

# **Università degli Studi di Bologna**

---

---

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

**Corso di Laurea Specialistica di Ingegneria Civile**

**Corso di PROGETTO DI STRUTTURE IN ZONA SISMICA**

## **LEGAMI FORZA – SPOSTAMENTO DI DIVERSE TIPOLOGIE DI CRESCENT SHAPED BRACES**

**Tesi di Laurea di:**

**JULIAN ABDUL**

**Relatore:**

**Prof.Ing. TOMASO TROMBETTI**

**Correlatori:**

**Dott.Ing. STEFANO SILVESTRI**

**Ing. STEFANO GAGLIARDI**

---

---

**Anno Accademico 2008-2009**

## INDICE

<b>1. INTRODUZIONE DELLA TESI E RAPPRESENTAZIONE DEGLI OBIETTIVI.....</b>	<b>5</b>
<b>2. UN CASO REALE DI PROGETTAZIONE SISMICA SECONDO IL “ DIRECT DISPLACEMENT BASED DESIGN” ( DDBD ).....</b>	<b>15</b>
2.1 INTRODUZIONE.....	15
2.2 PROGETTAZIONE DI UNA STRUTTURA REALE.....	17
2.2.1 RAPPRESENTAZIONE DELLA STRUTTURA.....	17
2.2.2 IDENTIFICAZIONE DELLA CURVA DEGLI OBIETTIVI SUL DIAGRAMMA F – $\delta$ DEL COMPORTAMENTO GLOBALE DELLA STRUTTURA.....	19
<b>3. FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.....</b>	<b>32</b>
3.0 INTRODUZIONE.....	32
3.1. CALCOLO DELLA RIGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO.....	34
3.2. CALCOLO DELLA FORZA DI SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA.....	37
<b>4. FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE VARIABILE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.....</b>	<b>57</b>
4.0 INTRODUZIONE.....	57
4.1 MODALITÀ DI COSTRUZIONE DELLA STRUTTURA E SOLUZIONE ANALITICA DELLA VARIAZIONE DELL’ ALTEZZA DELLA SEZIONE SULLA LUNGHEZZA DEL CONTROVENTO.....	59

4.2	CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO.....	63
4.3	CALCOLO DELLA FORZA DÌ SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA.....	67
<b>5</b>	<b>FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DÌ PRANDTL.....</b>	<b>94</b>
5.0	INTRODUZIONE.....	94
5.1	CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DELLA STRUTTURA.....	96
5.2	CALCOLO DELLA FORZA DÌ SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA.....	97
<b>6</b>	<b>FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE VARIABILE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DÌ PRANDTL.....</b>	<b>114</b>
6.0	INTRODUZIONE.....	114
6.1	MODALITA DÌ COSTRUZIONE DELLA STRUTTURA E SOLUZIONE ANALITICA DELLA VARIAZIONE DELL'ALTEZZA DELLA SEZIONE SULLA LUNGHEZZA DEL CONTROVENTO.....	115
6.2	CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO.....	121
6.3	CALCOLO DELLA FORZA DÌ SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA.....	123
<b>7</b>	<b>FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE ELASTO – PLASTICO CON INCRUDIMENTO.....</b>	<b>152</b>

7.0	INTRODUZIONE.....	152
7.1	LEGAME COSTITUTIVO ELASTO - PLASTICO LINEARMENTE INCRUDENTE.....	154
7.2	LEGAME FORZA–SPOSTAMENTO DELLA STRUTTURA DÌ CONTROVENTO CON LEGAME COSTITUTIVO DEL SUO MATERIALE ELASTO–PLASTICO LINEAREMENTE INCRUDENTE.....	158
7.2.1	CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA FORZA DÌ SNERVAMENTO E L'ULTIMO SPOSTAMENTO LINEARE DELLA STRUTTURA.....	162
7.2.2	CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA.....	163
7.3	LEGAME FORZA – SPOSTAMENTO DEL CONTROVENTO CON UN PARAMETRO INCRUDENTE $K = 0,1$ .....	181
7.4	STUDIO DELLA STRUTTURA CON UN LEGAME COSTITUTIVO DEL MATERIALE ELASTO – PLASTICO LINEARMENTE INCRUDENTE CHE APROSSIMA IL LEGAME REALE DEL MATERILE ACCIAIO.....	202
<b>8</b>	<b>FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE ELASTO – PLASTICO CON INCRUDIMENTO.....</b>	<b>226</b>
8.0	INTRODUZIONE.....	226
8.1	CALCOLO DEL DIAGRAMMA $F - \delta$ DEL CONTROVENTO.....	229
<b>9</b>	<b>FORMA ELLITTICA E FROMA PARABOLICA. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE.....</b>	<b>244</b>

<b>10</b>	<b>ANALISI CONDOTTE. INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI. CONFRONTO TRA VARIE MODALITÀ DI COSTRUZIONE DELLE “CRESCENT – SHAPED BRACES”</b> .....	<b>250</b>
10.1	ANALISI CONDOTTE E INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI.....	250
10.2	CONFRONTO DEI RISULTATI.....	267
<b>11</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>281</b>

## CAPITOLO 1

### **INTRODUZIONE DELLA TESI E RAPPRESENTAZIONE DEGLI OBIETTIVI.**

La progettazione sismica ovvero la progettazione delle strutture per resistere alle azioni orizzontali in questo momento si fa secondo il metodo descritto dal “*FORCE BASED DESIGN*”. Questo metodo come lo indica la parola stessa mette in centro del processo di progettazione la forza come input sismico cercando di imitare il metodo tradizionale di progettazione per resistere ai carichi verticali. Sostanzialmente questo principio di progettazione sismica si traduce nel verificare la forza come input sismico e di applicarla alla struttura in un'entità ridotta del cosiddetto coefficiente di riduzione delle strutture stesse che tiene conto delle capacità dissipative che esse hanno. Dopo di che il lavoro dell'ingegnere progettista si traduce in una verifica passiva delle capacità che la struttura che reagisce ai carichi orizzontali ha di resistere a tale azione. Questa struttura è stata definita nella prima fase di progettazione cioè quella resistente per i carichi verticali quindi è strettamente legata ad essa. Quindi abbiamo la stessa struttura che reagisce sia ai carichi orizzontali che verticali.

Questo metodo progettuale è soggetto a varie limitazioni. La prima è data dal fatto che questo metodo si basa sulle rigidità iniziali per determinare le forze che la struttura stessa subirà, cioè si definisce già una rigidità strutturale cioè si predimensiona la struttura senza sapere le forze a cui sarà soggetto. Nella maggior parte dei casi in questo metodo di progettazione questa rigidità è data dalla progettazione della struttura per i carichi verticali. L'altra limitazione nasce dal fatto che le forze per questo tipo di progettazione si distribuiscono sui vari elementi strutturali secondo le loro rigidità iniziali il che vuol dire che gli elementi possono raggiungere lo snervamento simultaneamente, questo non è vero. La terza è l'ultima limitazione nasce dal fatto che secondo il “*FORCE BASED DESIGN*” le forze per un dato tipo di struttura composta da un dato materiale siano soggette ad un unico coefficiente di riduzione dato secondo la normativa vigente dalla duttilità complessiva della struttura.

Secondo questo metodo di progettazione la struttura deve soddisfare due requisiti principali ovvero sarà soggetta a due verifiche basate su due prestazioni che la stessa deve avere sotto due input sismici. ( SLD ) stato limite di danno e ( SLU ) stato limite di esercizio.

Da questa breve descrizione di questo metodo progettuale si vede che il progettista svolge una figura passiva data da una sola verifica visto che non può intervenire sulle capacità resistenti della struttura, struttura che è stata già concepita dal inizio con un unico sistema reagente sia alle azioni verticali sia a quelle orizzontali. Quindi abbiamo un'unica struttura reagente per i due tipi di azioni. Si capisce allora che la fase di progettazione sismica della struttura è molto più complessa da quanto si evidenzia dalle due verifiche che questo metodo indica perché il flusso o l'azione sismica che la struttura subisce per un dato input è funzione delle sue caratteristiche dinamiche date appunto dal sistema di reazione alle forze orizzontali.

Per evitare questi limiti e per potere migliorare in modo indipendente le capacità resistenti orizzontali della struttura ma soprattutto per dare un ruolo attivo del progettista nella fase di concezione strutturale sismica si è introdotto un nuovo e rivoluzionario tipo di progettazione sismica.

Questo metodo progettuale è basato su due aspetti fondamentali :

- 1 ) *Performance Based Seismic Design* “*PBSD*”
- 2) *Direct Displacement Based Design* “*DDBD*”

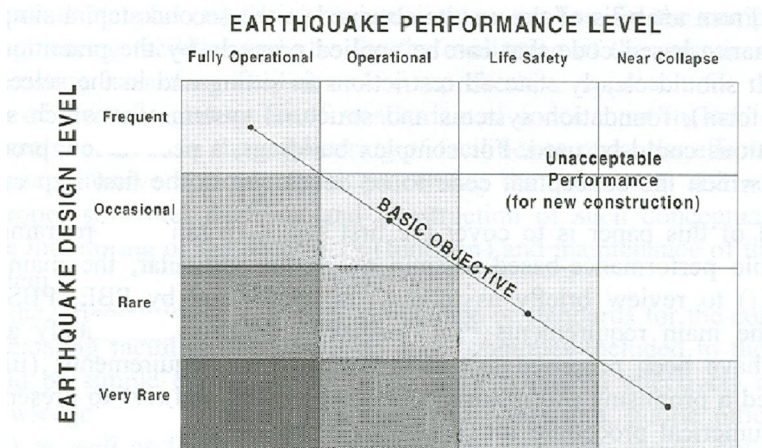
Il primo aspetto è stato introdotto dal PEER nel 1995 nel documento ( VISION 2000) . E la fase cruciale di concezione strutturale perché sostanzialmente per ogni struttura indica una serie di prestazioni dette “performance” che si tende a garantire alla struttura per vari valori di input sismico. Quindi è la fase di passaggio dal ruolo passivo di prima ad un ruolo attivo del progettista perché dapprima si fissano diverse prestazioni che la struttura deve avere per diverse entità di input sismico.

Queste prestazioni sono sostanzialmente 4:

- “*Fully Operational*”
- “*Operational*”
- “*Life Safety*”
- “*Near Collapse*”

Queste prestazioni corrispondono all'input sismico frequente , occasionale , raro e molto raro. Quindi in base alla struttura che sto progettando io fisso le varie performance che mi aspetto da essa

per un certo valore di input sismico e cerco di fare sì che la struttura da progettare abbia queste performance.



**Figura 1.1 Obiettivo prestazionale da raggiungere in base all'input sismico**

In figura 1.1 è stato rappresentato il diagramma che indica gli obiettivi prestazionali che deve avere la mia struttura in base all'input sismico.

Il secondo aspetto fondamentale è il metodo in cui si tende di raggiungere queste prestazioni cioè il ( DDBD )

Questa tipologia di progettazione strutturale come lo dice la parola stessa si basa sugli spostamenti che la struttura può avere sotto l'azione sismica.

Sostanzialmente ad ogni prestazione strutturale che io impongo concettualmente si passa ad un modello matematico che traduce le prestazioni attese in spostamenti possibili che la struttura deve avere sotto il valore dell'azione sismica che corrisponde a quella prestazione.

Quindi si fa il passaggio fondamentale dalla progettazione in base alle forze alla progettazione in base agli spostamenti. Questo metodo progettuale è stato introdotto per prima da Nigel Priestely e successivamente è stato sviluppato in collaborazione con G. M. Calvi.

L'approccio che governa il metodo progettuale è quello inverso del metodo delle forze. Questo approccio si chiama "*Stiffness-Strength-Ductility Approach*" e si basa sulle seguenti ipotesi fondamentali :

- 1) Separazione fra il sistema resistente alle azioni orizzontali e sistema resistente alle azioni verticali.
- 2) Realizzazione di un sistema resistente alle azioni orizzontali in grado di realizzare una sorta di "isolamento" sismico in corrispondenza del primo piano (o, analogamente, in grado di realizzare una sorta di "soft-storey" aggiornato)



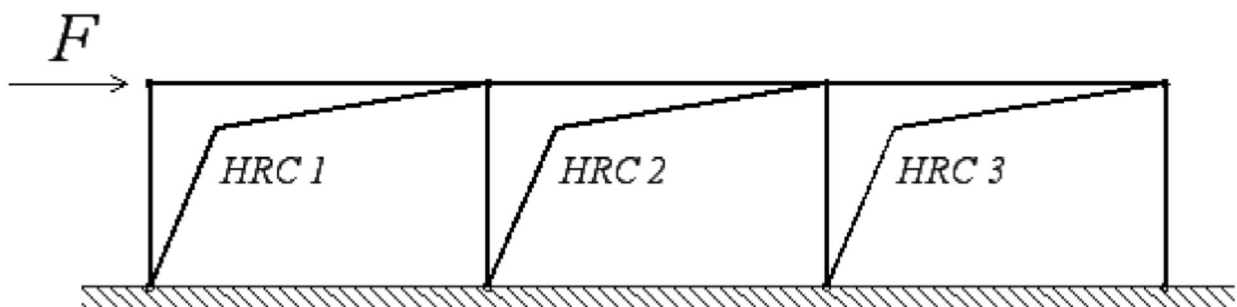
- 3) Identificazione delle caratteristiche specifiche dei sistemi resistenti alle azioni orizzontali e verticali sulla base di un *Approccio Prestazionale*
- 4) Identificazione delle caratteristiche specifiche dei sistemi resistenti alle azioni orizzontali e verticali sulla base del *Capacity Design*.

Si divide quindi la struttura in quella reagente alle azioni orizzontali e quella reagente alle azioni verticali (vedi figura 1.2 ). Si introduce quindi un nuovo elemento strutturale capace di reagire alle reazioni orizzontali e di soddisfare delle ben definite prestazioni strutturali. Queste tipologie di strutture o di controventi speciali vengono chiamati "*Crescent – Shaped Braces*". Sono dei controventi o strutture reagenti alle azioni orizzontali aventi vari forme geometriche.

La ricerca e lo studio di queste strutture speciali sono la base di questo studio.

L'approccio di "*Stiffness-Strength-Ductility Approach*" basato direttamente sul ( DDBD ) è una modalità di progettazione strutturale che si può applicare ad ogni tipologia strutturale. Sostanzialmente l'idea di base è quella di individuare ogni elemento che fa parte del sistema di reazione alle azioni orizzontali e di rappresentare la sua risposta strutturale in base a 4 suoi parametri fondamentali ( vedi figura 1.1 )

- $k_i$  (*Stiffness* ) la rigidezza elastica.
- $F_{yi}$  (*Strength* ) la forza di snervamento.
- $\mu_i$  (*Ductility* ) la duttilità.
- $shr_i$  (*strain hardening ratio* ) coefficiente di rigidezza del tratto post snervamento.



**Figura 1.2** Struttura reagente alle azioni orizzontali composta da "crescent - shaped braces"

In figura 1.2 è stato rappresentato lo schema della struttura reagente alle azioni orizzontali composta "crescent - shaped braces".

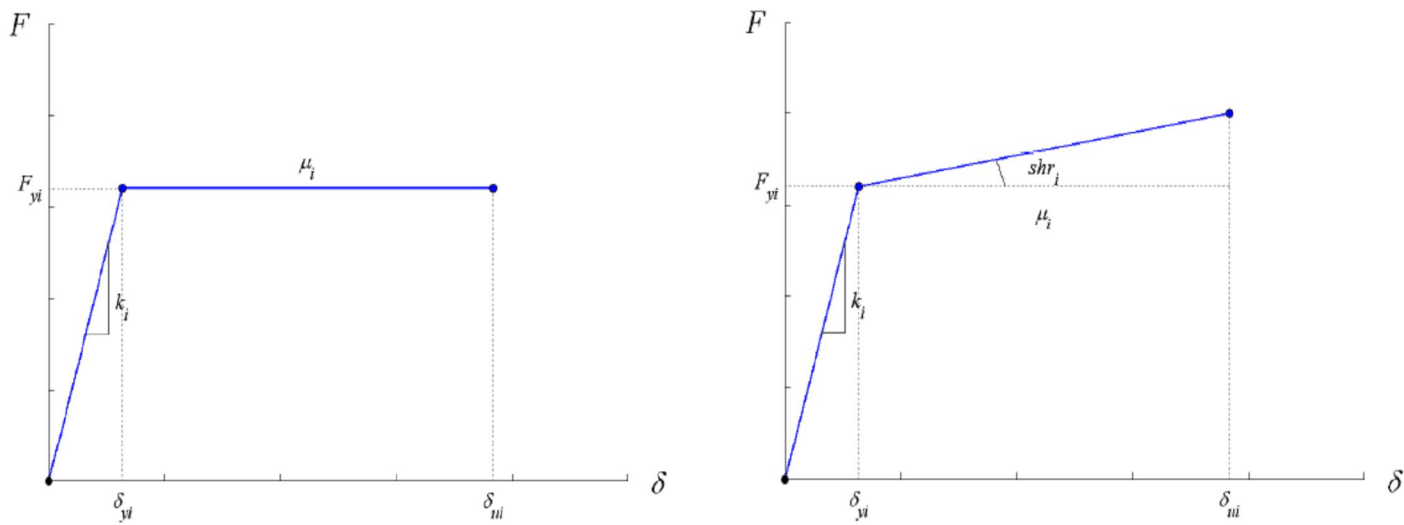


Figura 1.3 Rappresentazione schematica del singolo elemento strutturale

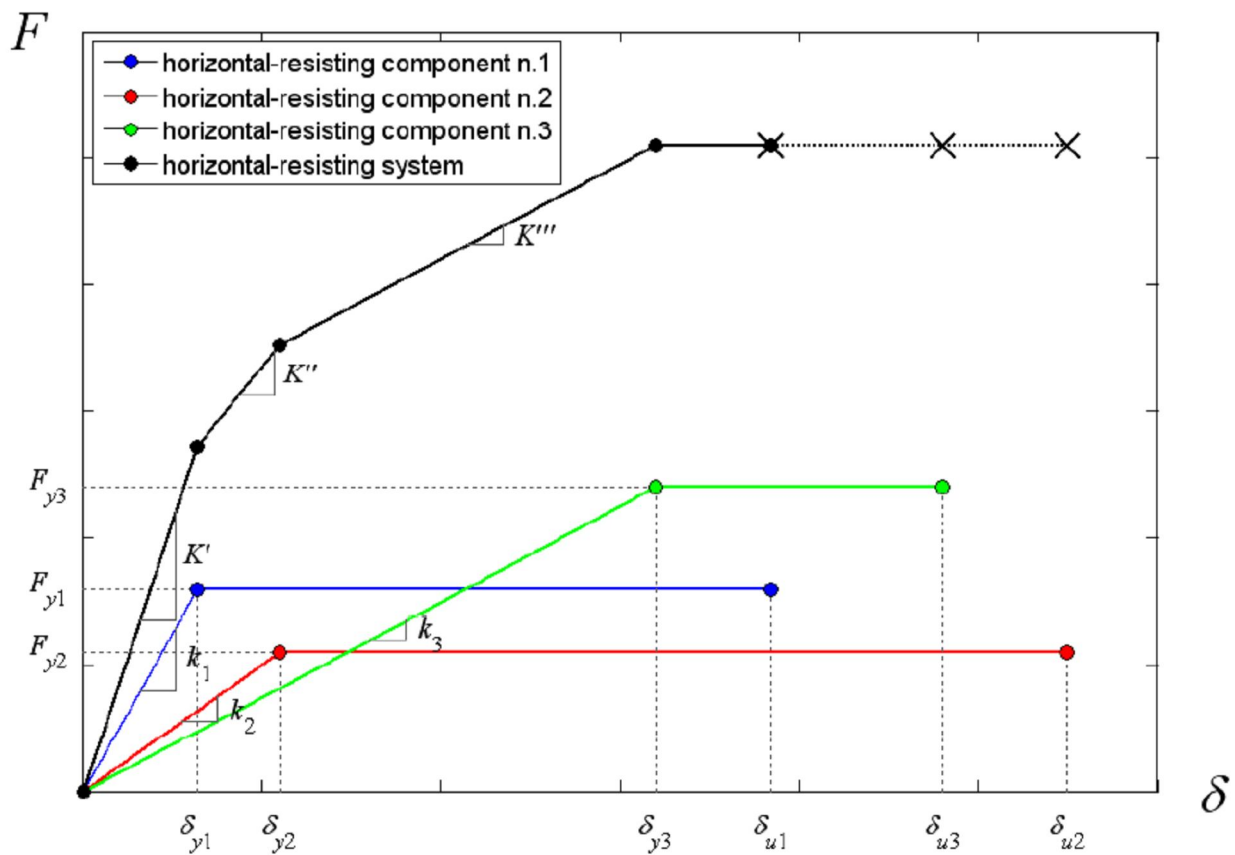


Figura 1.4 Rappresentazione del comportamento strutturale come somma dei comportamenti dei singoli elementi che lo compongono

In figura 1.3 è stato rappresentato il comportamento del singolo elemento strutturale nella tipologia “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*”, in figura 1.4 invece è stato rappresentato il

comportamento globale della struttura come soma dei comportamenti dei singoli elementi che lo compongono.

La base concettuale di questo approccio progettuale è quello di dare alla struttura totale reagente alle azioni orizzontali un ben definito andamento di spostamenti sotto le stesse azioni. Questo andamento totale strutturale in base di spostamenti è lo scopo principale della progettazione secondo questa tipologia strutturale. Quindi per potere applicare questo metodo progettuale dobbiamo conoscere l'andamento degli spostamenti della struttura per ogni valore dell'input sismico.

È chiaro allora che tutto ciò è possibile soltanto se conosco perfettamente il comportamento di ogni singolo elemento che compone la struttura reagente alle azioni orizzontali.

Abbiamo detto prima che per questo approccio progettuale si usano come elementi strutturali resistenti alle azioni orizzontali delle strutture speciali di controvento chiamate "*Crescent – Shaped Braces*".

L'obbiettivo di questa tesi di laurea è quello di studiare il comportamento in termini di "*Stiffness-Strength-Ductility*" di queste strutture speciali.

Si studia la molteplicità di forme geometriche che queste strutture possono avere.

Si studia il loro comportamento in base al legame costitutivo del materiale che si adotta.

Si studia il loro comportamento in base all'andamento geometrico dell'altezza della sezione lungo il controvento.

Si vede allora che lo scopo di questo studio è quello di creare una matrice tridimensionale dove ogni suo elemento è una struttura di "*Crescent – Shaped Braces*" ben definita. Definita nella direzione X della matrice dalla forma geometrica che diamo alla nostra struttura, nella direzione Y dall'andamento dell'altezza della sezione lungo il controvento e nella direzione Z dal tipo di legame costitutivo del materiale che compone la struttura.

Si cerca quindi di ampliare al massimo la conoscenza sul comportamento strutturale di queste strutture fondamentali nella nuova tipologia di progettazione sismica in modo tale da progettarle facilmente quindi di scegliere il tipo di "*Crescent – Shaped Braces*" che sia adatto ad un comportamento globale della struttura anziché un altro.

