

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Vortici in He II Superfluido

Relatore:
Prof. Elisa Ercolessi

Presentata da:
Michelangelo Mannatzu

Sessione III
Anno Accademico 2014/2015

Introduzione

Un'area di ricerca relativamente recente della fisica statistica quantistica è quella della superfluidità. Da quando fu scoperta (nel 1939 da Kapitza), la superfluidità ha interessato ed affascinato i più grandi fisici del 1900, tra cui Feynman, Landau e Onsager.

Le ragioni di un così forte interesse sono da riscontrare sia in una fenomenologia estremamente vasta, sia in una teoria intrinsecamente complessa ed affascinante, che vede intrecciate la fluidodinamica, la meccanica statistica e la meccanica quantistica.

Una guida ideale per lo studio dei fenomeni della superfluidità è il modello elaborato dal fisico russo Lev Landau (1908-1968). Basandosi sugli studi effettuati da Bogoliubov sui gas di Bosoni debolmente interagenti e introducendo il concetto di parametro d'ordine come funzione d'onda macroscopica di un condensato, Landau riuscì a formulare una teoria in grado di descrivere il comportamento dell' He II per temperature prossime allo zero assoluto.

Tra le previsioni più interessanti di questa teoria, figura sicuramente il fenomeno dei vortici quantizzati.

Il fenomeno della vorticità nei fluidi costituisce una materia di studio vastissima, che ha permeato la fisica per secoli, ha interessato i migliori fisici teorici e che rimane tuttora parzialmente irrisolta. La vorticità in regime turbolento (governata da equazioni fortemente non lineari) costituisce infatti il più grande problema aperto della fisica classica. La seguente trattazione vuole essere un'introduzione alla fenomenologia dei vortici quantizzati nell'He II e alle teorie alla base di tali fenomeni.

Nel primo capitolo sono illustrati gli aspetti fondamentali della fluidodinamica classica. In particolare vengono introdotte le nozioni di vorticità, circolazione e l'equazione di Navier-Stokes per la vorticità. La parte finale del capitolo è dedicata a tre esempi di vortici molto comuni e completamente risolvibili analiticamente.

Nel secondo capitolo vengono presentate le teorie sui gas di Bosoni liberi e debolmente interagenti, allo scopo di introdurre un modello teorico entro cui inquadrare il fenomeno della superfluidità. Il capitolo si chiude con l'introduzione del parametro d'ordine per un superfluido.

Il capitolo terzo è dedicato principalmente alle proprietà specifiche dell' ^4He , con cenni alla teoria di Landau e alla soluzione vorticoso dell'equazione di Ginzburg-Pitaevskii. Il quarto ed ultimo capitolo è invece incentrato sulla fenomenologia dei vortici quantizzati in relazione alle nozioni teoriche introdotte nei capitoli precedenti. Come ultimo argomento viene illustrato il fenomeno dei *vortex arrays* in un contenitore cilindrico rotante.

Indice

Introduzione	i
1 Proprietà dei vortici nei fluidi newtoniani	1
1.1 Fluidi newtoniani: equazioni di governo e leggi di conservazione.	1
1.1.1 Relazione costitutiva per i fluidi newtoniani.	1
1.1.2 Conservazione della massa ed equazione di continuità	2
1.1.3 Primo principio della termodinamica e conservazione dell'energia .	2
1.1.4 Secondo principio della dinamica: equazioni del moto	4
1.2 Dalle equazioni del moto all'equazione di Navier-Stokes	5
1.2.1 Alcuni casi particolari	6
1.3 Vortici classici: alcune definizioni	6
1.4 Equazione generale per la vorticità	12
1.4.1 Casi particolari	13
1.5 Il teorema di Kelvin e il III teorema di Helmholtz	15
1.6 Esempi: vortici cavi, vortici di Rankine e anelli vorticosi.	17
2 Condensazione di Bose-Einstein e Superfluidità	21
2.1 Condensato di Bose per particelle non interagenti	22
2.2 Teoria di Bogoliubov sul gas di Bose debolmente interagente	27
2.2.1 Correzione ai livelli energetici	27
2.2.2 Cenni allo spettro delle eccitazioni di Bogoliubov	28
2.2.3 Equazione di stato	29
2.3 Introduzione al concetto di parametro d'ordine	30
3 Caratteristiche principali dell'He II	31
3.1 La transizione λ	31
3.2 Il modello a due fluidi di Tisza	32
3.3 Cenni alla teoria di Landau	33
3.3.1 Fononi e Rtoni	34

3.3.2	Velocità limite	36
3.3.3	Potenziale delle velocità nel superfluido	37
3.4	Cenni al modello di Ginzburg-Pitaevskii	38
3.4.1	Soluzione vorticosa	38
4	Vortici quantizzati nell'He II	41
4.1	Prime idee sui vortici con circolazione quantizzata	41
4.2	Vortici di Feynman	42
4.3	Prima evidenza sperimentale	43
4.4	Derivazione della legge di quantizzazione della circolazione	44
4.5	Disposizione di vortici in un contenitore cilindrico rotante	45
	Conclusioni	47
	Appendice	50
	A	51
	B	57
	Bibliografia	58

Capitolo 1

Proprietà dei vortici nei fluidi newtoniani

In questo capitolo richiameremo alcune nozioni di fluidodinamica classica, introdurremo il concetto di vorticità e descriveremo alcune proprietà di carattere generale sui vortici. Sfruttando le nozioni introdotte, studieremo infine alcune tipologie di vortici molto comuni e particolarmente semplici da trattare analiticamente.

L'esposizione degli argomenti di questo capitolo segue quasi esclusivamente la trattazione delle dispense *Note di Fluidodinamica* del Prof. Simone Zuccher.

1.1 Fluidi newtoniani: equazioni di governo e leggi di conservazione.

Un **fluido** è definito come una sostanza in grado di deformarsi in modo continuo ed illimitato (crescente nel tempo), quando viene sottoposta ad uno sforzo di taglio esterno.

1.1.1 Relazione costitutiva per i fluidi newtoniani.

In questo capitolo ci occuperemo solamente di fluidi **newtoniani**, ovvero di quei fluidi tali per cui la relazione costitutiva fra tensore di sforzo e tasso di deformazione (Appendice A) è lineare:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

La costante di proporzionalità η è detta viscosità dinamica¹, mentre p indica la pressione. La relazione (1.1) risulterà fondamentale per ricavare le equazioni del moto di un fluido viscoso.

Riporteremo adesso alcune nozioni di carattere generale di meccanica dei continui.

1.1.2 Conservazione della massa ed equazione di continuità

Consideriamo un volume materiale $\mathcal{V}(t_0)$ che al tempo t_0 contiene alcune particelle materiali. Dopo un certo intervallo di tempo Δt , le particelle occuperanno una posizione differente e il volume $\mathcal{V}(t_0 + \Delta t)$ che le conterrà sarà in generale diverso da $\mathcal{V}(t_0)$. Poiché però le particelle all'interno dei due volumi sono sempre le stesse, la massa della porzione di fluido racchiusa da $\mathcal{V}(t)$ deve conservarsi al variare di t :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho dV = 0. \quad (1.2)$$

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds (Appendice A) e il teorema della divergenza, abbiamo:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0, \quad (1.3)$$

e, data l'arbitrarietà del volume $\mathcal{V}(t)$, segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.4)$$

L'equazione (1.4) prende il nome di **Equazione di continuità**.

1.1.3 Primo principio della termodinamica e conservazione dell'energia

Come nel caso precedente, prendiamo in considerazione una porzione di fluido contenuta in un certo volume materiale $\mathcal{V}(t_0)$ al tempo t_0 e andiamo a valutarne la variazione di energia.

Per il primo principio della termodinamica abbiamo:

$$dE = \delta Q - \delta L. \quad (1.5)$$

¹Quando due strati di fluido sono in moto di scorrimento relativo uno rispetto all'altro, fra di essi si esercita una forza frenante, il cui modulo è direttamente proporzionale alla viscosità dinamica.

1.1. FLUIDI NEWTONIANI: EQUAZIONI DI GOVERNO E LEGGI DI CONSERVAZIONE.3

Esprimendo l'energia attraverso l'integrale sul volume dell'energia totale specifica e e derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho e dV = \frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta L}{dt}. \quad (1.6)$$

A questo punto separiamo il lavoro in due contributi: uno dovuto alle forze di volume L_V e uno dovuto alle forze di superficie (o trazioni) L_S :

$$\frac{\delta L}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (1.7)$$

(dove abbiamo indicato con \mathbf{f} il campo di densità di forze di volume e con \mathbf{T} la trazione).

Operando nel medesimo modo col calore e ricordando la legge di Fourier:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\kappa \nabla T, \quad (1.8)$$

otteniamo:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \dot{Q} dV + \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \kappa \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.9)$$

(dove Q è un campo scalare di densità volumetrica di calore prodotto all'interno del fluido)

Sostituendo nella (1.6), applicando il teorema del trasporto e il teorema della divergenza a primo membro, troviamo:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) \right) dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \dot{Q} dV + \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \kappa \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV - \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (1.10)$$

Applicando nuovamente il teorema della divergenza ed esprimendo le trazioni in funzione del tensore di sforzo:

$$\mathbf{T} = \tau \cdot \hat{\mathbf{n}} = (-p\mathbb{1} + (\tau + p\mathbb{1})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (-p\mathbb{1} + \tau') \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.11)$$

con $\hat{\mathbf{n}}$ normale locale alla superficie, otteniamo:

$$\int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) \right) dV = \int_{\mathcal{V}(t)} [\rho \dot{Q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) - \nabla \cdot (\tau' \hat{\mathbf{n}})] dV. \quad (1.12)$$

Dall'arbitrarietà del volume segue l'uguaglianza degli integrandi:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) = \rho \dot{Q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\tau' \hat{\mathbf{n}}). \quad (1.13)$$

L'equazione (1.13) rappresenta la **Legge di conservazione dell'energia** per un mezzo continuo nella forma più generale.

1.1.4 Secondo principio della dinamica: equazioni del moto

Consideriamo ancora una volta una porzione di fluido contenuta in un certo volume materiale $\mathcal{V}(t_0)$ al tempo t_0 e andiamo a imporre che la somma delle forze sia uguale alla derivata della quantità di moto totale rispetto al tempo:

$$\frac{dP_i}{dt} = F_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.14)$$

A secondo membro operiamo esattamente come nel caso precedente e separiamo il contributo della forza in due termini (forze di volume e forze di superficie), mentre a primo membro ci scriviamo la quantità di moto totale come grandezza estensiva, integrando la quantità di moto specifica su tutto il volume:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho v_i dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho f_i dV + \hat{\mathbf{u}}_i \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \mathbf{T} dS \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.15)$$

(con $\hat{\mathbf{u}}_i$ versore dell' i -esimo asse coordinato)

Applicando i teoremi del trasporto e della divergenza a primo membro e inserendo la relazione (1.11) nell'ultimo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) \right) dV &= \int_{\mathcal{V}(t)} \rho f_i dV + \oint_{\partial \mathcal{V}(t)} \tau \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_{\mathcal{V}(t)} [\rho f_i + \nabla \cdot (\tau \hat{\mathbf{u}}_i)] dV = \int_{\mathcal{V}(t)} \left(\rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Da cui segue:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.17)$$

Sviluppando la derivate dei prodotti a primo membro e ricordando l'equazione di continuità, l'ultima relazione si può scrivere come:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla v_i \right) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18)$$

riconoscendo a sinistra le derivata totale di v_i otteniamo infine:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.19)$$

Le (1.19) rappresentano le **Equazioni del moto** per un mezzo continuo.

1.2 Dalle equazioni del moto all'equazione di Navier-Stokes

Riprendiamo l'equazione (1.19). Se assumiamo la gravità come unica forza di volume e sostituiamo alle componenti del tensore di sforzo quelle espresse dalla relazione costitutiva (1.1) abbiamo:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.21)$$

Assumendo la viscosità dinamica uniforme², otteniamo:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.23)$$

Che in notazione vettoriale si scrive come:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \left[\nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]. \quad (1.24)$$

²Questa assunzione non impone soltanto che la viscosità non sia funzione della posizione, ma anche che il fluido sia in equilibrio termico. Ciò è dovuto alla forte dipendenza della viscosità dinamica dalla temperatura.

La (1.24) prende il nome di **Equazione di Navier-Stokes** e descrive a livello macroscopico il comportamento di un fluido newtoniano viscoso, isotropo e in equilibrio termico.

1.2.1 Alcuni casi particolari

Se consideriamo un fluido totalmente incomprimibile, allora la sua densità non può variare nel tempo e dall'equazione di continuità segue: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Sostituendo nella (1.24) otteniamo:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (1.25)$$

Se invece gli effetti della viscosità sono trascurabili (fluido inviscido), l'equazione di Navier-Stokes assume la forma:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p. \quad (1.26)$$

che prende il nome di **Equazione di Eulero**.

1.3 Vortici classici: alcune definizioni

Non esiste in fisica una definizione univoca di vortice, tuttavia la maggior parte della letteratura è concorde sull'idea intuitiva che il fenomeno della vorticità sia legato a volumi di fluido in rotazione.

Saffman e Baker (1970) ad esempio, definiscono un *vortice* come una porzione di fluido in rotazione, delimitata da una porzione di fluido irrotazionale o da una parete solida. In questo capitolo introdurremo le nozioni di base per studiare la dinamica dei vortici e le loro proprietà principali.

