu^{\ \nu} = (\Lambda^\nu_{\ \mu})^{-1} \tag{1.9}$$

Proprietà principali dei quaditensori

1. Una combinazione lineare di quadritensori dello stesso rango, $\alpha R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \beta T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ con α e β scalari è un quadritensore dello stesso tango

2. Dati due tensori $R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ e $T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ il loro prodotto $R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ è un quadritensore di tipo $(p+r, q+s)$

3. Se un indice covariante ed uno controvariante di un tensore (p, q) vengono contratti si ottiene un tensore $(p-1, q-1)$. Contrarre l'indice di un tensore significa che dato un tensore a più indici $T^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$, covarianti e controvarianti, se ne considera uno in alto ed uno in basso, ad esempio ν e λ indicandoli con la medesima lettera si avrà

$$T^\mu_\rho = T^{\mu\sigma}_{\sigma\rho} \tag{1.10}$$

4.Derivando un quadritensore rispetto alle coordinate x^μ si ottiene un altro quadritensore, in particolare

$$\frac{\partial T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x)}{\partial x^\sigma} \tag{1.11}$$

è un quadritensore di tipo $Q^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q \sigma}(x)$.

Applicando le suddette proprietà si verifica che è possibile passare da quadrivettore covariante a quadrivettore controvariante sfruttando il tensore metrico ed il suo inverso $g^{\mu\nu}$:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \ \ o \ viceversa \ \ A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{1.12}$$

L'operazione di innalzamento o abbassamento degli indici lascia inalterata la componente temporale mentre inverte il segno di quelle spaziali. Un quadritensore di rango n è dunque un insieme di 4^n grandezze $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ (con $p+q = n$)che sotto l'azione di una trasformazione di Lorentz si trasforma come

$$T^{'\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\ \ \alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\ \ \alpha_p} \Lambda_{\nu_1}^{\ \ \beta_1} \dots \Lambda_{\nu_q}^{\ \ \beta_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \tag{1.13}$$

Secondo il già enunciato principio di relatività di Einstein le leggi fisiche devono essere covarianti per trasformazioni di Lorentz, ciò significa che devono avere forma del tipo

$$R^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \text{ oppure equivalentemente } S^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = 0 \tag{1.14}$$

Per definizione le quantità tensoriali in entrambi i membri dell'equazione (1.11) si trasformano allo stesso modo rispetto ad una trasformazione di Lorentz ergo se l'uguaglianza è vera in un certo sistema di riferimento allora lo è tutti i possibili sistemi di riferimento inerziali.

Pseudotensori

Se alle trasformazioni di Lorentz si aggiunge la possibilità di un inversione spaziale (trasformazione di parità) si giunge alla definizione di pseudotensore: Uno *pseudotensore* è un oggetto del tipo $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ che per una trasformazione di Lorentz Λ ortocrona ($det\Lambda = \pm 1$) si trasforma come

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x') = (det\Lambda)\Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_p}{}_{\alpha_p}\Lambda^{\beta_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_q}{}_{\nu_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}(x) \tag{1.15}$$

Un quadritensore la cui legge di trasformazione non includa il termine $det(\Lambda)$ viene detto *quadritensore proprio*. Consideriamo ora uno *pseudovettore* A^μ, esso si trasforma come

$$A'^{\mu}(x') = det(\Lambda)\Lambda^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}(x) \tag{1.16}$$

Infine uno *pseudoscalare* A si trasforma come

$$A'(x') = (det\Lambda)A(x) \tag{1.17}$$

Dalle definizioni e dalla proprietà $(det\Lambda)^2 = 1$ si evince che la moltiplicazione di due tensori propri o di due pseudotensori fornisce un tensore proprio mentre la moltiplicazione di un tensore proprio con uno pseudotensore fornisce uno pseudotensore. Introduciamo un importane pseudotensore totalmente antisimmetrico noto come *simbolo di Levi-Civita* $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Le componenti di tale tensore sono nulle nel caso due o più indici siano uguali, e uguali a $+1$ o -1 negli altri casi. In particolare:

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1 \tag{1.18}$$

Le componenti che si ottengono attraverso un numero pari di trasposizioni degli indici da ε^{0123} sono uguali a $+1$ mentre quelle che si ottengono con un numero dispari di trasposizioni sono uguali a -1.

Capitolo 2

Elettromagnetismo

L'elettromagnetismo classico è interamente contenuto all'interno delle equazioni di Maxwell le quali descrivono il comportamento del *campo elettrico* $\mathbf{E}$ e del *campo magnetico* $\mathbf{B}$ assegnate le sorgenti. Tali equazioni scritte nel sistema CGS sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{x}, t) \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \tag{2.4}$$

Le equazioni (2.3) e (2.4) sono vere equazioni del moto in quanto contengono le derivate temporali dei due campi mentre le (2.1) e (2.2) risultano essere vincoli che limitano i gradi di libertà del sistema. Le equazioni di Maxwell possono essere maneggiate con maggior facilità introducendo i potenziali elettromagnetici. Il campo magnetico per l'equazione (2.2) ha divergenza nulla ergo esiste una funzione $\mathbf{A}$ tale che

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2.5}$$

Andando a sostituire quest'ultima equazione nella (2.3) si ottiene

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0 \tag{2.6}$$

Poiché la quantità $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ risulta essere irrotazionale allora deve esistere una funzione scalare $\varphi(\mathbf{x}, t)$, detta potenziale elettrico, tale che

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{2.7}$$

Da cui è possibile ricavare l'espressione del campo elettrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.8}$$

I potenziali φ e A appena introdotti soddisfano per costruzione le equazioni di Maxweel.

Trasformazioni di gauge

Le relazioni (2.5) e (2.8) non forniscono una determinazione univoca dei potenziali, bensì ad esse corrispondono infinite soluzioni per i potenziali elettromagnetici. Infatti il campo magnetico non varia se il potenziale vettore subisce una trasformazione del tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) \rightarrow \mathbf{A}^{'} = \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \nabla\chi(\mathbf{x},t) \tag{2.9}$$

dove $\chi(\mathbf{x},t)$ è una funzione scalare generica (il rotore del gradiente di una funzione scalare è sempre nullo) e dunque

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}^{'} = \nabla\times\mathbf{A}^{'} = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\nabla\chi = \nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{2.10}$$

Data questa trasformazione il campo elettrico varia come

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^{'} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^{'}}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi \tag{2.11}$$

Se allora simultaneamente alla trasformazione per il potenziale vettore si esegue la trasformazione

$$\varphi(\mathbf{x},t) \rightarrow \varphi^{'}(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\mathbf{x},t)}{\partial t} \tag{2.12}$$

allora il campo elettrico non varia. Infatti

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^{'} &= -\nabla\varphi^{'} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^{'}}{\partial t} = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \\ &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Le trasformazioni sopra enunciate (2.9 e 2.12), dette trasformazioni di gauge, variano i potenziali senza modificare i campi **E** e **B** e, dunque,lasciano invariate le equazioni di Maxwell rappresentando, di conseguenza, un simmetria dell'elettromagnetismo. Le trasformazioni di gauge possono essere utilizzate per agevolare il calcolo. Ad esempio se sostituiamo l' equazione (2.8) all'interno di (2.1) otteniamo

$$\nabla^2\varphi + \frac{1}{c}\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -4\pi\rho \tag{2.14}$$

Se ora si sostituisce la (2.8) e la(2.5) in (2.4) si ricava

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.15}$$

dalla quale sfruttando l'identità

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{2.16}$$

ed infine si giunge a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.17}$$

Se a questo punto si sfrutta la libertà di effettuare trasformazioni di gauge, si può imporre che i potenziali soddisfino la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{2.18}$$

detta gauge di Lorentz, l'equazione precedente viene estremamente semplificata riducendosi a

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.19}$$

Se ora vengono poste uguali a zero le sorgenti si ricavano dalle precedenti espressioni le equazioni delle onde (equazioni di d'Alambert):

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} = 0 \tag{2.20}$$

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{c}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \tag{2.21}$$