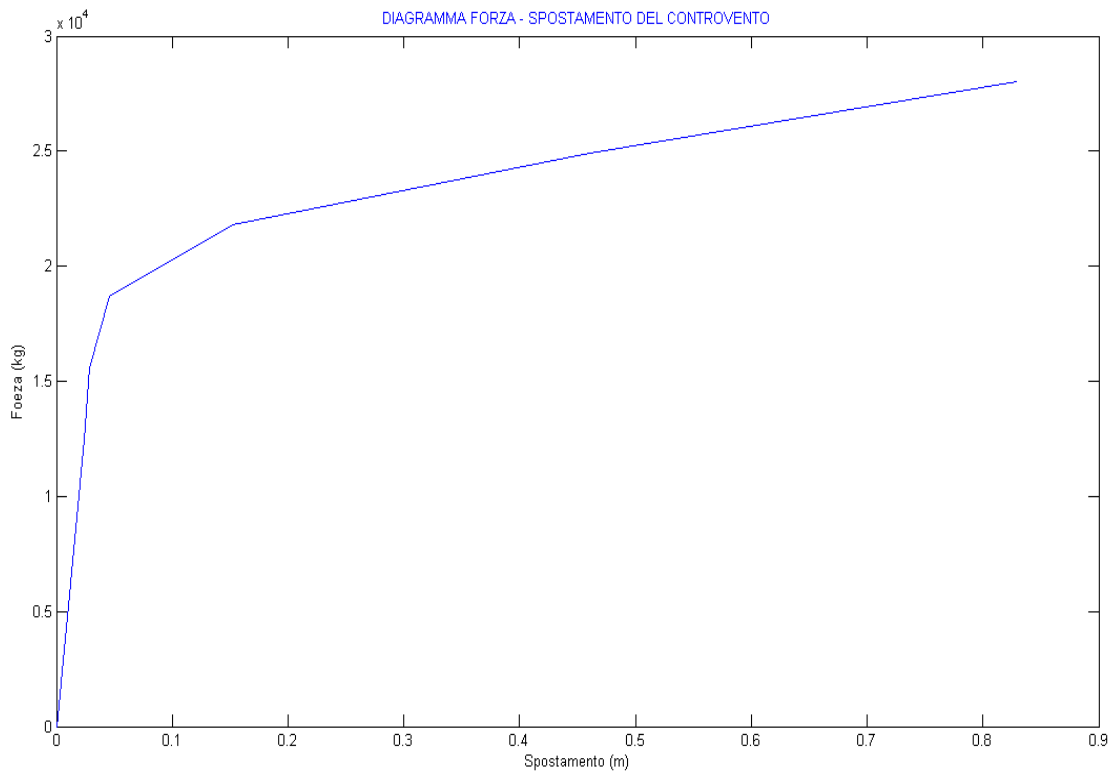
Nel capitolo 2 di questo studio si presenta un esempio concreto di progettazione sismica effettuato con la nuova tipologia progettuale in modo tale da rendere più compressibile il ruolo fondamentale che queste strutture hanno in questo nuovo modo di concepire le strutture. Nel 3 capitolo inizia invece il vero studio di queste strutture. Si inizia con una forma geometrica triangolare con altezza della sezione costante lungo tutto il controvento accoppiato ad un legame costitutivo elastico -

perfettamente plastico del suo materiale. Si fa una soluzione analitica del suo comportamento quindi si trova il suo diagramma  $F - \delta$ , dopo di che si effettuano delle analisi numeriche per confrontare i risultati con quelli analitici.

Nel capitolo 4 si studia la stessa struttura adottando però un'altezza della sezione variabile lungo la struttura. Anche qui si risolve la struttura in modo numerico e in modo analitico e si confrontano i risultati con quelli del capitolo precedente.

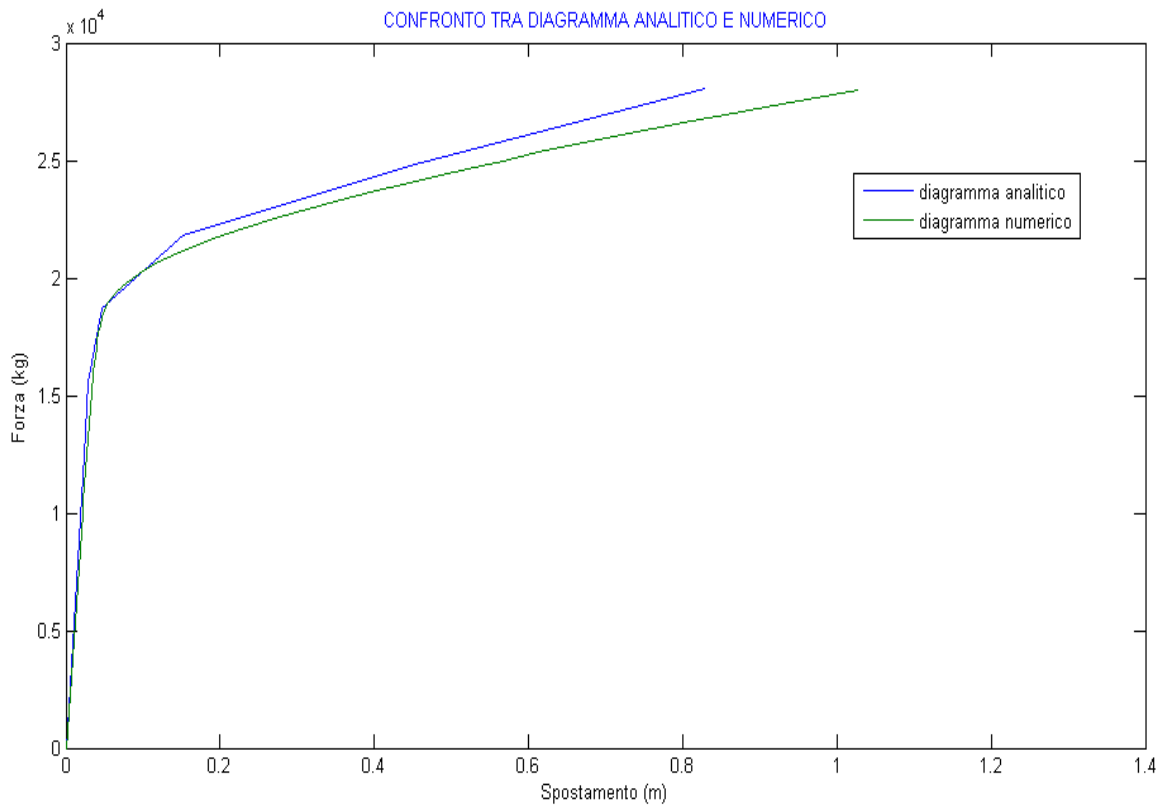
Nel capitolo 5 si passa in una nuova forma geometrica quella circolare e si risolve con un'altezza della sezione costante ed un legame costitutivo del materiale tipo quello di Prandtl cioè elastico – perfettamente plastico. Anche qui si confrontano risultati analitici e numerici. Avendo un po' arricchito la nostra matrice delle strutture possiamo quindi già fare un confronto tra le due forme geometriche. La forma circolare si riprende nel capitolo 6 e si studia adesso con un'altezza della sezione variabile. Dal capitolo 7 in poi si cerca di approfondire lo studio introducendo un nuovo legame costitutivo del materiale quello elasto – plastico linearmente incrudente. Si studia la forma triangolare e poi si passa a quella circolare nel capitolo 8. Nel capitolo 9 si studiano invece la forma ellittica e quella parabolica. Si arriva quindi al riempimento massimo della matrice delle nostre strutture quindi si possono fare dei confronti di risultati in tutte le direzioni e dedurre vie progettuali molteplici. Tutto questo si fa nel capitolo 11.

La conoscenza del legame di ogni tipo di struttura studiata ci permette di scegliere quella più adatta ad un comportamento globale di spostamenti della struttura, comportamento che traduce in condizione matematica le prestazioni che abbiamo individuato come obiettivi da raggiungere per la nostra struttura. Si evidenzia ancora una volta il ruolo fondamentale della conoscenza del diagramma  $F - \delta$  di ogni singolo "Crescent – Shaped Braces".



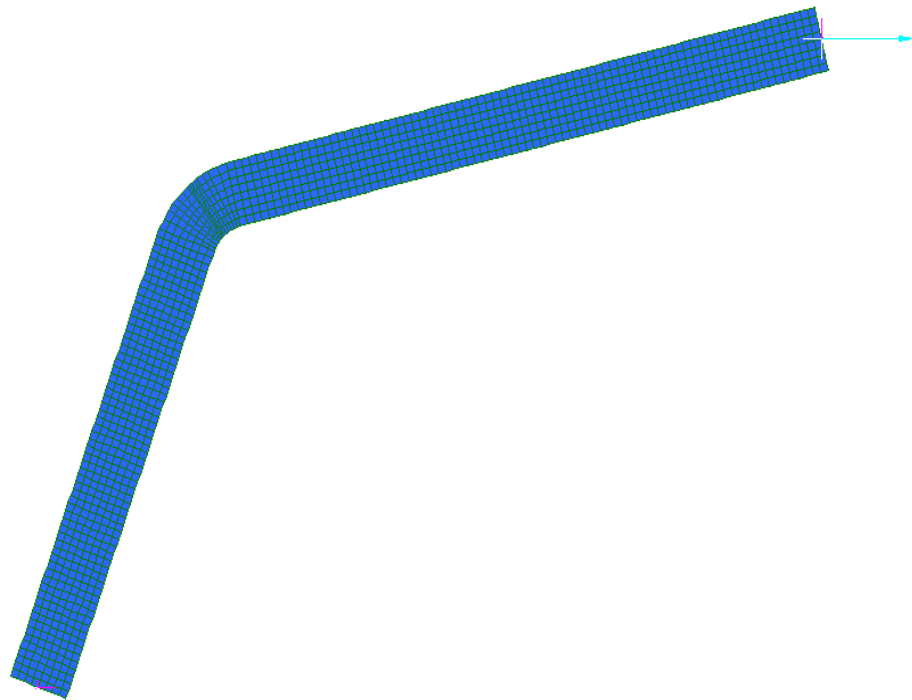
**Figura 1.5 Legame Forza - Spostamento della struttura triangolare con altezza della sezione costante e legame elasto - plastico linearmente incrudente del suo materiale.**

In figura 1.5 viene rappresentato uno dei legami calcolati analiticamente. Quello per la forma triangolare della struttura di controvento con un'altezza della sezione costante ed un legame elasto - plastico linearmente incrudente del materiale.



**Figura 1.6 Confronto tra risultati analitici e numerici**

In figura 1.6 invece viene rappresentato il confronto tra il legame calcolato analiticamente e quello numerico.



**Figura 1.7 Modello di calcolo numerico del singolo "crescent - shaped braces"**

In figura 1.7 è stato rappresentato il modello di calcolo numerico usato per il controvento triangolare il cui diagramma  $F - \delta$  si vede in figura 1.6.

## CAPITOLO 2

### **UN CASO REALE DI PROGETTAZIONE SISMICA SECONDO IL “ DIRECT DISPLACEMENT BASED DESIGN” ( DDBD )**

#### 2.1) INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il nuovo metodo di progettazione sismica secondo i principi di :

- 1 ) *Performance Based Seismic Design* “*PBSD*”
- 2) *Direct Displacement Based Design* “*DDBD*”

Abbiamo spiegato la filosofia o l’approccio che si segue nella concezione della struttura in fase di progettazione, divisione della struttura nella parte reagente per i carichi verticali e in quella reagente per i carichi orizzontali. Abbiamo introdotto quindi il nuovo tipo di strutture reagenti alle azioni orizzontali oggetto di questo studio cioè i “*Crescent – Shaped Braces*” . Abbiamo spiegato il loro utilizzo ed il loro ruolo fondamentale in questa nuova tipologia di progettazione.

In questo capitolo si rappresenta il riassunto di un caso pratico reale di applicazione di questa tipologia progettuale. Si spiega fase per fase come si applica il principio di “*Performance Based Seismic Design*” ( *PBSD* ) e come lo si traduce in condizioni matematiche per il comportamento della mia struttura. In questo contesto si introduce “*Direct Displacement Based Design*” ( *DDBD* ) nella progettazione reale creando il modello matematico dove si basa il ( *PBSD* ) . In pratica si trova una condizione matematica che rappresenta il miei obiettivi prestazionali e lo si cerca di raggiungere mediante l’utilizzo delle nuove tipologie di strutture resistenti alle azioni orizzontali ovvero i “*Crescent – Shaped Braces*” .

La progettazione di strutture capaci di resistere alle azioni sismiche dando certi comportamenti prestazionali della struttura è di una grande difficoltà. Difficoltà legata alla determinazione dell’azione sismica ( dovendo operare con molti input sismici ) e la determinazione della risposta che la struttura progettata da a queste azioni. Queste difficoltà si possono eliminare con l’applicazione nella progettazione del “*Performance Based Seismic Design*” ( *PBSD* ) . Questo metodo indica una serie di prestazioni che la mia struttura deve avere in corrispondenza di vari input sismici ( vedi figura 1.1 )



I livelli prestazionali che si danno dalla comunità scientifica mondiale sono quelli di :

- a) fully operational
- b) operational
- c) life safety
- d) near collapse

che corrispondono ai vari input sismici:

- a) frequent
- b) occasional
- c) rare
- d) very rare

Secondo Priestley la considerazione del ( *PBSD* ) nella progettazione ha fatto sì che si riesaminino tutte le vecchie tipologie di progettazione sismica. Attualmente il metodo che si usa nella progettazione è quello basato sulle forze noto come “ Forze – Based Design” ( *FBD* ). Questo metodo come è stato spiegato nel capitolo precedente si basa sull’applicazione di forze come input sismici ridotte secondo opportuni coefficienti che tengono conto della loro duttilità o capacità dissipative.

I due principi fondamentali della nuova tipologia progettuale si traducono in: 1) individuazione di varie prestazioni attese della struttura ( *PBSD* ). 2) passaggio dalle forze agli spostamenti nella progettazione sismica ( *DDBD* ). Lo sviluppo della ricerca nell’ambito della progettazione sismica hanno portato al uso di nuove tipologie strutturali quali controventi speciali e isolatori. Tutte queste nuove tecniche indicano la separazione della struttura nella parte reagente alle azioni orizzontali e quella reagente alle azioni verticali. In questo modo il progettista assume un ruolo attivo nella progettazione perché può operare direttamente sulla struttura reagente al sisma e migliorarla o concettualmente ottimizzare il suo comportamento mediante l’utilizzo di queste nuove tipologie strutturali.

L’idea di base di questo approccio conosciuto come “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*” e quello di configurare ogni elemento strutturale parte della struttura reagente alle azioni orizzontali come un diagramma Forza – Spostamento (  $F - \delta$  ) in modo tale da somare gli contributi e di raggiungere il comportamento che mi porta al raggiungimento degli obiettivi prestazionali posti

all'inizio della progettazione ( vedi figura 1.3 e 1.4 ). Ecco perché è fondamentale conoscere o poter progettare i diagrammi di queste strutture speciali di controvento chiamati "*Crescent – Shaped Braces*".

## **2.2) PROGETTAZIONE DI UNA STRUTTURA REALE.**

### **2.2.1) RAPPRESENTAZIONE DELLA STRUTTURA**

Vediamo adesso come si applica in pratica questo approccio.

Si considera la progettazione di una struttura reale posta a Bologna.

La massa totale della struttura è pari a  $2,7 \cdot 10^6 \text{ kg}$ .

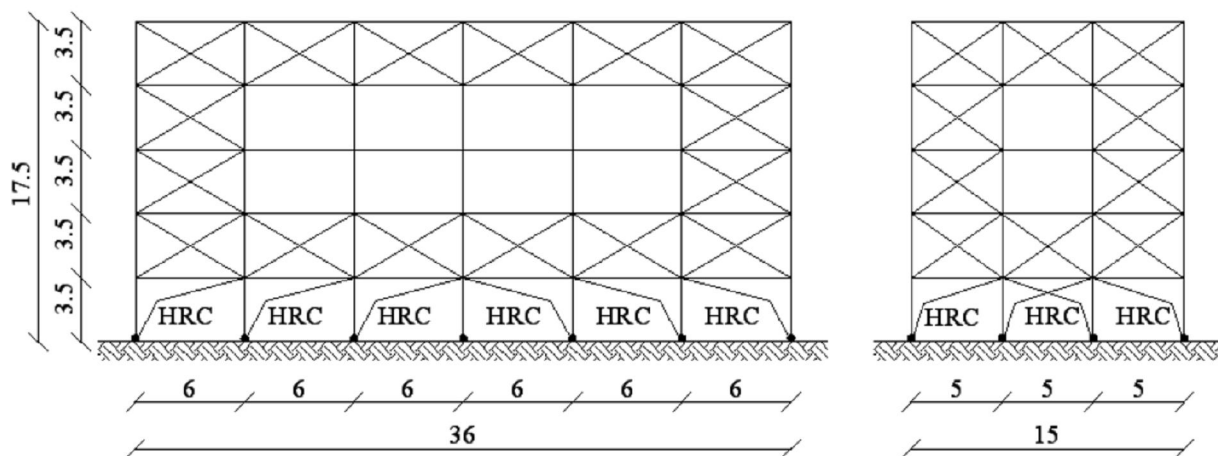
La struttura si trova su un suolo di tipo C ed in una superficie topografica S1. Si progetta per soddisfare i criteri della normativa ( D.M 14/01/2008 )

La progettazione secondo questa tipologia si divide in 3 fasi principali:

- 1) identificazione delle caratteristiche fondamentali che deve possedere la struttura reagente alle azioni orizzontali per soddisfare degli obiettivi posti mediante ( *PBSD* ).
- 2) La creazione di un sistema strutturale resistente alle azioni orizzontali composto da strutture speciali di controvento ovvero "*Crescent – Shaped Braces*" che soddisfino il comportamento globale della struttura che si deve raggiungere per arrivare agli obiettivi prestazionali preposti.
- 3) Verifica della struttura mediante un'opportuna analisi non lineare di tipo time – hystori.

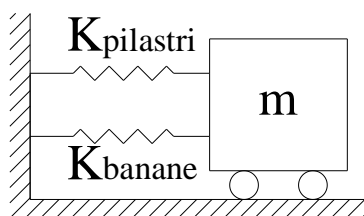
La struttura è divisa in 2 parti, quella reagente alle azioni orizzontali e quella reagente alle azioni verticali. Il sistema verticale è progettato per sopportare solo le azioni verticali ed è composto da travi HEB 340 e pilastri HEB 300.

Il sistema reagente alle azioni orizzontali è progettato per avere un comportamento elasto - plastico del piano terra e di avere un comportamento elastico dal primo piano in su. È composto da strutture speciali di controvento "*Crescent – Shaped Braces*" poste tra la base ed il primo piano e di controventi tradizionali ad X fatti da prifili UPN 260 posti dal primo piano in su.



**Figura 2.1** Lo schéma strutturale

In figura 2.1 è rappresentato lo schema strutturale e il modo di concezione della struttura. Secondo questo metodo progettuale si configura il comportamento totale della struttura come un pendolo semplice dove è concentrata la massa totale della struttura.



**Figura 2.2** Configurazione del comportamento strutturale

In figura 2.2 è stato rappresentato il modo in cui viene configurato il comportamento globale della struttura. Il sistema orizzontale è progettato per raggiungere una curva sul diagramma totale  $F - \delta$  della struttura che è la traduzione matematica degli obiettivi posti dalle varie prestazioni indicate dal "PBSD"

In figura 2.2 si vede la sezione della struttura nelle direzioni NS (nord - sud) e EO (est - ovest). Il sistema orizzontale è composto da 12 HRC in direzione NS e 8 HRC in direzione EO. Al contributo di queste strutture si aggiunge anche il contributo minimo che danno i pilastri (struttura verticale) sulla resistenza orizzontale. Questa struttura verticale come è stato già detto è progettata per resistere alle sole azioni verticali.

## 2.2.2) IDENTIFICAZIONE DELLA CURVA DEGLI OBIETTIVI SUL DIAGRAMMA F – $\delta$ DEL COMPORTAMENTO GLOBALE DELLA STRUTTURA.

Per il progetto della parte orizzontale della struttura con riguardo del documento ( VISION 2000 ) che contiene i principio di “PBSD” gli obiettivi che si impongono alla struttura sono 3 :

- 1) Primo obiettivo prestazionale ( PO1 ) definito come “Fully operational” ovvero piena operatività della struttura come seguito della risposta all’azione sismica corrispettiva a tale prestazione strutturale cioè il terremoto frequente.
- 2) Secondo obiettivo prestazionale ( PO2 ) definito come “operational” che si cerca di dare alla struttura per il livello di entità sismica occasionale.
- 3) Terzo obiettivo prestazionale ( PO3 ) definito come “live safety” da raggiungere per il livello dell’azione sismica del terremoto raro.

Il primo obiettivo prestazionale richiede per il terremoto con un periodo di ritorno pari a 30 anni queste due prestazioni generali:

- a) ( GP11 ) Limitati spostamenti relativi tra i piani in modo tale che non ci siano danni sugli elementi non strutturali e che i pilastri rimangono ancora in campo elastico lineare.
- b) ( GP12 ) La struttura raggiunga al massimo la tensione di snervamento e non ci siano deformazioni residue.

Queste due prestazioni generali si traducono in queste 2 condizioni:

- a) ( GP11 )  $\delta_{frequent} \leq \delta_{FO}$
- b) ( GP12 )  $\delta_{frequent} \leq \delta_{y1}$

$\delta_{frequent}$  è la domanda di spostamento del terremoto frequente.

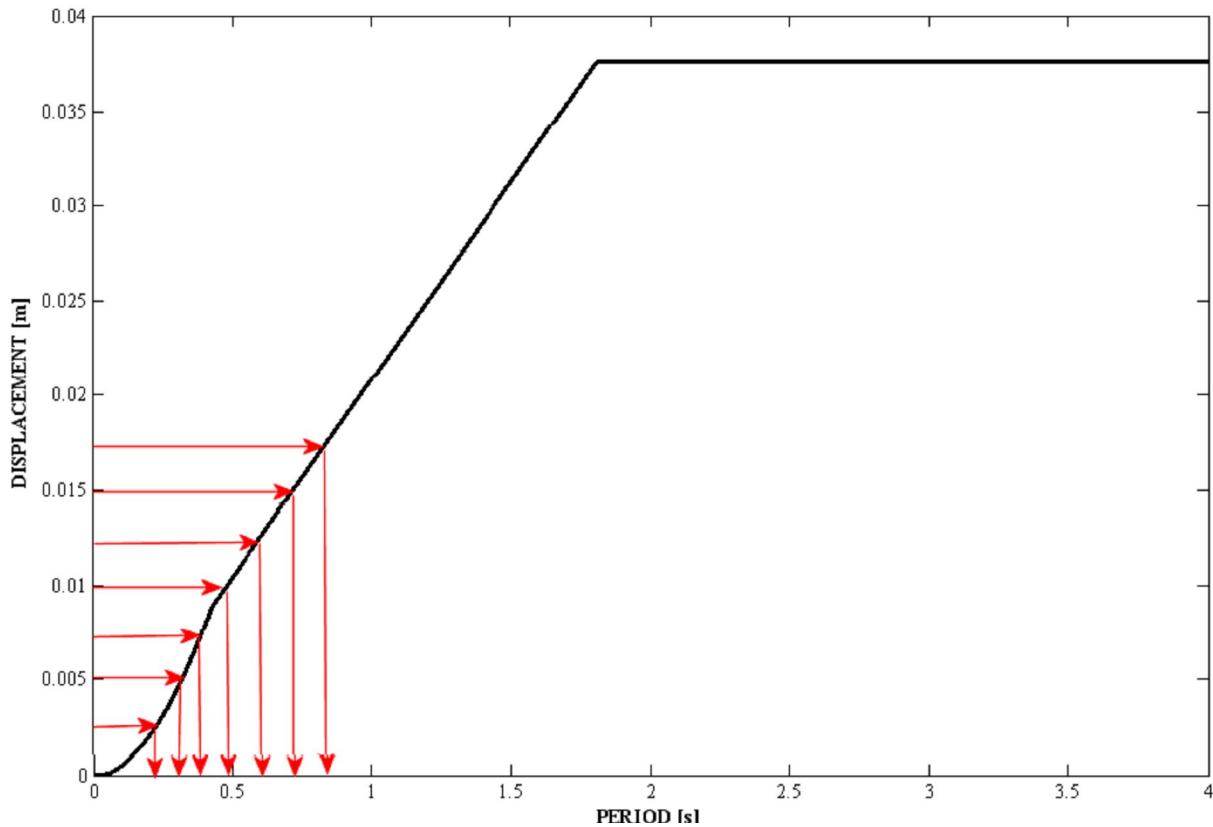
$\delta_{FO}$  è lo spostamento della struttura relativo al primo obiettivo prestazionale cioè lo spostamento che consta alla struttura di rimanere in condizioni di “Fully operational” . ( Priestley, Calvi e Kolawsky hanno indicato il valore 5 ‰ dell’altezza dei pilastri ).

$\delta_{y1}$  è lo spostamento di snervamento della struttura.

Le due condizioni generali nella nostra struttura reale si traducono in 2 specifiche prestazioni. Lo spostamento che soddisfa la ( PO1 ) della nostra struttura è 1,75 cm. Quindi ho queste 2 specifiche condizioni prestazionali.