Definizione 1.3.1. Sia $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ il campo delle velocità delle particelle che compongono un fluido. Definiamo in ogni punto il vettore **vorticità** $\boldsymbol{\omega}$, come il rotore della velocità:

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{v} \quad \omega_i \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}. \quad (1.27)$$

Osserviamo che, essendo la divergenza di un rotore identicamente nulla, la vorticità costituisce un campo vettoriale solenoidale:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (1.28)$$

Proposizione 1.3.2. Sia $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)$ la velocità angolare istantanea di rotazione rigida di un elemento di fluido in posizione \mathbf{x} al tempo t . Allora:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = 2\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) \quad (1.29)$$

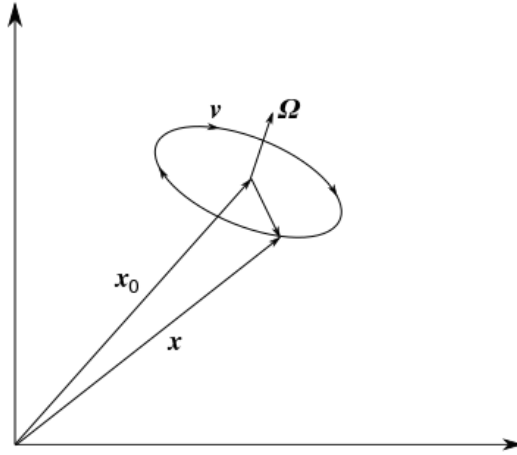


Figura 1.1: Velocità angolare istantanea di rotazione rigida.

Dimostrazione. Sia \mathbf{x}_0 il vettore posizione che identifica un elemento di fluido. Espandendo al primo ordine il campo delle velocità in un intorno di tale punto, abbiamo:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + (\mathcal{J}\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots$$

dove gli elementi della matrice Jacobiana sono:

$$(\mathcal{J}\mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \xi_{ij} + \chi_{ij}.$$

(Si osservi che ξ_{ij} sono gli elementi del tensore tasso di deformazione).

Possiamo quindi scrivere:

$$v_i(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}_0) + \xi_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \chi_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \dots$$

Consideriamo ora le componenti della vorticità:

$$\omega_i = \varepsilon_{ilm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l},$$

moltiplicando entrambi i membri per il tensore di Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk}\omega_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l},$$

e tenendo conto dell'identità:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}), \quad (1.30)$$

otteniamo:

$$\varepsilon_{ijk}\omega_i = 2\chi_{kj}.$$

Andando ora a sostituire quest'ultima relazione nell'espressione dello sviluppo della velocità:

$$v_i(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}_0) + \xi_{ij}(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_i(\mathbf{x}_0)(x_j - x_{0j}) + \dots$$

riconoscendo nell'ultimo termine le componenti di un prodotto vettoriale, troviamo:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \xi(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots$$

Se un elemento di fluido situato in \mathbf{x} ruota rigidamente attorno a un punto \mathbf{x}_0 , la sua velocità istantanea è esprimibile attraverso la relazione (figura (1.1)):

$$\mathbf{v}_{rig}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Confrontando le ultime due espressioni, possiamo concludere che la velocità nella posizione \mathbf{x} è data dalla somma di due contributi: una rotazione rigida attorno a \mathbf{x}_0 e un termine dovuto al tasso di deformazione. Abbiamo pertanto:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{rig}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{def}(\mathbf{x}),$$

con: $\mathbf{v}_{def}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ (al primo ordine), e identificare:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}.$$

□

Abbiamo quindi mostrato come la definizione di vorticità sia effettivamente strettamente legata all'idea intuitiva di una porzione di fluido in moto rotatorio (rispetto agli elementi di fluido stessi).

Definizione 1.3.3. Consideriamo una curva chiusa, differenziabile e orientata γ , contenuta all'interno del volume di un fluido. Definiamo **circuitazione** del campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ (o più semplicemente: **circolazione**) lungo γ , l'integrale di linea:

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl, \quad (1.31)$$

dove $\hat{\mathbf{u}}_t$ è il versore tangente alla curva γ .

Osservazione 1.3.4. Se il campo delle velocità è sufficientemente regolare, per il teorema di Stokes si avrà:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.32)$$

dove S è una qualsiasi superficie con normale locale $\hat{\mathbf{n}}$, tale che: $\partial S = \gamma$.

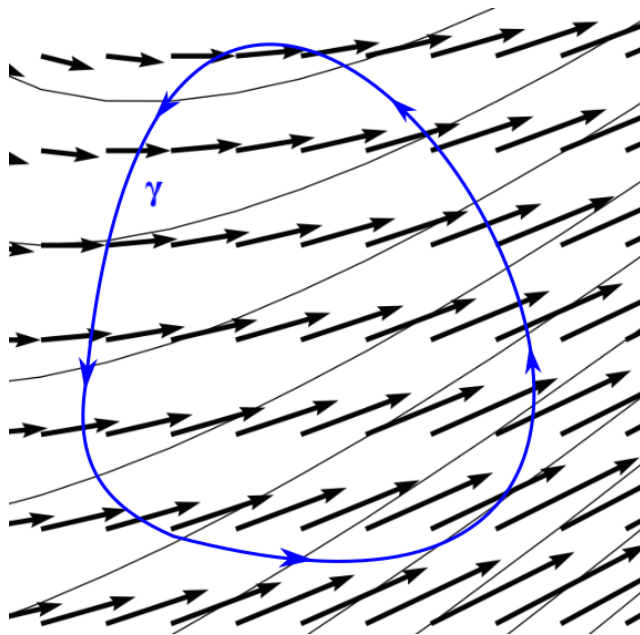


Figura 1.2: Circolazione.

Questa relazione esprime l'uguaglianza fra il flusso della vorticità attraverso una superficie e la circuitazione della velocità lungo il bordo di tale superficie.

Definizione 1.3.5. Definiamo **linea vorticoso**, una curva \mathcal{L} tangente in ogni punto al campo vettoriale $\boldsymbol{\omega}$.

Se $\hat{\mathbf{u}}_t$ è il versore tangente a una linea vorticoso \mathcal{L} , allora vale la relazione:

$$\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{u}}_t d\mathcal{L} = 0. \quad (1.33)$$

Osservazione 1.3.6. Poiché la vorticità è solenoidale, essa gode di alcune proprietà analoghe a quelle del campo magnetico:

1. Le linee vorticoso o sono chiuse, o terminano su superfici solide/libere.
2. Non vi possono essere pozzi o sorgenti di vorticità all'interno di una corrente.

La seconda proprietà (figura (1.3)) è strettamente legata all'annullarsi del flusso della vorticità attraverso una qualsiasi superficie chiusa:

$$\int_{S=\partial V} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) dV = 0. \quad (1.34)$$

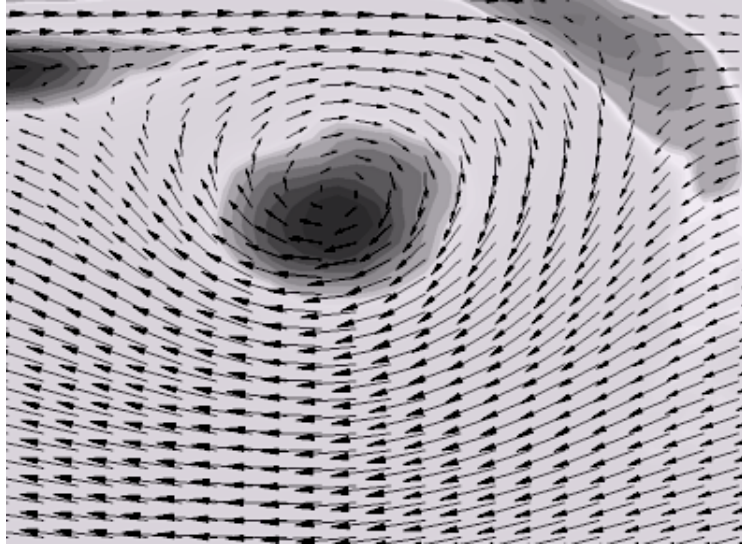


Figura 1.3: Linee di flusso per un fluido incomprimibile. La divergenza del campo delle velocità è nulla e il flusso di tale campo attraverso ogni superficie è zero. Per la vorticità la situazione è analoga.

Definizione 1.3.7. Sia γ il contorno di una regione semplicemente connessa, situata all'interno del volume di un fluido. Per ogni punto di questa curva passa una linea vorticoso: definiamo **tubo vorticoso** il solido racchiuso dall'insieme di queste linee.

Un tubo vorticoso di sezione infinitesima (ma intensità finita) è detto **filamento vorticoso**.

I Teorema di Helmholtz 1.3.8. Il flusso di vorticità attraverso una qualunque sezione di un tubo vorticoso è costante e prende il nome di intensità del tubo vorticoso.

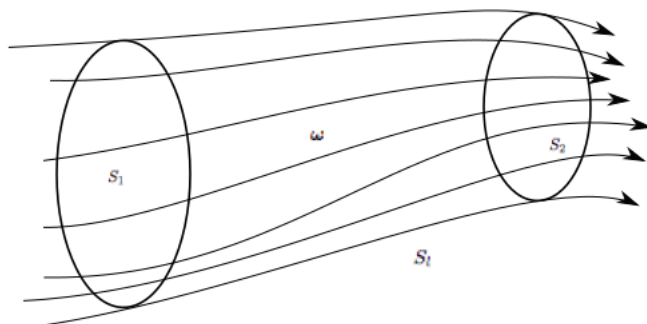


Figura 1.4: Flusso della vorticità attraverso un tubo vorticoso.

Dimostrazione. Consideriamo due superfici S_1, S_2 che delimitano un volume finito di un tubo vorticoso. Dalla relazione (1.34) segue:

$$0 = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{S_l} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Ma poiché la superficie laterale S_l di un tubo vorticoso è delimitata da linee vorticoso, la sua normale risulta in ogni punto ortogonale alla vorticità (figura(1.4)). Per questo motivo il terzo integrale porta un contributo nullo e otteniamo:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0, \quad (1.35)$$

dove: $\hat{\mathbf{n}}_i = \text{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

Segue allora immediatamente:

$$\int_{S_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i dS = \text{costante}.$$

□

Dalla relazione (1.32) vediamo che questa costante è proprio uguale alla circuitazione Γ della velocità lungo il bordo della superficie S_i .

II Teorema di Helmholtz 1.3.9. *Un tubo vorticoso di intensità non nulla non può terminare nel dominio del fluido.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il tubo vorticoso termini poco prima della superficie S_2 . Questo comporta che sul bordo di S_2 non passino linee vorticosi, pertanto:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 dS = 0.$$

Dalla relazione (1.35) segue allora:

$$\Gamma = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 dS = 0,$$

in contrasto con l'ipotesi di intensità Γ non nulla. □

1.4 Equazione generale per la vorticità

Finora abbiamo introdotto il concetto di vorticità come campo vettoriale definito su tutto il fluido, abbiamo studiato il comportamento del suo flusso attraverso superfici generiche e attraverso le sezioni di un tubo vorticoso, ma non abbiamo descritto l'evoluzione temporale di questo campo.

In questa sezione, partendo dall'equazione di Navier-Stokes, mostreremo come l'evoluzione temporale della vorticità sia un fenomeno in generale piuttosto complicato e governato da vari fattori.

Riprendiamo la relazione (1.21):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.36)$$

Il termine fra parentesi quadre contiene le componenti di un tensore D , detto: **tensore degli sforzi viscosi**. Dividendo per ρ , ed esprimendo la (1.36) in notazione vettoriale, otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot D, \quad (1.37)$$

applicando il rotore ad entrambi i membri abbiamo:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nabla \times \mathbf{g} - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right). \quad (1.38)$$

Sviluppiamo ora il rotore all'interno della prima parentesi tonda (ricordiamo che il rotore di un gradiente è identicamente nullo):

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nabla \times \mathbf{g} + \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right). \quad (1.39)$$

Infine, scrivendoci: $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}/\rho)\rho$ e sviluppando le derivate dei prodotti (Appendice B), ricaviamo l'equazione per la vorticità specifica $\boldsymbol{\omega}/\rho$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho^3} (\nabla \rho \times \nabla p) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g}. \quad (1.40)$$

L'equazione (1.40) rappresenta l'**Equazione generale per la vorticità** e i quattro termini a secondo membro prendono rispettivamente il nome di: termine di estensione, termine barotropico, termine diffusivo e termine di volume.³

1.4.1 Casi particolari

Vediamo ora di ricavare una versione semplificata dell'equazione per la vorticità in due casi particolari molto comuni.

Corrente a viscosità e densità costanti

Consideriamo un fluido isotropo ed incompressibile, ovvero un fluido in cui sia la viscosità dinamica, che la densità sono uniformi e costanti nel tempo.

Abbiamo già visto che per un fluido incompressibile l'equazione di continuità porta alla relazione:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \frac{\partial v_s}{\partial x_s} = 0; \quad (1.41)$$

inoltre, l'assunzione di densità e viscosità uniformi comporta:

$$\nabla \rho = 0 \quad \nabla \eta = 0. \quad (1.42)$$

³Osserviamo che l'equazione della vorticità è valida anche per fluidi non isotropi.