Formulazione covariante dell'elettrodinamica

La teoria dell'elettrodinamica è intrinsecamente consistente con il principio di relatività, è possibile esplicitare tale affermazione riscrivendo le leggi dell'elettromagnetismo in forma covariante. Possiamo scrivere i potenzialiφ e $\mathbf{A}$ all'interno di un unico quadrivettore

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \tag{2.22}$$

detto *quadripotenziale elettromagnetico* la cui componente temporale è il potenziale φ e le componenti spaziali sono le componenti del potenziale vettore $\mathbf{A}$. Le trasformazioni di gauge (2.9) e (2.11), riscritte per A^μ, sono

$$A'^\mu(x) = A^\mu - \partial^\mu \chi(x) \tag{2.23}$$

Il gauge di Lorentz in termini di A^μ risulta essere

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.24}$$

Ora è possibile esprimere **E** e **B** come componenti di un quadritensore (tensore del campo elettromagnetico) $F^{\mu\nu}$ definito da

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.25}$$

Tale tensore è definito antisimmetrico infatti

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = -F^{\nu\mu} \tag{2.26}$$

$F^{\mu\nu}$ ha dunque nulli gli elementi sulla diagonale e gli altri legati dalla relazione $F^{ij} = -F^{ji}$, dunque si hanno solamente sei componenti indipendenti. usando le equazioni (2.5) e (2.8) è possibile esplicitare il tensore di campo elettromagnetico:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_\mathrm{x} & -E_\mathrm{y} & -E_\mathrm{z} \\ E_\mathrm{x} & 0 & -B_\mathrm{z} & B_\mathrm{y} \\ E_\mathrm{y} & B_\mathrm{z} & 0 & -B_\mathrm{x} \\ E_\mathrm{z} & -B_\mathrm{y} & B_\mathrm{x} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

il quale è invariante per trasformazioni di gauge come è facile verificare applicando la (2.23)

$$\begin{aligned} &F^{\mu\nu} \to F^{'\mu\nu} = \partial^\mu A^{'\nu} - \partial^\nu A^{'\mu} = \partial(A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu(A^\mu - \partial^\mu \chi) = \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\nu \partial^\mu \chi = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Introduciamo ora il tensore duale $F^{*\mu\nu}$ definito come

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{2.29}$$

anch'esso antisimmetrico

Quadridensità di corrente

Se si vuole scrivere l'elettromagnetismo in forma covariante si necessita di un quadrivettore che contenga le sorgenti dei campi, vale a dire la densità di carica ρ e la densità di corrente $\mathbf{j}$ Tale quadrivettore è:

$$J^\mu = (\rho c, \rho \mathbf{v}) \tag{2.30}$$

L'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{2.31}$$

può essere riscritta in termini di J^μ come

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{2.32}$$

la quale è evidentemente una legge covariante in quanto la conservazione della carica deve essere valida in tutti i sistemi di riferimento.

Equazioni di Maxwell in forma covariante

L'espressione covariante delle equazioni di Maxwell non omogenee è

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{2.33}$$

Infatti per $\nu = 0$ si riottiene la legge di Gauss

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_{\mathrm{i}} F^{i0} = \partial_{\mathrm{i}} E^i = \nabla \cdot \mathbf{E} \tag{2.34}$$

e per $\nu = i$ si ottengono le leggi di Ampère-Maxweel

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_{\mathrm{j}} F^{ji} = -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ijk} \partial_{\mathrm{j}} B^k = -\frac{1}{c}\frac{\partial E^i}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})^i \tag{2.35}$$

equivalente a

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{2.36}$$

Le equazioni di Maxwell omogenee in forma covariante sono

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \tag{2.37}$$

La quale per $\nu = 0$ risulta essere

$$\partial_{\mathrm{i}} B^i = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.38}$$

Invece per $\nu = i$, si avrà

$$\partial_0 F^{*0i} + \partial_{\mathrm{j}} F^{*ji} = 0 \tag{2.39}$$

ossia

$$\varepsilon^{ijk} \partial_{\mathrm{j}} E^k + \partial_0 B^i = 0 \tag{2.40}$$

che è la legge di Faraday-Newmann-Lentz

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.41}$$

In termini di $F^{\mu\nu}$ le equazioni di Maxwell omogenee assumono la forma

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu F_{\rho\sigma} = 0 \tag{2.42}$$

Andando ora a sostituire nella (2.33) la (2.25) si ottiene l'equazione del moto covariante per il quadripotenziale

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) \tag{2.43}$$

dove $\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ e quindi l'equazione per A^μ è

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c}J^\nu \tag{2.44}$$

Nell'eventualità che si adotti un gauge di Lorentz, quest'ultima espressione si semplifica fornendo l'equazione di d'Alambert non omogenea

$$\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c}J^\nu \tag{2.45}$$

Onde elettromagnetiche

Se ora nell' equazione (2.45) si impone la condizione di assenza di sorgenti, oltre a quella di gauge di Lorentz $\partial_\nu A^\nu$ si riduce all' equazione omogenea

$$\Box A^\nu = 0 \tag{2.46}$$

Sono soluzioni di tale equazioni le onde piane del tipo

$$A^\nu = \varepsilon^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \varepsilon^{*\nu} e^{-ik_\alpha x^\alpha} \tag{2.47}$$

dove $k = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ e ε è detto vettore di polarizzazione. Affinché tale equazione rappresenti una soluzione di (2.46) deve verificarsi la condizione

$$k^\mu k_\mu = 0 \tag{2.48}$$

di conseguenza si ottiene

$$|k_0|^2 - |\mathbf{k}|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = c|\mathbf{k}| \tag{2.49}$$

Usando quest'ultima relazione è possibile ricavare la velocità di gruppo, ossia la velocità con cui si propagano nello spazio le onde elettromagnetiche, direttamente dalla sua definizione:

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|} = \frac{d(c|\mathbf{k}|)}{d\mathbf{k}} = c \tag{2.50}$$

In altre parole si è dimostrato che la velocità si propagazione di onde elettromagnetiche nel vuoto è pari alla velocità della luce. La condizione di gauge di Lorentz comporta una rilevante relazione che riduce a tre il numero di componenti indipendenti ε^{α}:

$$k_{\alpha}\varepsilon^{\alpha} = 0 \tag{2.51}$$

Tale equazione riduce il numero di variabili indipendenti di ε da quattro a tre in quanto è immediata conseguenza che

$$k^0\varepsilon^0 - \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{2.52}$$

da cui la relazione di dipendenza fra le componenti di ε

$$\varepsilon^0 = -\frac{\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}}{\omega/c} \tag{2.53}$$

A questo punto, senza modificare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ è possibile applicare una trasformazione di gauge su A^{μ} tale che

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi \tag{2.54}$$

La richiesta affinché il nuovo potenziale sia soluzione dell'equazione (2.46) e della condizione di gauge di Lorentz è che la funzione scalare verifichi

$$\Box\chi = 0 \tag{2.55}$$

La funzione scalare χ può essere scelta anch'essa sottoforma di onda piana

$$\chi = i\chi_0 e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} - i\chi_0^* e^{-ik_{\alpha}x^{\alpha}} \tag{2.56}$$

la quale soddisfa l'equazione (2.55) e dove χ_0 è una costante arbitraria. Il nuovo potenziale può essere scritto come

$$A'^{\mu} = \varepsilon'^{\mu} e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} + \varepsilon'^{*\mu} e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}} \tag{2.57}$$

dove

$$\varepsilon'^{\mu} = \varepsilon^{\mu} + \chi_0 k^{\mu} \tag{2.58}$$

Poiché l'equazione (2.53) è valida anche per ε' ($\varepsilon'^0 = -\mathbf{k}\varepsilon'/\omega c$) si avrà che le componenti indipendenti, e dunque fisicamente rilevanti, di ε', già ridotte a tre possono essere ulteriormente ridotte a due mediante l'applicazione di una trasformazione di gauge generata da χ data dalla (2.56). Per identificare tali componenti consideriamo un onda che si propaga lungo l'asse z con k^{α} del tipo $k = (k^0, 0, 0, k^3)$ e con $k^0 = k^3$ (segue da

(2.48)). Data l'ortogonalità dei quadrivettori k^α e ε^α, espressa nell'equazione (2.51), e le proprietà del vettore k^α si avrà che