- a) ( SP11 )  $\delta_{frequent} \leq 1,75cm$
- b) ( SP12 )  $\delta_{frequent} \leq \delta_{y1}$

La prima specifica prestazione ( SP11 ) rappresenta la rigidezza elastica della struttura. Questa condizione si può tradurre sul diagramma  $F - \delta$  della struttura.

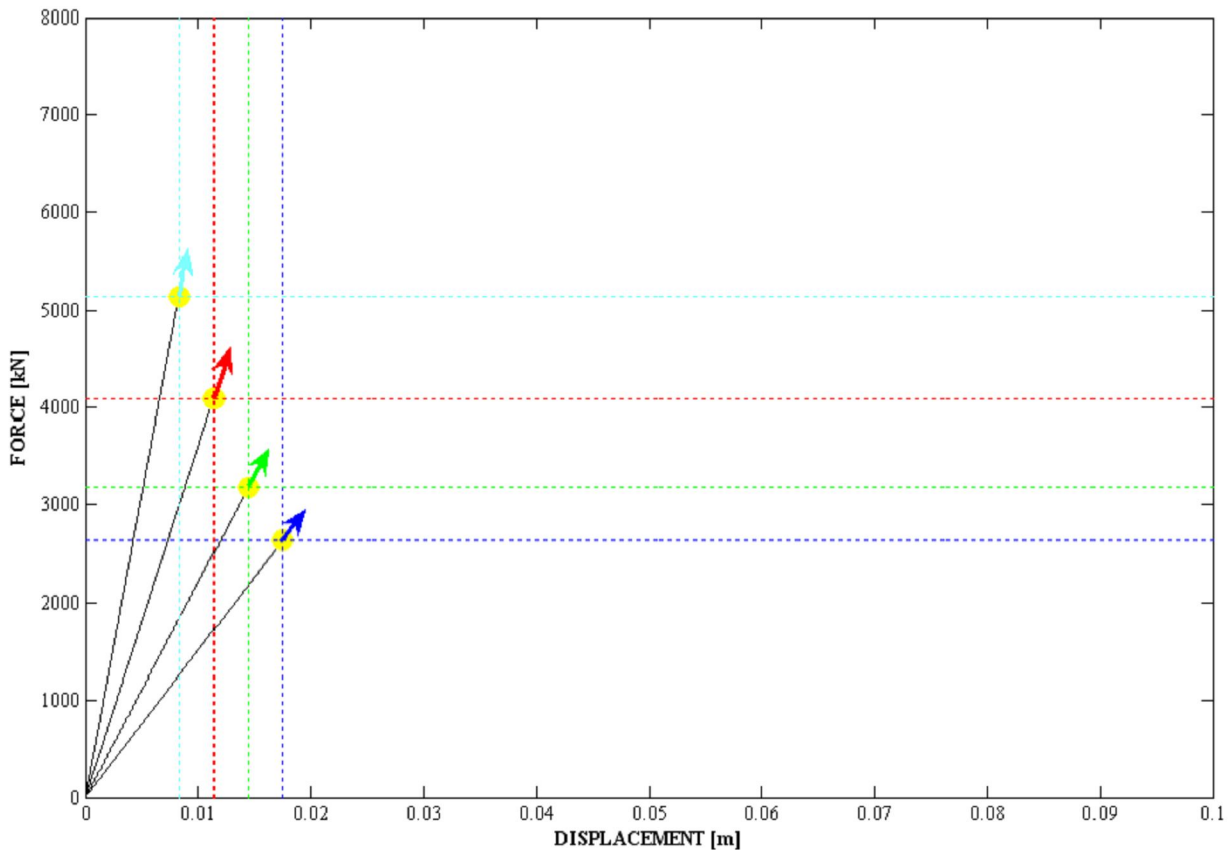


**Figura 2.3 Spettro i risposta degli spostamenti per il terremoto con periodo di ritorno 30 anni.**

In figura 2.3 è stato rappresentato lo spettro di risposta degli spostamenti per il terremoto con un periodo di ritorno pari a 30 anni cioè il terremoto frequente. Per ogni valore di spostamento esiste un valore del periodo della struttura. Il periodo può essere trasformato in un valore di rigidezza iniziale per la struttura secondo la relazione:

$$k_{frequent} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T_{frequent}^2}$$

In figura 2.4 sono rappresentati vari livelli di spostamento che soddisfano la ( SP11 )



**Figura 2.4** Vari valori di spostamento che soddisfano la SP11 ricavati dallo spettro di risposta del terremoto frequente

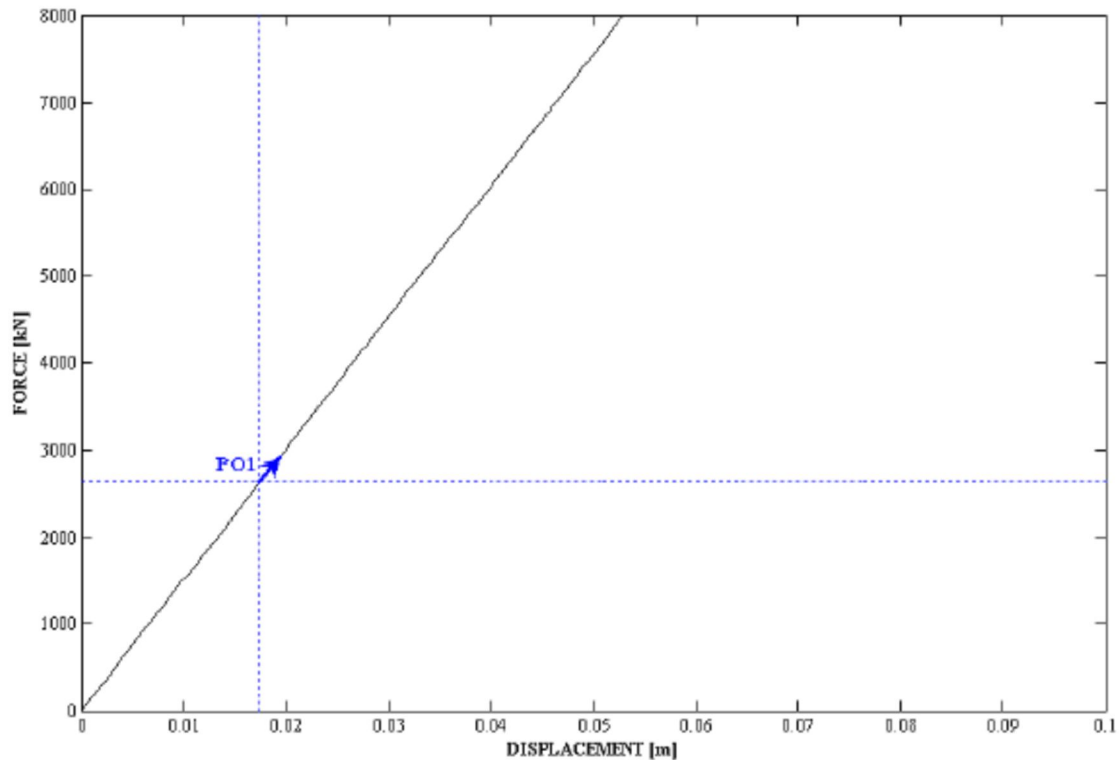
La condizione ( SP12 ) invece richiede solo uno spostamento della struttura dato da terremoto frequente che sia inferiore allo spostamento di snervamento della struttura.

Come si vede nelle figure 2.3 e 2.4 ci sono vari valori di spostamento e di conseguenza di rigidezza della struttura che soddisfano la ( SP11 ) quindi bisogna sceglierne uno per determinare sul diagramma  $F - \delta$  della struttura la condizione ( SP11 ) e di conseguenza la rigidezza iniziale della struttura.

Si scegliere di usare come richiesta di spostamento del terremoto frequente uguale allo spostamento della struttura che soddisfa il ( PO1 ) , quindi le condizioni specifiche si traducono in:

- a) ( SP11 )  $\delta_{frequent} = 1,75cm$
- b) ( SP12 )  $\delta_{frequent} \leq \delta_{y1}$

A quello spostamento corrispondono un valore del periodo della struttura pari a 0,84 secondi ed una rigidezza pari a  $151070 \text{ KN/m}$ .



**Figura 2.6 Rappresentazione grafica del PO1**

In figura 2.6 è stato rappresentato graficamente la prima condizione sulle prestazioni cioè ( PO1 ).

Si è così rappresentato graficamente il primo obiettivo prestazionale da raggiungere sul diagramma  $F - \delta$  della struttura cioè si è presentato il percorso che deve seguire la struttura per avere la prima prestazione imposta dal "PBSD" in corrispondenza del terremoto frequente.

Il secondo obiettivo prestazionale o la seconda performance attesa sotto l'azione sismica del terremoto con un periodo di ritorno pari a 50 anni indica sostanzialmente che la struttura deve soddisfare due condizioni generali sulle sue prestazioni:

- a) ( GP21 ) limitate deformazioni tra i piani in modo tale che non ci siano danni significativi sugli elementi non strutturali.
- b) ( GP22 ) limitati spostamenti residui della struttura.

Queste due condizioni generali si traducono in due condizioni matematiche:

$$\text{a) ( GP21 ) } \quad \delta_{Occasional} \leq \delta_o$$

$$\text{b) ( GP22 ) } \quad \delta_{Occasional} \geq \delta_y$$

$\delta_{Occasional}$  è la domanda di spostamento del terremoto occasionale

$\delta_o$  è lo spostamento che la struttura deve avere in corrispondenza del terremoto frequente per soddisfare gli obiettivi del ( PO2 )

$\delta_o$  si da in % di H ed prende il valore 0,5 % secondo Stephen A. Mahin ed il valore 2 % secondo Priestley, Calvi e Kolawsky.

Le due condizioni generali sulle prestazioni si traducono per la struttura in considerazioni in due condizioni specifiche sulle prestazioni. La struttura considerata ha per il ( PO2 ) il valore dello spostamento pari a 3,5 cm quindi ho queste due condizioni specifiche

$$\text{a) ( SP21 ) } \quad \delta_{Occasional} \leq 3,5cm$$

$$\text{b) ( SP22 ) } \quad \delta_{Occasional} \geq \delta_y$$

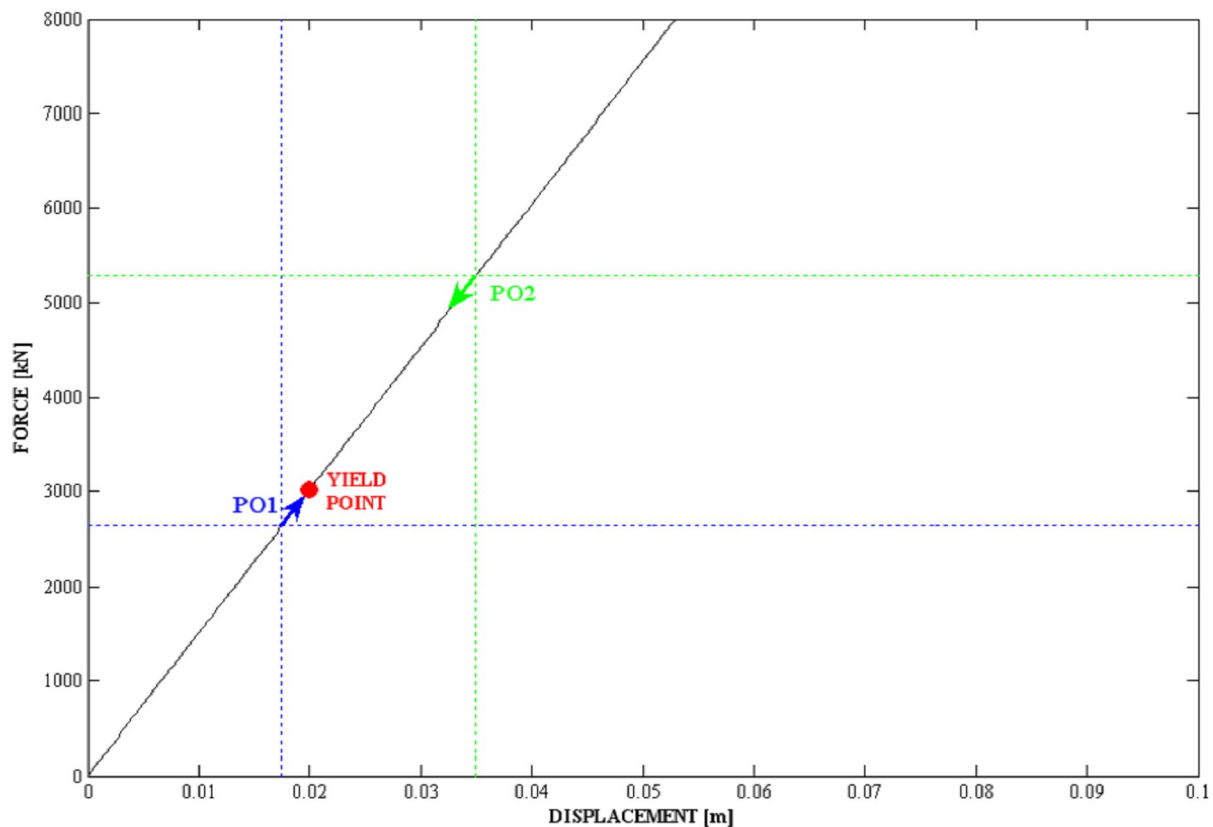
Per il valore di  $\delta_{Occasional}$  si sceglie proprio il valore 3,5cm quindi ho

$$\text{a) ( SP21 ) } \quad \delta_{Occasional} = 3,5cm$$

$$\text{b) ( SP22 ) } \quad \delta_{Occasional} \geq \delta_y$$

E chiaro che lo spostamento di snervamento della struttura sarà compreso tra il valore 1,75cm e 3,5cm . Si è deciso di usare il valore  $\delta_y = 2cm$  . Adesso possiamo rappresentare graficamente nel diagramma  $F - \delta$  della struttura della struttura il punto che corrisponde al ( PO2 ) ed il punto di snervamento della struttura.





**Figura 2.7** Rappresentazione grafica del PO1 PO2 e del punto di snervamento

Abbiamo così mediante questi due passi ricavato il primo percorso della struttura.

Il terzo obiettivo prestazionale della struttura si può definire in tre condizioni generali sulle prestazioni della struttura:

- a) ( GP31 ) spostamenti limitati del interpiano in modo tale da non avere mai crisi dei pilastri o di nessun tipo di elemento strutturale che compone la struttura orizzontale e di non avere il rischio di contatto tra due costruzioni adiacenti.
- a) ( GP32 ) accelerazioni limitate in modo tale che non si danneggi la struttura nel suo contesto globale.

Queste due condizioni generali si traducono come prima in due condizioni generali matematiche:

- a) ( GP31 )  $\delta_{Rare} \leq \delta_{LS}$
- b) ( GP32 )  $a_{Rare} \leq a_{LS}$

$\delta_{Rare}$  è la domanda di spostamento del terremoto raro con una tempo di ritorno pari a 475 anni.

$\delta_{LS}$  è lo spostamento che la struttura è in grado di offrire al terremoto raro in sintonia con la ( PO3 ).

$a_{Rare}$  è la domanda di accelerazione del raro.

$a_{LS}$  è l'accelerazione che la struttura può dare sotto gli obiettivi prestazionali della ( PO3 ).

Per la struttura considerata i valori che soddisfano le prestazioni strutturali attese sono

$$\delta_{LS} = 10cm$$

$$a_{LS} = 0,2g$$

Allora le due condizioni matematiche generali si traducono in due condizioni matematiche specifiche.

a) ( SP31 )  $\delta_{Rare} \leq 10cm$

b) ( SP32 )  $a_{Rare} \leq 0,2g$

Queste due condizioni prestazionali rappresentano due limiti superiori del comportamento strutturale nel suo diagramma globale  $F - \delta$ .

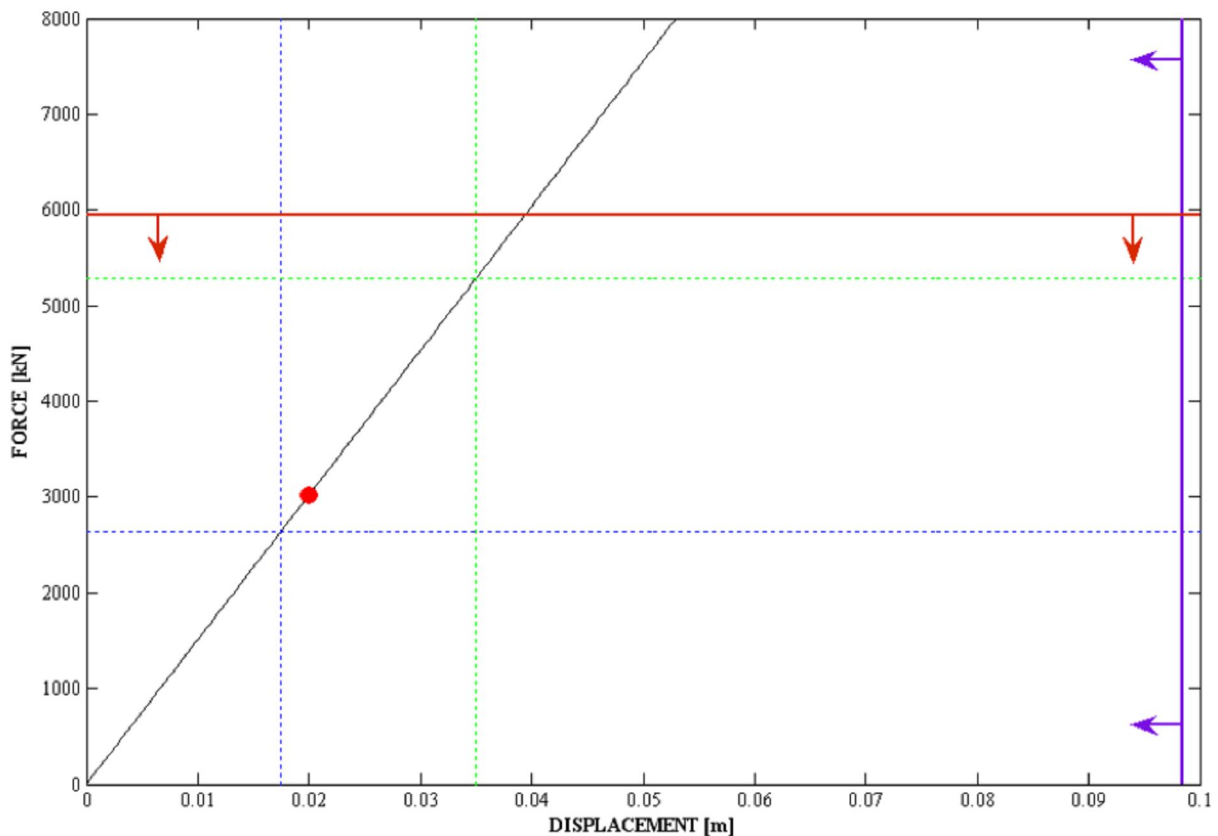


Figura 2.8 Due limiti superiori imposti dalle SP31 e SP32

La domanda di spostamento  $\delta_{Rare}$  sarà compresa tra  $\delta(a_{LS})$  che il valore di spostamento che si da dalla la capacita di accelerazione della struttura  $a_{LS}$  considerata in campo elastico e lo spostamento  $\delta_{LS}$ .

Il periodo proprio della struttura  $T_{Rare}$  si può trovare dallo spettro di risposta degli spostamenti del terremoto raro con un smorzamento  $\xi_{Rare}$  stimato secondo Priestley, Calvi e Kolawsky con la relazione:

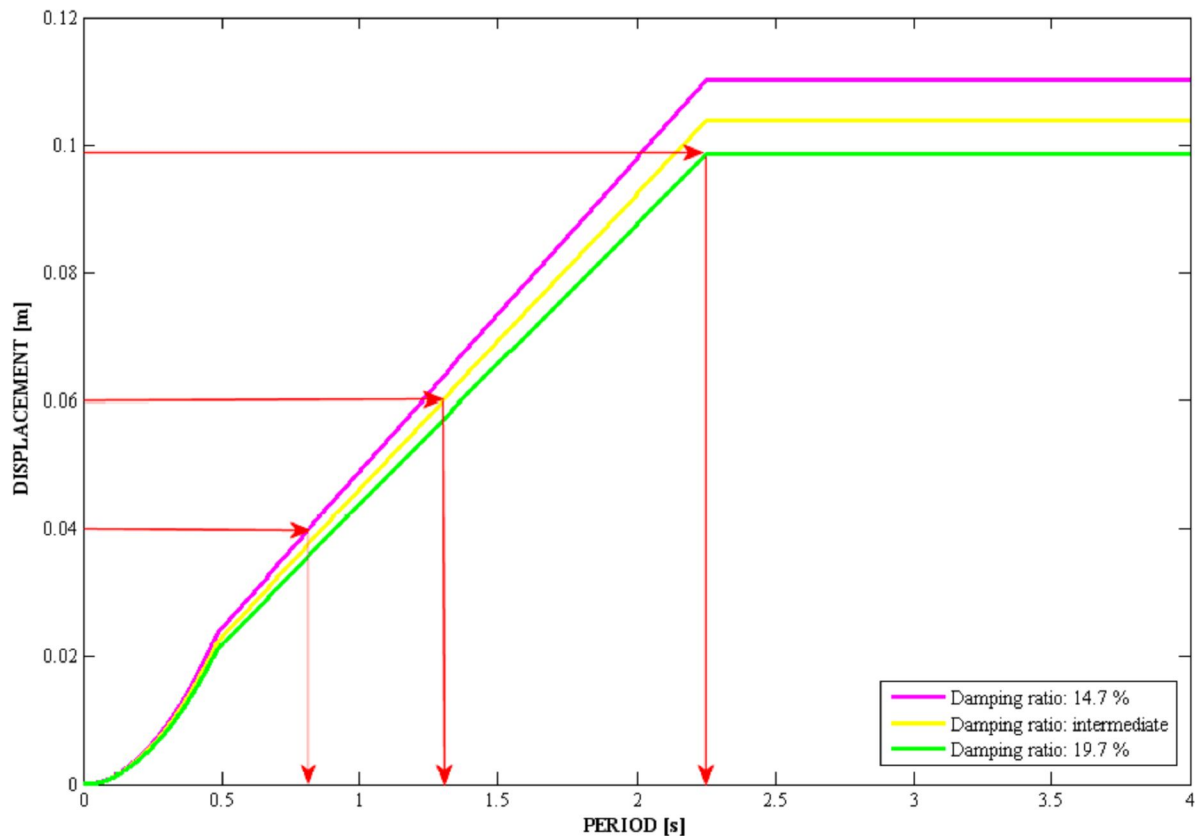
$$\xi = 0.05 + 0.577 \left( \frac{\mu_{LS} - 1}{\mu_{LS} \cdot \pi} \right)$$

Si considerano due valori di capacita di duttilità della struttura corrispondenti al caso dove lo spostamento  $\delta_{LS}$  assume i due valori seguenti:

$$\delta_{LS} = 3,5cm$$

$$\delta_{LS} = 10cm$$

A questi due valori di capacita di utilità della struttura corrisponderanno due valori di smorzamento e di conseguenza due spettri dei spostamenti per il terremoto raro. Si considera uno spettro intermedio tra i due per misurare il periodo proprio della struttura  $T_{Rare}$ .