L'equazione (1.40) diventa allora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g}. \quad (1.43)$$

Studiamo le componenti del secondo termine:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) \right]_i &= \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial D_{km}}{\partial x_m} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_s}{\partial x_s} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

La condizione (1.41) impone l'annullarsi dell'ultimo termine. Portando fuori η e denotando con ν il rapporto fra viscosità dinamica e densità (viscosità cinematica), otteniamo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) \right]_i &= \nu \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \right] = \\ &= \nu \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_m} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left(\frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = \nu \nabla^2 \left(\frac{\omega_i}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (1.45)$$

dove nel primo passaggio abbiamo commutato le derivate parziali a secondo membro e abbiamo sfruttato ancora una volta la (1.41).

Moltiplicando per ρ (costante), l'equazione (1.43) diventa:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \mathbf{g}. \quad (1.46)$$

Corrente barotropica, non viscosa e con campo di forze conservative

Una corrente è detta *barotropica* se la densità è funzione solo della pressione e viceversa. Si può mostrare che in tal caso il gradiente di pressione e il gradiente di densità sono in ogni punto e in ogni istante paralleli.

Se consideriamo una corrente barotropica, non viscosa, con campo di forze conservative, tre termini dell'equazione (1.40) si annullano:

- $\nabla \rho \times \nabla p = 0$,
- $\eta = 0 \Rightarrow D = 0$,
- $\mathbf{g} = \nabla \varphi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{g} = 0$,

e l'equazione della vorticità assume la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (1.47)$$

La relazione (1.47) prende il nome di *Equazione di Eulero per la vorticità* ed è l'equazione che descrive la dinamica dei vortici nei fluidi ideali soggetti a forze di volume conservative.

1.5 Il teorema di Kelvin e il III teorema di Helmholtz

Sia $\gamma(t)$ una linea chiusa materiale, ossia una linea chiusa individuata dalla posizione di elementi di fluido ad un certo istante di tempo t . Dopo un intervallo di tempo Δt , ognuno di questi elementi si sarà spostato nel fluido seguendo il campo delle velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e la linea $\gamma(t + \Delta t)$ che collega i medesimi elementi all'istante $t + \Delta t$, avrà in generale una forma diversa rispetto a $\gamma(t)$.

Teorema di Kelvin 1.5.1. *La circuitazione del campo delle velocità lungo una linea chiusa materiale, in caso di corrente barotropica, non viscosa e soggetta solamente a forze di volume conservative, è costante nel tempo:*

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl = 0. \quad (1.48)$$

Se il campo delle velocità è sufficientemente regolare, applicando il teorema di Stokes possiamo riscrivere la (1.48) come:

$$0 = \frac{d\Gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)=\partial S(t)} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.49)$$

e affermare che sotto le ipotesi del teorema di Kelvin, il flusso della vorticità attraverso una qualsiasi superficie materiale è costante.

Dimostrazione. Per calcolare la derivata temporale di un integrale di un certo campo lungo una linea chiusa materiale, esiste un teorema analogo al teorema del trasporto, che assicura:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl = \oint_{\gamma(t)} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl + \oint_{\gamma(t)} ((\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t dl. \quad (1.50)$$

Nel nostro caso $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Sostituendo:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell = \oint_{\gamma(t)} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell + \oint_{\gamma(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell.$$

L'ultimo integrando può essere riscritto sfruttando l'identità:

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (1.51)$$

ottenendo:

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \oint_{\gamma(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell - \frac{1}{2} \oint_{\gamma(t)} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell. \quad (1.52)$$

Osserviamo ora che, per il teorema di Stokes, il secondo integrale porta un contributo nullo (possiamo ridurlo a un integrale su $S(t)$ del rotore di un gradiente).

Sfruttiamo adesso l'equazione di Eulero (1.26): sviluppando la derivata totale a primo membro e dividendo per ρ abbiamo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.53)$$

e se il campo di forze è conservativo ($\mathbf{g} = \nabla \varphi$):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \varphi - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.54)$$

Inserendo la (1.54) nella (1.52), otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \oint_{\gamma(t)} \left[\nabla \varphi - \frac{1}{\rho} \nabla p \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell = \\ &= \int_{S(t)} (\nabla \times \nabla \varphi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{S(t)} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= \int_{S(t)} \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{S(t)} \frac{1}{\rho} (\nabla \rho \times \nabla p) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

□

Dalla conservazione del flusso di vorticità attraverso le superfici materiali discende una proprietà molto interessante: si può pensare alle linee di vorticità come se fossero congelate dentro il fluido e lo seguissero nei suoi spostamenti.

Vediamo ora un corollario del teorema di Kelvin, che prende il nome di:

III teorema di Helmholtz 1.5.2. *Se in una corrente barotropica, non viscosa e soggetta a forze di volume conservative, la vorticità è inizialmente nulla, allora rimarrà nulla per sempre.*

Questo risultato è molto importante perché mostra come l'origine della vorticità, in regime barotropico e in presenza di sole forze gravitazionali, debba risiedere nella presenza della viscosità dinamica.

1.6 Esempi: vortici cavi, vortici di Rankine e anelli vorticosi.

Consideriamo un'asta cilindrica di raggio a immersa in un fluido ideale in moto rotatorio (attorno all'asta). Il valore della velocità tangenziale dipende dalla distanza dal centro dell'asta secondo la relazione:

$$v_{\theta}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \Gamma = 2\pi\Omega a^2 \quad (1.56)$$

dove Ω è la velocità angolare degli elementi di fluido sulla superficie dell'asta.

Il tipo di vortice che viene a crearsi in queste condizioni prende il nome di "vortice cavo" (*hollow vortex*).

Mostriamo ora che il fluido possiede vorticità nulla: Il campo delle velocità è esprimibile come gradiente di un potenziale $\phi(\theta)$, dato da:

$$\phi(\theta) = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} \quad (1.57)$$

di conseguenza, se consideriamo una qualsiasi linea chiusa all'interno del fluido che non contenga l'asta e calcoliamo la circuitazione delle velocità lungo tale curva, otterremo zero. Per la proposizione (1.3.2) vediamo allora che ogni particella del sistema vede la porzione di fluido attorno a sé ruotare con una velocità angolare istantanea nulla.

Questo particolare esempio di *vortice irrotazionale* presenta numerose analogie con le proprietà dei vortici quantizzati nell'He II.

Se ora sostituiamo l'asta nel nucleo del vortice cavo con un'altra porzione dello stesso fluido, ciò che osserviamo a regime è un moto a velocità angolare costante della parte centrale (lo stesso fenomeno si verifica per un fluido all'interno di un contenitore cilindrico in moto rotatorio e uniforme). Questa tipologia di vortici circolari e uniformi prende

il nome di *vortici di Rankine*. In questo caso la vorticità è non nulla e vale:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} = 2\boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.58)$$

Nel vortice cavo l'energia cinetica per unità di lunghezza e il gradiente di pressione che bilancia la forza centrifuga fra anelli di fluido adiacenti sono facilmente calcolabili [1]:

$$K = \int_a^b \frac{1}{2} \rho v^2 d^2 r = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (1.59)$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r} = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi r^3} \quad (1.60)$$

dove b è la dimensione del contenitore.

Nel caso del vortice di Rankine, bisogna aggiungere all'energia cinetica il contributo della parte centrale:

$$K = \int_a^b \frac{1}{2} \rho v^2 d^2 r = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) + \frac{1}{4} \right]. \quad (1.61)$$

Un'altra tipologia di vortici molto familiari sono i cosiddetti anelli vorticosi. Un anello vorticoso è individuato da un tubo vorticoso toroidale di raggi R_1 , R_2 e da un raggio del nucleo a , attorno a cui scorre il fluido (figura (1.5)).

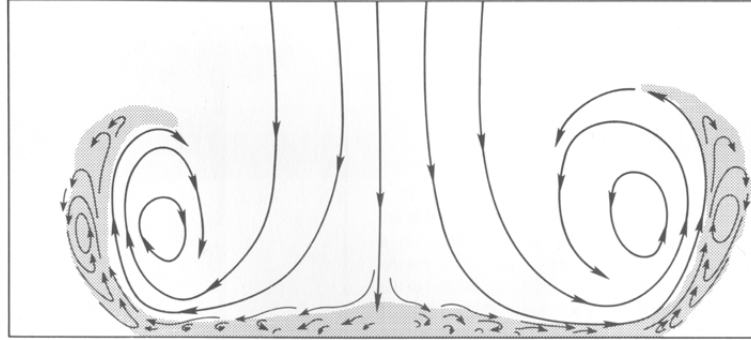


Figura 1.5: Sezione di un anello vorticoso

Se consideriamo un fluido non viscoso, tutte le grandezze dinamiche relative ad un anello vorticoso possono essere ricavate da un'opportuna Hamiltoniana mediante le equazioni di Hamilton (Roberts and Donnelly, 1970). Come mostrato in [1] si ottiene:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho \Gamma^2 R \left[\ln \left(\frac{8R}{a} \right) - \alpha \right] \quad (1.62)$$

$$P = \rho\Gamma\pi R^2 \quad (1.63)$$

$$v = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - \beta \right] \quad (1.64)$$

Quando i raggi del toro sono molto superiori rispetto a quello del nucleo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, ma in genere sono ammesse anche altre possibilità: ad esempio, per un nucleo vuoto e un anello vorticoso di volume costante, si ha: $\alpha = 2$, $\beta = 1/2$.

La fenomenologia sugli anelli vorticosi è molto vasta ed affascinante e uno degli aspetti più curiosi riguarda il moto autoindotto di un anello vorticoso all'interno del fluido: proprio come una ruota riduce l'attrito fra il pneumatico e il terreno, il flusso toroidale riduce l'attrito fra il fluido in rotazione e quello stazionario circostante. Questo consente all'anello vorticoso di percorrere distanze relativamente lunghe con piccole dispersioni di massa, energia cinetica e piccole variazioni di dimensioni e forma. Questo fenomeno spiega, per esempio, il motivo per cui gli anelli di fumo percorrono distanze molto superiori rispetto alle altre porzioni di fumo, senza disperdersi subito nell'aria. Una descrizione dettagliata e quantitativa sugli anelli vorticosi si può trovare in [1].

Proseguiremo ora la trattazione sui vortici, abbandonando i fenomeni classici e focalizzandoci su quelli quantistici. Nel prossimo capitolo presenteremo un modello teorico in grado di spiegare i principali aspetti della superfluidità e usufruiremo di questo modello per descrivere il fenomeno della vorticità quantizzata nell'He II.

Capitolo 2

Condensazione di Bose-Einstein e Superfluidità

L'esposizione degli argomenti di questo capitolo segue quasi esclusivamente la trattazione di *Huang, Kerson - 1987 - Statistical Mechanics*.

L'Elio è l'unico elemento in natura che a pressione atmosferica non solidifica nemmeno alle più basse temperature. Qualitativamente questo fatto può essere compreso se osserviamo che:

- l'interazione molecolare fra gli atomi di He è debole, a riprova del fatto che l'He è un gas nobile;
- l'He è il più leggero fra tutti i gas nobili.

Queste circostanze portano l'energia di punto zero degli atomi di He ad assumere un valore sufficientemente elevato, da rendere impossibile la localizzazione degli atomi stessi su un sito reticolare.

Consideriamo ora l'isotopo ${}^4\text{He}$ (il più abbondante in natura) allo stato liquido. Alla temperatura di 2.18 K e alla pressione atmosferica, l' ${}^4\text{He}$ compie una transizione di fase di tipo lambda, che lo porta in uno stato molto particolare, detto *Elio II* (figura 2.1).

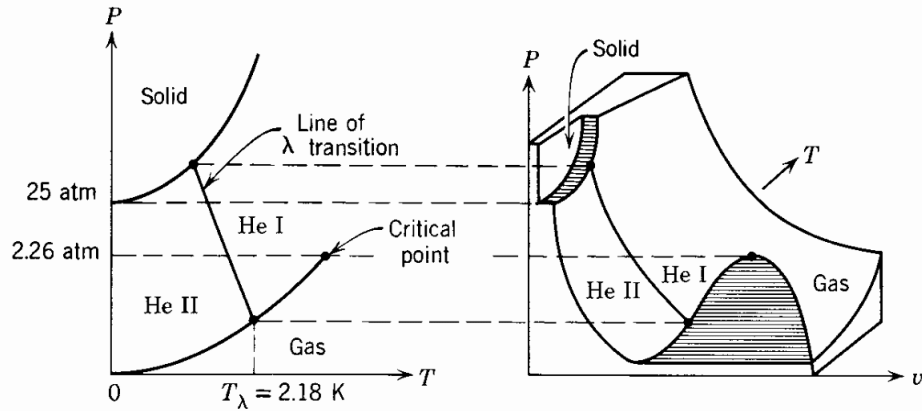


Figura 2.1: Diagrammi di fase dell' ${}^4\text{He}$ (tratta da [2]).

L'He II si comporta come un superfluido e per questo motivo possiede alcune proprietà assolutamente peculiari che non hanno una controparte nei fluidi classici. Queste proprietà saranno discusse nel prossimo capitolo.

Poiché l' ${}^4\text{He}$ è costituito da bosoni e dato che la transizione λ avviene ad una temperatura prossima alla temperatura critica di un condensato di Bose, sembra ragionevole l'idea di poter spiegare il fenomeno della superfluidità attraverso le proprietà del condensato.

2.1 Condensato di Bose per particelle non interagenti

Le equazioni di stato di un gas di Bose costituito da N particelle di massa m contenute in un volume V sono [2]:

$$\begin{cases} \frac{P}{kT} = -\frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 - z \exp(-\beta p^2/2m)) - \frac{1}{v} \log(1 - z) \\ \frac{1}{v} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{z^{-1} \exp(\beta p^2/2m) - 1} + \frac{1}{v} \frac{z}{1-z} \end{cases} \quad (2.1)$$

dove: $v = V/N$ è il volume specifico e $z = \exp(\beta\mu)$ è la fugacità.