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^3 \tag{2.59}$$

La trasformazione di gauge lascia dunque ε^1 ed ε^2 invariati mentre trasforma ε^0 come

$$\varepsilon'^0 = \varepsilon^0 + \frac{\chi_0}{\omega/c} \tag{2.60}$$

ε'^0 può essere posto uguale a zero imponendo la condizione

$$\chi_0 = -\frac{\varepsilon^0 c}{\omega} \tag{2.61}$$

Ergo solo le componenti ε^1 e ε^2 hanno rilevanza fisica. È possibile riflettere sul significato di tali componenti applicando all'onda elettromagnetica piana una rotazione nel piano xy (ortogonale al verso di propagazione dell'onda). Il vettore di polarizzazione cambia secondo la relazione

$$\varepsilon'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \varepsilon^\beta \tag{2.62}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\vartheta & sin\vartheta & 0 \\ 0 & -sin\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Si può infine verificare

$$\begin{aligned} \varepsilon'_\pm &= e^{\pm i\vartheta}\varepsilon_\pm \\ \varepsilon'^3 &= \varepsilon^3 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Dove $\varepsilon_\pm \equiv \varepsilon^1 \mp i\varepsilon^2$. In generale una qualsiasi onda piana Ψ che in seguito ad una rotazione di un angolo θ lungo la direzione di propagazione si trasforma come

$$\Psi' = e^{ih\theta}\Psi \tag{2.65}$$

si dice avere elicità h. L'onda elettromagnetica è scomponibile in parti aventi elicità ± 1 o 0, l'elicità fisicamente rilevante è la prima. Dunque ne consegue che l'interazione elettromagnetica viene trasportata da onde-particelle aventi spin in modulo pari a uno e per la (2.48) aventi massa nulla. L'elicità mostre anche che lo spin di tali particelle può avere due soli orientamenti: concorde alla direzione di propagazione dell'onda oppure opposto ad esso.

Capitolo 3

Cenni di Relatività Generale

Nei precedenti capitoli si è visto come le leggi dell'elettromagnetismo possano essere inglobate nella teoria della Relatività Ristretta. Quest'ultima per quanto risulti estremamente efficace nella risoluzione di alcuni problemi non è in grado di trattare l'interazione gravitazionale ed inoltre privilegia i sistemi di riferimento inerziali senza dire nulla riguardo a quelli non inerziali. La teoria della Relatività Generale si propone come un ampliamento della Relatività Ristretta inglobando la gravità, che viene descritta come curvatura dello spazio tempo, e introducendo l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento. La teoria della Relatività Generale si fonda su alcuni principi introdotti da Einstein.

Principio di equivalenza

La carica gravitazionale, o massa, è di tipo monopolare e dunque a differenza di ciò che accade per altre forze fondamentali, come la forza elettromagnetica, non è possibile creare un corpo neutro rispetto all'interazione gravitazionale. Nonostante non sia possibile schermare un campo gravitazionale è possibile annullarne localmente gli effetti, e dunque inserirsi nuovamente nell'ambito della Relatività Ristretta, considerando un sistema di riferimento che sia in caduta libera ossia comovente con una particella di prova in caduta libera in un campo gravitazionale. Se in particolare si sceglie un sistema di riferimento non rotante allora si ottiene un sistema di riferimento localmente inerziale, in quanto in un siffatto sistema di riferimento una particella di prova persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Tali sistemi di riferimento sono solo localmente inerziali in quanto le osservazioni eseguite devono essere limitate ad una regione in cui la variazione del campo gravitazionale sia sufficientemente piccola da non essere rilevata. Si può dunque esprimere il principio di equivalenza mediante il seguente enunciato:

Non esistono esperimenti locali che permettano di distinguere una caduta libera non ruotante in un campo gravitazionale da un moto uniforme nello spazio in assenza di campo gravitazionale

Principio generale di relatività

Nella teoria della Relatività Ristretta è prevista l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali prevista dal primo principio di tale teoria, Einstein tuttavia era convinto che tale principio dovesse essere ampliato nella seguente forma:

Le leggi fisiche hanno la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento.

Secondo tale principio dunque non è più rilevante se un sistema di riferimento sia inerziale o meno, come lo era per la Relatività Speciale, comunque le leggi della fisica devono assumere in tutti la medesima forma. La formulazione di tale principio è estremamente ragionevole in quanto se così non fosse non sarebbe possibile lo studio della fisica in quanto gli esseri umani sono generalmente vincolati al pianeta Terra il cui moto è non inerziale. Il principio di Relatività Generale pone un problema simile a quello della relatività ristretta in cui è necessario scrivere le equazioni della fisica in modo che siano invarianti per trasformazioni di Lorentz. Ora, poiché è stabilita l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento inerziali, è necessario che tutte le leggi fisiche siano invarianti per qualsiasi trasformazioni di coordinate. Ancora una volta la chiave matematica per comprendere la teoria della relatività risiede nelle proprietà dei tensori

Connessione affine

Nella teoria della Relatività Generale, come in quella ristretta, si considera lo spazio-tempo fisico come uno spazio metrico. Tuttavia ora non si considera il solo spazio piatto descritto dalla metrica di Minkowski ma si ipotizza che lo spazio-tempo possa essere curvo, descritto da metriche diverse da quella di Minkowski, e che solo in ben determinati casi si riduca ad essere piatto. Consideriamo una particella libera di muoversi sotto l'azione di un campo gravitazionale. Per il principio di equivalenza esiste un sistema di riferimento in caduta libera localmente inerziale in cui l'equazione del moto è quella di una linea retta nello spazio-tempo:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0 \tag{3.1}$$

con $d\tau$ il tempo proprio definito come

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{3.2}$$

Se si sceglie di usare una altro sistema di coordinate x^μ allora avremo

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{3.3}$$

Moltiplicando ambo i lati dell'equazione per $\partial x^\lambda/\partial\xi^\alpha$ si ottiene l'equazione del moto

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{3.4}$$

dove

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \tag{3.5}$$

è detta connessione affine. Il tempo proprio può essere espresso in un arbitrario sistema di coordinate come

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.6}$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico definito come

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

Da tale trattazione è possibile vedere che il campo che determina la forza gravitazionale è la connessione affine e si può mostrare che $g_{\mu\nu}$ risulta essere il suo potenziale.

La connessione affine non è un tensore infatti eseguendo un cambi di coordinate $x^\mu \rightarrow x^{'\mu}$ è possibile verificarlo:

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} =& \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \\
=& \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\
=& \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\sigma} \right] + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \\
=& \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \Gamma^{\rho}_{\sigma\tau} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il primo termine dell'ultima uguaglianza è ciò che ci si aspetterebbe se la connessione affine fosse un tensore mentre il secondo termine disomogeneo è ciò che fa si che la connessione affine non lo sia. Differenziare la metrica rispetto x^λ da

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \tag{3.9}$$

Invertendo la (3.5) si ottiene

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \tag{3.10}$$

e utilizzando quest'ultima nella (3.9) si ottiene

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} \tag{3.11}$$

da cui applicando la (3.7) si giunge a

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} \tag{3.12}$$

Sommando alla (3.12) se stessa invertendo μ e λ e sottraendo se stessa invertendo ν e λ si avrà

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= g_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + g_{\kappa\mu}\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} \\ &+ g_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + g_{\kappa\lambda}\Gamma^\kappa_{\mu\nu} \\ &- g_{\kappa\lambda}\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - g_{\kappa\mu}\Gamma^\kappa_{\nu\lambda} \\ &= 2 g_{\kappa\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Se ora si moltiplicano per l'inverso del tensore metrico entrambi i lati dell'uguaglianza e dividendo per due si ottiene

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa}\left[\frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa}\right] \tag{3.14}$$

Derivata covariante

La derivata di un tensore non fornisce in generale un tensore, infatti se si considera un vettore controvariante V^μ, la cui legge di trasformazione è