**Figura 3.9** Spettri di risposta del terremoto raro per i due valori di smorzamento e quello intermedio tra i due

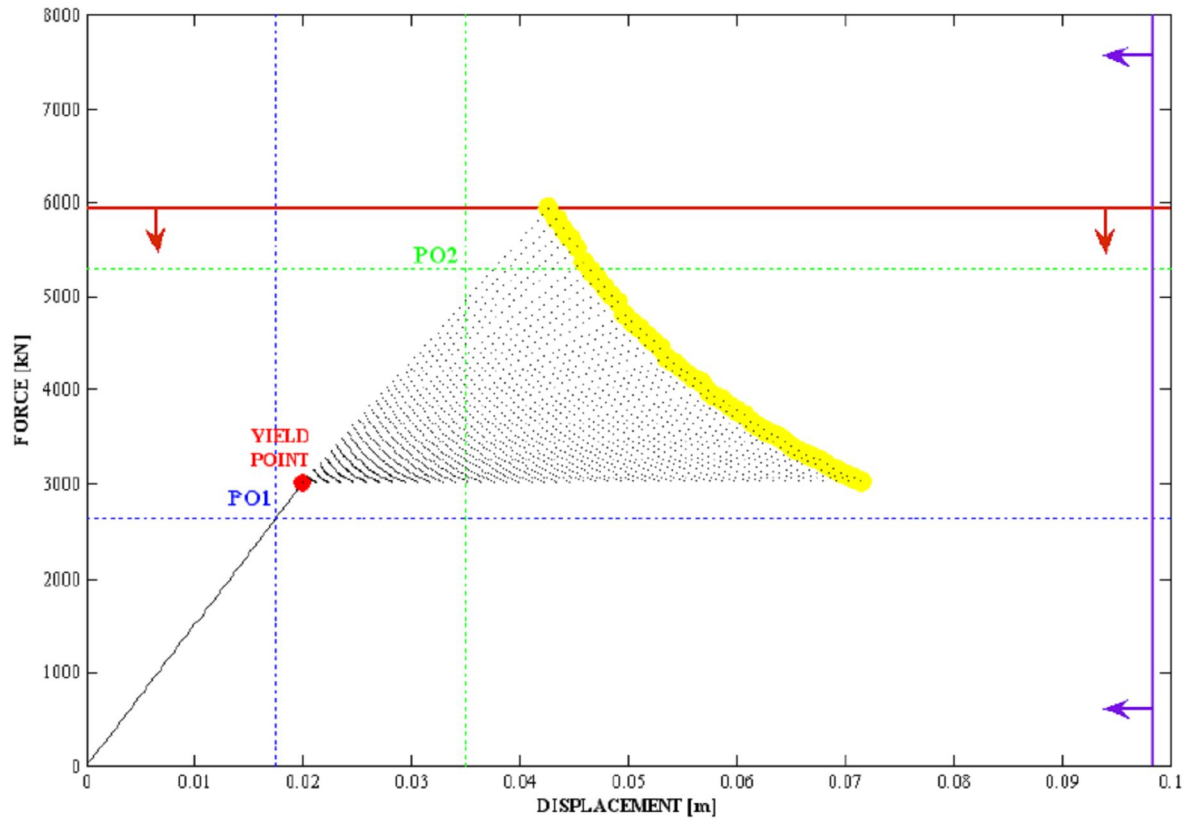
Ogni valore dello spostamento corrisponde ad un valore di periodo proprio della struttura e di conseguenza in un valore di rigidezza di essa secondo la relazione

$$k_{Rare} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T_{Rare}^2}$$

Se associo a tutti i spostamenti che soddisfanno la ( PO3 ) il corrispettivo valore di domanda di rigidezza  $k_{Rare}$  ricavo un insieme di punti che si possono mettere sul diagramma  $F - \delta$  della struttura. E chiaro che questi punti soddisfano tutte e due condizioni specifiche SP31 e SP32 della ( PO3 ).

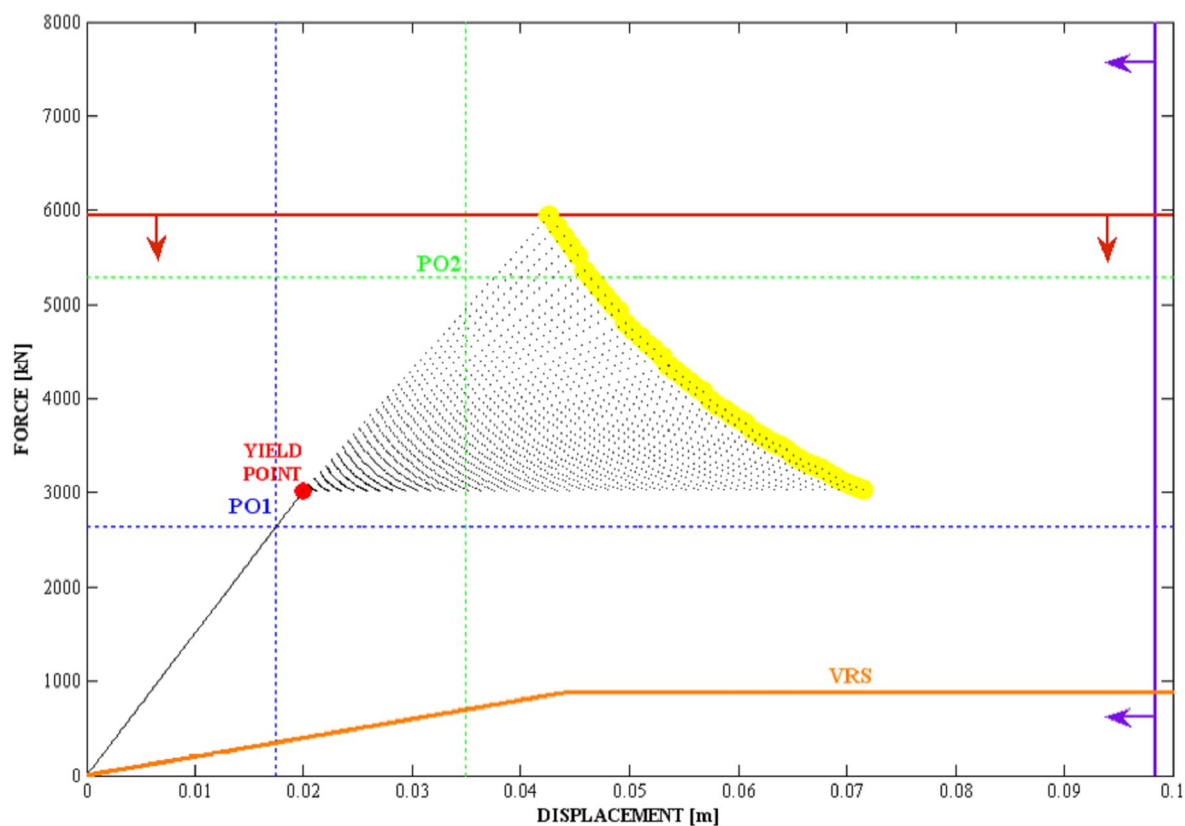
Allora l'insieme di questi punti rappresenta il soddisfacimento dei miei obiettivi prestazionali posti durante la progettazione.

Questo insieme di punti descritti da una curva rappresenta allora quella che all'inizio di questo capitolo all'introduzione di questo nuovo metodo di progettazione sismica abbiamo indicata come la curva degli obiettivi prestazionali della struttura. Questa curva viene chiamata mapa dei comportamenti della struttura.



**Figura 2.10 La curva degli obbiettivi della struttura**

Questa curva si può mettere sul diagramma  $F - \delta$  della struttura associata alla comportamento orizzontale della struttura verticale

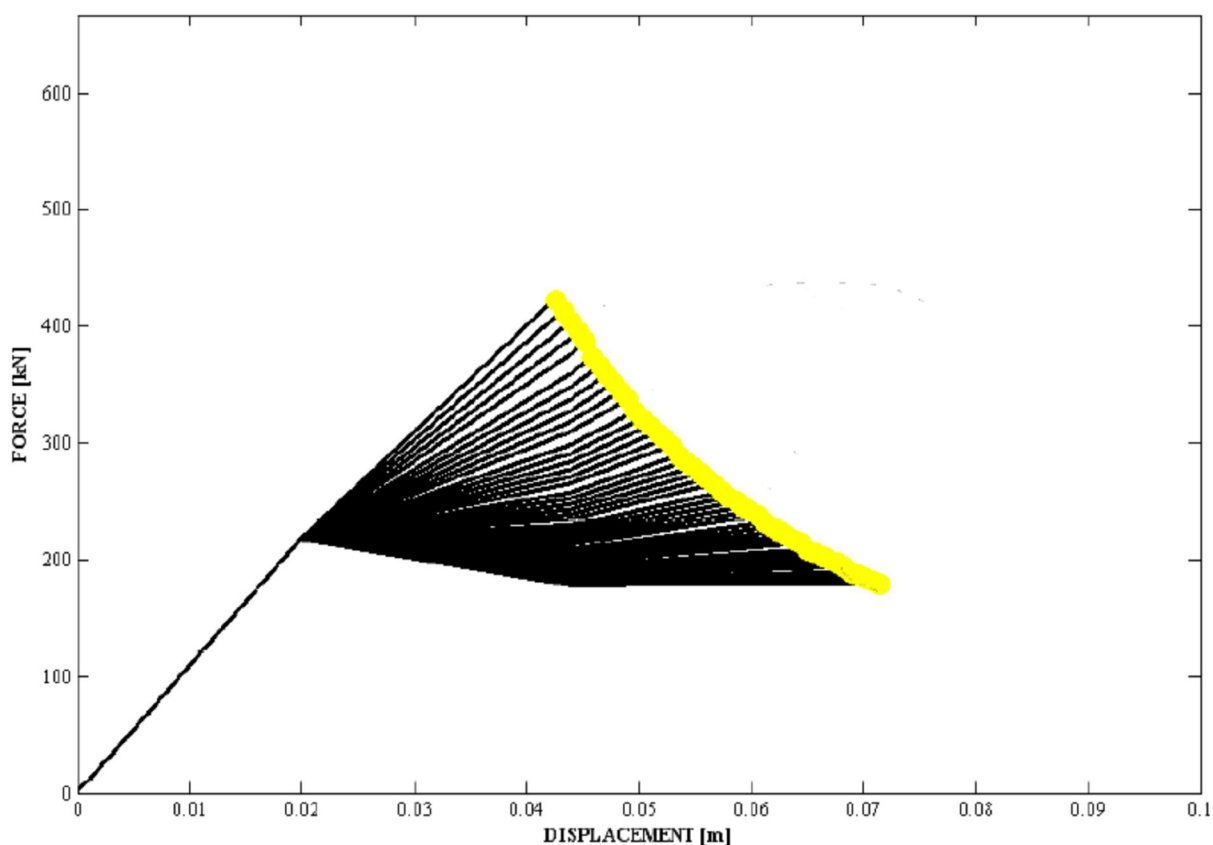


**Figura 2.11** Comportamento globale che deve raggiungere la struttura e comportamento della struttura verticale

In figura 2.11 è stato rappresentato sul diagramma  $F - \delta$  della struttura il comportamento globale che essa deve avere identificata dal primo percorso nella sua parte lineare fino al punto di primo snervamento della struttura e i percorsi che conducono alla curva degli obiettivi nella parte non lineare. La linea arancione rappresenta il comportamento sotto le azioni orizzontali della struttura verticale. A questo punto della progettazione si è ricondotti al problema introdotto nel primo capitolo (vedi figura 1.4) di questo studio cioè nel “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*” della “DDBD”.

Conosciamo il comportamento globale della struttura e di un suo componente, dobbiamo ora progettare gli altri elementi strutturali che ci consentono di raggiungere la curva degli obiettivi. Dobbiamo quindi progettare nella maniera giusta le strutture speciali di controvento cioè i “*Crescent – Shaped Braces*”.

Questa ultima frase rappresenta lo spunto di ricerca del lavoro di questa tesi di laurea.



**Figura 2.12** Rappresentazione grafica del percorso che deve seguire ogni “crescent - shaped braces”

In figura 2.16 è stato rappresentato il percorso  $F - \delta$  che deve seguire ogni “crescent - shaped braces” per la struttura in esame.

Si evidenzia allora il ruolo fondamentale di queste strutture in questa tipologia di progettazione sismica . Si deve conoscere ogni singolo parametro che compone il suo “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*” .

L'ultimo passo della progettazione di questa struttura quello di verifica. Si fanno delle analisi non lineari di tipo time – history usando 7 input sismici di terremoti spettro compatibili con il terremoto frequente e altri 7 spettro compatibili con il terremoto raro.

L'aspetto fondamentale che si vede da questa presentazione breve di questa nuova tipologia di progettazione sismica e quella di conoscere perfettamente il comportamento degli elementi strutturali che compongono la struttura orizzontale sotto l'ottica di “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*” , in modo tale che la somma dei loro diagramma  $F - \delta$  conduca sulla retta degli obbiettivi.

Ecco perché fondamentale lo studio dettagliato delle strutture speciali di controvento chiamate "crescent-shaped braces". Una conoscenza approfondita sui loro diagrammi  $F - \delta$  permette di scegliere il controvento più opportuno in modo tale da ottimizzare la risposta strutturale sotto l'aspetto del raggiungimento degli obiettivi prestazionali ammettendo il ruolo centrale ed attivo del progettista nella concezione strutturale.



## **CAPITOLO 3**

### **FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.**

Si considera come prima forma di controvento da studiare per la costruzione del suo legame forza – spostamento la forma triangolare. In questa prima fase di studio si fanno le seguenti ipotesi fondamentali su cui si baserà il calcolo:

- a) Altezza della sezione costante lungo tutto il controvento, di conseguenza momento d'inerzia costante del controvento per tutta la sua lunghezza.
- b) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame di Prandtl cioè il legame elastico perfettamente plastico, di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti è quello che deriva dal legame costitutivo di Prandtl

Sotto queste due ipotesi fondamentali si procede alla costruzione del legame forza spostamento dell'elemento strutturale. Come si può intuire dalla figura 1.1 lo spostamento che calcoliamo è quello in direzione della forza applicata  $F$ . Essendo il legame costitutivo del materiale quello elastico perfettamente plastico si può prevedere che l'elemento strutturale avrà un primo tratto elastico lineare cioè ci sarà un tratto dove le tensioni in tutte le sezioni del controvento saranno inferiori di quella dello snervamento del materiale. Dopo all'aumentare della forza esterna nella sezione maggiormente sollecitata si raggiungerà la tensione di snervamento quindi si avrà un primo picco nel legame  $F - \delta$  dell'elemento strutturale, poi man mano che la forza cresce la zona plasticizzata si espande nelle sezioni adiacenti e così si sviluppa in contemporanea la duttilità sezionale e quella strutturale come seguito della prima. Il secondo picco sul legame del controvento si avrà per il valore della forza che sollecita la sezione critica con il suo momento ultimo. In quel punto si forma una cerniera plastica che stende il controvento in una forma lineare, nel momento della rotazione della cerniera plastica nasce uno spostamento rigido del controvento. E chiaro che dopo che le due aste si siano alienate il controvento funziona come un semplice controvento diagonale cioè con solo la rigidezza assiale.

Da queste prime considerazioni si deduce che per costruire il legame  $F - \delta$  del controvento bisogna calcolare:

- a) la sua rigidezza elastica
- b) il primo picco in corrispondenza della forza di snervamento
- c) l'andamento non lineare durante il quale il controvento sviluppa tutta la sua duttilità derivante dal legame costitutivo del suo materiale e dalla sua forma geometrica
- d) il secondo picco in corrispondenza della forza di plasticizzazione .
- e) spostamento rigido come seguito della rotazione della cerniera plastica.

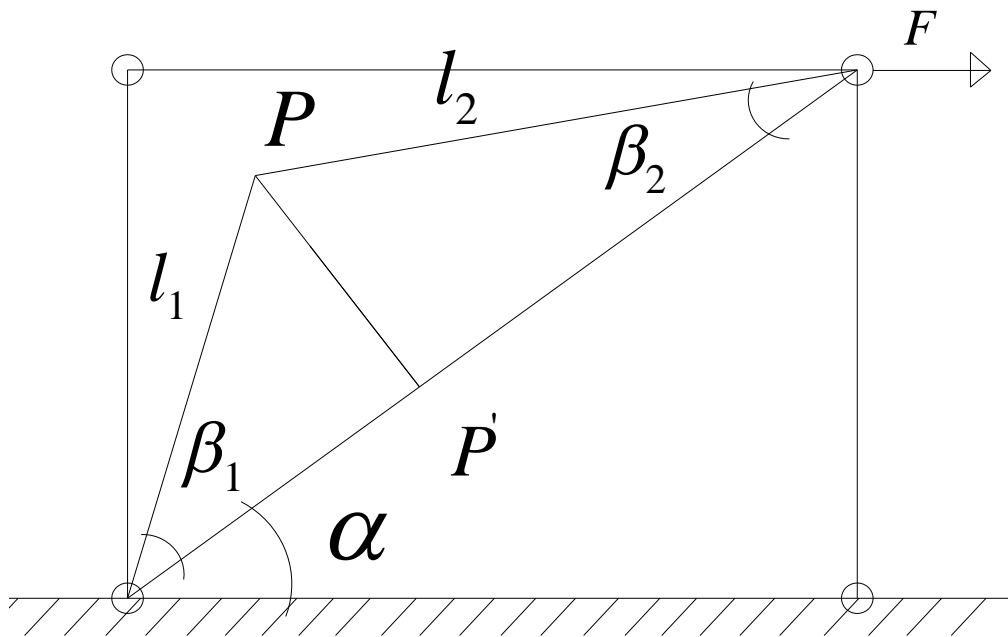


Figura 4.1 Lo schema di calcolo del controvento

### 3.1) CALCOLO DELLA RIGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO.

Con riferimento alla figura 1.1 dove viene rappresentato lo schema fondamentale del calcolo della struttura si desidera trovare la rigidezza del controvento alla traslazione in direzione dell'applicazione della forza esterna F.

Come seguito dell'azione della forza F sulla struttura nascono tre reazioni interne

- sforzo normale N
- taglio T
- momento flettente M

Per l'equilibrio del nodo N<sub>3</sub> il controvento in forma triangolare può trasmettere dall'estremità N<sub>3</sub> a quella N<sub>1</sub> una forza P pari a  $P = \frac{F}{\cos \alpha}$  diretta per tutta la lunghezza del controvento secondo la direzione della diagonale N<sub>3</sub> N<sub>1</sub>.

Dalla scomposizione della forza interna P si ricavano le azioni interne della struttura:

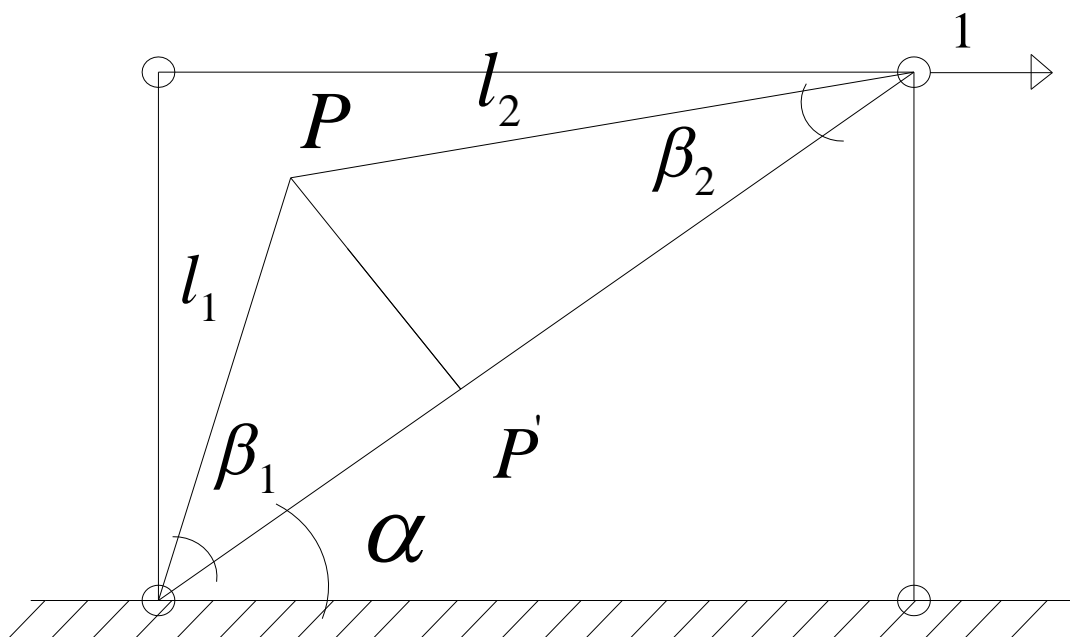
- $N_2 = P \cos \beta_2 = \frac{F}{\cos \alpha} \cos \beta_2$
- $T_2 = P \sin \beta_2 = \frac{F}{\cos \alpha} \sin \beta_2$
- $M_2 = P d_{x_2} = \frac{F}{\cos \alpha} d_{x_2} = \frac{F}{\cos \alpha} x_2 \sin \beta_2$
- $N_1 = P \cos \beta_1 = \frac{F}{\cos \alpha} \cos \beta_1$
- $T_1 = P \sin \beta_1 = \frac{F}{\cos \alpha} \sin \beta_1$
- $M_1 = P d_{x_1} = \frac{F}{\cos \alpha} d_{x_1} = \frac{F}{\cos \alpha} x_1 \sin \beta_1$

Le azioni con il pedice 2 sono riferite al tratto di controvento inclinato dell'angolo  $\beta_2$  rispetto alla diagonale del telaio e le azioni con il pedice 1 sono riferite al tratto inclinato del angolo  $\beta_1$ .

$x_2$  e  $x_1$  indicano rispettivamente l'ascissa rettilinea del tratto 2 e quello del tratto 1. Lungo queste ascisse si faranno gli integrali per il calcolo degli spostamenti e di conseguenza delle rigidezze dei controventi.

Per questo tipo di strutture proprio per la loro forma geometrica la deformabilità maggiore cioè quella che governa gli spostamenti è data dalla deformabilità flessionale della struttura. Questa è una delle ragioni per cui si sceglie questa forma geometrica della struttura. Le deformabilità assiali e taglienti di queste strutture sono molto piccole rispetto a quella flessionale per cui si decide di trascurare nel calcolo del legame  $F - \delta$  del controvento, quindi si considera per il calcolo delle rigidezze della struttura la sola deformabilità flessionale.

Il metodo che si usa per il calcolo della rigidezza della struttura è il Principio Dei Lavori Virtuali. Si risolve la struttura si trovano le sue azioni interne e di conseguenza le caratteristiche di deformazione interne del sistema reale e si considera che per queste deformazioni effettuano lavoro delle componenti di sollecitazione interne date da un sistema fittizio.



**Figura 1.2 Sistema fittizio di calcolo**

Come sistema reale per il calcolo si prende quello in figura 1.1 e come sistema fittizio quello in figura 1.2

Il momento interno nel tratto 2 con rispettiva ascissa rettilinea  $x_2$  da 0 a  $l_2$  vale

$$M_2 = Pd_{x_2} = \frac{F}{\cos \alpha} d_{x_2} = \frac{F}{\cos \alpha} x_2 \sin \beta_2$$

Quindi la curvatura  $\chi_2$  vale

$$\chi_2 = \frac{M_2}{EJ} = \frac{Pd_{x_2}}{EJ} = \frac{F}{\cos \alpha EJ} d_{x_2} = \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_2 \text{sen} \beta_2$$

Il momento interno nel tratto 1 cioè con rispettiva ascissa rettilinea  $x_1$  da 0 a  $l_1$  vale

$$M_1 = Pd_{x_1} = \frac{F}{\cos \alpha} d_{x_1} = \frac{F}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1$$

Quindi la curvatura  $\chi_1$  vale

$$\chi_1 = \frac{M_1}{EJ} = \frac{Pd_{x_1}}{EJ} = \frac{F}{\cos \alpha EJ} d_{x_1} = \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_1 \text{sen} \beta_1$$

Il momento sollecitante interno fittizio nel tratto 2 vale

$$M'_2 = \frac{1}{\cos \alpha} d_{x_2} = \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2$$

Il momento sollecitante interno fittizio nel tratto 1 vale

$$M'_1 = \frac{1}{\cos \alpha} d_{x_1} = \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1$$

A questo punto posso applicare il Principio Dei Lavori Virtuali.

$$1 \cdot \delta = \left[ \int_0^{l_1} M'_1(x) \cdot \frac{M_1(x)}{EJ} dx \right]$$

Divido l'integrale in due parti quello sul tratto 1 e quello sul tratto 2

$$1 \cdot \delta_1 = \left[ \int_0^{l_1} M'_1(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ} dx_1 \right]$$

$$\delta_1 = \left[ \int_0^{l_1} M'_1(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ} dx_1 \right] = \int_0^{l_1} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{l_1} x_1^2 \cdot dx_1$$

$$\delta_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{l_1} x_1^2 \cdot dx_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \text{sen}^2 \beta_1 \cdot \frac{l_1^3}{3} = \frac{F \cdot \text{sen}^2 \beta_1}{\cos^2 \alpha EJ} \cdot \frac{l_1^3}{3} = \frac{F \cdot d^2 \cdot l_1}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

$$1 \cdot \delta_2 = \left[ \int_0^{l_2} M'_2(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ} dx_2 \right]$$

$$\delta_1 = \left[ \int_0^{l_2} M'_2(x_1) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ} dx_2 \right] = \int_0^{l_2} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \text{sen}^2 \beta_2 \int_0^{l_2} x_2^2 \cdot dx_2$$

$$\delta_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \sin^2 \beta_2 \int_0^{l_2} x^2 \cdot dx_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \sin^2 \beta_2 \cdot \frac{l_2^3}{3} = \frac{F \cdot \sin^2 \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \cdot \frac{l_2^3}{3} = \frac{F \cdot d^2 \cdot l_2}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

Lo spostamento totale che avviene sulla struttura come seguito dell'applicazione della forza F vale

$$\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2 = \frac{F \cdot d^2 \cdot l_1}{3 \cos^2 \alpha EJ} + \frac{F \cdot d^2 \cdot l_2}{3 \cos^2 \alpha EJ} = \frac{F \cdot d^2}{3 \cos^2 \alpha EJ} (l_1 + l_2) = \frac{F \cdot d^2 \cdot l_{tot}}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

In questa prima fase di calcolo è stata usata una delle due ipotesi fondamentali quella sul momento d'inerzia costante lungo tutto il controvento.