Le (2.1) possono essere riscritte in modo più compatto attraverso le funzioni:

$$g_m(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell^m}, \quad (2.2)$$

ottenendo [2]:

$$\begin{cases} \frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{1}{V} \log(1-z) \\ \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z) + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z} \end{cases} \quad (2.3)$$

dove: $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar/mkT}$ è la lunghezza d'onda termica.

I numeri di occupazione medi dei singoli livelli energetici ϵ_p , indicizzati dal momento p , sono dati da [2]:

$$\langle n_p \rangle = \frac{ze^{-\beta\epsilon_p}}{1 - ze^{-\beta\epsilon_p}}. \quad (2.4)$$

In particolare abbiamo:

$$\langle n_0 \rangle = \frac{z}{1-z}, \quad (2.5)$$

che ci consente di riscrivere la seconda relazione (2.3) come:

$$\lambda^3 \frac{\langle n_0 \rangle}{V} = \frac{\lambda^3}{v} - g_{3/2}(z). \quad (2.6)$$

L'ultima relazione mostra che, se: $\lambda^3/v > g_{3/2}(z)$, si ha una frazione finita delle particelle nel livello fondamentale (con $p = 0$). Questo fenomeno prende il nome di *condensazione di Bose-Einstein*.

La condizione:

$$\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(z), \quad (2.7)$$

definisce quindi una superficie di separazione dello spazio (PvT): per ogni volume specifico v fissato, è possibile individuare una temperatura critica T_c sotto la quale il gas di bosoni risiede nella regione del condensato:¹

$$kT_c = \frac{2\pi\hbar^2/m}{[vg_{3/2}(1)]^{2/3}}. \quad (2.8)$$

Andiamo ora a studiare il comportamento del condensato di Bose nel limite termodinamico. Si può dimostrare che [2]:

$$\frac{\langle n_0 \rangle}{N} = \begin{cases} 0, & \left(\frac{\lambda^3}{v} \leq g_{3/2}(1) \right) \\ 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}, & \left(\frac{\lambda^3}{v} > g_{3/2}(1) \right) \end{cases} \quad (2.9)$$

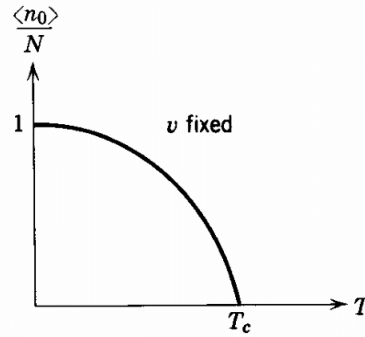


Figura 2.2: Andamento del numero di occupazione del livello fondamentale nell'intervallo $0 < T < T_c$ (tratta da [2]).

Abbiamo osservato che, quando $T < T_c$, una frazione finita del numero delle particelle occupa il livello fondamentale. D'altra parte, considerando la relazione (2.4) e ricordando che i livelli energetici sono proporzionali a $V^{-2/3}$, vediamo chiaramente che $\langle n_p \rangle / N$ è sempre zero per $p \neq 0$. Si verifica pertanto la seguente situazione (figura (2.2)): Per $T > T_c$ nessun livello è occupato da una frazione finita di bosoni e le particelle si distribuiscono in modo infinitesimo fra tutti i livelli energetici. Per $T < T_c$, una frazione finita $(1 - (T/T_c)^{3/2})$ occupa il livello con $p = 0$, mentre le altre continuano a essere distribuite fra gli altri livelli. Allo zero assoluto tutte le particelle risiedono nel livello fondamentale.

Vediamo adesso come cambia l'equazione di stato (2.3) nel limite termodinamico. Come mostrato in [2], il termine proporzionale a $1/V$ tende a zero e le equazioni assumono la forma:

$$\frac{P}{kT} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), & (T > T_c) \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & (T < T_c) \end{cases} \quad (2.10)$$

Le due diverse classi di funzioni che compaiono nella (2.10) mostrano la presenza di una transizione di fase del primo ordine in $T = T_c$. Le due fasi coinvolte prendono rispettivamente il nome di *fase gassosa* ($T > T_c$) e *fase condensata* ($T < T_c$) (figura (2.3)).

¹ $z = 1$ in questa regione.

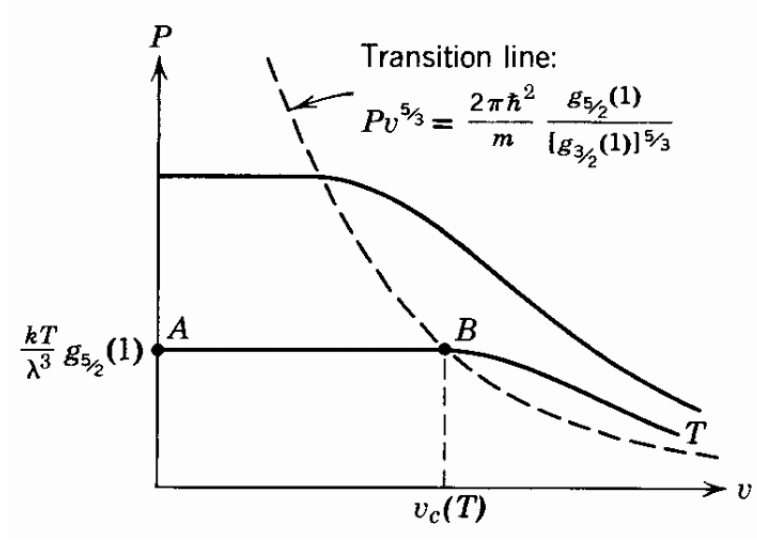


Figura 2.3: Isotherme di un gas ideale di Bose (tratta da [2]).

Questa irregolarità dell'equazione di stato si riflette su tutte le funzioni termodinamiche, che saranno quindi formulate in termini di espressioni analitiche differenti, a seconda che esse si riferiscano alla fase gassosa o a quella condensata. Riporteremo e discuteremo brevemente solo l'andamento dell'entropia e del calore specifico C_V .

$$\frac{C_V}{kT} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, & (T > T_c) \\ \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & (T < T_c) \end{cases} \quad (2.11)$$

Il calore specifico vicino allo zero assoluto tende a zero proporzionalmente a $T^{3/2}$ e presenta una cuspidè in $T = T_c$ (figura (2.4)). Queste proprietà rendono il modello del gas di bosoni non interagenti inadeguato per descrivere il comportamento di un superfluido: in prossimità del punto lambda si ha infatti una divergenza logaritmica del calore specifico C_V .

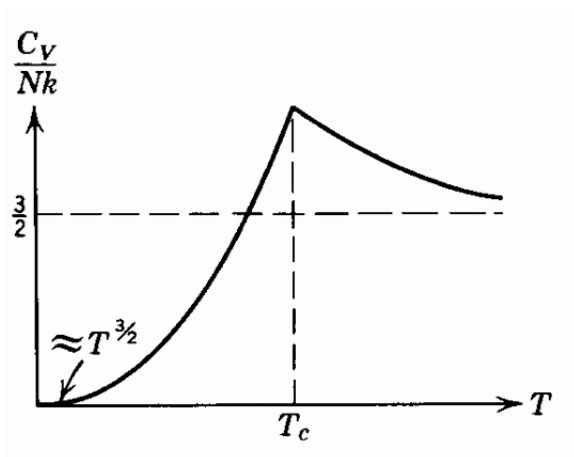


Figura 2.4: Calore specifico di un gas ideale di Bose (tratta da [2]).

Per l'entropia abbiamo invece:

$$\frac{S}{kT} = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \log z, & (T > T_c) \\ \frac{5}{2} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), & (T < T_c) \end{cases} \quad (2.12)$$

Conformemente a quanto postulato dal terzo principio della termodinamica si ha $S = 0$ per $T = 0$. Si può dimostrare inoltre [2] che per $0 < T < T_c$ l'entropia totale del sistema è interamente dovuta alla fase gassosa, mentre per la fase condensata continua a valere: $S = 0$.

Vedremo nel prossimo capitolo che quest'ultima proprietà si verifica anche nell'He II ed è responsabile di un effetto che prende il nome di *effetto meccanocalorico*.

In generale, il modello del condensato di Bose per particelle non interagenti riesce a prevedere e spiegare molti aspetti della superfluidità: ad esempio, sostituendo i valori di m e v caratteristici dell' ^4He liquido nell'equazione della temperatura critica, troviamo infatti un valore di 3.14 K , che risulta del medesimo ordine di grandezza rispetto alla temperatura della transizione λ .

Come abbiamo visto, vi sono però alcuni fenomeni che sono in disaccordo con la teoria (il più evidente è proprio la divergenza logaritmica del calore specifico). Queste lacune derivano dall'aver trattato l' ^4He **liquido** come un **gas** di bosoni non interagenti, ignorando del tutto le forze intermolecolari. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo quindi di introdurre un modello fisicamente più realistico, in grado di descrivere un gas di Bose debolmente interagente.

2.2 Teoria di Bogoliubov sul gas di Bose debolmente interagente

In questo paragrafo esporremo solo i risultati principali della teoria di Bogoliubov, seguendo principalmente la trattazione di [2] e [6]. In particolare, rimandiamo a [6] per tutti i dettagli ed eventuali approfondimenti.

2.2.1 Correzione ai livelli energetici

Consideriamo un sistema diluito composto da N bosoni identici, senza spin e di massa m , contenuto in un volume V a una temperatura molto bassa. Supponiamo che ogni bosone possa interagire con ogni altro solo mediante collisioni binarie caratterizzate da una lunghezza di dispersione a .

I livelli energetici al primo ordine in a possono essere calcolati mediante uno sviluppo perturbativo sugli stati imperturbati di particella libera.

Sia Φ_n la funzione d'onda dello stato imperturbato, indicizzata dai numeri di occupazione $\{\dots, n_{\mathbf{p}}, \dots\}$, dove $n_{\mathbf{p}}$ rappresenta il numero di bosoni con momento \mathbf{p} . I livelli energetici al primo ordine dello sviluppo perturbativo in a sono dati da [2]:

$$E_n = \langle \Phi_n | \mathcal{H} | \Phi_n \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}} + \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \langle \Phi_n | \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) | \Phi_n \rangle. \quad (2.13)$$

Sotto le condizioni:

$$\frac{a}{v^{1/3}} \ll 1, \quad (2.14)$$

$$ka \ll 1, \quad (2.15)$$

il secondo termine della (2.13) può essere sviluppato al primo ordine, ottenendo [2]:

$$E_n = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} n_{\mathbf{p}} + \frac{4\pi a \hbar^2}{mV} \left(N^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^2 \right), \quad (2.16)$$

dove k è il numero d'onda relativo di ogni coppia di particelle. Per questo motivo la (2.15) cessa di essere valida se sono presenti particelle eccitate con un momento elevato. Per studiare il livello fondamentale, poniamo nella relazione (2.16) $n_{\mathbf{p}} = 0$, per $\mathbf{p} \neq 0$ e $n_0 = N$:²

$$\frac{E_0}{N} = \frac{2\pi a \hbar^2}{mv} = \left(\frac{\hbar}{m} \right)^2 2\pi a \rho. \quad (2.17)$$

²In un gas freddo e diluito i numeri di occupazione degli stati eccitati sono molto piccoli.

La relazione (2.17) ci permette già di mostrare alcune differenze fra il gas di Bose ideale e quello debolmente interagente:

Nel primo caso la pressione del gas tende a zero allo zero assoluto, mentre dalla (2.17) abbiamo:

$$P = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{mv^2}, \quad (2.18)$$

che non si annulla per $T = 0$. Inoltre, mentre la compressibilità di un gas ideale di Bose non è limitata, quella di un gas debolmente interagente rimane finita:

$$\frac{\partial(1/v)}{\partial P} = \frac{mv}{4\pi\hbar^2 a}. \quad (2.19)$$

Prendendo in considerazione sempre la compressibilità, possiamo ricavare una proprietà del sistema molto importante. La condizione di stabilità termodinamica di un sistema impone che la compressibilità sia positiva e dall'ultima relazione vediamo che ciò è possibile solo se $a > 0$. Questo significa che un gas freddo e diluito di bosoni condensati può esistere in uno stato stabile solo in presenza di un'interazione repulsiva.

Mostriamo infine che il potenziale chimico μ rimane positivo anche a $T = 0$:

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{mv}. \quad (2.20)$$

2.2.2 Cenni allo spettro delle eccitazioni di Bogoliubov

Sviluppando il secondo termine della (2.13) ad un ordine superiore e diagonalizzando l'hamiltoniana (come mostrato in [6]), Bogoliubov trovò la famosa relazione di dispersione:

$$\epsilon(p) = \left[\frac{g}{vm} p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

con $g = (4\pi a\hbar^2)/m$.

Grazie a questa relazione è possibile esprimere l'energia dello stato fondamentale e dei primi livelli eccitati del gas reale di Bose.

Per $p \ll \sqrt{(mg/v)}$ la (2.21) diventa:

$$\epsilon(p) \simeq \sqrt{\frac{g}{mv}} p \quad (2.22)$$

Dalla (2.19) e dalla definizione di velocità del suono:

$$c = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial(1/v)}} \quad (2.23)$$

otteniamo:

$$\epsilon(p) \simeq cp \quad (p \ll mc) \quad (2.24)$$

che mostra come le eccitazioni per piccoli momenti avvengano sotto forma di fononi.