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{3.15}$$

e di differenzia rispetto a x^λ si ottiene

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \tag{3.16}$$

che dimostra che la derivata del vettore V^μ non è un tensore. Utilizzando l'equazione (3.19) si ricava la relazione

$$\begin{aligned}\Gamma'^\mu_{\lambda \mathrm{k}} V'^k &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^k}\Gamma^\nu_{\rho\sigma} - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^k}\right)\frac{\partial x'^k}{\partial x^\eta} V^\eta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\nu_{\rho\sigma} V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'\lambda} V^\sigma\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se si sommano le ultime due equazioni allora si può notare che i termini disomogenei si elidono portando a

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\mu_{\lambda \mathrm{k}} V'^k = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\nu_{\lambda \mathrm{k}} V^\sigma\right) \tag{3.18}$$

Si definisce dunque la derivata covariante

$$V^{\mu}_{;\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda \mathrm{k}} V^{k} \tag{3.19}$$

la quale definisce un tensore. Allo stesso modo è possibile definire la derivata covariante per un vettore covariante la quale risulterà essere

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} \tag{3.20}$$

anch'essa un tensore. La derivata covariante può essere estesa ad un generico tensore il cui risultato è la derivata parziale del tensore rispetto alla variabile considerata a cui vanno sommati dei termini Γ moltiplicanti il tensore uno per ogni indice controvariante, lo stesso vale per gli indici covarianti ma anziché la somma deve essere eseguita la sottrazione, ad esempio:

$$T^{\mu\sigma}_{\ \ \lambda;\rho} = \frac{\partial T^{\mu\sigma}_{\ \ \lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\nu\sigma}_{\ \ \lambda} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} T^{\mu\nu}_{\ \ \lambda} - \Gamma^{k}_{\lambda\rho} T^{\mu\sigma}_{\ \ \mathrm{k}} \tag{3.21}$$

L'importanza della derivata covariante risiede in due sue proprietà: la prima è che converte tensori in tensori e la seconda è che si riduce alla derivata parziale in assenza di gravità in quanto la connessione affine si annulla. Ciò suggerisce un semplice algoritmo per valutare gli effetti della gravità su di un sistema fisico: si scrivono le equazioni appropriate per la relatività speciale in assenza di gravità, dopodiché si sostituisce $\eta_{\alpha\beta}$ con $g_{\alpha\beta}$ e le derivate parziali con le derivate covarianti.

Tensore di Riemann

Dallo studio delle derivate covarianti è possibile giungere alla definizione di un tensore estremamente importante detto tensore di Riemann. La derivata covariante, in generale, non gode della proprietà commutativa. Per un generico tensore $T^{\mu\dots}_{\nu\dots}$ si definisce il commutatore come

$$(T^{\mu\dots}_{\nu\dots;\lambda})_{;\kappa} - (T^{\mu\dots}_{\nu\dots;\kappa})_{;\lambda} \tag{3.22}$$

Andando a calcolare il commutatore per un vettore V^{a} sfruttando la (3.30) si ottiene:

$$(V^{\mu}_{;\lambda})_{;\kappa} = \partial_{\kappa}(\partial_{\lambda} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\nu}) + \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa}(\partial_{\lambda} V^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} V^{\nu}) - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda}(\partial_{\sigma} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} V^{\nu}) \tag{3.23}$$

e analogamente

$$(V^{\mu}_{;\kappa})_{;\lambda} = \partial_{\lambda}(\partial_{\kappa} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\nu}) + \Gamma^{\mu}_{\sigma\kappa}(\partial_{\mathrm{d}} V^{\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\kappa} V^{\nu}) - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda}(\partial_{\sigma} V^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} V^{\nu}) \tag{3.24}$$

Calcolando ora il commutatore per sottrazione delle ultime due equazioni e assumendo che $\partial_{\mathrm{d}}\partial_{\lambda} V^{\mu} = \partial_{\lambda}\partial_{\kappa} V^{\mu}$ si ottiene

$$(V^{\mu}_{;\kappa})_{;\lambda} - (V^{\mu}_{;\lambda})_{;\kappa} = R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} V^{\nu} + (\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa} - \Gamma^{\sigma}_{\kappa\lambda})_{;\sigma} V^{\mu} \tag{3.25}$$

dove

$$R^{mu}_{\nu\lambda\kappa} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\kappa} - \partial_\kappa \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\kappa}\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\mu_{\sigma\kappa} \tag{3.26}$$

viene chiamato tensore di Riemann o tensore di curvatura Un importante particolarità del tensore di Riemann è che è l'unico tensore costruibile mediante $g_{\alpha\beta}$, $\partial g_{\alpha\beta}$ e $\partial^2 g_{\alpha\beta}$ che sia lineare in $\partial^2 g_{\alpha\beta}$. Esiste un importante teorema circa quest'ultimo tensore

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché una metrica sia piatta è che il suo tensore di Riemann si annulli

Tale necessità deriva dal fatto che esiste un sistema di coordinate in cui la metrica è diagonale con gli elementi diagonali pari a ± 1. Poiché dunque la metrica è costante allora nulle saranno le sue derivate e di conseguenza nulla sarà la connessione affine. Infine poiché anch'essa si annulla dappertutto si avranno anche le sue derivate uguali a zero da cui infine si ha l'annullamento del tensore di Riemann. Il tensore di Riemann gode di alcune proprietà e da esso è possibile costruire altri tensori estremamente importanti per la relatività generale. Il tensore di Riemann dipende dal tensore metrico, dalle sue derivate prime e seconde, di conseguenza è antisimmetrico rispetto all'ultima coppi di indici

$$R^\mu_{\nu\lambda\kappa} = -R^\mu_{\nu\kappa\lambda} \tag{3.27}$$

inoltre la simmetria della connessione comporta la seguente identità:

$$R^\mu_{\nu\lambda\kappa} + R^\mu_{\kappa\nu\lambda} + R^\mu_{\lambda\kappa\nu} = 0 \tag{3.28}$$

Abbassando il primo indice si può verificare che il nuovo tensore è simmetrico rispetto allo scambio della prima e dell'ultima coppia di indici

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu} \tag{3.29}$$

Unendo quest'ultimo risultato alla (3.28) si può notare l'antisimmetria del tensore abbassato rispetto alla prima coppia di indici

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\nu\mu\lambda\kappa} \tag{3.30}$$

Oltre a tali proprietà algebriche è possibile mostrare che il tensore di curvatura soddisfa un identità differenziale detta identità di Bianchi

$$R_{\kappa\sigma\nu\lambda;\mu} + R_{\kappa\sigma\mu\nu;\lambda} + R_{\kappa\sigma\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{3.31}$$

Con una semplice contrazione del tensore di Riemann si può passare al tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = g^{\lambda\kappa} R_{\kappa\mu\lambda\nu} \tag{3.32}$$

il quale è un tensore simmetrico in ossequio alla (3.28). Un ulteriore contrazione porta allo scalare di curvatura o scalare di Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{3.33}$$

Combinando questi due ultimi risultati è possibile costruire il tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3.34}$$

il quale è a sua volta simmetrico e soddisfa le identità di Bianchi contratte

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = 0 \tag{3.35}$$

Tensore Energia Impulso

L'equivalenza massa-energia prevista dalla Relatività Ristretta suggerisce che tutte le forme di energia agiscano come sorgenti del campo gravitazionale. Queste sono descritte da un tensore simmetrico $T^{\mu\nu}$ detto tensore energia impulso. Il tensore è utilizzato per esprimere in Relatività Ristretta la conservazione del quadrimpulso, fornita dall'equazione di continuità:

$$\frac{\partial T^{\kappa}_{i}}{\partial x^{\kappa}} = 0 \tag{3.36}$$

La componente temporale è la densità di massa relativistica ρ, cioè la densità di energia divisa per la velocità della luce al quadrato:

$$T^{00} = \rho \tag{3.37}$$

Il flusso della massa relativistica attraverso la superficie x^i è equivalente alla densità dell'i-esima componente della quantità di moto:

$$T^{0i} = T^{i0} \tag{3.38}$$

Le componenti spaziali di T^{ik} rappresentano dunque il flusso della quantità di moto i-esima attraverso la superficie x^k. In particolare, T^{ii} rappresenta la componente normale della tensione interna, detta pressione quando è indipendente dalla direzione, mentre T^{ik} rappresenta lo sforzo di taglio.