A questo punto è facile ricavare la rigidezza elastica della struttura

$$\delta = \frac{F}{K} = \frac{F \cdot d^2 \cdot l_{tot}}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

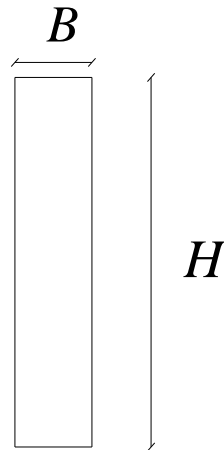
$$K = \frac{3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot EJ}{d^2 \cdot l_{tot}}$$

Questo risultato teorico approva ciò che si aspetta dalla realtà fisica della struttura. Secondo la formula ricavata la rigidezza è inversamente proporzionale a d ed a l oppure la deformabilità è proporzionale a d ed a l, questo è facile da intuire che è vero perché essendo la deformabilità che misuriamo di tipo flessionale più è grande d più la struttura si deforma, e vero anche che a parità di d più e grande l più sono grandi le deformazioni sulla struttura.

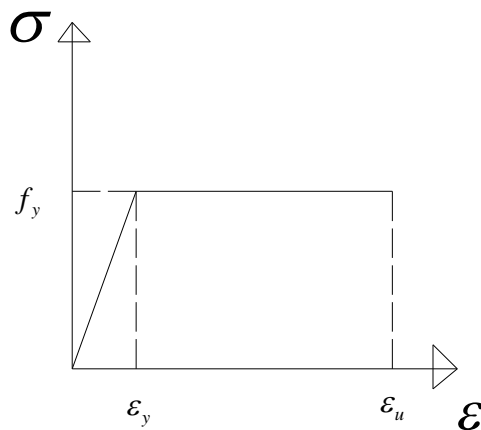
### **3.2) CALCOLO DELLA FORZA DI SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA**

La forma della sezione studiata in questo punto per questo tipo di strutture è quella rappresentata in figura 1.3 cioè una forma rettangolare. Come è stato detto in precedenza all'aumentare progressivo della forza esterna ad un certo punto per un determinato valore della forza nella sezione maggiormente sollecitata che con riferimento alla figura 1.1 corrisponde al punto P del controvento, la tensione raggiunge il valore di snervamento. Questo punto divide sul legame F – δ del controvento gli spostamenti elastici e lineari da quelli non lineari

H



**Figura 1.3 Forma geometrica della sezione**



**Figura 1.4 Legame costitutivo usato**

Si vede chiaramente che la forza che porta allo snervamento la sezione è funzione di tanti parametri che sono:

- Le caratteristiche geometriche della struttura di controvento
- il legame costitutivo del materiale che compone il controvento
- le caratteristiche geometriche della sezione del controvento

Si capisce allora che la forza di snervamento della struttura è unica per ogni controvento perciò il legame  $F - \delta$  del controvento sarà anche lui funzione di tutti i parametri elencati in precedenza e unico per ogni controvento. Quindi per procedere alla costruzione di questo legame si devono determinare i tre parametri sopraindicati.

Da questo punto dello studio in poi si userà un determinato controvento per illustrare il modo di costruzione del legame  $F - \delta$  del controvento, questo modo è uguale per tutti i tipi di controvento (cambiano solo i valori numerici) perciò il costruttore una volta fissata la forma geometrica del controvento e della sua sezione e il suo legame costitutivo può procedere al calcolo del suo legame  $F - \delta$ .

La scelta di procedere con i parametri meccanici e geometrici della struttura determinati già dal inizio di questa fase del lavoro è imposto anche dal fatto che il calcolo degli spostamenti non lineari cioè per valore della forza superiori alla forza di snervamento richiede il calcolo di integrali che può essere effettuato solo per via numerica quindi i parametri sopra indicati devono essere per forza determinati. Cambiando il valore di questi parametri il costruttore può valutare il legame del controvento di interesse.

Con riferimento alla figura 1.1 i parametri geometrici della struttura studiata sono i seguenti

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$l_1 = 2,38m$$

$$l_2 = 3,27m$$

$$d = 1,3m$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \alpha = 36,87^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1,3}{2,38} = 0,545 \quad \beta_1 = 33,02^\circ$$

$$\operatorname{sen} \beta_1 = \frac{1,3}{3,27} = 0,397 \quad \beta_1 = 23,43^\circ$$

Con riferimento alla figura 1.3 dove viene rappresentata la forma della sezione i parametri geometrici usati sono

$$b = 0,05m$$

$$h = 0,3m$$

Con riferimento alla figura 1.4 dove viene rappresentato il legame costitutivo usato cioè quello di Prandtl i parametri meccanici della sezione sono



$$f_y = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = 1,3 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_u = 100 \cdot \varepsilon_y = 13\%$$

$$E = 2039432 \text{ kg/cm}^2$$

Si procede in prima fase al calcolo della sezione

$$w_{el} = \frac{bh^2}{6} = \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,09}{6} = 75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$M_y$  oppure il momento di snervamento della sezione vale

$$M_y = w_{el} \cdot f_y = 75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot 2700 \text{ kg/cm}^2 = 20250 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Secondo la geometria della struttura il momento massimo cioè nel punto  $P$  vale

$$M_{\max} = \frac{F \cdot d}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \quad d = 1,3 \text{ m}$$

$$M_{\max} = \frac{F}{0,8} \cdot 1,3 \text{ m} = F \cdot 1,625 \text{ m}$$

D a cui si ricava la forza di snervamento

$$F_y = \frac{M_y}{1,625} = \frac{20250 \text{ kgm}}{1,625 \text{ m}} = 12461,53 \text{ kg}$$

Valuto lo spostamento elastico come

$$\delta_{el} = \frac{F_y}{K} \quad J = \frac{bh^3}{12} = 1,125 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^4$$

$$K = \frac{3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot EJ}{d^2 \cdot l} = \frac{3 \cdot 0,64 \cdot 2039432 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 1,125 \cdot 10^{-4} \cdot \text{m}^4}{9,5485 \cdot \text{m}^3} = 461347 \text{ kg/m}$$

$$\delta_{el} = \frac{F_y}{K} = \frac{12461,53 \text{ kg}}{461347 \text{ kg/m}} = 0,027 \text{ m}$$

Abbiamo fino a questo punto dello studio definito la prima parte del legame  $F - \delta$  del controvento cioè la sua rigidezza elastica e il punto dove iniziano gli spostamenti non lineari della struttura.

Con il superamento di questo valore della forza la plasticizzazione si espande sia sulla sezione maggiormente sollecitata sia su quelle adiacenti dove il momento corrispondente supera quello elastico. Si viene a sviluppare così tutta la duttilità che la struttura può offrire.

Come abbiamo già detto in precedenza l'unica deformabilità che consideriamo è quella flessionale e le caratteristiche della deformazione sono le curvature che nascono sulla struttura come seguito dell'applicazione della forza, quindi per procedere con lo studio è indispensabile conoscere la distribuzione delle curvature sulla lunghezza del controvento sia sulle sezioni dove siamo ancora in campo elastico lineare sia su quelle dove il momento ha già superato il momento di snervamento.

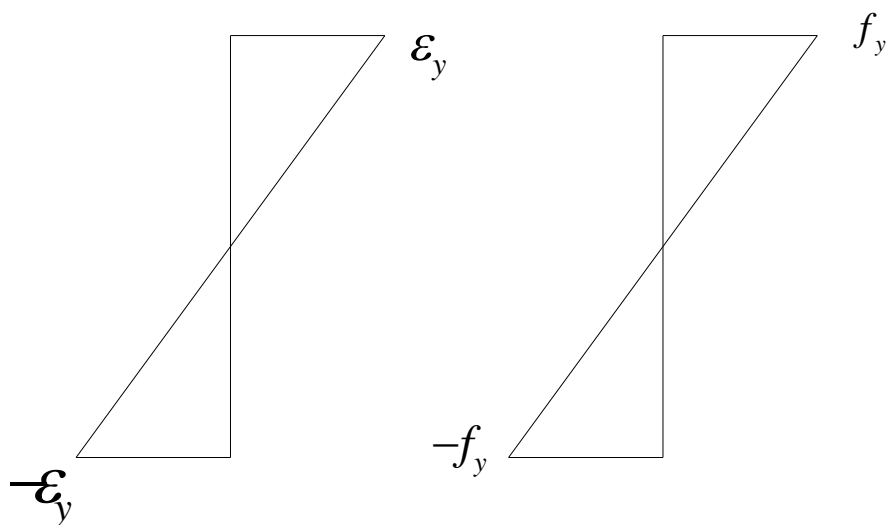
Dobbiamo quindi conoscere il diagramma  $M - \chi$  momento curvatura che deriva dall'applicazione del legame costitutivo elastico – perfettamente plastico cioè legame di Prandtl.

In figura 1.5 e 1.6 vengono rappresentate le distribuzioni delle deformazioni e delle tensioni in campo elastico e dopo lo snervamento. Dallo studio di questi grafici e dalle relazioni che legano le deformazioni con le curvature si ricava il legame momento curvatura della sezione.

La sua espressione analitica è

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

$$M_u = \frac{3}{2} M_y$$



**Figura 15 Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo elastico**

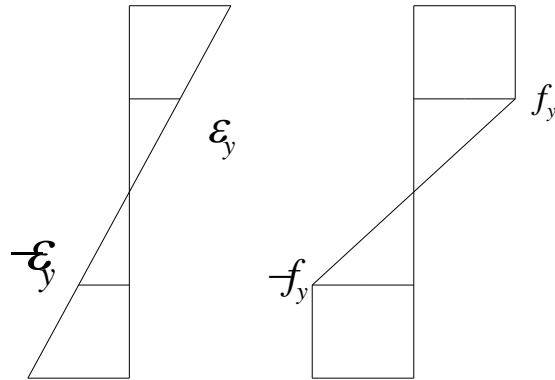


Figura 1.6 Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo non lineare

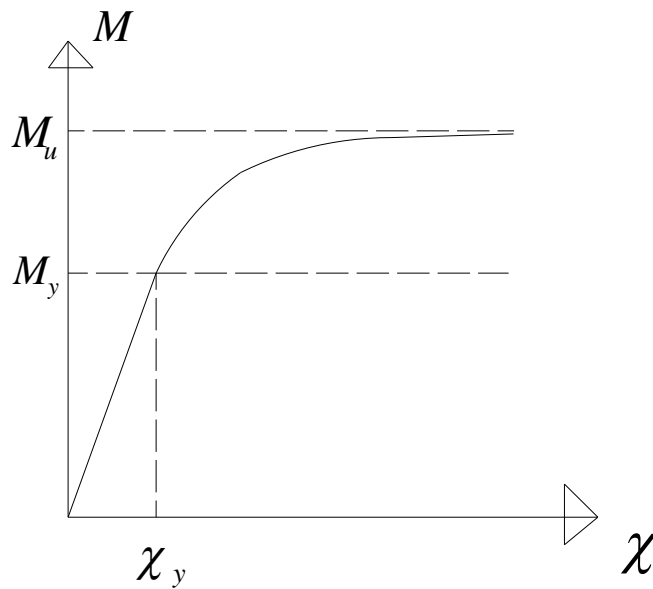


Figura 1.7 Legame momento curvatura derivante dal legame costitutivo di Prandtl

In figura 1.7 viene rappresentato il grafico del legame  $M - \chi$  momento curvatura

L'espressione analitica che lega il momento alla curvatura espresso sopra è valida solo per la parte non lineare del grafico cioè per momenti compresi tra  $M_y$  e  $M_u$ .

Dall'espressione analitica si vede che

$$M = M_y \quad \text{per} \quad \chi = \chi_y$$

$$M \mapsto M_u \quad \text{per} \quad \chi \mapsto \chi_u$$

Dopo lo snervamento della sezione più sollecitata essa si plasticizza seguendo la legge che esprime il legame  $M - \chi$  momento curvatura in figura 1.7 . Man mano che la forza esterna aumenta si procede sia alla plasticizzazione di tale sezione sia alla diffusione della plasticizzazione alle sezioni adiacenti ad essa che svilupperanno delle curvature seguendo esattamente la legge  $M - \chi$  momento curvatura che governa il sistema. Queste curvature sulle sezioni si trasformano in deformazioni totali della struttura che in questo modo sviluppa tutta la sua duttilità.

In figura 1.8 , 1.9 e 1.10 è rappresentato ciò che succede alle sezioni del controvento con l'aumentare della forza esterna. In figura 1.8 si vede che il momento esterno ha raggiunto il valore dello snervamento nella sezione più sollecitata. Nella figura seguente 1.9 si vede che esiste una parte del controvento dove il momento esterno ha superato quello dello snervamento. In questo caso nella parte indicata come  $X_{el}$  in figura le curvature sono ancora in campo lineare quindi seguono la legge

$$\chi = \frac{M}{EJ}.$$

Nella parte indicata come  $X_{pla}$  le curvature sono in campo plastico quindi seguono la legge

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

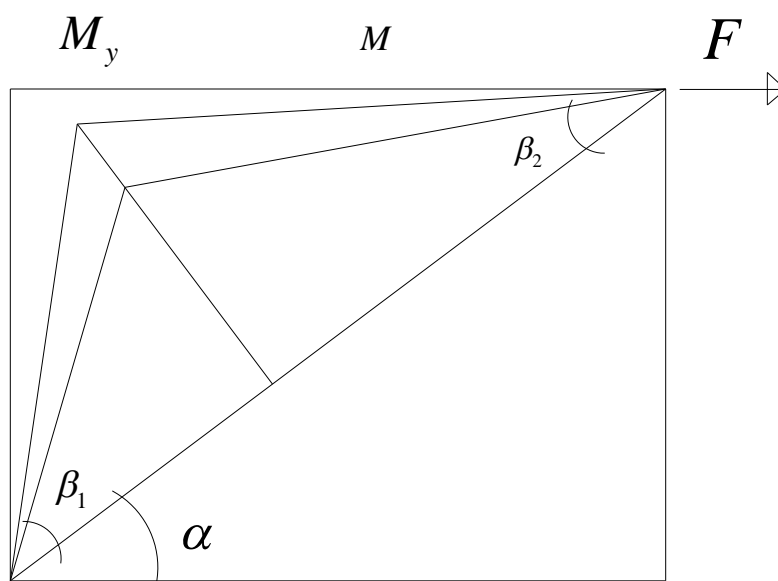
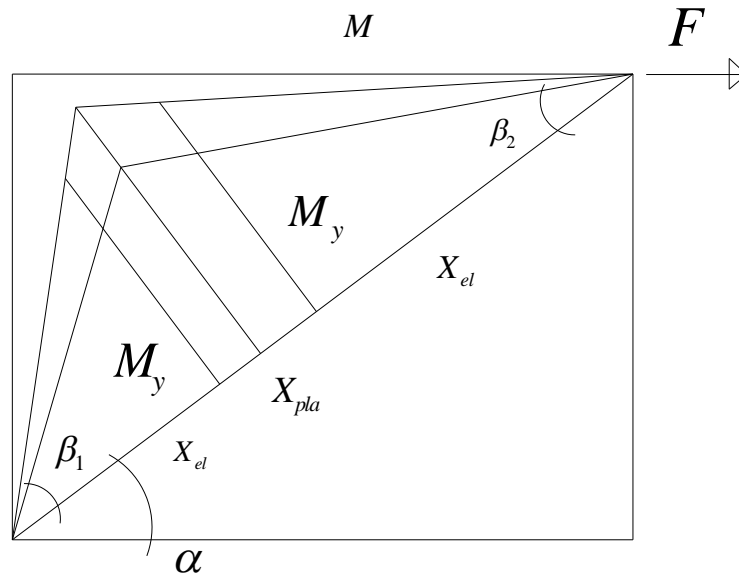
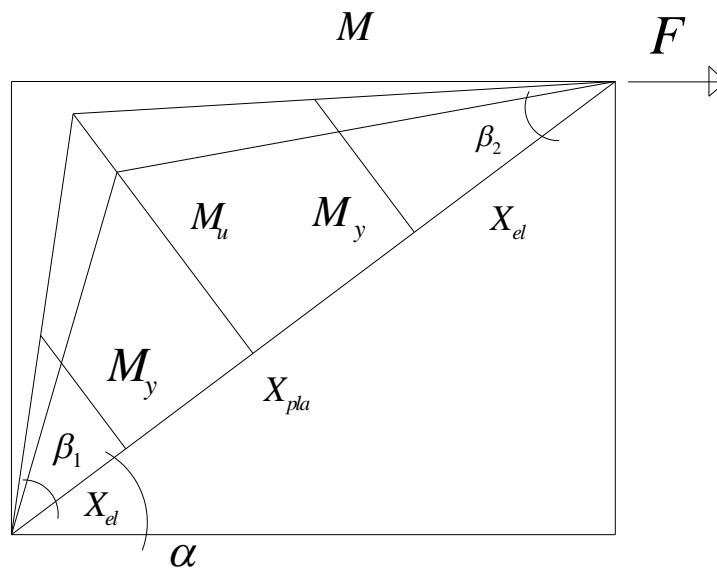


Figura 1.8 Snervamento della prima sezione.



**Figura 1.9 Difusione della plasticizzazione.**



**Figura 1.10 Raggiungimento del momento ultimo**

In figura 1.10 si vede invece che per un determinato valore di forza il momento nella sezione più sollecitata ha raggiunto il suo valore ultimo, questo è l'ultimo valore della forza che determina degli spostamenti non lineari perché in quel punto si realizza la cerniera plastica, l'asta si stende e avvengono degli spostamenti rigidi sulla struttura.

Per calcolare la parte del legame  $F - \delta$  del controvento in campo non lineare si procede per passi oppure incrementi di carico. Per ogni valore di carico superiore al valore di snervamento si calcola fin dove è stata diffusa la zona plastica e in questa zona si dà alle curvature il valore che deriva dal

legame  $M - \chi$  in campo non lineare. Nella zona restante in campo elastico si da alle curvature il valore che deriva dalla legge  $\chi = \frac{M}{EJ}$ . Si applica il Principio Dei Lavori Virtuali e si determina il valore dello spostamento corrispondente. Si procede in questo modo fino al valore della forza che da il momento massimo. Dopo di che la parte del legame  $F - \delta$  del controvento in campo non lineare si costruisce per l'interpolazione dei punti trovati in precedenza. Per prima cosa si inverte il legame  $M - \chi$ .

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

$$\frac{M}{M_u} = \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

$$1 - \frac{M}{M_u} = \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M_u} \right)}}$$

$$M_y = 1,625 \cdot F_y$$

$$M_u = 1,5 \cdot M_y = 2,4375 \cdot F_y$$

L'integrale generale per il calcolo degli spostamenti si divide in 4 parti

- Parte elastica destra
- Parte non lineare destra
- Parte elastica sinistra
- Parte non lineare sinistra

Nelle parti elastiche ho

$$\delta = \int_0^{x_{el}} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx$$

Nelle parti non lineari ho

$$\delta = \int_{x_{el}}^{x_{pla}} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx$$

- PASSO 1

$$F_1 = 1,1 \cdot F_y = 13708 \cdot \text{kg}$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 17134 \text{kg}$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 1,1818 \text{m}$$

$$x_{pla}^{1d} = \frac{1,3 - 1,1818}{\operatorname{sen} \beta_2} = 0,3 \text{m}$$

$$x_{pla}^{1s} = \frac{1,3 - 1,1818}{\operatorname{sen} \beta_1} = 0,22 \text{m}$$

Quindi entro in campo non lineare per 30 cm dalla parte destra e 22 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_1^1 = \int_0^{2,97} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,97} x^2 \cdot dx = 0,01288 \text{m}$$

$$\delta_1^2 = \int_{2,97}^{3,27} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,97}^{3,27} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,224291 \cdot x)}} dx = 0,00433 \text{m}$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{2,16} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,16} x^2 \cdot dx = 0,0093 \text{m}$$

$$\delta_1^4 = \int_{2,16}^{2,38} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,16}^{2,38} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,3074293 \cdot x)}} dx = 0,0032m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_1^3 + \delta_1^4 = 0,03m$$

PUNTO 1 SUL CAMPO NON LINEARE	$F$	$\delta$
	13708kg	0,03m

- PASSO 2

$$F_2 = 1,2 \cdot F_y = 14954 \cdot kg$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos\alpha} = 18692kg$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 1,0833m$$

$$x_{pla}^{2d} = \frac{1,3 - 1,0833}{\text{sen}\beta_2} = 0,54m$$

$$x_{pla}^{2s} = \frac{1,3 - 1,0833}{\text{sen}\beta_1} = 0,4m$$

Quindi entro in campo non lineare per 54 cm dalla parte destra e 40 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_2^1 = \int_0^{2,73} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,73} x^2 \cdot dx = 0,011m$$

$$\delta_2^2 = \int_{2,73}^{3,27} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,73}^{3,27} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,2446815 \cdot x)}} dx = 0,008m$$



$$\delta_2^3 = \int_0^{1,98} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,98} x^2 \cdot dx = 0,0079m$$

$$\delta_2^4 = \int_{1,98}^{2,38} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,98}^{2,38} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,335377 \cdot x)}} dx = 0,006m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 = 0,033m$$

PUNTO 2 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	14954kg	0,033m

- PASSO 3

$$F_3 = 1,3 \cdot F_y = 16200 \cdot kg$$

$$P_3 = \frac{F_3}{\cos \alpha} = 20250kg$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 1m$$

$$x^{3d}_{pla} = \frac{1,3-1}{\text{sen} \beta_2} = 0,76m$$

$$x^{3s}_{pla} = \frac{1,3-1}{\text{sen} \beta_1} = 0,56m$$

Quindi entro in campo non lineare per 76 cm dalla parte destra e 56 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_3^1 = \int_0^{2,51} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,51} x^2 \cdot dx = 0,0092m$$

$$\delta_3^2 = \int_{2,51}^{3,27} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,51}^{3,27} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,265071 \cdot x)}} dx = 0,012m$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{1,82} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,82} x^2 \cdot dx = 0,0065m$$

$$\delta_3^4 = \int_{1,82}^{2,38} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,82}^{2,38} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,3633258 \cdot x)}} dx = 0,0087m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 + \delta_3^4 = 0,03638m$$