2.2.3 Equazione di stato

In questa approssimazione più fine l'equazione di stato assume la forma [2]:

$$P = \begin{cases} P^{(0)} + \frac{g}{v^2}, & (v > v_c, T > T_c) \\ P^{(0)} + \frac{g}{2} \left(\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_c^2} \right) & (v < v_c, T < T_c) \end{cases} \quad (2.25)$$

dove $P^{(0)}$ rappresenta la pressione nel modello a gas di Bose ideale e T_c , v_c sono rispettivamente la temperatura e il volume critico. L'isoterma in figura (2.5) mostra come la condensazione di Bose-Einstein sia in questo caso una transizione di fase del secondo ordine.

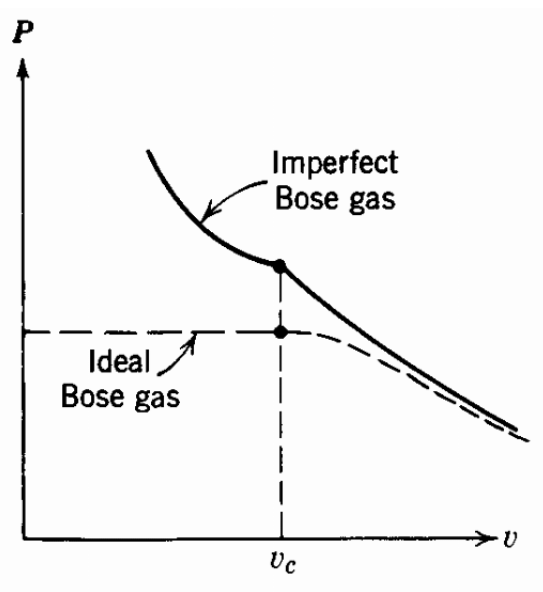


Figura 2.5: Isoterma in un gas di Bose con deboli interazioni repulsive (tratta da [2]).

Il modello del gas di Bose debolmente interagente è quello che meglio riesce a inquadrare le caratteristiche dell' ^4He superfluido come condensato di Bose-Einstein. Tuttavia

questa teoria si presenta inadeguata per descrivere le eccitazioni fondamentali per grandi valori di k , non riuscendo a prevedere i rotoni.

2.3 Introduzione al concetto di parametro d'ordine

La teoria della superfluidità è stata formulata a partire da una teoria più generale sulle transizioni di fase del secondo ordine, che Landau sviluppò nel 1930. Landau notò che, tipicamente, le transizioni di fase del secondo ordine coinvolgevano delle variazioni/rotture della simmetria del sistema e per questo motivo introdusse un *parametro d'ordine* in grado di caratterizzare lo stato del sistema.

Il parametro d'ordine assume un valore nullo quando il sistema si trova in uno stato disordinato e diventa diverso da zero dopo che il sistema compie la transizione di fase. Ad esempio, per il gas ideale di Bose, il parametro d'ordine è rappresentato dalla frazione di particelle dello stato fondamentale: $\langle n_0 \rangle / N$, che è nulla per $T > T_c$ e non nulla nella regione del condensato (relazione (2.9)).

Nel caso della superfluidità si postula l'esistenza di un parametro d'ordine ψ che caratterizza lo stato del sistema [3]:

$$\psi = \begin{cases} 0 & (T > T_c) \\ \psi(T) & (T < T_c) \end{cases} \quad (2.26)$$

Landau ipotizzò che ψ dovesse essere una sorta di funzione d'onda macroscopica e dovesse essere pertanto rappresentata da un numero complesso dipendente dalla posizione:

$$\psi(\mathbf{x}) = \langle \Psi(\mathbf{x}) \rangle = r(\mathbf{x})e^{i\phi(\mathbf{x})}, \quad (2.27)$$

dove $\langle \rangle$ denota la media sull'ensemble e $\Psi(\mathbf{x})$ è l'operatore di campo bosonico quantizzato [2].

Se $r(\mathbf{x})$ è positivo il sistema è nello stato condensato (vi è un ordine nello spazio dei momenti) e il quadrato di questo numero è legato alla densità del superfluido. La fase $\phi(\mathbf{x})$ rappresenta invece (lo vedremo nel prossimo capitolo) il potenziale delle velocità per la corrente superfluida.

Capitolo 3

Caratteristiche principali dell'He II

All'inizio del capitolo 2 abbiamo visto a livello qualitativo per quale motivo l' ^4He non solidifica (a pressione atmosferica) nemmeno alle più basse temperature e abbiamo accennato alla transizione di fase λ che porta l' ^4He in uno stato denominato He II. Nella prima parte di questo capitolo riprenderemo brevemente le proprietà che caratterizzano l' ^4He liquido e lo studio di questa transizione di fase.

Focalizzandoci poi sulla descrizione dell'He II, cercheremo di inquadrare le principali caratteristiche della superfluidità nel fenomeno della condensazione di Bose per un gas debolmente interagente, introdotto nel capitolo precedente.

Nell'ultima parte del capitolo presenteremo i principali aspetti dei modelli di Ginzburg-Pitaevskii e Landau per la descrizione della superfluidità.

3.1 La transizione λ

La transizione di fase λ , mostrata in figura (2.1), avviene ad una temperatura $T_\lambda = 2.18\text{ K}$ e a un volume specifico $v_\lambda = 46.2\text{ \AA}^3/\text{atomo}$ ed è (in buona approssimazione) una transizione di fase del secondo ordine.

Il calore specifico lungo la curva di vapore diverge logicamente avvicinandosi al punto λ da entrambe le parti (figura(3.1)) e la transizione separa l'elio liquido in due fasi chiamate: He I ed He II.

Mentre l'He I si comporta come un fluido ordinario l'He II ha proprietà molto particolari che lo classificano come *superfluido*.

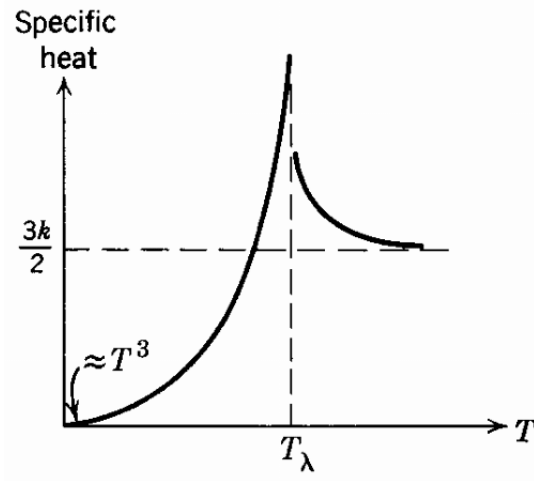


Figura 3.1: Calore specifico dell' ${}^4\text{He}$ liquido lungo la curva di vapore (tratta da [2]).

3.2 Il modello a due fluidi di Tisza

L'He II è formato da due componenti: una definita di *fluido normale* e una *superfluida* (al contrario dell'He I che è interamente un fluido normale). Ciascuna componente possiede una propria densità caratteristica e, nel caso in cui il fluido sia in moto, una propria velocità di propagazione.

La densità totale e il campo delle velocità dell'He II sono dati dalle relazioni [1]:

$$\begin{cases} \rho = \rho_n + \rho_s \\ \rho \mathbf{v} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \end{cases} \quad (3.1)$$

dove i pedici n ed s stanno rispettivamente per *normale* e *superfluido*.

Le due densità sono funzioni della pressione e della temperatura e il loro andamento in funzione di quest'ultima è mostrato in figura (3.2).

Mentre il fluido normale si comporta come un fluido classico, la componente superfluida presenta proprietà peculiari:

- La sua entropia è nulla.
- Non risente della forza originata dalla viscosità dinamica quando fluisce in condotti estremamente sottili ($r \approx 10^{-2} \text{cm}$)

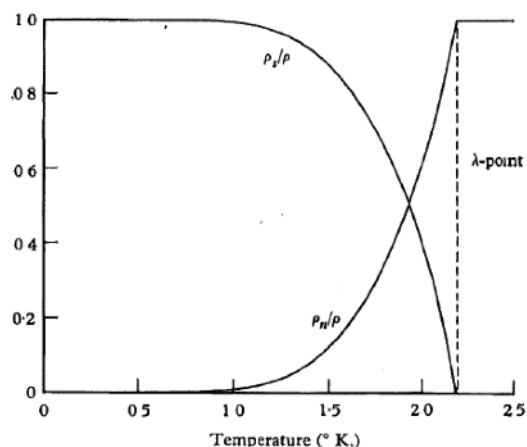


Figura 3.2: Andamento delle densità relative per la componente normale e superfluida in funzione della temperatura.

Per questo motivo possiamo assumere che il moto della componente normale sia governato dall'equazione di Navier-Stokes, mentre la componente superfluida dall'equazione di Eulero. In realtà le equazioni di governo devono tener conto anche di un termine termomeccanico $\rho_s S \nabla T$, ma la loro forma è comunque molto simile alle equazioni di fluidodinamica citate [1]:

$$\rho_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\rho_s}{\rho} \nabla p + \rho_s S \nabla T + \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 - \mathbf{F}_{ns} \quad (3.2)$$

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = \frac{\rho_n}{\rho} \nabla p - \rho_s S \nabla T - \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho} \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \mathbf{F}_{ns} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_n \quad (3.3)$$

Il termine \mathbf{F}_{ns} rappresenta l'attrito reciproco e sarà brevemente discusso nei paragrafi seguenti.

La soluzione delle equazioni del moto per piccole perturbazioni ai valori di ρ_s e ρ_n , S e T descrive un'onda sonora che si propaga nel fluido attraverso fluttuazioni di densità (primo suono) e di temperatura (secondo suono). Questi effetti e l'effetto meccanocalorico sono descritti in [2].

3.3 Cenni alla teoria di Landau

Landau, partendo dal modello a due fluidi, formulò una teoria in grado di spiegare le eccitazioni elementari nell'He II. L'idea alla base di questa teoria consiste nel poter

descrivere lo stato del liquido in prossimità dello zero assoluto (ovvero quando l'He II è quasi totalmente superfluido), mediante un'opportuna funzione d'onda macroscopica del condensato di Bose. Le proprietà di questa funzione d'onda saranno discusse nel paragrafo (4.4).

3.3.1 Fononi e Rotoni

Riprendiamo brevemente il modello del gas di Bose debolmente interagente per capire i risultati sperimentali relativi alle eccitazioni elementari.

Sperimentalmente queste eccitazioni possono essere rilevate attraverso lo scattering di neutroni: se la temperatura è sufficientemente bassa, lo scattering procede essenzialmente nel creare eccitazioni la cui energia e momento eguagliano quelli trasferiti al fluido dal neutrone.

Possiamo distinguere due tipologie di eccitazioni [2] (figura(3.3)):

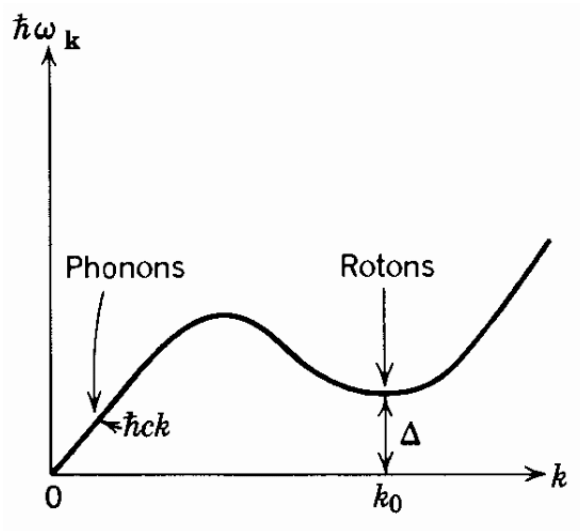


Figura 3.3: Eccitazioni elementari nell'He II (tratta da [2]).

Per $k \sim 0$ le eccitazioni avvengono sotto forma di fononi, ovvero fluttuazioni di densità, onde sonore quantizzate di energia $\epsilon = \hbar ck$, con c velocità del suono.

Per $k \sim k_0$ le eccitazioni sono invece rappresentate dai cosiddetti rotoni¹, ovvero quasi-particelle di massa finita σ , che richiedono un'energia minima Δ per essere create.

¹non previsti dalla teoria di Bogoliubov e introdotti da Landau.

Abbiamo quindi [2]:

$$\hbar\omega_k = \begin{cases} \hbar ck, & (k \ll k_0) \\ \Delta + \frac{\hbar^2(k-k_0)^2}{2\sigma}, & (k \sim k_0) \end{cases} \quad (3.4)$$

con: $c = (239 \pm 5) m/s$, $\Delta/k = (8.65 \pm 0.04) K$, $k_0 = (1.92 \pm 0.01) \text{\AA}^{-1}$, $\sigma/m = (0.16 \pm 0.01)$.

Supponiamo ora che non vi siano eccitazioni vicine al livello fondamentale, ad eccezione di quelle appena mostrate: gli stati immediatamente sopra al *ground-state* possono essere descritti come un gas di eccitazioni non interagenti, con energia [2]:

$$E_n = E_0 + \sum_k \hbar\omega_k n_k, \quad (3.5)$$

dove $\{n_k\}$ è il set di numeri di occupazione. Poiché le eccitazioni elementari possono essere trattate come bosoni, ogni n_k può assumere come valore qualsiasi numero intero positivo. Di norma vi sarebbero dei vincoli su questi numeri, ma per temperature prossime allo zero assoluto possiamo ignorarli, dato che il numero di eccitazioni sarà molto ridotto. Abbiamo quindi:

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\beta\omega_k} - 1}, \quad (3.6)$$

e possiamo scrivere la funzione energia interna U come [2]:

$$U = E_0 + \sum_k \hbar\omega_k \langle n_k \rangle = E_0 + \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2 \hbar\omega_k}{e^{\hbar\beta\omega_k} - 1}, \quad (3.7)$$

dove V è il volume occupato dal liquido.