Capitolo 4

Equazione di campo di Einstein

Approssimazione di campo debole

Si consideri una particella in moto a bassa velocità in un debole campo gravitazionale stazionario. Se la particella è sufficientemente lenta è possibile trascurare $d\mathbf{x}/d\tau$ rispetto a $dt/d\tau$ e riscrivere la (3.4) come

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{4.1}$$

Data la stazionarietà del campo tutte le derivate temporali di $g_{\mu\nu}$ sono nulle e dunque

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} \tag{4.2}$$

Infine, data la debolezza del campo, è possibile scegliere un sistema di coordinate in cui

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad\qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \tag{4.3}$$

Risulterà dunque al primo ordine in $h_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{i\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta} \tag{4.4}$$

Andando a sostituire nella (4.1) si ricava

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00} \\ \frac{d^2t}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La soluzione della seconda equazione prevede che $dt/d\tau$ sia una costante, andando dunque a dividere la prima per $(dt/d\tau)^2$ si ottiene

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2}\nabla h_{00} \tag{4.6}$$

Il corrispondente risultato della fisica Newtoniana, a cui la relatività deve tendere per basse velocità e per deboli campi gravitazionali, è

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\phi \tag{4.7}$$

Dove ϕ è il potenziale gravitazionale che a distanza r dal centro di un corpo sferico di massa M assume la forma

$$\phi = -\frac{GM}{r} \tag{4.8}$$

Dove G è la costante di gravitazione universale: $G = 6.670 \cdot \; 10^{-8}$ in unità c.g.s Confrontando le ultime due equazioni si ricava facilmente che

$$h_{00} = 2\phi + costante \tag{4.9}$$

Poiché h_{00} deve annullarsi all'infinito è facile notare che la costante è uguale a zero in quanto ϕ si annulla all'infinito. Tornando alla metrica (4.3) si può scrivere

$$g_{00} = 1 + 2\phi \tag{4.10}$$

ϕ può essere espresso mediante l'equazione di Poisson come

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{4.11}$$

La densità energetica per la materia non relativistica coincide con la densità di materia ergo

$$T_{00} \simeq \rho \tag{4.12}$$

Di conseguenza si avrà che

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00} \tag{4.13}$$

Si suppone solamente che quest'equazione di campo valga per deboli campi gravitazionali e per materia non relativistica, tuttavia tale equazione porta a supporre che l'equazione che governa un campo gravitazionale di qualsiasi intensità sia del tipo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.14}$$

Dove $G_{\mu\nu}$ è una combinazione lineare della metrica e delle sue derivate prime e seconde. Ovviamente esistono molte soluzioni per $G_{\mu\nu}$ tuttavia a partire da poche semplici considerazioni è possibile giungere ad un risultato soddisfacente. Se si immagina di espandere $G_{\mu\nu}$ in una serie di prodotti di derivate del tensore metrico e classificare ogni termine mediante il numero N di derivazioni delle varie componenti si evince che data la (4.13), e considerando che $G_{\mu\nu}$ deve avere la dimensione di una derivata seconda della metrica, sono solo i termini con $N = 2$ ad essere rilevanti. Si possono ricavare alcune proprietà di $G_{\mu\nu}$ dall'equazione (4.14):

A)$G_{\mu\nu}$ è un tensore

B)Poiché $T_{\mu\nu}$ è simmetrico la è anche $G_{\mu\nu}$

C)Vale

$$G^{\nu}_{\mu;\nu} = 0 \tag{4.15}$$

in quanto la medesima equazione è vera per $T_{\mu\nu}$.

D)Nel caso di un debole campo gravitazionale stazionario e di materia non relativistica la componente 00 di $G_{\mu\nu}$ deve ridursi a

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} \tag{4.16}$$

Queste proprietà sono tutto ciò che occorre per identificare $G_{\mu\nu}$. Considerando tali ipotesi una possibile soluzione è

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \tag{4.17}$$

Sfruttando ora l'identità di Bianchi (3.42) si ottiene la relazione

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{,\nu} \tag{4.18}$$

La proprietà C non concede che due possibilità: o $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ o l'annullarsi ovunque di $R_{;\nu}$. La seconda ipotesi può essere esclusa in quanto combinando la (4.17) e la (4.14) si ottiene

$$G^{\mu}{}_{\mu} = (C_1 + 4C_2) = 8\pi G T^{\mu}{}_{\mu} \tag{4.19}$$

Nel caso che $R_{;\nu} \equiv \partial R/\partial x^{\nu}$ si annulli allora dovrebbe accadere anche a $\partial T^{\mu}_{\mu}/\partial x^{\nu}$ e non è questo il caso in presenza di materia non relativistica. Si conclude dunque che $C_2 = -C_1/2$ e quindi

$$G_{\mu\nu} = C_1(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \tag{4.20}$$

Infine è possibile sfruttare la proprietà E per determinare C_1. Poiché in un sistema non relativistico si ha sempre $|T_{00}| \gg |T_{ij}|$ allora si considererà $|G_{00}| \ll |G_{ij}|$ da cui per la (4.20) si avrà

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{4.21}$$

Essendo in approssimazione di campo debole si avrà $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$. La curvatura scalare risulta dunque

$$R \simeq R_{kk} - R_{00} \simeq \frac{3}{2}R - R_{00} \qquad\qquad \Rightarrow R \simeq 2R_{00} \tag{4.22}$$

Combinando quest'ultima con (4.20) si giunge a

$$G_{00} \simeq 2C_1 R_{00} \tag{4.23}$$

Per calcolare R_{00} si fa uso della sua espressione attraverso il tensore metrico

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right] + ... \tag{4.24}$$

Nel momento in cui il campo è statico si annullano le derivate temporali di conseguenza i termini importanti per la presente trattazione sono

$$R_{0000} \simeq 0 \qquad\qquad R_{i0j0} \simeq \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \tag{4.25}$$

Di conseguenza

$$G_{00} \simeq 2C_1(R_{i0i0} - R_{0000}) \simeq C_1 \nabla^2 g_{00} \tag{4.26}$$

Dal confronto con l'equazione (4.16) si nota immediatamente che C_1 dev'essere uguale a 1. A questo punto è possibile scrivere l'equazione (4.14) nel seguente modo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.27}$$

che viene chiamata equazione di campo di Einstein. Tale equazione dato un tensore energia impulso consente di calcolare il tensore metrico, in altre parole partendo dal tensore energia impulso è possibile ricavare la geometria dello spazio tempo ad esso associata. Viceversa data una particolare geometria, ossi un tensore metrico, è possibile determinare il tensore energia-impulso. Più in generale l'equazione di Einstein consiste in dieci equazioni che legano venti quantità: le dieci componenti di $g_{\mu\nu}$ e le dieci componenti di $T_{\mu\nu}$.

Capitolo 5

Onde gravitazionali

Come le equazioni di Maxwell ammettono soluzioni di forma ondulatoria così è anche per l'equazione di Einstein. Tali soluzioni vengono chiamate onde gravitazionali e consistono in perturbazioni dello spazio-tempo in grado di propagarsi. Poiché l'onda trasporta energia ed impulso divenendo essa stessa un contributo al campo gravitazionale, il che si rispecchia nella non linearità delle equazioni Si suppone che il tensore metrico sia molto vicino a quello di Minkowski

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{5.1}$$

e dunque si suppone di essere in approssimazione di campo debole. Sotto tale approssimazione la connessione affine risulta essere

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\left(\partial_\rho h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\lambda h_{\nu\rho}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho h^{\mu}{}_{\nu} + \partial_\nu h^{\mu}{}_{\rho} - \partial^\mu h_{\nu\rho}\right) \tag{5.2}$$

Di conseguenza il tensore di Riemann sarà

$$R^{\mu}_{\nu\rho\lambda} = \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h^{\mu}{}_{\lambda} + \partial_\lambda\partial^\mu h_{\nu\rho} - \partial_\rho\partial^\mu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial_\nu h^{\mu}{}_{\lambda}\right) \tag{5.3}$$

Con una semplice contrazione si ricava il tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h^{\rho}{}_{\mu} + \partial^\rho\partial_\mu h_{\nu\rho} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right) \tag{5.4}$$