PUNTO 3 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	16200kg	0,03638m

- PASSO 4

$$F_4 = 1,4 \cdot F_y = 17450 \cdot kg$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 21812kg$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,92m$$

$$x_{pla}^{4d} = \frac{1,3 - 0,92}{\text{sen} \beta_2} = 0,93m$$

$$x_{pla}^{4s} = \frac{1,3 - 0,92}{\text{sen} \beta_1} = 0,7m$$

Quindi entro in campo non lineare per 93 cm dalla parte destra e 70 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_4^1 = \int_0^{2,34} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,34} x^2 \cdot dx = 0,008m$$

$$\delta_4^2 = \int_{2,14}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,34}^{3,27} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,2855248 \cdot x)}} dx = 0,017m$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{1,68} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,68} x^2 \cdot dx = 0,0055m$$

$$\delta_4^4 = \int_{1,42}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,68}^{2,38} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,391360 \cdot x)}} dx = 0,01339m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 = 0,044m$$

PUNTO 4 SUL CAMPO NON LINERE

$F$	$\delta$
17450kg	0,044m

- PASSO 5

$$F_5 = 1,5 \cdot F_y = 18700 \cdot kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 23375kg$$

$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,87m$$

$$x_{pla}^{5d} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_2} = 1,09m$$

$$x_{pla}^{5s} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_1} = 0,8m$$

Quindi entro in campo non lineare per 1,09 m dalla parte destra e 80 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_5^1 = \int_0^{2,18} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,18} x^2 \cdot dx = 0,007m$$

$$\delta_5^2 = \int_{2,18}^{3,27} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{2,18}^{3,27} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,3057999999 \cdot x)}} dx = 0,028m$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{1,58} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,58} x^2 \cdot dx = 0,005m$$

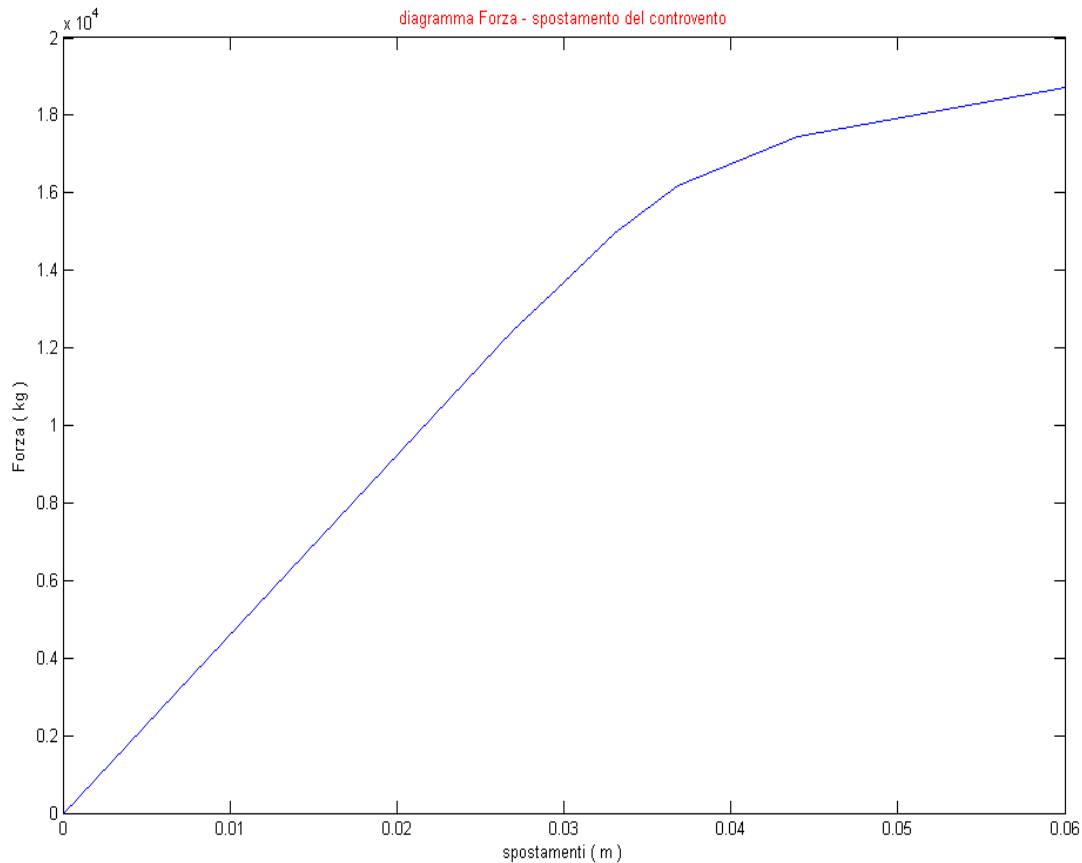
$$\delta_5^4 = \int_{1,58}^{2,38} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} \cdot dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,58}^{2,38} \frac{x}{\sqrt{3(1 - 0,4199999999 \cdot x)}} dx = 0,0195m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 + \delta_5^3 + \delta_5^4 = 0,06m$$

PUNTO 5 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	18700kg	0,06m

Con l'applicazione della forza ultima il procedimento incrementale finisce perche come è stato detto in precedenza questo valore della forza esterna provoca il raggiungimento del momento ultimo sulla sezione maggiormente sollecitata. A questo punto dello studio la seconda parte del calcolo del legame  $F - \delta$  del controvento è conclusa. Abbiamo trovato dei punti forza spostamento della struttura in campo non lineare. Questi punti gli aggiungo alla parte elastica lineare del grafico

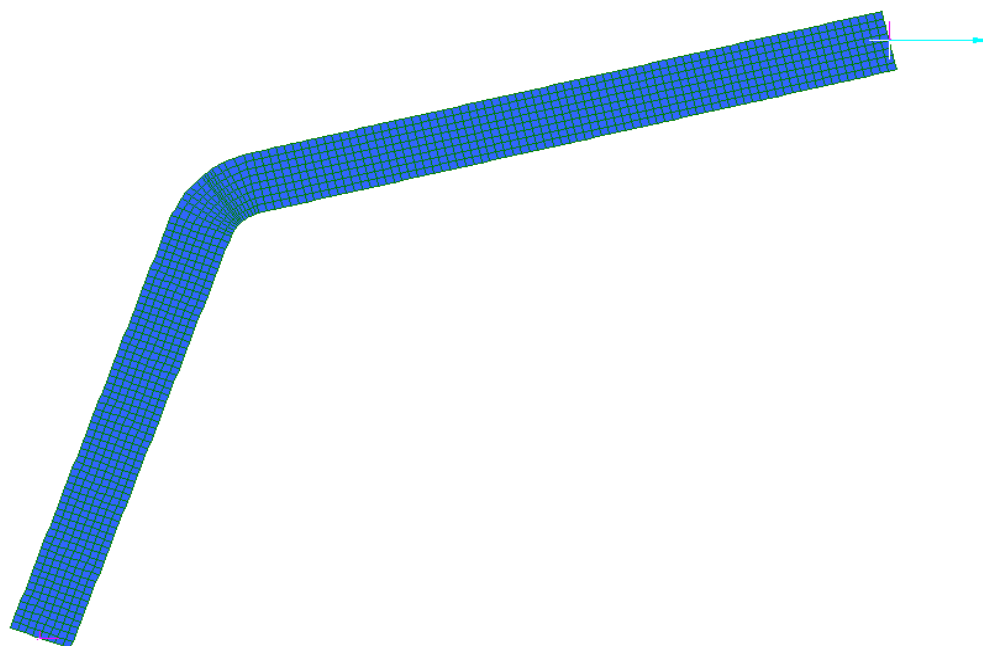
e dal andamento del grafico verifico la duttilità complessiva della struttura costruita secondo le ipotesi di base indicati all'inizio di questo capitolo.



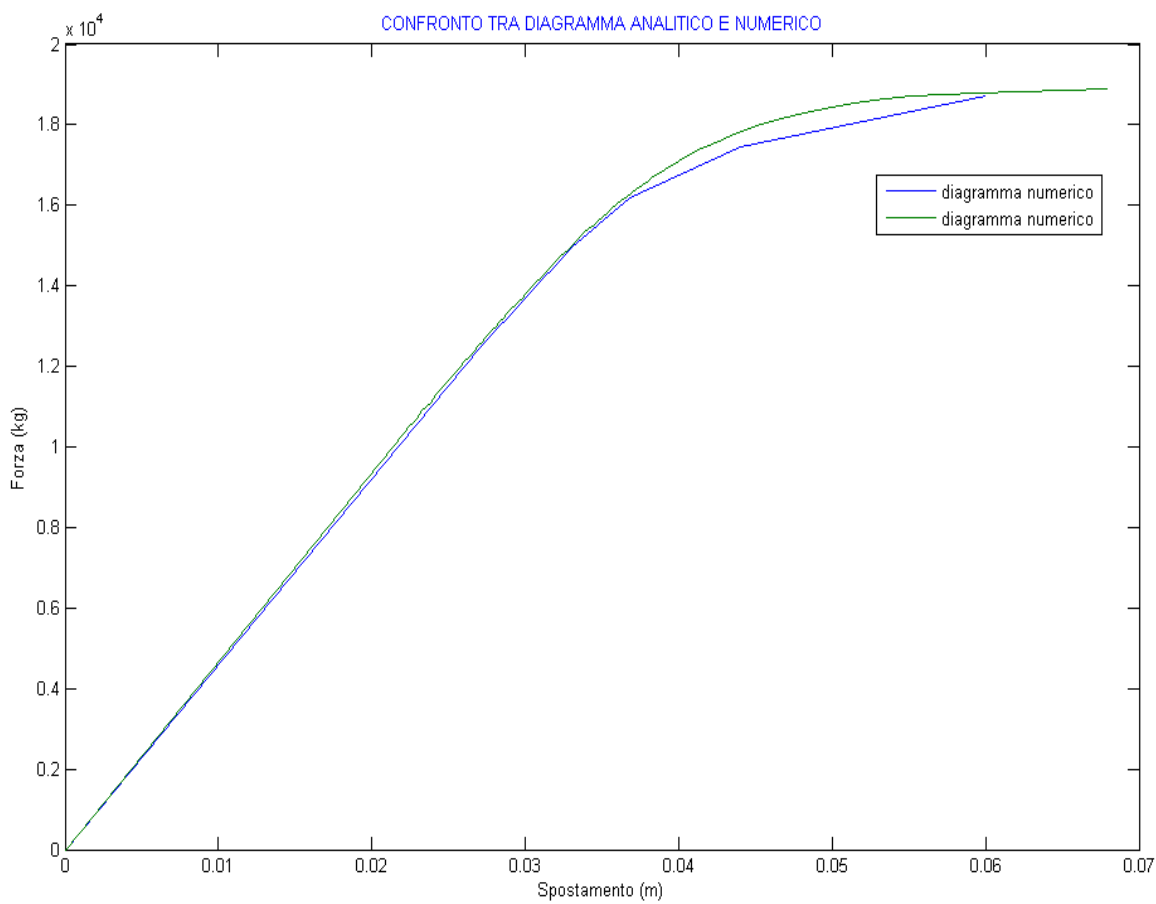
**Figura 1.11 Legame Forza - Spostamento del controvento**

In questo modo si è calcolato il legame  $F - \delta$  del controvento costruito geometricamente e meccanicamente secondo le ipotesi fatte in precedenza. Così si possono costruire legami  $F - \delta$  usando il legame costitutivo di Prandtl per qualsiasi geometria triangolare della struttura usando il metodo di prima.

Dopo il calcolo analitico del diagramma della struttura si è fatto anche un calcolo numerico con il programma STRAUS 7. Il grafico del confronto tra la soluzione analitica e quella numerica è rappresentato in figura 1.13. In figura 1.12 invece è rappresentato il modello della struttura fatto con il programma di calcolo per la soluzione numerica.



**Figura 1.12 Modello numerico della struttura**



**Figura 1.13 Confronto tra diagramma analitico e numerico**

Si vede chiaramente che questo legame è poco duttile. Gli spostamenti per valori di forza vicino a quella di snervamento sono quasi lineari e lo spostamento ultimo non è affatto grande rispetto gli spostamenti lineari. Tutto questa inconvenienza strutturale si può spiegare analiticamente.

Come è stato detto la duttilità della struttura è la sua capacità di offrire spostamenti elevati in campo non lineare. Secondo il nostro modello di calcolo gli spostamenti in campo non lineare sono dati dalla formula

$$\delta = \int_{x_{el}}^{x_{pla}} \frac{1 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} dx = \frac{F_y \cdot d \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{x_{el}}^{x_{pla}} \frac{x}{\sqrt{3(1-R \cdot x)}} dx$$

Dove R è una costante che dipende dal valore della forza applicata. Quindi gli spostamenti sono

prodotto di una costante  $\frac{F_y \cdot d \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha^2 \cdot EJ}$  con l'integrale  $\int_{x_{el}}^{x_{pla}} \frac{x}{\sqrt{3(1-R \cdot x)}} dx$  che possiamo chiamarlo

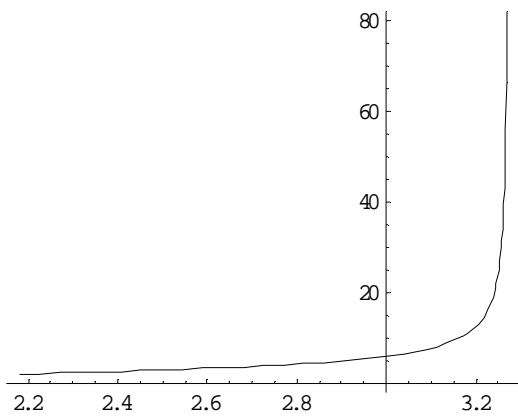
coefficiente di amplificazione degli spostamenti.

La funzione che sta sull'integrale  $\frac{x}{\sqrt{3(1-R \cdot x)}}$  è una funzione che descrive come variano le

curvature in campo non lineare sulla lunghezza del controvento. Ci si aspetta che per valori di forza che si avvicinano alla forza ultima le curvature vadano all'infinito nelle sezioni vicino alla sezione maggiormente sollecitata. In realtà se rappresentiamo il grafico della funzione di sopra

$$\frac{x}{\sqrt{3(1-R \cdot x)}}$$

nella zona non lineare per la forza ultima usando il programma MATHEMATICA ho l'andamento rappresentato in figura 1.12.



**Figura 1.12** funzione amplificatore degli spostamenti non lineari

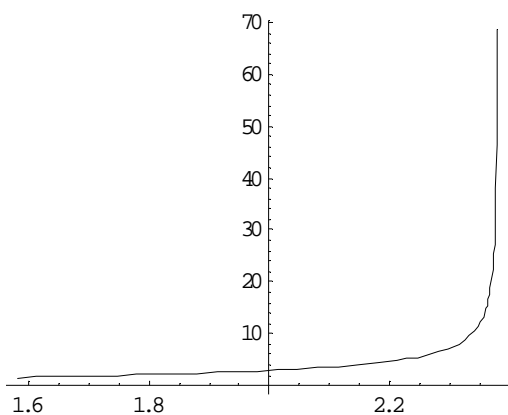
Si vede che le curvature tendono all'infinito in una zona molto piccola se non solo nella sezione critica, questo fa sì che quando si fa l'integrale di questa funzione questo tende a un valore finito e per di più non elevato rispetto ai valori che si hanno per forze inferiori alla forza ultima.

Per la forza ultima questo valore è 5,33.

Le curvature sono date dalla espressione

$$\chi_x = \frac{\chi_y}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} = \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}}{2,4375 \cdot F_y} \right)}} = \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\sqrt{3(1 - R \cdot x)}}$$

Il loro grafico è la figura 1.13



**Figura 5.13** Curvature in campo non lineare per la forza ultima



Questa inconvenienza strutturale è frutto del legame costitutivo che è stato usato. Il legame di Prandtl usato con un'altezza della sezione costante produce questa duttilità strutturale limitata, quindi bisogna trovare soluzioni strutturali geometriche e meccaniche diverse. Queste soluzioni saranno ripresentate nei capitoli seguenti.

## **CAPITOLO 4**

### **FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE VARIABILE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.**

In questo capitolo viene studiata la duttilità della struttura di controvento adottando una forma geometrica diversa da quella usata nel primo capitolo. Si costruisce la struttura con una altezza della sezione variabile lungo il controvento e si cerca di verificare quali benefici si possono trarre in termini degli spostamenti ultimi della struttura. Questa è l'unica differenza rispetto alla soluzione strutturale di prima perché in termini meccanici si continua ad usare il legame costitutivo di Prandtl per il materiale. La procedura del lavoro anche in questa parte dello studio è uguale a quella di prima cioè si calcola il legame  $F - \delta$  del controvento calcolando prima la sua rigidezza elastica e poi calcolando in modo incrementale gli spostamenti in campo non lineare della struttura, infine si disegna il legame e si verifica la convenienza di questa scelta strutturale.

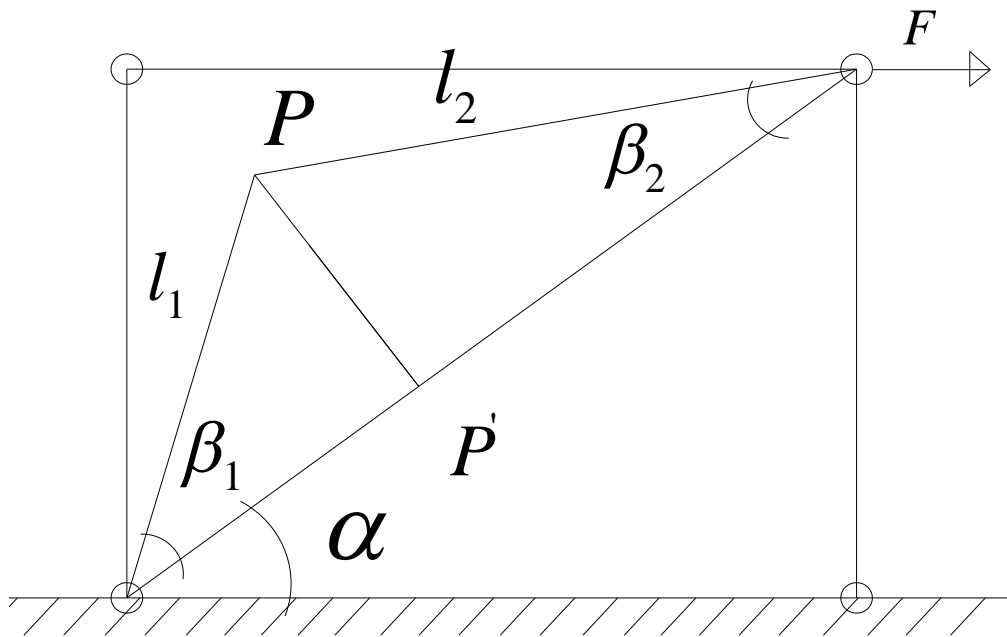
Le ipotesi fondamentali di calcolo in questo capitolo sono le seguenti:

- a) Altezza della sezione variabile lungo la lunghezza del controvento, di conseguenza momento d'inerzia variabile
- b) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame di Prandtl cioè il legame elastico perfettamente plastico, di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti è quello che deriva dal legame costitutivo di Prandtl

Come è stato verificato prima nel capitolo precedente il legame di Prandtl accoppiato ad una geometria che prevede un'altezza della sezione costante sulla lunghezza del controvento produce dei risultati strutturali non convenienti dal punto di vista degli spostamenti ultimi e della duttilità del controvento. Quindi si cercano soluzioni strutturali differenti per trovare dei miglioramenti.

Il primo modo di cambiare la struttura è quello di cambiare la sua altezza della sezione e di vedere in quale modo questa influisce sugli spostamenti che avrà la nostra struttura.

Lo schema strutturale di calcolo è la stessa di prima



**Figura 4.1 Schema di calcolo della struttura**

Si applica una forza esterna  $F$  e si calcolano gli spostamenti in direzione orizzontale del controvento. Come prima si trova la rigidezza elastica del controvento e poi aumentando la forza si calcolano i suoi spostamenti non lineari verificando la loro entità.

Guardando lo schema della figura 4.1 si vede che il momento sollecitante ha un andamento lineare sulla struttura ( vedi figura 4.2 ), quindi ci si aspetta che con il crescere della forza nella sezione maggiormente sollecitata raggiunga il valore di snervamento. Dopo di che si entra in campo non lineare e la plasticizzazione si diffonde sia sulla sezione stessa sia su quelle adiacenti producendo così la duttilità della nostra struttura. Abbiamo visto nel capitolo precedente che il modo in cui si diffonde la plasticizzazione nelle sezioni adiacenti e di conseguenza il crescere delle curvature non lineari non è abbastanza rapido per le sezioni ad altezza costante. Se io faccio in modo che la non linearità si diffonda in modo più veloce sulla lunghezza del controvento allora ho trovato la soluzione del mio problema.

Il primo accorgimento che possiamo avere come soluzione di questo problema è quello di avere non linearità in contemporanea su una lunghezza definita del controvento. Questo si traduce analiticamente nel calcolo della struttura di avere una lunghezza del controvento che si plasticizza tutta in contemporanea per lo stesso valore della forza. Quindi avrò un blocco plastico nella mia struttura.

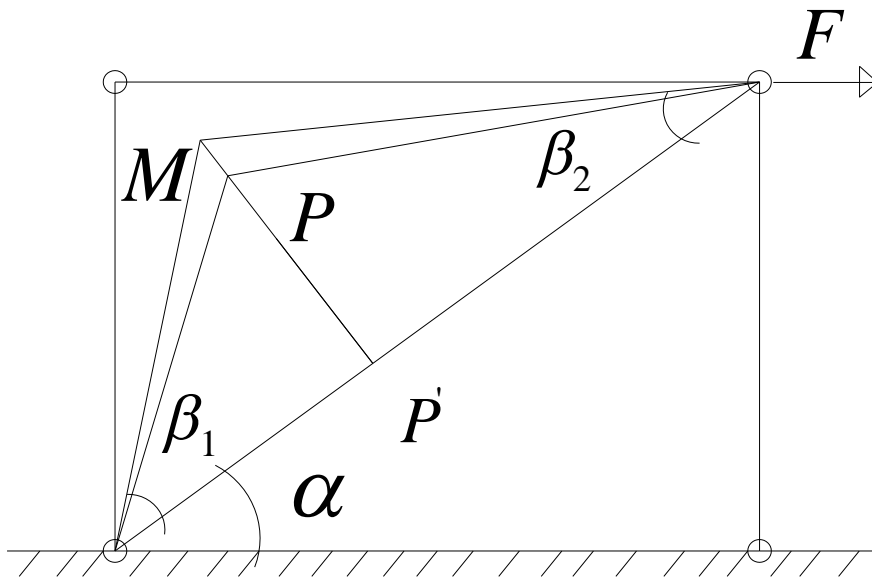


Figura 4.2 Momento sollecitante sulla struttura

#### 4.1) MODALITÀ DI COSTRUZIONE DELLA STRUTTURA E SOLUZIONE ANALITICA DELLA VARIAZIONE DELL'ALTEZZA DELLA SEZIONE SULLA LUNGHEZZA DEL CONTROVENTO

Come è stato detto nell'introduzione di questo capitolo il modo in cui vario l'altezza della sezione è quello di fare in modo che si raggiunga il momento di snervamento in una lunghezza ben definita del controvento che chiamo lunghezza di plasticizzazione.

Il momento che nasce sul controvento di forma triangolare come conseguenza dell'applicazione della forza F vale

$$M_x = \frac{Fd_x}{\cos \alpha}$$

Dove x è l'ascissa rettilinea che descrive il controvento.

Il momento massimo si ha sul punto P del controvento è vale

$$M_{\max} = \frac{Fd}{\cos \alpha}$$

Nel tratto 2 cioè quello inclinato dell'angolo  $\beta_2$  il momento sollecitante in una certa ascissa x vale

$$M_2 = \frac{Fd_x}{\cos \alpha}$$

$$M_2 = \frac{Fd_x}{\cos \alpha} = \frac{F}{\cos \alpha} (d - x \cdot \text{sen} \beta_2) = M_{\max} - \frac{Fx \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}$$

$$M_2 = M_{\max} - \frac{Fx \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} = M_{\max} \left( 1 - \frac{F}{\cos \alpha} \frac{x \cdot \text{sen} \beta_2}{\frac{F}{\cos \alpha} d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{x \cdot \text{sen} \beta_2}{d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{x \cdot \text{sen} \beta_2}{l_2 \cdot \text{sen} \beta_2} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{x}{l_2} \right)$$

Nello stesso modo il momento sollecitante nell'altro tratto cioè in quello inclinato del angolo  $\beta_1$  vale:

$$M_1 = M_{\max} - \frac{Fxsen\beta_1}{\cos \alpha} = M_{\max} \left( 1 - \frac{F}{\cos \alpha} \frac{xsen\beta_1}{\frac{F}{\cos \alpha} d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{xsen\beta_1}{d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{xsen\beta_1}{l_2 \text{sen} \beta_1} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{x}{l_1} \right)$$

Attenzione : per x adesso si intende sempre l'ascissa rettilinea del controvento pero che ha origine nel centro del controvento cioè nel punto più sollecitato.