Il calore specifico a volume costante è allora esprimibile dalla relazione:

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{1}{Nk} \frac{\partial U}{\partial T} \quad (3.8)$$

Sostituendo il contributo dei fononi e dei rotoni nell'integrale della (3.7), otteniamo due termini [2]:

$$\frac{C_{ph}}{Nk} = \frac{2\pi^2 v (kT)^3}{15\hbar^3 c^3} \quad (3.9)$$

$$\frac{C_{rot}}{Nk} \simeq \frac{2\sqrt{\sigma} k_0^2 \Delta^2 v \exp(-\Delta/kT)}{(2\pi)^{3/2} \hbar (kT)^{3/2}} \quad (kT/\Delta) \ll 1 \quad (3.10)$$

che sommati forniscono il calore specifico totale C_V . L'andamento di C_V è in accordo con quello atteso sperimentalmente e mostrato in figura (3.1).

Secondo il modello di Landau, quindi, la componente superfluida del liquido è da interpretare come un fluido di *background*, irrotazionale e inviscido. Le eccitazioni termiche del superfluido, costituite dai fononi e dai rotoni si muovono su questo *background* e vanno a costituire la componente normale del fluido. Queste eccitazioni elementari rappresentano tutta l'energia termica posseduta dall'He II. La componente normale e superfluida non interagiscono in nessun altro modo e la forza \mathbf{F}_{ns} introdotta precedentemente è legata al trasferimento di queste eccitazioni elementari attraverso filamenti vorticosi.

3.3.2 Velocità limite

La descrizione delle eccitazioni elementari consente anche di spiegare il fenomeno di scorrimento senza attrito citato nella sezione precedente. Landau risolve questo problema andando a studiare come le trasformazioni di Galileo modificassero la funzione d'onda dell'He II e dimostrò che il fenomeno di scorrimento senza attrito poteva verificarsi soltanto se la velocità del fluido rimaneva inferiore alla velocità di propagazione delle onde sonore.

A livello intuitivo possiamo pensare al moto di scorrimento del fluido in un condotto come un fenomeno del tutto analogo al moto di un oggetto all'interno di un fluido a riposo. Immaginiamo allora un corpo che si muove con velocità \mathbf{v}_c in una porzione di He II a riposo: gli urti con gli elementi del fluido comportano un trasferimento di energia e momento dal corpo al liquido. Poiché le uniche eccitazioni che coinvolgono il liquido avvengono sotto forma di fononi, possono essere impartiti energia e momento al liquido solo attraverso la creazione di nuovi fononi o la diffusione di fononi già esistenti [2].

Siano rispettivamente ΔE e $\Delta \mathbf{P}$ queste due quantità, allora:

$$\begin{cases} \Delta E = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} c|\mathbf{k}|n_{\mathbf{k}} \\ \Delta \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \mathbf{k}n_{\mathbf{k}} \end{cases} \quad (3.11)$$

Accoppiando le relazioni (3.11) e sfruttando la disuguaglianza triangolare, abbiamo:

$$c|\Delta \mathbf{P}| \leq \Delta E. \quad (3.12)$$

D'altra parte, se l'oggetto esterno perde lo stesso ammontare di energia ΔE , avremo:

$$\Delta E = \mathbf{v}_c \cdot \Delta \mathbf{P}. \quad (3.13)$$

Le ultime due relazioni implicano: $|\mathbf{v}_c| \leq c$.

Queste considerazioni sono valide per temperature prossime allo zero assoluto, in cui il numero di fononi esistenti è di fatto nullo e l'effetto di diffusione di queste particelle risulta trascurabile. Per temperature più elevate ($T > 1 K$) quest'ultimo fenomeno diventa rilevante [2] e la velocità limite risulta inferiore a quella del suono.

3.3.3 Potenziale delle velocità nel superfluido

Riprendiamo il parametro d'ordine $\psi(\mathbf{x})$ e mostriamo il legame fra la fase $\phi(\mathbf{x})$ e la velocità \mathbf{v}_s del superfluido.

Consideriamo un sistema di riferimento in quiete rispetto al fluido, ovvero una trasformazione di Galileo di velocità $-\mathbf{v}_s$. Questa trasformazione è rappresentata dall'operatore unitario:

$$G = \exp\left(-im \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.14)$$

Applicando l'operatore al campo d'onda otteniamo [2]:

$$G^\dagger \Psi(\mathbf{x}) G = \exp\left(im \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{x}}{\hbar}\right) \Psi(\mathbf{x}). \quad (3.15)$$

Mediando sull'ensemble e ricordando che: $\langle \Psi(\mathbf{x}) \rangle = r(\mathbf{x}) e^{i\phi(\mathbf{x})}$ abbiamo:

$$\phi(\mathbf{x}') = \phi(\mathbf{x}) + \frac{m}{\hbar} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{x} \quad (3.16)$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi. \quad (3.17)$$

Accoppiando questa relazione con l'equazione di continuità si può dimostrare [1] quanto anticipato nel capitolo precedente, ovvero:

$$\rho_s = m |\psi|^2. \quad (3.18)$$

La relazione (3.18) è in accordo con ciò che ci si aspetterebbe da un parametro d'ordine: il valore di ρ_s è infatti non nullo solamente al di sotto della temperatura del punto λ , dove l'elio si comporta come un superfluido².

²Osserviamo che $\psi(\mathbf{x})$ è normalizzata a N .

3.4 Cenni al modello di Ginzburg-Pitaevskii

Nel 1958 Ginzburg e Pitaevskii applicarono il modello di Ginzburg-Landau sulla superconduttività allo studio della superfluidità dell' ^4He . Sfortunatamente la transizione λ è una transizione del secondo ordine soltanto nell'approssimazione introdotta nella sezione (2.2.2) e per questo motivo, la teoria di G-P non risulta applicabile rigorosamente per tutte le temperature nell'intervallo: $0 < T < T_\lambda$.³

L'idea alla base di questa teoria [3] è quella di poter espandere per basse temperature l'energia libera F_s di un sistema costituito da un superfluido e di poter esprimere questo potenziale termodinamico in funzione del parametro d'ordine $\psi(\mathbf{x})$. Minimizzando F_s al variare di $\psi(\mathbf{x})$, si ottiene un'equazione alla Schroedinger per il parametro d'ordine.

Come mostrato in [3], F_s assume la forma:

$$F_s(T) = F_n(T) + \int d^3x \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{x})|^2 + \alpha(T)|\psi(\mathbf{x})|^2 + \frac{\beta(T)}{2} |\psi(\mathbf{x})|^4 \right), \quad (3.19)$$

dove: $F_n(T)$ è l'energia libera della componente normale dell'He II, mentre, se consideriamo il modello Bogoliubov: $\alpha = (V(\mathbf{x}) - \mu)$ (con $V(\mathbf{x})$ potenziale esterno) e $\beta = g$. Minimizzando F_s , otteniamo [3]:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) + g|\psi(\mathbf{x})|^2 \right) \psi(\mathbf{x}) = \mu\psi(\mathbf{x}). \quad (3.20)$$

che prende il nome di **Equazione di Gross-Pitaevskii**.

Una soluzione esatta [7] a questa equazione, nel caso unidimensionale, è la funzione d'onda di *solitone*:

$$\psi(x) = \psi_\infty \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi} \right) \quad (3.21)$$

dove: $\psi_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x)$ e $\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}$ prende il nome di *healing lenght*.

3.4.1 Soluzione vorticososa

Per ricavare la soluzione vorticososa ci restringiamo al caso di potenziale esterno di confinamento nullo. L'equazione (3.20) assume la forma:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + g|\psi(\mathbf{x})|^2 \right) \psi(\mathbf{x}) = \mu\psi(\mathbf{x}) \quad (3.22)$$

³Si tenga presente che attualmente non esiste una teoria in grado di spiegare tutti i fenomeni della superfluidità in quel range di temperature.

Sfruttando la simmetria del problema e passando alle coordinate cilindriche (ϱ, θ, z) , si possono cercare soluzioni del tipo [7]:

$$\tilde{\psi}(\varrho/\xi) = \frac{\psi(\varrho/\xi)}{\sqrt{\rho_s/m}} \quad (\xi = \hbar/\sqrt{2m\mu}) \quad (3.23)$$

Sviluppando il laplaciano otteniamo:

$$\tilde{\psi}''(\varrho/\xi) + \frac{\tilde{\psi}'(\varrho/\xi)}{(\varrho/\xi)} - \frac{\tilde{\psi}(\varrho/\xi)}{(\varrho/\xi)^2} + \tilde{\psi}(\varrho/\xi) - [\tilde{\psi}(\varrho/\xi)]^3 = 0 \quad (3.24)$$

Questa equazione può essere risolta solo numericamente con le condizioni al contorno: $\tilde{\psi}(0) = 0$ (per evitare la divergenza dell'energia e raccordare con $\tilde{\psi} = 0$ nel vuoto) e $\tilde{\psi}(\infty) = 1$ (per la condizione di normalizzazione sul modulo del parametro d'ordine). L'andamento di $\tilde{\psi}$ è mostrato in figura (3.4).

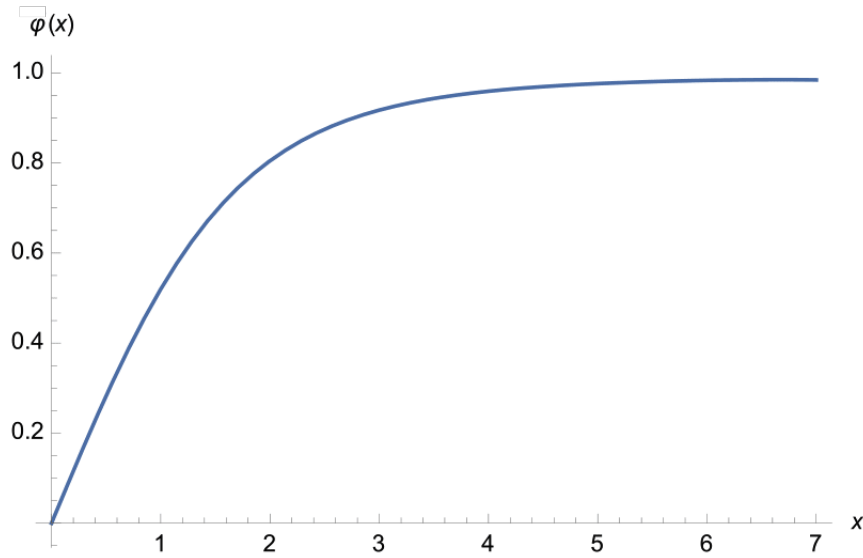


Figura 3.4: Andamento della soluzione vorticoso alla GPE (tratta da [7]).

Nel 1966 Kawatra e Pathria mostrarono il carattere di soluzione vorticoso di questo problema stimando l'energia totale del sistema e ottenendo [1]:

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) + 0.378 \right] \quad (3.25)$$

dove $\kappa = h/m$ e b è una lunghezza caratteristica del sistema.

Alcune considerazioni:

Innanzitutto la condizione di annullamento della $\tilde{\psi}$ nell'origine comporta l'assenza di superfluido in tale regione ($\rho_s = 0$): il nucleo del vortice è vuoto o costituito dalla componente normale e la velocità diverge come $1/r$. Queste sono le caratteristiche tipiche di un vortice irrotazionale (descritto nella sezione (1.6)).

Inoltre, da confronto diretto fra la relazione (1.61) e la (3.25), è evidente come la soluzione vorticoso della GPE descriva essenzialmente un *hollow vortex* con le dimensioni del nucleo paragonabili alla *healing length*. Il valore di questa grandezza dipende dall'interazione fra le particelle ed è generalmente di poche decine di Armstrong. Per questo motivo i vortici nell'He II sono di fatto rappresentati da filamenti vorticosi.

Capitolo 4

Vortici quantizzati nell'He II

Nella prima parte di questo capitolo mostreremo brevemente come è nata e come si è evoluta nella seconda metà del 1900 l'ipotesi sulla circolazione quantizzata nel moto dell'He II. Descriveremo poi i primi esperimenti legati a questo fenomeno, confrontando i risultati ottenuti con quelli previsti dalla teoria.

Nella seconda parte del capitolo riprenderemo brevemente la teoria di Landau, mostrando da dove emerge la quantizzazione della circolazione.

Concluderemo infine il capitolo accennando al fenomeno della disposizione a simmetria triangolare dei vortici quantizzati in un contenitore cilindrico rotante.

L'esposizione degli argomenti di questo capitolo segue esclusivamente la trattazione di *R.J.Donnelly -1991 - Quantized Vortices in Helium II*

4.1 Prime idee sui vortici con circolazione quantizzata

L'ipotesi sulla circolazione quantizzata nell'He superfluido fu proposta per la prima volta da Lars Onsager all'inizio del 1946. Alla conferenza di Meccanica Statistica tenutasi a Firenze nel 1949 egli dichiarò:

“Così, il ben noto invariante chiamato *circolazione idrodinamica* è quantizzato e la circolazione elementare vale:

$$\kappa = \frac{h}{m}, \quad (4.1)$$

[...]. Inoltre, in presenza di una simmetria cilindrica, il momento angolare per particella vale \hbar ” (L. Onsager 1949).