Dove $h = h^{\mu}{}_{\mu}$. Per semplicità inizialmente si considera l'equazione di Einstein nel vuoto la quale assume la forma

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.5}$$

Questa equazione non ha una soluzione unica in quanto trovata una soluzione è possibile costruirne altre mediante una trasformazione di coordinate. La trasformazione più generale che consenta di mantenere l'approssimazione di campo debole è del tipo $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^{\mu(x)}$ dove $\partial_\nu \xi^\mu$ è al massimo dello stesso ordine di grandezza si $h_{\mu\nu}$.La metrica nelle nuove coordinate risulterà essere

$$g'^{\mu\nu}(x') = \partial_\lambda x'^\mu \partial_\rho x'^\nu g^{\lambda\rho}(x) \tag{5.6}$$

o poiché $g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$,

$$h'^{\mu\nu}(x) = h^{\mu\nu}(x) - \partial_\lambda \xi^\mu \eta^{\lambda\nu} - \partial_\rho \xi^\nu \eta^{\rho\mu} \tag{5.7}$$

Il fatto che h' sia funzione di x è dovuto al fatto che sviluppando $h'_{\mu\nu}(x')$ in serie di ξ il temine di ordine zero è $h'(x)$ e i termini successivi sono trascurabili in quanto come suddetto $\partial\xi^\mu/\partial x^\nu$ è al massimo dello stesso ordine di grandezza di $h_{\mu\nu}$. Dunque, se $h_{\mu\nu}$ è soluzione della (5.5), lo sarà anche

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu \tag{5.8}$$

In altre parole anche in questo caso, come per l'elettromagnetismo, è possibile sfruttare le invarianze di gauge per evidenziare le componenti fisiche delle onde. La scelta più oculata è quella di effettuare un gauge armonico, il quale prevede che

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu{}_\mu \tag{5.9}$$

Questa scelta è sempre possibile in quanto nell'eventualità che $h_{\mu\nu}$ non rispetti quest'ultima condizione, si può trovare un $h'_{\mu\nu}$, soluzione della (5.5), che verifichi la (5.9). Per far sì che $h'_{\mu\nu}$ abbia le caratteristiche ricercate è sufficiente che nel cambio di coordinate si imponga la condizione

$$\Box\xi = \partial_\mu h^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu{}_\mu \tag{5.10}$$

Applicando la (5.9) nella (5.5), tenendo conto della (5.4), quest'ultima si riduce ad essere

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{5.11}$$

Di questa equazione si considera la soluzione

$$h_{\mu\nu}(x) = \varepsilon_{\mu\nu} e^{i\kappa_\lambda x^\lambda} + \varepsilon^*_{\mu\nu} e^{-i\kappa_\lambda x^\lambda} \tag{5.12}$$

la quale soddisfa la (5.11) se è verificata la condizione

$$\kappa^\mu \kappa_\mu = 0 \tag{5.13}$$

e la condizione di gauge se

$$\kappa_\mu \varepsilon^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\kappa_\nu \varepsilon^\mu{}_\mu \tag{5.14}$$

La (5.13), come per le onde elettromagnetiche, comporta che le onde gravitazionale si propagano a velocità luce. Il tensore $\varepsilon_{\mu\nu}$ è simmetrico e viene detto tensore di polarizzazione. Un tensore simmetrico 4×4 ha dieci componenti indipendenti, le quattro relazioni (5.14) riducono questo numero a sei. La (5.8) non fissa in maniera univoca il gauge di conseguenza è possibile eseguire una trasformazione di gauge generata da una funzione armonica, si supponga dunque di scegliere

$$\xi^\mu = i\varepsilon^\mu e^{i\kappa_\lambda x^\lambda} - i\varepsilon^* e^{-i\kappa_\lambda x^\lambda} \tag{5.15}$$

A questo punto la (5.12) da

$$h'_{\mu\nu}(x) = \varepsilon'_{\mu\nu} e^{i\kappa_\lambda x^\lambda} + \varepsilon'^{*}_{\mu\nu} e^{-i\kappa_\lambda x^\lambda} \tag{5.16}$$

dove

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \kappa_\mu \varepsilon_\nu + \kappa_\nu \varepsilon_\mu \tag{5.17}$$

Quindi si può concludere che $\varepsilon'_{\mu\nu}$ e $\varepsilon_{\mu\nu}$ rappresentano la stessa situazione fisica per valori arbitrari del parametro $\varepsilon_{\mu\nu}$. Dunque delle sei componenti indipendenti di $\varepsilon_{\mu\nu}$ solo due sono fisicamente rilevanti. Per esempio consideriamo un onda che si muove lungo l'asse z, con vettore d'onda

$$\kappa^1 = \kappa^2 = 0 \quad \kappa^3 = \kappa^0 = \kappa > 0 \tag{5.18}$$

In tal caso l'equazione (5.17) fornisce

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{31} + \varepsilon_{01} = \varepsilon_{32} + \varepsilon_{02} = 0 \\ &\varepsilon_{33} + \varepsilon_{03} = -\varepsilon_{03} - \varepsilon_{00} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - \varepsilon_{00}\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Queste quattro equazioni consentono di esprimere ε_{i0} e ε_{22} in termini delle altre sei $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{31}; \quad \varepsilon_{02} = -\varepsilon_{32}; \quad \varepsilon_{03} = -\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{33} + \varepsilon_{00}\right); \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \tag{5.20}$$

Quando queste quattro equazioni sono soggette alle trasformazioni definite dalle coordinate e dalla (5.15), le sei componenti di $\varepsilon_{\mu\nu}$ cambiano in accordo con (5.17):

$$\begin{aligned} &\varepsilon'_{11} = \varepsilon_{11} \qquad \varepsilon'_{12} = \varepsilon_{12} \\ &\varepsilon'_{13} = \varepsilon_{13} - \kappa\xi_1 \qquad \varepsilon'_{23} = \varepsilon_{23} - \kappa\xi_2 \\ &\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} - 2\kappa\xi_3 \qquad \varepsilon'_{00} = \varepsilon_{00} + 2\kappa\xi_0 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Si nota subito che solamente ε_{11} e ε_{12} hanno significato fisico assoluto. Si può dunque eseguire una trasformazione in modo che solo queste due componenti di $\varepsilon_{\mu\nu}$ siano diverse da zero:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{13}}{\kappa} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{23}}{\kappa} \qquad \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_{33}}{2\kappa} \qquad \varepsilon_0 = -\frac{\varepsilon_{00}}{2\kappa} \tag{5.22}$$

Se si esegue una rotazione del tensore di polarizzazione rispetto l'asse z definita dalla matrice (2.63) poiché lascia invariato κ_μ il suo unico effetto è di trasformare$\varepsilon_{\mu\nu}$ in

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \varepsilon_{\rho\sigma} \tag{5.23}$$

Usando le relazioni (5.20) si trova che

$$\begin{aligned} &\varepsilon'_\pm = e^{\pm 2i\theta} \varepsilon_\pm \\ &f'_\pm = e^{\pm i\theta} f_\pm \\ &\varepsilon'_{33} = \varepsilon_{33} \qquad \varepsilon'_{00} = \varepsilon_{00} \end{aligned} \tag{5.24}$$

dove

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\pm = \varepsilon_{11} \mp i\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{22} \mp i\varepsilon_{12} \\ &f_\pm = \varepsilon_{31} \mp i\varepsilon_{32} = -\varepsilon_{01} \pm i\varepsilon_{02} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Si è dunque mostrato che le onde gravitazionali possono essere decomposte in in più parti: $\varepsilon_\pm$ con elicità ± 2, $f_\pm$ con elicità ± 1 ed infine ε_{00} e ε_{33} con elicità nulla. Tuttavia si è visto che le parti cn elicità 0 e ± 1 possono essere annullate tramite un appropriata scelta delle coordinate. In conclusione le componenti fisicamente rilevanti sono solamente quelle aventi elicità ± 2

Effetti distorsivi delle onde gravitazionali

Poiché si è visto che le componenti fisiche effettivamente rilevanti per un onda gravitazionale piana sono solamente due, è possibile scrivere $h_{\mu\nu}$ sotto forma di matrice con solo quattro elementi diversi da zero (come prima si considera un onda che si propaga lungo l'asse z):