L'altezza della sezione in  $x = 0$  cioè dove ho il momento massimo e pari a H

$$h_{\max} = H$$

Impongo che la variazione dell'altezza della sezione nell'ascissa x segua la legge:

$$h_{x2} = H \sqrt{1 - \frac{x}{l_2}}$$

$$h_{x1} = H \sqrt{1 - \frac{x}{l_1}}$$

Decido di plasticizzare contemporaneamente un blocco di controvento lungo fino a  $x = l_p$

Suppongo che aumentando la forza F si raggiunga la plasticizzazione nel punto dove ho il momento massimo

$$\frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{M_{\max}}{\frac{bH^2}{6}} = f_y$$

. Nello stesso tempo nel punto  $x = l_p$  il momento sollecitante vale

$$M_{2lp} = M_{\max} - \frac{Fl_p \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} = M_{\max} \left( 1 - \frac{F}{\cos \alpha} \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_2}{\frac{F}{\cos \alpha} d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_2}{d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_2}{l_2 \operatorname{sen} \beta_2} \right)$$

$$M_{2lp} = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p}{l_2} \right)$$

L'altezza della sezione in tale punto vale

$$h_{lp} = H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_2}}$$

Di conseguenza la tensione in tale punto vale

$$\frac{M_{2lp}}{W_{lp}} = \frac{M_{2lp}}{b \left( \frac{H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_2}}}{6} \right)^2} = \frac{M_1 \left( 1 - \frac{l_p}{l_2} \right)}{\frac{bH^2}{6} \left( 1 - \frac{l_p}{l_2} \right)} = f_y$$

Si vede che la plasticizzazione è avvenuta contemporaneamente fino alla lunghezza dove l'altezza della sezione segue la legge sopraindicata.

Nella stessa maniera decido di plasticizzare il controvento dalla parte sinistra cioè quella inclinata del angolo  $\beta_1$  per una lunghezza  $x = l_p$

Suppongo che aumentando la forza F si raggiunga la plasticizzazione nel punto dove ho il momento massimo

$$\frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{M_{\max}}{\frac{bH^2}{6}} = f_y$$

. Nello stesso tempo nel punto  $x = l_p$  il momento sollecitante vale

$$M_{1lp} = M_{\max} - \frac{Fl_p \operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha} = M_{\max} \left( 1 - \frac{F}{\cos \alpha} \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_1}{\frac{F}{\cos \alpha} d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_1}{d} \right) = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p \operatorname{sen} \beta_1}{l_1 \operatorname{sen} \beta_1} \right)$$

$$M_{lp} = M_{\max} \left( 1 - \frac{l_p}{l_1} \right)$$

L'altezza della sezione in tale punto vale

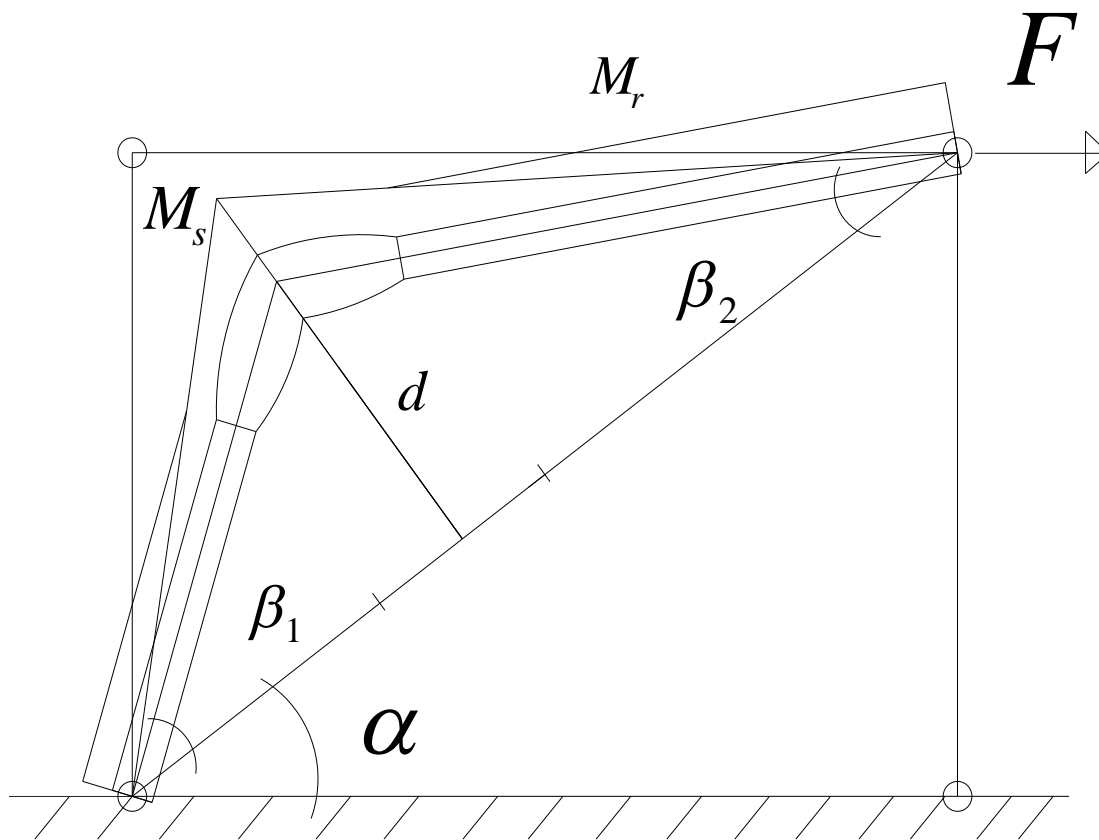
$$h_p = H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_1}}$$

Di conseguenza la tensione in tale punto vale

$$\frac{M_{lp}}{W_{lp}} = \frac{M_{lp}}{b \left( \frac{H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_1}}}{6} \right)^2} = \frac{M_1 \left( 1 - \frac{l_p}{l_1} \right)}{\frac{bH^2}{6} \left( 1 - \frac{l_p}{l_1} \right)} = f_y$$

Si vede che la plasticizzazione è avvenuta contemporaneamente fino alla lunghezza dove l'altezza della sezione segue la legge sopraindicata.

Quindi se la variazione dell'altezza della sezione segue la legge sopraindicata il momento di snervamento si raggiunge in contemporanea su tutta la lunghezza di plasticizzazione  $l_p$ .



**Figura 4.3 Forma geometrica del controvento e diagramma dei momenti**

In figura 4.3 viene rappresentata sia la forma geometrica che deve avere il controvento seguendo la legge della variazione dell'altezza sia i diagrammi dei momenti.

Si vede che l'altezza della sezione è più grande nel punto centrale del controvento e cala l'ungo l'ascissa  $x$  fino a  $x = l_p$ . Si vede anche che il diagramma del momento sollecitante  $M_s$  è lineare, invece quello del momento resistente  $M_r$  è costante per  $l_p \leq x \leq l_2$ , e lineare ed uguale a  $M_s$  per  $0 \leq x \leq l_p$ . Infatti abbiamo scelto l'altezza della sezione tale che

$$M_r = M_s \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq l_p$$

## 4.2) CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO

Per calcolare la rigidezza elastica si procede come nel primo esempio. Si applica il Principio Dei Lavori Virtuali cioè uso un sistema reale di calcolo ed uno fittizio. Suppongo che la struttura sia in



campo elastico lineare per tutta la sua lunghezza. Come sistema reale si usa il sistema della figura 4.3 come sistema fittizio invece si usa quello della figura 4.4

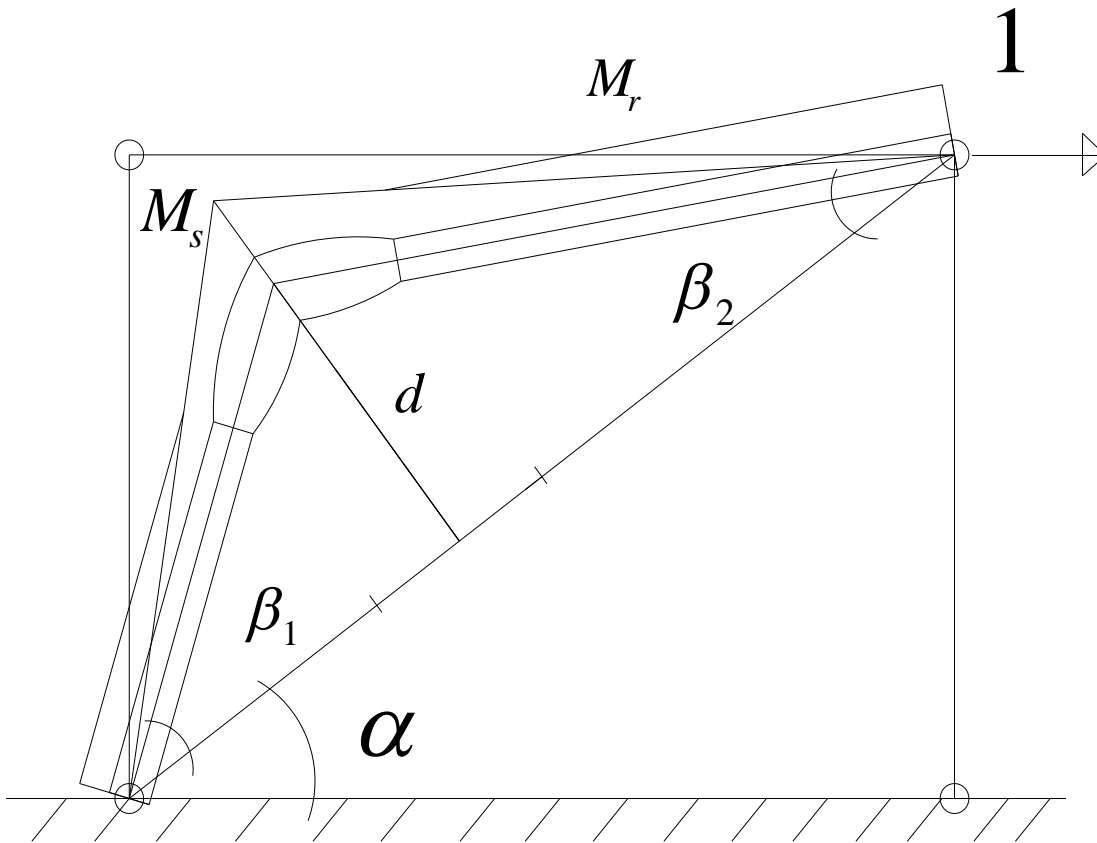


Figura 4.4 Sistema fittizio di calcolo

Suppongo che la lunghezza di plasticizzazione  $l_p$  sia uguale da tutti e due i lati del controvento

$$1 \cdot \delta = \left[ \int_0^{l_p} M'(x) \cdot \chi \cdot dx_1 \right]$$

Divido questo integrale generale di calcolo in 4 parti :

- parte destra a sezione costante
- parte destra a sezione variabile
- parte sinistra a sezione costante

- parte destra a sezione variabile

$$1 \cdot \delta_1 = \left[ \int_0^{l_c^1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ} dx_1 \right]$$

$$\delta_1 = \left[ \int_0^{l_c^1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ} dx_1 \right] = \int_0^{l_c^1} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{sen}^2 \beta_1 \int_0^{l_c^1} x_1^2 \cdot dx_1$$

$$\delta_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{sen}^2 \beta_1 \int_0^{l_c^1} x_1^2 \cdot dx_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{tg}^2 \beta_1 \cdot \frac{(l_c^1)^3}{3} = \frac{F \cdot \operatorname{sen}^2 \beta_1}{\cos^2 \alpha EJ} \cdot \frac{(l_c^1)^3}{3} = \frac{F \cdot (d_c^1)^2 \cdot l_c^1}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

$J$  indica il momento d'inerzia della parte del controvento ad con altezza della sezione costante ci

$$1 \cdot \delta_2 = \left[ \int_{l_c^1}^{l_1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ_{x1}} dx_1 \right]$$

$$\delta_2 = \left[ \int_{l_c^1}^{l_1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ_{x1}} dx_1 \right] = \int_{l_c^1}^{l_1} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\cos \alpha E \cdot \left( \frac{b \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}}}}{12} \right)^3} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot dx_1$$

Attenzione :  $x$  è sempre l'ascissa rettilinea però il senso della percorrenza è opposto a quello di prima cioè  $x$  varia da  $0$  a  $l_1$  percorrendo prima la parte con altezza della sezione costante, per questo la legge della variazione della sezione è stata invertita cioè  $h$  che sta sulla formula è l'altezza più piccola della sezione cioè per  $x = l_c^1$  dove inizia l'integrale e le altezze man mano crescenti vengono espresse in base ad essa secondo la legge

$$H = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}}}$$

$$\delta_2 = \int_{l_c^1}^{l_1} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\cos \alpha E \cdot \frac{b \left( \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3}}{12}} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot dx_1$$

$$= \int_{l_c^1}^{l_1} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot \frac{F x_1 \operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3}} \cdot dx_1$$

$$\delta_2 = \frac{F \left( \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \int_{l_c^1}^{l_1} x^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3 dx_1$$

$$1 \cdot \delta_3 = \left[ \int_0^{l_c^2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ} dx_2 \right]$$

$$\delta_3 = \left[ \int_0^{l_c^2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ} dx_2 \right] = \int_0^{l_c^2} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \operatorname{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ} x_2 \operatorname{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{sen}^2 \beta_2 \int_0^{l_c^2} x_2^2 \cdot dx_2$$

$$\delta_3 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{sen}^2 \beta_2 \int_0^{l_c^2} x_2^2 \cdot dx_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ} \operatorname{sen}^2 \beta_2 \cdot \frac{(l_c^2)^3}{3} = \frac{F \cdot \operatorname{sen}^2 \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \cdot \frac{(l_c^2)^3}{3} = \frac{F \cdot (d_c^2)^2 \cdot l_c^2}{3 \cos^2 \alpha EJ}$$

$$1 \cdot \delta_4 = \left[ \int_{l_c^2}^{l_2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ_{x_2}} dx_2 \right]$$

$$\delta_4 = \left[ \int_{l_c^2}^{l_2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ_{x_2}} dx_2 \right] = \int_{l_c^2}^{l_2} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\cos \alpha E \cdot \frac{b \left( \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3}}{12}} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2$$

$$\delta_4 = \int_{l_c^2}^{l_2} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\cos \alpha E \cdot \frac{b \left( \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3}}{12}} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2$$

$$= \int_{l_c^2}^{l_2} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F x_2 \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ \cdot \frac{1}{\left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3}} \cdot dx_2$$

$$\delta_4 = \frac{F \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \int_{l_c^2}^{l_2} x_2^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3 dx_2$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$$

$$\delta = \frac{F \cdot (d_c^1)^2 \cdot l_c^1}{3 \cos^2 \alpha EJ} + \frac{F \cdot (d_c^2)^2 \cdot l_c^2}{3 \cos^2 \alpha EJ} +$$

$$\frac{F \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \int_{l_c^1}^{l_1} x^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3 dx_1 + \frac{F \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \int_{l_c^2}^{l_2} x_2^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3 dx_2$$

$$\delta = F \left[ \left( \frac{1}{3 \cos^2 \alpha EJ} \right) \cdot \left( (d_c^1)^2 \cdot l_c^1 + (d_c^2)^2 \cdot l_c^2 \right) + \left( \frac{1}{EJ} \right) \cdot \left( \left( \frac{\sin \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \int_{l_c^1}^{l_1} x^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3 dx_1 + \left( \frac{\sin \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \int_{l_c^2}^{l_2} x_2^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3 dx_2 \right) \right]$$

$$\delta = \frac{F}{K}$$

$$K = \frac{1}{\left[ \left( \frac{1}{3 \cos^2 \alpha EJ} \right) \cdot \left( (d_c^1)^2 \cdot l_c^1 + (d_c^2)^2 \cdot l_c^2 \right) + \left( \frac{1}{EJ} \right) \cdot \left( \left( \frac{\sin \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \int_{l_c^1}^{l_1} x^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}} \right)^3 dx_1 + \left( \frac{\sin \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2 \cdot \int_{l_c^2}^{l_2} x_2^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}} \right)^3 dx_2 \right) \right]}$$

### 4.3) CALCOLO DELLA FORZA DI SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA

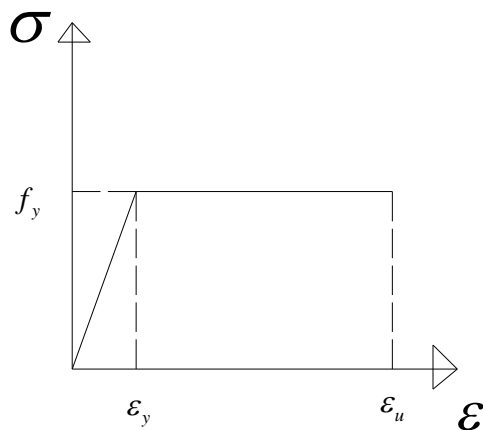
Per il calcolo degli spostamenti della struttura in campo non lineare si procede come nel capitolo precedente, cioè per incrementi di carico. Si applicano sulla struttura delle forze man mano crescenti e si verifica quale parte della struttura è in campo elastico lineare e quale parte in campo non lineare. Quando si applica il Principio dei Lavori Virtuali nelle parti in campo elastico le curvature seguono la legge

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

In campo non lineare invece le curvature seguono la legge

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_Y}{\chi} \right)^2 \right)$$

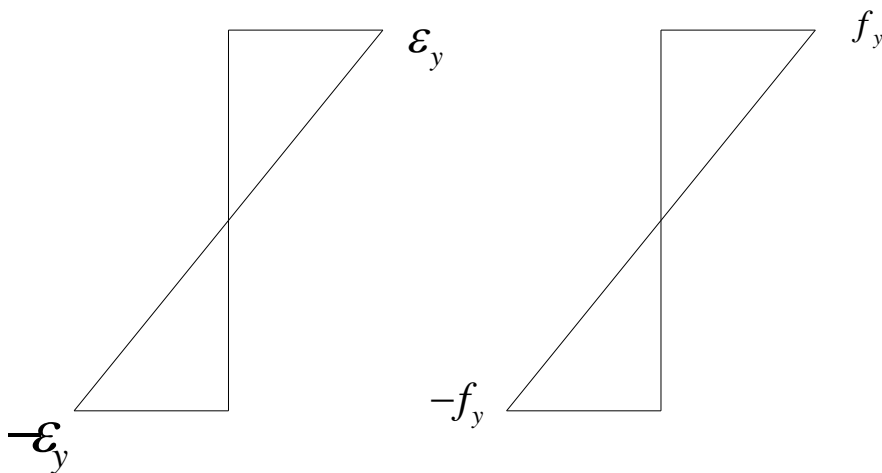
Come è stato detto all'inizio del capitolo si usa come legame costitutivo del materiale il legame di Prandtl cioè il legame elastico – perfettamente plastico.



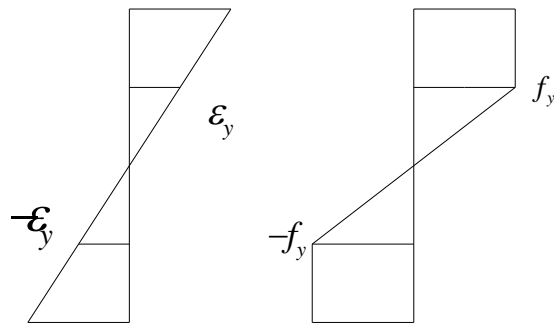
**Figura 4.5** Legame costitutivo di Prandtl

Da questo legame costitutivo deriva la relazione che mi lega il momento e le curvature in campo non lineare.

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_Y}{\chi} \right)^2 \right)$$

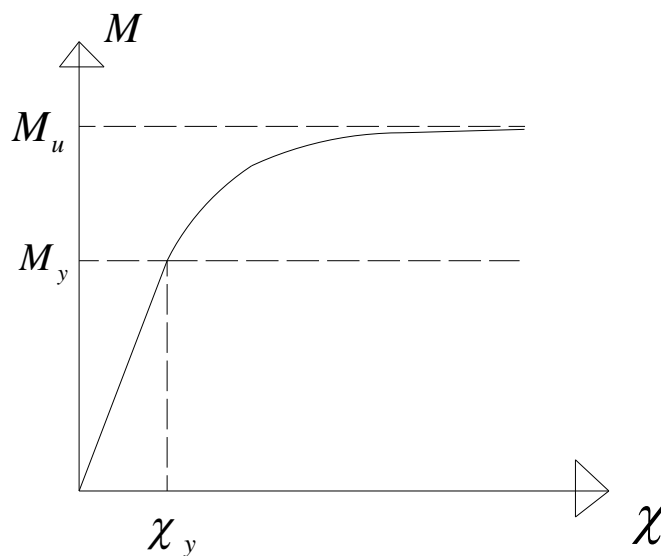


**Figura 4.6** Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo elastico lineare



**Figura 4.7 Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo non lineare**

In figura 4.5 viene rappresentato il legame costitutivo di Prandtl. In figura 4.6 e 4.7 invece si rappresenta l'andamento delle tensioni e delle deformazioni che ne deriva, in campo lineare e non lineare. Infine in figura 4.8 è rappresentato il legame momento curvatura della sezione.



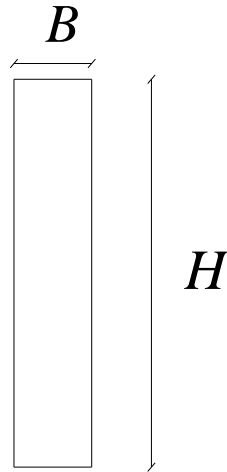
**Figura 4.8 Legame momento curvatura che deriva dal legame costitutivo di Prandtl**

E chiaro che la forza di snervamento, le deformazioni in campo non lineare e di conseguenza la duttilità complessiva della struttura sono funzione di:

- Le caratteristiche geometriche della struttura di controvento
- il legame costitutivo del materiale che compone il controvento
- le caratteristiche geometriche della sezione del controvento

- La geometria della sezione che si usa è quella rettangolare

"



**Figura 4.9 Geometria della sezione**

Come è stato detto in precedenza avendo a che fare con degli integrali da calcolare in modo numerico per il calcolo degli spostamenti si devono già definire tutti i parametri geometrici della sezione e della struttura.

I parametri geometrici usati per la struttura sono uguali a quelli del capitolo precedente in modo tale da potere paragonare i risultati.

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$l_1 = 2,38m$$

$$l_2 = 3,27m$$

$$d = 1,3m$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \alpha = 36,87^\circ$$

$$\text{sen} \beta_1 = \frac{1,3}{2,38} \quad \beta_1 = 33,02^\circ$$

$$\text{sen} \beta_2 = \frac{1,3}{3,27} \quad \beta_2 = 23,43^\circ$$

I parametri meccanici della sezione sono i seguenti:



$$f_y = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = 1,3 \text{‰}$$

$$\varepsilon_u = 100 \cdot \varepsilon_y = 13\%$$

$$E = 2039432 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

Impongo che l'altezza massima della sezione sia

$$H = 0,3M$$

La larghezza della sezione è

$$b = 0,05m$$

Impongo che le lunghezze di plasticizzazione siano

$$l_p^2 = 0,65m$$

$$l_p^1 = 0,71m$$

Così le proiezioni delle due  $l_p$  sulla diagonale del telaio sono uguali e pari a 0,6 m.