Pochi anni dopo (1954) London pubblicò nel suo libro sulla superfluidità un articolo scritto ma non pubblicato da Onsager, sul comportamento di una serie di anelli concentrici di

raggi r_1, r_2, \dots, r_n , formati da He II incomprimibile e irrotazionale. In queste condizioni il campo delle velocità può essere espresso come gradiente di un certo potenziale φ . London mostrò che l'incremento di φ su un percorso chiuso doveva essere un multiplo intero di κ .

Nel caso di simmetria cilindrica questo potenziale assume l'espressione:

$$\varphi = \frac{k\hbar\theta}{m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

da cui segue immediatamente:

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{k\hbar}{mr}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Consideriamo quindi un contenitore cilindrico di raggio R , riempito con He liquido a 0 K e in moto rotatorio con velocità angolare Ω costante. Immaginiamo che il liquido possa essere separato in una serie di regioni cilindriche concentriche di raggi r_1, r_2, \dots, r_n . Assumiamo che all'interno di ogni regione ($r_k < r < r_{k+1}$) la velocità v_k sia irrotazionale, ma ammettiamo possibili discontinuità nel campo delle velocità sulla superficie di separazione fra le varie regioni. Nella regione centrale semplicemente connessa ($r < r_1$) la velocità v_0 deve annullarsi.

London studiò il comportamento dell'He liquido in questo esperimento al variare della velocità Ω . Le conclusioni a cui giunse sono riportate di seguito:

Per una velocità angolare inferiore a un certo valore critico $\Omega_c = \hbar/2mR$, tutto il fluido è in quiete rispetto alla regione centrale.¹

Per $\Omega > \Omega_c$ il liquido nel contenitore si separa in una successione di regioni cilindriche, ciascuna delle quali è caratterizzata da un differente valore della velocità v_k , che converge a ΩR . In questo caso il sistema si comporta approssimativamente come un fluido classico viscoso in rotazione (si confronti questo fenomeno con quello descritto nel paragrafo 3.3.2).

4.2 Vortici di Feynman

Nel 1955 Feynman stava lavorando al medesimo problema e giunse a conclusioni piuttosto differenti. Egli riteneva che i vortici in un superfluido potessero assumere la forma di un filamento vorticoso col nucleo delle dimensioni dell'atomo. Secondo questa immagine

¹Questa condizione non si verifica istantaneamente, ma richiede un periodo di tempo relativamente lungo: $T = 8\pi^2 mR^2/\hbar \sim 1 \text{ giorno}$ ($R = 1 \text{ cm}$).

la molteplice connessione di un vortice emerge dalle considerazioni riportate nella sezione (3.4): “La corrente superfluida circola in maniera quantizzata attorno al nucleo, che è costituito dalla componente normale del fluido o dal vuoto” (Feynman).

Feynman valutò proprio le dimensioni del nucleo, supponendo che questo fosse vuoto e generato dalla tensione superficiale del fluido, ottenendo: $a \approx 0.5\text{\AA}$ (in accordo con le dimensioni della *healing length* prevista dal modello di GP).

Abbiamo inoltre (sempre da parte di Feynman) una formula sull’energia per unità di lunghezza associata a questi vortici e una stima sul bilancio fra forza centrifuga e gradiente di pressione agenti su ogni anello vorticoso:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \int_a^b \rho_s v_s^2 d^2r = \left(\frac{\rho_s \kappa}{4\pi^2} \right) \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho \kappa^2}{4\pi r^3} \quad (4.5)$$

(con b dimensione del recipiente o distanza relativa fra due vortici). Le formule coincidono con quelle trovate classicamente nella sostituzione $\Gamma \rightarrow \kappa$ e riportate nella sezione (1.6). Per $b/a \sim 10^7$ si ottiene un’energia enorme: $\epsilon \approx 10^{-7} \text{erg/cm}$.

Riportiamo infine la cosiddetta *Regola di Feynman* per calcolare la densità di linee vorticose quantizzate:

$$n_0 = \frac{|\nabla \times \mathbf{v}_s|}{\kappa} = \frac{2\Omega}{\kappa} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ linee/cm}^2 \quad (4.6)$$

4.3 Prima evidenza sperimentale

Il primo esperimento progettato per evidenziare la circolazione quantizzata fu effettuato da Vinen nel 1961.

Consideriamo una corona circolare di raggi R_1, R_2 con $R_1 \ll R_2$, riempita di He II a $T \sim 0\text{ K}$, in moto con una certa velocità angolare Ω . Trattando il superfluido come un sistema termodinamico, Vinen si chiese quale fosse il valore di Ω che minimizzasse l’energia libera e portasse quindi il sistema in uno stato stabile.

Egli osservò che aumentando progressivamente la velocità angolare, la circolazione totale del fluido Γ aumentava in modo quantizzato secondo multipli interi di κ e nessun vortice compariva nella corona fino al raggiungimento di un certo certo valore critico Ω_c . A questo valore critico, i vortici allineati parallelamente all’asse di rotazione iniziavano a emergere dalla corona e, aumentando ulteriormente Ω , il numero di vortici e la circolazione totale aumentavano.

Questo esperimento è di fondamentale importanza perché mostra che, nel caso di una

regione molteplicemente connessa (la corona circolare), sono ammessi sia il fenomeno della circolazione quantizzata, che il fenomeno dei vortici quantizzati.

Infine Vinen, notando alcuni minimi locali nell'energia libera del sistema in corrispondenza di certi valori della velocità angolare Ω , associò la creazione di un vortice nel superfluido ad uno stato eccitato² stabile.

Come mostrato in [1] il valore atteso di Ω_c è dato da:

$$\Omega_c = \frac{\kappa}{2\pi R^2} \ln \left(\frac{R}{a} \right) \quad (4.7)$$

(Per tutti i dettagli sugli apparati sperimentali rimandiamo a [1].)

4.4 Derivazione della legge di quantizzazione della circolazione

Riprendiamo la relazione (3.17) e vediamo in dettaglio il suo significato fisico. Secondo questa relazione, il campo delle velocità di un superfluido è esprimibile come il gradiente di una certa funzione ϕ . Poiché il rotore della velocità definisce la vorticità e il rotore di un gradiente è identicamente nullo su ogni dominio semplicemente connesso, potremmo concludere che un superfluido non sia in grado di creare vortici e sia quindi un fluido irrotazionale. Questa conclusione risulta tuttavia inesatta (abbiamo visto numerose evidenze sperimentali a riguardo).

Per capirne il motivo, consideriamo il parametro d'ordine del superfluido: $\langle \Psi(\mathbf{x}) \rangle$. Questo numero complesso deve essere una funzione continua delle coordinate \mathbf{x} , di conseguenza la sua fase $\phi(\mathbf{x})$ deve variare di un multiplo intero di 2π quando percorriamo una curva chiusa all'interno del superfluido [2]. Abbiamo pertanto:

$$\oint_{\gamma} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

e quindi:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_t d\ell = 2k\pi \frac{\hbar}{m} = k \frac{h}{m} = k \kappa \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.9)$$

che è proprio la relazione ricavata da Onsager.

Chiaramente se la curva γ è omotopa³ a un punto, $k = 0$, l'integrale precedente si annulla e il fluido risulta irrotazionale. Il caso $k \neq 0$ emerge quindi solamente in presenza

²Il valore di F risultava comunque superiore rispetto a quello calcolato per il fluido a riposo.

³deformabile con continuità

di un dominio molteplicemente connesso e in tal caso il superfluido può creare vortici quantizzati.

Questa situazione si verifica ad esempio se il superfluido scorre fra due superfici cilindriche, dentro un toro o, come nell'esperienza di Vinen, all'interno di una corona circolare. Un fenomeno più interessante si ha quando il dominio del superfluido è delimitato non da una parete solida, ma dalla componente normale dell'He II. È questo il caso dei vortici di Feynman e degli anelli vorticosi di ioni negativi, descritti in [1].

4.5 Disposizione di vortici in un contenitore cilindrico rotante

Come ultimo argomento ci occuperemo del fenomeno dei cosiddetti *vortex arrays* in un contenitore cilindrico rotante.

Se la velocità di rotazione esterna Ω_e è sufficientemente elevata, come mostrato nell'esperienza di Vinen e Hall (1960) [1], inizia ad emergere nel contenitore un numero di vortici che cresce con la velocità angolare.

In queste condizioni l'energia totale del fluido per unità di lunghezza è data da:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{2} \int \rho_s v_s^2 d^2r = \frac{1}{2} \int \rho_s (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 d^2r = \\ &= \frac{1}{2} \int \rho_s v^2 d^2r + \frac{1}{2} \int \rho_s u^2 d^2r + \int \rho_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} d^2r.\end{aligned}\quad (4.10)$$

dove la velocità del superfluido è stata scomposta (per ogni vortice) come somma della velocità del centro del vortice rispetto al centro di rotazione più la velocità dell'elemento di superfluido rispetto al centro del vortice.

La prima di queste due velocità è data da:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{r} \quad (4.11)$$

Pertanto, possiamo scrivere:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mathcal{I} \Omega_e^2 + \boldsymbol{\Omega}_e \cdot \int \rho_s (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d^2r + \frac{1}{2} \int \rho_s v^2 d^2r \quad (4.12)$$

dove \mathcal{I} è il momento d'inerzia per unità di lunghezza del fluido.

Gli ultimi due integrali possono essere identificati col momento angolare e l'energia associati ai vortici [1]:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \mathcal{I} \Omega_e^2 + \boldsymbol{\Omega}_e \cdot \int n_v \mathbf{l}_v d^2r + \int n_v \epsilon_v d^2r \quad (4.13)$$

dove n_v è dato dalla regola di Feynman (4.6) e l'energia per unità di lunghezza di un vortice è espressa dalla (4.4).

A questo punto, il momento angolare totale del fluido per unità di lunghezza è dato da:

$$\mathbf{l} = \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_e + \int n_v \mathbf{l}_v d^2r \quad (4.14)$$

e l'energia libera per unità di lunghezza f_s assume la forma [1]:

$$f_s = \epsilon - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}_e \cdot \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_e - \boldsymbol{\Omega} \right) + \int d^2r n_v [\epsilon_v + \mathbf{l}_v \cdot (\boldsymbol{\Omega}_e - \boldsymbol{\Omega})] \quad (4.15)$$

Dato che il cilindro è mediamente molto grande, il secondo termine è trascurabile e all'equilibrio (minimizzando f_s) si ottiene:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_e. \quad (4.16)$$

Questa relazione mostra come all'equilibrio (e per alte velocità angolari) il superfluido segua il moto rotatorio del contenitore (in accordo con gli esperimenti di London).

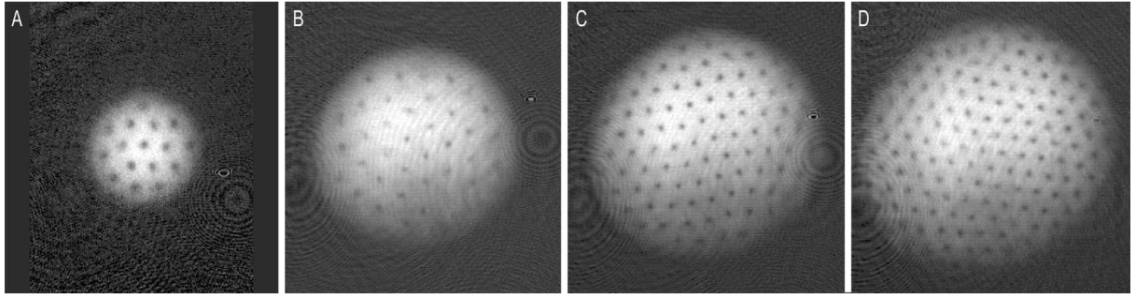


Figura 4.1: Osservazione di reticoli vorticosi contenenti approssimativamente (A) 16, (B) 32, (C) 80, (D) 130 vortici. I vortici appaiono cristallizzati in una configurazione a simmetria triangolare [8].

La disposizione dei vortici all'interno del contenitore venne studiata in dettaglio da Tkachenko (1966), il quale mostrò [1] che: nei limiti di grande velocità rotazionale, i centri dei vortici assumevano vicino all'asse di rotazione una configurazione a simmetria triangolare e, in base alle considerazioni appena fatte, preservavano questa configurazione muovendosi rigidamente col contenitore (figura(4.1)). Questo effetto deriva direttamente dal fenomeno della circolazione quantizzata: aumentando la velocità angolare di rotazione oltre al valore critico Ω_c , la circolazione totale del fluido cresce in modo quantizzato

4.5. DISPOSIZIONE DI VORTICI IN UN CONTENITORE CILINDRICO ROTANTE⁴⁷

mediante la continua comparsa di nuovi vortici. Tali vortici emergeranno quindi con *spin* concordi in direzione e verso e, come descritto in [1], questo produce una reciproca repulsione fra i vortici stessi. La configurazione ottimale dipende dal numero di vortici (Tkachenko), ma una caratteristica comune a tutte le configurazioni è la simmetria triangolare.

Conclusioni

Gli esperimenti descritti nel capitolo 4 sono ben compresi all'interno del quadro teorico introdotto nei capitoli precedenti. In particolare, l'emergere di un vortice quantizzato in una regione semplicemente connessa è dovuto alle eccitazioni elementari di tipo rotone introdotte da Landau.