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{21} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Di tale matrice è importante sottolineare che, data la simmetria, $h_{12} = h_{21}$ e dalla (5.16) è possibile dedurre che $h_{22} = -h_{11}$. Ipotizzando che $h_{12} = 0$, e ricordando che $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ si avrà che l'elemento di linea è

$$ds^2 = dt^2 - dx^2(1 - h_{11}) - dy^2(1 - h_{22}) - dz^2 \tag{5.27}$$

da cui

$$ds^2 = dt^2 - dx^2(1 - h_{11}) - dy^2(1 + h_{11}) - dz^2 \tag{5.28}$$

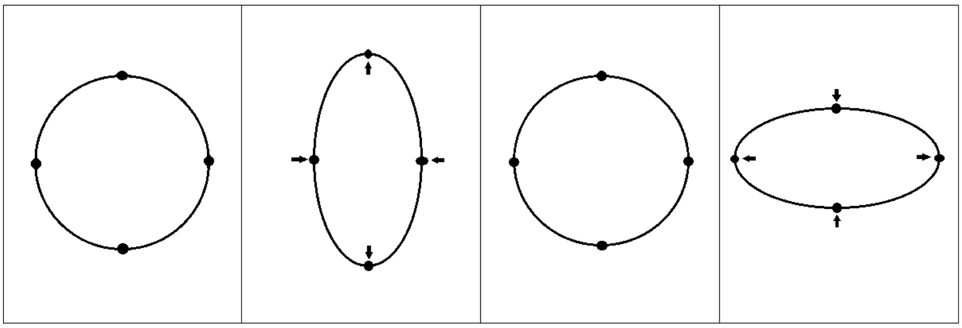

Figura 5.1: Effetto di un onda gravitazionale su un anello di polvere

Supponendo che h_{11} sia una qualche funzione oscillante che assuma valori sia positivi che negativi è possibile studiare ciò che accade nel momento in cui un onda di questo tipo incide su una distribuzione di particelle di prova. Si supponga di avere due particelle vicine nel piano xy tali che le loro coordinate siano (x_0, y_0) e $x_0 + dx, y_0$, a seguito della (5.28) la distanza propria tra i due punti diviene

$$ds^2 = -dx^2(1 - h_{11}) \tag{5.29}$$

La distanza propria è una quantità indipendente alle coordinate per cui se h_{11} assume vslori maggiori di zero i due punti si avvicinano, si allontanano se h_{11} assume valori minori di zero. Per due particelle di coordinate (x_0, y_0) e $(x_0, y_0 + dy)$ accade invece l'oppsto:

$$ds^2 = -(1 + h_{11})dy^2 \tag{5.30}$$

Di conseguenza se un onda gravitazionale piana oscillante incidesse su un anello di particelle tale anello si deformerebbe in un ellisse pulsante il cui semiasse maggiore è parallelo alternativamente alla asse x e all' asse y, come visibile nella figura 5.1. In questo caso l'onda viene detta con polarizzazione $+$.

Se ora si considera il caso in cui $h_{11} = 0$ e $h_{12} \neq 0$. In questo caso l'elemento di linea diviene

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2h_{12}dxdy \tag{5.31}$$

Se si esegue una rotazione di 45 gradi nel piano xy attraverso il cambio di coordinate

$$x \to x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \qquad y \to y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \tag{5.32}$$

l' elemento di linea risulta essere

$$ds^2 = dt^2 - dx'^2(1 - h_{12}) - dy'^2(1 + h_{12}) - dz^2 \tag{5.33}$$

Confrontando quest'ultima equazione con la (5.28) è immediato rendersi conto che l'effetto delle due onde è il medesimo, l'unica differenza sta nel secondo caso l'anello di materia si deformerebbe nuovamente in un ellisse pulsante ma inclinata di 45 gradi rispetto alla prima. Questo secondo caso viene detto polarizzazione $\times$

Generazione di onde gravitazionali

Se si considera l'equazione (5.4) e la si contrae ulteriormente si ottiene la curvatura scalare

$$R^{\mu}{}_{\mu} = (\partial_\rho \partial^\mu h^{\lambda}{}_{\mu} - \Box h) \tag{5.34}$$

Si può ora costruire il tensore di Einstein

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h^{\rho}_{\mu} + \partial^\rho \partial_\mu h_{\nu\rho} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho \partial^\lambda h^{\rho}{}_{\lambda} + \eta_{\mu\nu}\Box h) \end{aligned} \tag{5.35}$$

Questa espressione poco maneggevole può essere semplificata introducendo la perturbazione a traccia inversa $h^*_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 1/2\eta_{\mu\nu}h$, la quale deve il suo nome al fatto che $h^{*\mu}_{\mu} = -h$. Esprimendo $h_{\mu\nu}$ in funzione di $h^*_{\mu\nu}$, $h - \mu\nu = h^*_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}h$, e andando a sostituire nella (5.6) si ottiene

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\nu h^{*\rho}{}_{\mu} + \partial^\rho \partial_\mu h^*_{\nu\rho} - \Box h^*_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho \partial^\lambda h^{*\rho}{}_{\lambda}) \tag{5.36}$$

Tale equazione può essere semplificata mediante una trasformazione di gauge $x^\mu \to x'^\mu + \xi^\mu$. A seguito della trasformazione la metrica risulterà

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \tag{5.37}$$

e dunque la perturbazione a traccia inversa diventa

$$h^*_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' = h^*_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho \xi_\rho \tag{5.38}$$

Ancora una volta la scelta migliore è quella di sfruttare un gauge armonico, già espresso mediante la (5.9).Nel presente caso tuttavia la condizione di gauge si riduce ad essere: $\partial^\mu h^*_{\mu\nu} = 0$. In generale si ha

$$\partial^\mu h'^*_{\mu\nu} = \partial^\mu h^*_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\nu \xi_\mu - \Box \xi_\nu + \partial_\nu \partial^\rho \xi_\rho = \partial^\mu h^*_{\mu\nu} - \Box \xi_\nu \tag{5.39}$$

Affinché si verifichi il gauge armonico è dunque necessario eseguire un cambio di coordinate che verifichi la condizione

$$\Box \xi_\nu = \partial^\mu h^*_{\mu\nu} \tag{5.40}$$

Applicando tali condizioni alla (5.34) si verifica che

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^*_{\mu\nu} \tag{5.41}$$

L'equazione di Einstein può dunque essere riscritta, ponendo la costante di gravitazione universale unitaria, come

$$\Box h^*_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{5.42}$$

essa può essere risolta mediante l'ausilio delle funzioni di Green le quali sono distribuzioni particolarmente utilizzate nella risoluzione delle equazioni differenziali. Un equazione d'onda con sorgente prende in generale la forma

$$\Box f(t, \mathbf{x}) = s(t, \mathbf{x}) \tag{5.43}$$

dove $f(t, \mathbf{x})$ è il campo radioattivo dipendente dal tempo e dalla posizione mentre $s(t, \mathbf{x})$ è la sorgente del campo. La funzione di Green $G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x'})$ che si dovrà utilizzare rappresenta il campo dato da una sorgente descritta dalla distribuzione delta di Dirac:

$$\Box G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}') = \delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{5.44}$$

Per definizione della distribuzione delta di Dirac è possibile scrivere

$$s(t, \mathbf{x}) = \int dt' d^3x' \delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')s(t', \mathbf{x}') \tag{5.45}$$

Applicando a quest'ultima la (5.44) si ottiene

$$s(t, \mathbf{x}) = \int dt' d^3x' \Box G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}')s(t', \mathbf{x}') \tag{5.46}$$

e quindi, considerando che l'operatore $\Box$ può essere portato fuori dal segno di integrale,

$$\Box f(t, \mathbf{x}) = s(t, \mathbf{x}) = \Box \int dt' d^3x' G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}')s(t', \mathbf{x}') \tag{5.47}$$

da cui si può ottenere un espressione per il campo $f(t, \mathbf{x})$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int dt' d^3x' G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}')s(t', \mathbf{x}') \tag{5.48}$$