Infatti, quando il contenitore cilindrico raggiunge una certa velocità angolare critica, il moto relativo fra la componente normale dell'He II (che si muove col contenitore) e la componente superfluida è caratterizzato da una velocità relativa talmente elevata da eccedere il valore limite. Questo consente alla componente superfluida di dissipare energia e questa dissipazione avviene attraverso la creazione di rotoni. A livello macroscopico l'interazione fra i due fluidi si manifesta attraverso l'emergere di filamenti vorticosi che sono responsabili delle forze frenanti \mathbf{F}_{ns} introdotte nel capitolo 3.

Questo modello spiega perché i vortici compaiono solamente al di sopra di una certa velocità angolare critica Ω_c e scompaiono se tale velocità viene riportata ad un valore inferiore a Ω_c . In questo caso i filamenti vorticosi sono assimilabili a vortici cavi, col nucleo delle dimensioni dell'atomo e costituito dalla componente normale del fluido. È quindi il fluido stesso a trasformare la regione in cui scorre il superfluido in una regione molteplicemente connessa.

Quando la velocità di rotazione continua ad aumentare al di sopra della velocità critica, l'effetto delle forze frenanti prevale e all'equilibrio i due fluidi si muovono rigidamente uno rispetto all'altro ed entrambi rispetto al contenitore, come osservato sia da London, che da Vinen.

Una volta introdotte le nozioni di base sui vortici quantizzati è possibile ampliare lo studio del fenomeno, andando ad esempio a studiare il comportamento degli anelli vorticosi composti da ioni negativi e l'interazione degli ioni stessi coi vortici [1].

In generale esiste una teoria sulla dinamica che governa l'interazione fra più vortici molto affascinante e complessa. Abbiamo accennato nell'ultima sezione alla repulsione fra vortici orientati parallelamente e alla configurazione a simmetria triangolare prodotta da tale repulsione. Uno studio più approfondito (sempre da parte di Tkachenko [1]) mostra

come la creazione di ogni vortice sia associata ad uno stato stabile (punto di minimo locale dell'energia libera) o metastabile (punto di sella dell'energia libera) del sistema. È quindi possibile inquadrare a grandi linee la stabilità di un sistema composto da He II in rapida rotazione, semplicemente osservando la configurazione dei vortici che si vengono progressivamente a creare.

Inoltre, partendo dalla dinamica dei vortici quantizzati, possono essere studiati fenomeni più complessi e di interesse più recente, quali la turbolenza superfluida o le onde vorticosi.

Infine, essendo il modello teorico alla base della superfluidità nell' ^4He di carattere assolutamente generale, è possibile usufruirne per interpretare un enorme varietà di fenomeni fisici.

Recentemente, attraverso lo sviluppo di tecniche di raffreddamento e confinamento degli atomi neutri in reticoli ottici per mezzo di trappole magnetiche, è stato possibile il raggiungimento di temperature dell'ordine del nK , che hanno mostrato il carattere superfluido di molte altre sostanze (prima fra tutte l'isotopo ^3He , che diventa un superfluido al di sotto del mK).

In ambito astronomico, il fenomeno della lenta diminuzione della velocità angolare di una stella a neutroni, è stato spiegato attraverso fenomeni di scattering fra protoni e neutroni nel nucleo di vortici quantizzati di neutroni superfluidi [1].

Appendice A

Gli argomenti trattati di seguito fanno riferimento al capitolo *Meccanica dei continui* delle dispense del Prof. Maurizio Bonafede per il corso di *Fisica del sistema terra*, su cui sono presenti anche le dimostrazioni dei teoremi citati.

Tasso di deformazione e tensore di sforzo

Consideriamo ad un certo istante t_0 due punti materiali vicini appartenenti a un corpo continuo, che distano fra loro ds_0 . Supponiamo che in ogni punto di questo corpo e in ogni istante sia definito un campo vettoriale $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, detto campo degli spostamenti, che ci dica come si sposta istantaneamente ogni singolo punto materiale. Al tempo $t = t_0 + dt$ i due punti si troveranno in generale ad una distanza $ds \neq ds_0$.

Se indichiamo con \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ le posizioni dei punti a t_0 , possiamo scrivere:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{u}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'(t_0) + \mathbf{u}(\mathbf{x}'(t_0), t_0) = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) + (\mathcal{J}\mathbf{u})d\mathbf{x}. \quad (\text{A.2})$$

Abbiamo quindi:

$$ds_0^2 = |d\mathbf{x}|^2 = dx_i dx_i, \quad (\text{A.3})$$

$$ds^2 = |\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)|^2 = |d\mathbf{x} + (\mathcal{J}\mathbf{u})d\mathbf{x}|^2 \simeq dx_i dx_i + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i. \quad (\text{A.4})$$

nell'ipotesi (verificata in gran parte delle applicazioni) in cui la variazione del campo degli spostamenti sia trascurabile rispetto alla distanza iniziale fra i due punti.

Possiamo ora calcolare la variazione di distanza fra i due istanti, separando la matrice jacobiana nella sua parte simmetrica e antisimmetrica:

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j =$$

$$= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j. \quad (\text{A.5})$$

Dove:

$$\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.6})$$

prende il nome di tensore di deformazione. Si può mostrare che la traccia di questo tensore è legata alla variazione percentuale del volume del corpo, mentre gli altri elementi sono legati alla variazione di forma.

Derivando rispetto al tempo, otteniamo un tensore simmetrico che contiene informazioni sulla rapidità con cui varia la distanza fra due punti vicini di un corpo continuo. Questo tensore prende il nome di *strain rate* o *tasso di deformazione*:

$$\xi_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.7})$$

Consideriamo ora tutte le forze che agiscono su una porzione di un corpo continuo. Queste forze possono essere divise in due categorie: forze di volume, che agiscono su elementi di volume del corpo (ad esempio la gravità) e forze di superficie, che agiscono su elementi di superficie (ad esempio le forze viscosse). Focalizziamoci su queste ultime e definiamo *trazione* il rapporto fra una forza di superficie e la superficie stessa su cui agisce, nel limite in cui questa tende a zero:

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta S}. \quad (\text{A.8})$$

(Abbiamo evidenziato come questo limite dipenda anche dalla direzione della normale locale alla superficie).

Se la superficie è parallela a uno dei piani coordinati, le componenti della trazione saranno:

$$T_i(\mathbf{e}_j) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{ji}. \quad (\text{A.9})$$

Si può dimostrare (Teorema del tetraedro di Cauchy) che le componenti della trazione agente su una superficie di normale generica $\hat{\mathbf{n}}$ sono esprimibili in funzione delle τ_{ij} :

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad T_i = n_j \tau_{ji}, \quad (\text{A.10})$$

dove abbiamo denotato con $\boldsymbol{\tau}$ la matrice costituita dalle τ_{ji} . Questa matrice rappresenta una grandezza fisica detta *Tensore degli sforzi*. Gli elementi sulla diagonale principale di questo tensore sono detti sforzi normali e la loro somma definisce la pressione media

agente sul corpo, mentre gli elementi al di fuori della diagonale sono detti sforzi di taglio.

Imponendo l'equazione di bilancio del momento angolare ad una porzione del corpo continuo si può mostrare come anche il tensore degli sforzi risulti simmetrico.

Il teorema del trasporto di Reynolds

La dimostrazione del seguente teorema segue quella proposta dal Prof. Roberto Verzicco al capitolo 4 delle dispense *Lezioni del corso di Fluidodinamica*.

Definizione. Consideriamo un insieme di particelle materiali che costituiscono una porzione di un certo corpo continuo. In ogni istante queste particelle individuano un determinato volume che si sposta e si deforma seguendo il moto di tali particelle. Chiameremo questo volume: **volume materiale**.

Definizione. Immaginiamo un volume all'interno di un determinato corpo continuo, che al variare del tempo rimane fisso nella medesima posizione. Questo volume prende il nome di: **volume di controllo**.

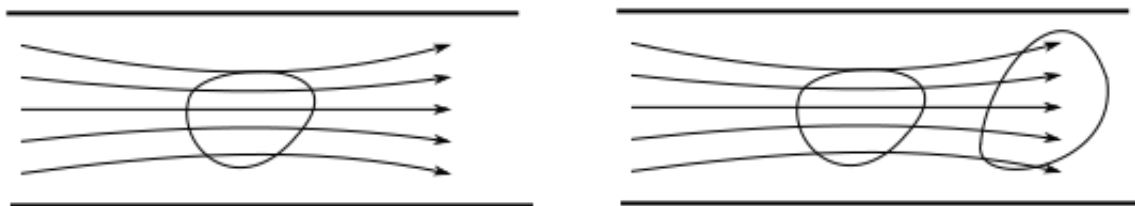


Figura A.1: Volume di controllo e volume materiale.

Lo studio delle proprietà di un corpo continuo fatto seguendo in ogni istante il moto delle particelle che lo compongono (ovvero mediante il volume materiale), è detto *lagrangiano*. Al contrario, lo studio che fa uso del concetto di volume di controllo è detto *euleriano*.

Teorema del trasporto di Reynolds. Sia $\mathcal{B}(t)$ una generica grandezza scalare estensiva, relativa a un determinato volume materiale $\mathcal{V}(t)$:

$$\mathcal{B}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(t)b(t)dV, \quad (\text{A.11})$$

con $b(t)$ grandezza intensiva coniugata. Allora:

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \oint_{\partial\mathcal{V}(t)} (\rho b) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{A.12})$$

Dove tutte le grandezze sono calcolate all'istante t e \mathbf{v} rappresenta la velocità delle particelle sulla superficie materiale $\partial\mathcal{V}(t)$.

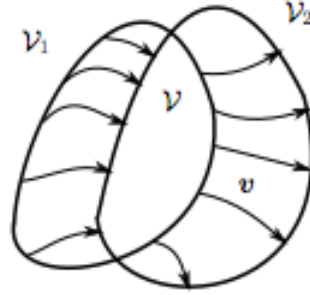


Figura A.2: Teorema di Reynolds.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\left(\frac{d\mathcal{B}}{dt} \right)_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}(t_0+\Delta t)} (\rho b)(t_0 + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{V}(t_0)} (\rho b)(t_0) dV}{\Delta t} \quad (\text{A.13})$$

Se Δt è sufficientemente piccolo, la situazione sarà quella mostrata in figura (A.2) e possiamo scrivere:

$$\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V}_0 = \mathcal{V} + \mathcal{V}_1, \quad \mathcal{V}(t_0 + \Delta t) = \mathcal{V} + \mathcal{V}_2. \quad (\text{A.14})$$

Inserendo queste relazioni nella (A.13) e raggruppando i due integrali su \mathcal{V}_0 otteniamo:

$$\left(\frac{d\mathcal{B}}{dt} \right)_{t=t_0} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial(\rho b)}{\partial t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{V}_2} (\rho b)(t_0 + \Delta t) dV - \int_{\mathcal{V}_1} (\rho b)(t_0) dV}{\Delta t}. \quad (\text{A.15})$$

Osserviamo ora che il volume infinitesimo dV può essere scritto come: $\Delta t \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ (figura (A.2)). Sostituendo nella (A.15) e svolgendo il limite abbiamo:

$$\left(\frac{d\mathcal{B}}{dt} \right)_{t=t_0} = \int_{\mathcal{V}_0} \frac{\partial(\rho b)(t_0)}{\partial t} dV + \oint_{\partial\mathcal{V}_0} (\rho b)(t_0) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{A.16})$$

(Poiché per $\Delta t \rightarrow 0$, $\partial\mathcal{V}_1 \cup \partial\mathcal{V}_2 \rightarrow \partial\mathcal{V}_0$).

Dato che l'istante t_0 è stato fissato in modo arbitrario, la dimostrazione risulta conclusa. Ovviamente, nel caso in cui il campo ρb sia sufficientemente regolare, sarà possibile trasformare il secondo integrale della (A.16) in un integrale di volume, applicando il teorema della divergenza. \square

Appendice B

Dalla (1.39) alla (1.40)

L'equazione (1.39) è:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \nabla \times \mathbf{g} + \frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho \times \nabla p) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) \quad (\text{B.1})$$

scrivendoci:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) \rho \quad (\text{B.2})$$

e derivando a primo membro otteniamo:

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega}/\rho) \rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{B.3})$$

Per l'equazione di continuità abbiamo:

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.4})$$

quindi:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{B.5})$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella (B.3) otteniamo:

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega}/\rho) \rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} (\rho\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B.6})$$

Ciclando i prodotti scalari a secondo membro, dividendo per ρ e sostituendo nella (B.1) otteniamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) - \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^3}(\nabla\rho \times \nabla p) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot D \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{g}. \quad (\text{B.7})$$

Portando a destra il secondo termine a primo membro ritroviamo la (1.40)

Bibliografia

- [1] R.J.Donnely: *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge Studies in Low Temperature Physics, 1991.
- [2] Kerson Huang: *Statistical Mechanics*. John Wiley & Sons, 1987.
- [3] J.F. Annet: *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford University Press, 2003
- [4] Simone Zuccher: *Note di Fluidodinamica*, 2015.
- [5] Maurizio Bonafede: *Fisica del Sistema Terra*, 2014.
- [6] Yoshihisa Yamamoto: *Bose Einstein condensation and matter wave laser*, 2012.
- [7] Mattia Udina: *Vortici quantizzati nei superfluidi bosonici: correzioni all'equazione di Gross-Pitaevskii*, 2014.
- [8] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J.M. Vogels, W. Ketterle: *Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates*, 2001.