È possibile dimostrare che la funzione di Green associata all'operatore $\Box$ è

$$G(t, \mathbf{x}, t', \mathbf{x}') = -\frac{\delta(t' - [t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c])}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{5.49}$$

dove $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ è il tempo ritardato il quale tiene conto del ritardo dovuto al tempo di propagazione dell'informazione fra un punto di coordinate $\mathbf{x}$ ed uno di coordinate $\mathbf{x}'$. Applicando il suddetto ragionamento alla (5.42) si ottiene

$$h^*_{\mu\nu} = 4 \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{5.50}$$

nella quale si è posto $c = 1$. I gradi di libertà radioattivi sono interamente contenuti nella parta spaziale della metrica:

$$h^*_{ij} = 4 \int d^3x' \frac{T_{ij}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{5.51}$$

Volendo valutare questa quantità a grande distanza dalla sorgente è possibile eseguire l'approssimazione $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r$ arrivando a

$$h^*_{ij} = \frac{4}{r} \int d^3x' T_{ij}(t - r, \mathbf{x}) \tag{5.52}$$

Quest'ultima equazione con qualche manipolazione può fornire la formula del quadrupolo che descrive l'emissione di onde gravitazionali. Il tensore energia-impulso gode della legge di conservazione (3.36) che se scomposta nelle parti spaziali e temporali da

$$\partial_t T^{tt} + \partial_i T^{ij} = 0 \quad \partial_t T^{ti} + \partial j T^{ij} = 0 \tag{5.53}$$

Se ora si deriva la prima rispetto al tempo e si considera l'identità data dalla seconda si ottiene

$$\partial_t^2 T^{tt} = \partial_\kappa \partial_l T^{\kappa l} \tag{5.54}$$

Manipolando i due lati di tale equazione si ottiene per il lato sinistro

$$\partial_t^2 T^{tt} x^i x^j = \partial_t^2 (T^{tt} x^i x^j) \tag{5.55}$$

e per quello destro

$$\partial_\kappa \partial_l T^{\kappa l} = \partial_\kappa \partial_l (T^{\kappa l} x^i x^j) - 2\partial_\kappa (T^{i\kappa} x^j + T^{\kappa j} x^i) + 2T^{ij} \tag{5.56}$$

Inserendo le ultime due equazioni nella (5.54) si ottiene

$$\partial_t^2 T^{tt} x^i x^j = \partial_\kappa \partial_l (T^{\kappa l} x^i x^j) - 2\partial_\kappa (T^{i\kappa} x^j + T^{\kappa j} x^i) + 2T^{ij} \tag{5.57}$$

Dalla quale isolando T^{ij} e andandolo a sostituire nella (5.52) si ricava

$$\begin{aligned}\frac{4}{r}\int d^3x' T_{ij} = & \\ & \frac{4}{r}\int d^3x' \quad \frac{1}{2}\partial_t^2 T^{tt} x'^i x'^j + \partial_\kappa (T^{\kappa j} x'^i + T^{i\kappa} x'^j) \\ & - \frac{1}{2}\partial_\kappa \partial_l (T^{\kappa l} x'^i x'^j) \\ & = \frac{2}{r}\int d^3x' \partial_t^2 (T^{tt} x'^i x'^j) \\ & = \frac{2}{r}\partial_t^2 \int d^3x' T^{tt} x'^i x'^j \\ & = \frac{2}{r}\partial_t^2 \int d^3x' \rho x'^i x'^j\end{aligned} \tag{5.58}$$

dove si è applicato il teorema di Gauss per trasformare il secondo ed il terzo termine del lato sinistro della prima uguaglianza per mutarli in integrali di superfici i quali, scelta una superficie esterna alla sorgente, si annullano. Definendo

$$I_{ij}(t) = \int d^3x' \rho x'^i x'^j \tag{5.59}$$

ed applicando questa definizione si avrà

$$h^*_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2}{r}\frac{d^2 I_{ij}(t-r)}{dt^2} \tag{5.60}$$

la quale mostra che per generare onde gravitazionali è necessario un momento di quadrupolo variabile nel tempo secondo la relazione da essa espressa.

Il 14 settembre 2015 l'osservatorio LIGO (**L**aser **I**nterferometer **G**ravitational-Wave **O**bservatory) ha rilevato l'emissione di onde gravitazionali. Il sistema di rilevazione delle onde gravitazionali si basa sull'uso di un interferometro di Michelson, le onde gravitazionali distorcendo lo spazio-tempo sono in grado di modificare il cammino ottico di un raggio laser e di conseguenza di modificare la figura di interferenza. La coppia di interferometri gestiti da LIGO sono stati in grado di rilevare il passaggio di onde gravitazionali le quali sono state associate alla collisione di due buchi neri. La collisione è avvenuta a circa $1,5 \cdot 10^8 m/s$ e le masse dei coinvolte nella collisione erano pari a circa 29 e 36 masse solari. Le due masse si sono fuse in un unico buco nero di circa 62 masse solari, minore della somma delle due masse iniziali, la massa mancate è stata convertita in energia ed emessa sotto forma di onde gravitazionali. Nonostante l'enormità delle masse e della velocità in questione gli effetti delle evento visualizzati sono estremamente piccoli: la perturbazione della metrica prodotta dal momento di quadrupolo della collisione dei due buchi neri è circa $h = 10^{-24}$ e la dilatazione dello spazio che gli interferometri hanno rilevato di circa $10^{-18} m$.

Conclusioni

In conclusione questa tesi mette in luce come le invarianze di gauge siano proprietà estremamente utili allo studio della fisica. Si è mostrato inizialmente, a partire da considerazioni relativistiche, l'elettromagnetismo in forma covariante. L'elettromagnetismo consente l'applicazione di simmetrie di gauge grazie al fatto che il quadripotenziale non definisce in maniera univoca il campo ed è dunque possibile effettuare delle trasformazioni che lascino invariato quest'ultimo. In particolare si è fatto uso del gauge di Lorentz il cui pregio risiede nel fatto che consente di individuare le componenti fisicamente rilevanti delle onde elettromagnetiche ed alcune loro caratteristiche. Lo studio porta a concludere che l'interazione elettromagnetica è trasportata da onde particelle di massa nulla e aventi spin ± 1. Si è poi passati allo studio dell'interazione gravitazionale alla luce della teoria della Relatività Generale, in particolare si è studiata la soluzione in forma di onde piane dell'equazione di campo in assenza di sorgenti. Anche questa volta è possibile fare uso di trasformazioni di gauge con il medesimo fine del caso elettromagnetico di mettere in risalto le componenti fisicamente rilevanti dell'onda. La possibilità di eseguire una trasformazione di gauge, in questo secondo caso, risiede nel fatto che la Relatività Generale prevede che le leggi della fisica siano invarianti per cambi di sistemi di riferimento, di conseguenza le trasformazioni di coordinate risultano essere trasformazioni di gauge. Come nel caso elettromagnetico sono solamente due le componenti rilevanti, tuttavia l'elicità dell'onda è ± 2 e dunque l'interazione viene trasportata da particelle a spin 2. Confrontando ulteriormente il caso gravitazionale e quello elettromagnetico è stato possibile apprezzare come entrambi i tipi di onda presentano particelle a massa nulla, le quali si propagano alla velocità della luce. Una differenza osservabile tra le due interazioni è che la generazione di onde elettromagnetiche richiede la presenza di un momento di dipolo elettrico variabile nel tempo mentre la generazione gravitazionale richiede un momento di quadrupolo, anch'esso variabile nel tempo. In sintesi la tesi mostra come l'invarianza di gauge possa essere applicata in maniera molto simile a due fenomeni fisici differenti per trarne conclusioni spesso simili.

Bibliografia

[1] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and application of the General theory of Relativity*, Jhon Wiley and sons, 1972

[2] Ray d'Inverno, *Introduzione alla relatività di Einstein*, Clueb, 2001

[3] Vincenzo Barone, *Relatività: Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, Torino, 2004

[4] Eanna E. Flanagan and Scott A. Hughes, *The basics of gravitational wave theory*, arXiv:gr-qc/0501041v3 5 Oct 2005