Seguendo la legge di variazione dell'altezza della sezione si trovano

$$h_{x2} = H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_2}} = 0,26m$$

$$h_{x1} = H \sqrt{1 - \frac{l_p}{l_1}} = 0,25m$$

A questo punto posso procedere con il calcolo degli spostamenti.

$$w = \frac{bH^2}{6} = 75 \cdot 10^{-5} m^3$$

$$M_y = w_{el} \cdot f_y = 75 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 20250 \text{kg} \cdot m$$

$$w_{el}^2 = \frac{bh_{x2}^2}{6} = 60 \cdot 10^{-5} m^3 \quad J_2 = \frac{bh_{x2}^3}{12} = 0,802 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$w_{el}^1 = \frac{bh_{x1}^2}{6} = 52 \cdot 10^{-5} m^3 \quad J_1 = \frac{bh_{x1}^3}{12} = 0,651 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$M_{y2} = w_{el}^2 \cdot f_y = 60 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 16200 kg \cdot m$$

$$M_{y1} = w_{el}^1 \cdot f_y = 52 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 14040 kg \cdot m$$

Sapendo che il momento di snervamento si raggiunge contemporaneamente in tutta la lunghezza  $l_p$  posso scegliere uno qualsiasi momento di snervamento con il suo braccio per calcolare la forza di snervamento. Decido di usare il momento sulla sezione più grande cioè quello in centro del controvento.

$$M_{\max} = \frac{F \cdot d}{\cos \alpha} \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \quad d = 1,3m$$

$$M_{\max} = \frac{F}{0,8} \cdot 1,3m = F \cdot 1,625m$$

Da cui si ricava la forza di snervamento

$$F_y = \frac{M_y}{1,625} = \frac{20250 kgm}{1,625m} = 12461,53 kg$$

Calcolo l'ultimo spostamento elastico della struttura cioè quello che si ha per l'applicazione della forza di snervamento. Divido l'integrale in 4 parti.

$$\delta_0^1 = \left[ \int_0^{l_c^2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ_2} dx_2 \right] = \int_0^{2,62} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ_2} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ_2} \text{sen}^2 \beta_2 \int_0^{2,62} x_2^2 \cdot dx_2$$

$$\delta_0^1 = 0,0113m$$

$$\delta_0^2 = \left[ \int_{l_c^2}^{l_2} M_2'(x_2) \cdot \frac{M_2(x_2)}{EJ_2} dx_2 \right] = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F}{\left( \frac{b \frac{h_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}}}}{\cos \alpha E} \right)^3} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2$$

$$\delta_0^2 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F x_2 \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ_2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x_2 - l_c^2)}{l_2}}} \right)^3} \cdot dx_2$$

$$\delta_0^2 = \frac{F \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ_2} \int_{2,62}^{3,27} x_2^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_2 - 2,62)}{3,27}} \right)^3 dx_2 = 0,009m$$

$$\delta_0^3 = \left[ \int_0^{l_c^1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ_1} dx_1 \right] = \int_0^{1,67} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F}{\cos^2 \alpha EJ_1} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{1,67} x_1^2 \cdot dx_1$$

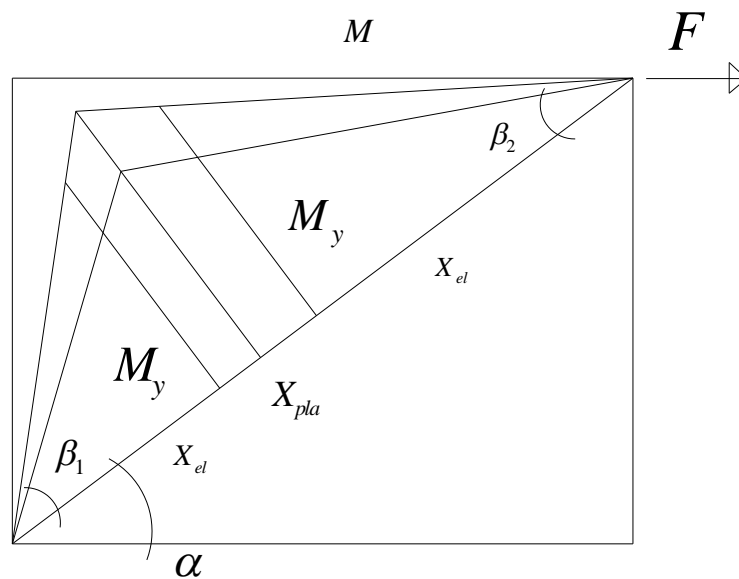
$$\delta_0^3 = 0,0068m$$

$$\delta_0^4 = \left[ \int_{l_c^1}^{l_1} M_1'(x_1) \cdot \frac{M_1(x_1)}{EJ_1} dx_1 \right] = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F}{\left( \frac{b \frac{h_{x_1}}{\sqrt{1 - \frac{(x_1 - l_c^1)}{l_1}}}}{\cos \alpha E} \right)^3} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1$$

$$\delta_0^4 = \frac{F \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ_1} \int_{1,67}^{2,38} x_1^2 \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{(x_1 - 1,67)}{2,38}} \right)^3 dx_1 = 0,0098m$$

$$\delta_0^{tot} = \delta_0^1 + \delta_0^2 + \delta_0^3 + \delta_0^4 = 0,0368m$$

Dopo avere calcolato lo spostamento elastico ultimo della struttura si procede al calcolo degli spostamenti in campo non lineare. Si procede per passi di carico e per divisione della struttura in campo elastico lineare ed in campo non lineare.



**Figura 4.10** Divisione della struttura in parti lineari e non lineari

In ciascuna parte si applica la corrispettiva legge di variazione delle curvature e si calcola lo spostamento corrispettivo legato a quel valore di forza.

$$\chi = \frac{M}{EJ} \quad \text{in campo lineare}$$

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_Y}{\chi} \right)^2 \right) \quad \text{in campo non lineare}$$

### **-Procedimento di calcolo**

PASSO 1

$$F_1 = 1,1 \cdot F_y = 13708 \cdot kg$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 17134 \text{kg}$$

$$d_c^2 = 2,62 \cdot \text{sen} \beta_2 = 1,04 \text{m}$$

$$d_c^1 = 1,67 \cdot \text{sen} \beta_1 = 0,91 \text{m}$$

$$d_2^1 = \frac{M_{y2}}{P_1} = 0,945 \text{m}$$

$$d_1^1 = \frac{M_{y1}}{P_1} = 0,82 \text{m}$$

$$x_{pla}^{1d} = \frac{1,04 - 0,945}{\text{sen} \beta_2} = 0,24 \text{m}$$

$$x_{pla}^{1s} = \frac{0,91 - 0,82}{\text{tg} \beta_1} = 0,17 \text{m}$$

Quindi entro in campo non lineare per  $65 + 24 = 89 \text{cm}$  dalla parte destra e  $71 + 17 = 88 \text{cm}$  dalla parte sinistra.

$$\delta_1^1 = \int_0^{2,38} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F_1}{\cos \alpha EJ_2} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F_1}{\cos^2 \alpha EJ_2} \text{sen}^2 \beta_2 \int_0^{2,38} x_2^2 \cdot dx_2 = 0,0093 \text{m}$$

$$\delta_1^2 = \int_{2,38}^{2,62} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y2}}{EJ_2}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u2}} \right)}} dx_2 = \frac{M_{y2} \text{sen} \beta_2}{EJ_2 \cos \alpha} \int_{2,38}^{2,62} \frac{x}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{F \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)}} \cdot dx_2$$

$$\sqrt{3 \left( 1 - \frac{1,5 \cdot M_{y2}}{\cos \alpha} \right)}$$

$$\delta_1^2 = 0,0032 \text{m}$$

$$\delta_1^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_2$$

$$\delta_1^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot \frac{b(h_x)^2}{6}}{E \frac{b(h_x)^3}{12}}}{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{b \left( \frac{h_{x_2}}{\sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}} \right)^2}}{6}} \right)} dx_2$$

$$\delta_1^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{E h_{x_2}}}{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{b h_{x_2}^2}{6 \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)}} \right)} dx_2$$

$$\delta_1^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x_2}} \cdot dx_2$$

$$\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)} \right)}$$

$$\delta_1^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x_2}} \cdot dx_2$$

$$\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x - 2,62}{3,27} \right)}{24300} \right)}$$

$$\delta_1^3 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \int_{2,62}^{3,27} x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x - 2,62}{3,27}}}{\cos \alpha \cdot Eh_{x_2}} \cdot dx_2$$

$$\sqrt{3 \left( 1 - 0,280370 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x - 2,62}{3,27} \right) \right)}$$

$$\delta_1^3 = 0,01m$$

$$\delta_1^4 = \int_0^{1,5} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F_1}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F_1}{\cos^2 \alpha EJ_1} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{1,5} x_1^2 \cdot dx_1 = 0,0054m$$

$$\delta_1^5 = \int_{1,5}^{1,67} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{M_{y1}}{EJ_1} \cdot dx_2 = \frac{M_{y1} \text{sen} \beta_1}{EJ_1 \cos \alpha} \int_{1,5}^{1,67} \frac{x}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y1}} \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_1^5 = 0,002m$$

$$\delta_1^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u(x)}} \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_1^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{Eh_{x1}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38} \right)}{21060} \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_1^6 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x1}} \int_{1,67}^{2,38} \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,443417635 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x - 1,67}{2,38} \right) \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_1^6 = 0,0112m$$

$$\delta_1^{\text{tot}} = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_1^3 + \delta_1^4 + \delta_1^5 + \delta_1^6 = 0,0411m$$

PUNTO 1 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	13708kg	0,0411m

PASSO 2

$$F_2 = 1,2 \cdot F_y = 14954 \cdot kg$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 18692kg$$

$$d_2^2 = \frac{M_{y2}}{P_2} = 0,866m$$

$$d_1^2 = \frac{M_{y1}}{P_2} = 0,751m$$



$$x_{pla}^{2d} = \frac{1,04 - 0,866}{\text{sen}\beta_2} = 0,44m$$

$$x_{pla}^{2s} = \frac{0,91 - 0,75}{\text{sen}\beta_1} = 0,3m$$

Quindi entro in campo non lineare per  $65 + 44 = 109cm$  dalla parte destra e  $71 + 30 = 101cm$  dalla parte sinistra.

$$\delta_2^1 = \int_0^{2,18} \frac{1}{\cos\alpha} x_2 \text{sen}\beta_2 \cdot \frac{F_2}{\cos\alpha EJ_2} x_2 \text{sen}\beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F_2}{\cos^2\alpha EJ_2} \text{sen}^2\beta_2 \int_0^{2,18} x_2^2 \cdot dx_2 = 0,0078m$$

$$\delta_2^2 = \int_{2,18}^{2,62} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y2}}{EJ_2}}{\sqrt{3\left(1 - \frac{M_{x2}}{M_{u2}}\right)}} dx_2 = \frac{M_{y2} \text{sen}\beta_2}{EJ_2 \cos\alpha} \int_{2,18}^{2,62} \frac{x}{\sqrt{3\left(1 - \frac{F \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{1,5 \cdot M_{y2}}\right)}} dx_2$$

$$\delta_2^2 = 0,0059m$$

$$\delta_2^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3\left(1 - \frac{M_{x2}}{M_{u(x)}}\right)}} dx_2$$

$$\delta_2^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x2}}}{\sqrt{3\left(1 - \frac{\frac{F_2 \cdot x_2 \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \left(1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}\right)}{24300}\right)}} dx_2$$

$$\delta_2^3 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x_2}} \int_{2,62}^{3,27} \frac{x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,305851638 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_2$$

$$\delta_2^3 = 0,012m$$

$$\delta_2^4 = \int_0^{1,37} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F_2}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F_2}{\cos^2 \alpha EJ_1} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{1,37} x_1^2 \cdot dx_1 = 0,0045m$$

$$\delta_2^5 = \int_{1,37}^{1,67} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y_1}}{EJ_1}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x_1}}{M_{u_1}} \right)}} dx_1 = \frac{M_{y_1} \text{sen} \beta_1}{EJ_1 \cos \alpha} \int_{1,37}^{1,67} \frac{x_1}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y_1}} \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_2^5 = 0,0038m$$

$$\delta_2^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x_1}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_2^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x_1}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)}{21060} \right)}} dx_1$$

$$\delta_2^6 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x_1}} \int_{1,67}^{2,38} \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,4837224448 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_1$$

$$\delta_2^6 = 0,013m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 + \delta_2^5 + \delta_2^6 = 0,0471m$$

PUNTO 2 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	14954kg	0,0471m

PASSO 3

$$F_3 = 1,3 \cdot F_y = 16200 \cdot kg$$

$$P_3 = \frac{F_3}{\cos \alpha} = 20250kg$$

$$d_2^3 = \frac{M_{y2}}{P_3} = 0,8m$$

$$d_1^3 = \frac{M_{y1}}{P_2} = 0,693m$$

$$x_{pla}^{3d} = \frac{1,04 - 0,8}{\text{sen} \beta_2} = 0,61m$$

$$x_{pla}^{3s} = \frac{0,91 - 0,693}{\text{sen} \beta_1} = 0,4m$$

Quindi entro in campo non lineare per  $65 + 61 = 126cm$  dalla parte destra e  $71 + 40 = 111cm$  dalla parte sinistra.

$$\delta_3^1 = \int_0^{2,01} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F_3}{\cos \alpha EJ_2} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F_3}{\cos^2 \alpha EJ_2} \text{sen}^2 \beta_2 \int_0^{2,01} x_2^2 \cdot dx_2 = 0,0067m$$

$$\delta_3^2 = \int_{2,01}^{2,62} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y2}}{EJ_2}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u2}} \right)}} dx_2 = \frac{M_{y2} \text{sen} \beta_2}{EJ_2 \cos \alpha} \int_{2,01}^{2,62} \frac{x_2}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y2}} \right)}} \cdot dx_2$$

$$\delta_3^2 = 0,0086m$$

$$\delta_3^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_2$$

$$\delta_3^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x2}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)}{24300} \right)}} dx_2$$

$$\delta_3^3 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x2}} \int_{2,62}^{3,27} \frac{x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,331333108 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_2$$

$$\delta_3^3 = 0,0145m$$

$$\delta_3^4 = \int_0^{1,27} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F_3}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F_3}{\cos^2 \alpha EJ_1} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{1,27} x_1^2 \cdot dx_1 = 0,0039m$$

$$\delta_3^5 = \int_{1,27}^{1,67} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y1}}{EJ_1}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u1}} \right)}} dx_1 = \frac{M_{y1} \text{sen} \beta_1}{EJ_1 \cos \alpha} \int_{1,27}^{1,67} \frac{x_1}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y1}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_3^5 = 0,0053m$$

$$\delta_3^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_3^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{Eh_{x1} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 \cdot x_1 \cdot \text{tg} \beta_1 \cdot \left( 1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38} \right)}{\cos \alpha}}{21060} \right)}} dx_1$$

$$\delta_3^6 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \int_{1,67}^{2,38} x_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{\cos \alpha \cdot Eh_{x1} \sqrt{3 \left( 1 - 0,52402849 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38} \right) \right)}} dx_1$$

$$\delta_3^6 = 0,01687m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 + \delta_3^4 + \delta_3^5 + \delta_3^6 = 0,051m$$

PUNTO 3 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	16200kg	0,056m

PASSO 4

$$F_4 = 1,4 \cdot F_y = 17450 \cdot \text{kg}$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 21812 \text{kg}$$

$$d_2^4 = \frac{M_{y2}}{P_3} = 0,74m$$

$$d_1^4 = \frac{M_{y1}}{P_2} = 0,64m$$

$$x_{pla}^{4d} = \frac{1,04 - 0,74}{\text{sen} \beta_2} = 0,74m$$

$$x_{pla}^{4s} = \frac{0,91 - 0,64}{\text{sen} \beta_1} = 0,48m$$

Quindi entro in campo non lineare per  $65 + 74 = 139cm$  dalla parte destra e  $71 + 48 = 119cm$  dalla parte sinistra.

$$\delta_4^1 = \int_0^{1,88} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \operatorname{sen} \beta_2 \cdot \frac{F_4}{\cos \alpha EJ_2} x_2 \operatorname{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F_4}{\cos^2 \alpha EJ_2} \operatorname{tg}^2 \beta_2 \int_0^{1,88} x_2^2 \cdot dx_2 = 0,0058m$$

$$\delta_4^2 = \int_{1,88}^{2,62} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y_2}}{EJ_2}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x_2}}{M_{u_2}} \right)}} dx_2 = \frac{M_{y_2} \operatorname{sen} \beta_2}{EJ_2 \cos \alpha} \int_{1,88}^{2,62} \frac{x_2}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y_2}} \right)}} \cdot dx_2$$

$$\delta_4^2 = 0,01166m$$

$$\delta_4^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x_2}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_2$$

$$\delta_4^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x_2}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)}{24300} \right)}} dx_2$$

$$\delta_4^3 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x_2}} \int_{2,62}^{3,27} \frac{x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,3568207 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_2$$

$$\delta_4^3 = 0,0215m$$

$$\delta_4^4 = \int_0^{1,19} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot \frac{F_4}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \operatorname{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F_4}{\cos^2 \alpha EJ_1} \operatorname{sen}^2 \beta_1 \int_0^{1,19} x_1^2 \cdot dx_1 = 0,00342m$$

$$\delta_4^5 = \int_{1,19}^{1,67} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y1}}{EJ_1}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u1}} \right)}} dx_1 = \frac{M_{y1} \text{sen} \beta_1}{EJ_1 \cos \alpha} \int_{1,19}^{1,67} \frac{x_1}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y1}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_4^5 = 0,007189m$$

$$\delta_4^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_4^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{Eh_{x1}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38} \right)}{21060} \right)}} dx_1$$

$$\delta_4^6 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x1}} \int_{1,67}^{2,38} \frac{x_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 673076466 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_1 - 1,67}{2,38} \right) \right)}} dx_1$$

$$\delta_4^6 = 0,0289m$$

$$\delta_4^{\text{tot}} = \delta_4^1 + \delta_4^2 + \delta_4^3 + \delta_4^4 + \delta_4^5 + \delta_4^6 = 0,07846m$$

PUNTO 4 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	17450kg	0,07846m

PASSO 5

$$F_5 = 1,5 \cdot F_y = 18692 \cdot \text{kg}$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 23366 \text{ kg}$$

$$d_2^5 = \frac{M_{y2}}{P_5} = 0,69 \text{ m}$$

$$d_1^5 = \frac{M_{y1}}{P_2} = 0,6 \text{ m}$$

$$x_{pla}^{4d} = \frac{1,04 - 0,69}{\text{sen} \beta_2} = 0,87 \text{ m}$$

$$x_{pla}^{4s} = \frac{0,91 - 0,6}{\text{sen} \beta_1} = 0,71 \text{ m}$$

Quindi entro in campo non lineare per  $65 + 87 = 152 \text{ cm}$  dalla parte destra e  $71 + 71 = 142 \text{ cm}$  dalla parte sinistra.

$$\delta_5^1 = \int_0^{1,75} \frac{1}{\cos \alpha} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot \frac{F_5}{\cos \alpha EJ_2} x_2 \text{sen} \beta_2 \cdot dx_2 = \frac{F_5}{\cos^2 \alpha EJ_2} \text{tg}^2 \beta_2 \int_0^{1,75} x_2^2 \cdot dx_2 = 0,005 \text{ m}$$

$$\delta_5^2 = \int_{1,75}^{2,62} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y2}}{EJ_2}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u2}} \right)}} dx_2 = \frac{M_{y2} \text{sen} \beta_2}{EJ_2 \cos \alpha} \int_{1,75}^{2,62} \frac{x_2}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y2}} \right)}} \cdot dx_2$$

$$\delta_5^2 = 0,01944 \text{ m}$$

$$\delta_5^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x2}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_2$$



$$\delta_5^3 = \int_{2,62}^{3,27} \frac{1 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{Eh_{x_2}} \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x_2 \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right)}{24300} \right)} dx_2$$

$$\delta_5^3 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2}{\cos \alpha \cdot Eh_{x_2}} \int_{2,62}^{3,27} \frac{x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,382307433 \cdot x_2 \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_2$$

$$\delta_5^3 = 0,1488m$$

$$\delta_5^4 = \int_0^{0,96} \frac{1}{\cos \alpha} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot \frac{F_5}{\cos \alpha EJ_1} x_1 \text{sen} \beta_1 \cdot dx_1 = \frac{F_5}{\cos^2 \alpha EJ_1} \text{sen}^2 \beta_1 \int_0^{0,96} x_1^2 \cdot dx_1 = 0,00192m$$

$$\delta_5^5 = \int_{0,96}^{1,67} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{M_{y1}}{EJ_1}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u1}} \right)}} dx_1 = \frac{M_{y1} \text{sen} \beta_1}{EJ_1 \cos \alpha} \int_{0,96}^{1,67} \frac{x_1}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot M_{y1}} \right)}} \cdot dx_1$$

$$\delta_5^5 = 0,01217m$$

$$\delta_5^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\chi_{y(x)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{x1}}{M_{u(x)}} \right)}} dx_1$$

$$\delta_5^6 = \int_{1,67}^{2,38} \frac{1 \cdot x_1 \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 1,67}{2,38}}}{Eh_{x1} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 \cdot x_1 \cdot \text{tg} \beta_1 \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 1,67}{2,38} \right)}{\cos \alpha}}{21060} \right)}} dx_1$$

$$\delta_5^6 = \frac{2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot 10^4 \cdot 2 \int_{1,67}^{2,38} x_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 1,67}{2,38}}}{\cos \alpha \cdot Eh_{x1} \sqrt{3 \left( 1 - 0,604548 \cdot x \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 1,67}{2,38} \right) \right)}} dx_1$$

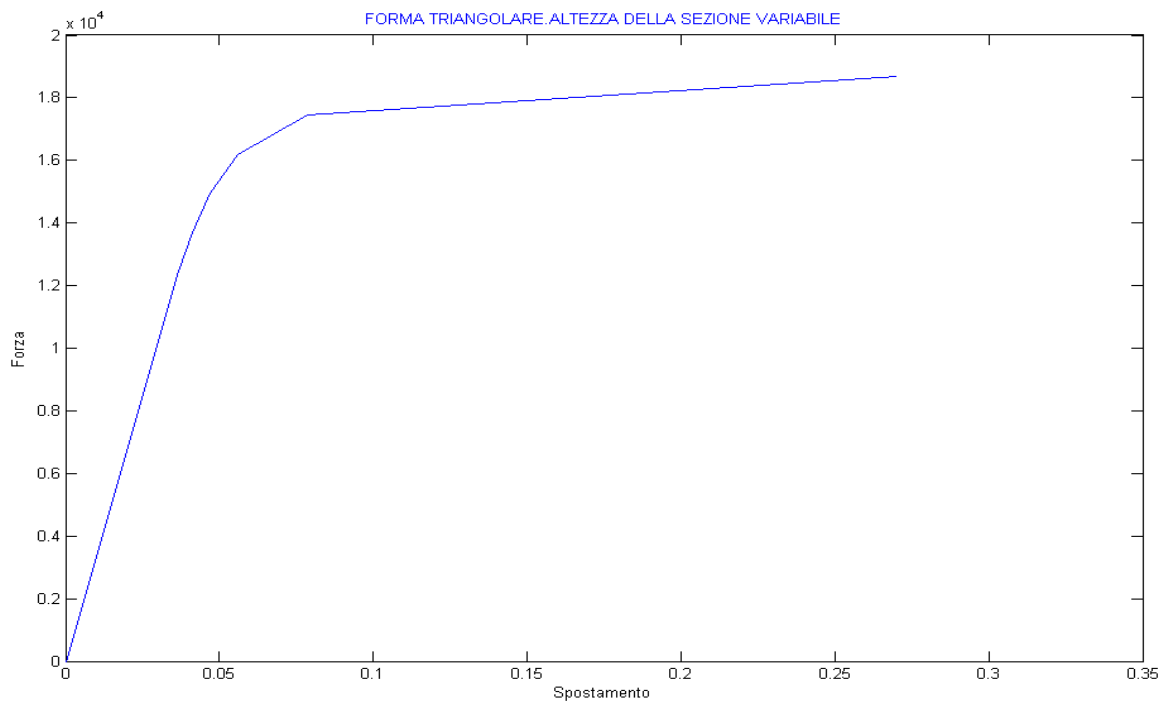
$$\delta_5^6 = 0,0811m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 + \delta_5^3 + \delta_5^4 + \delta_5^5 + \delta_5^6 = 0,27m$$

PUNTO 5 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	18692kg	0,27m

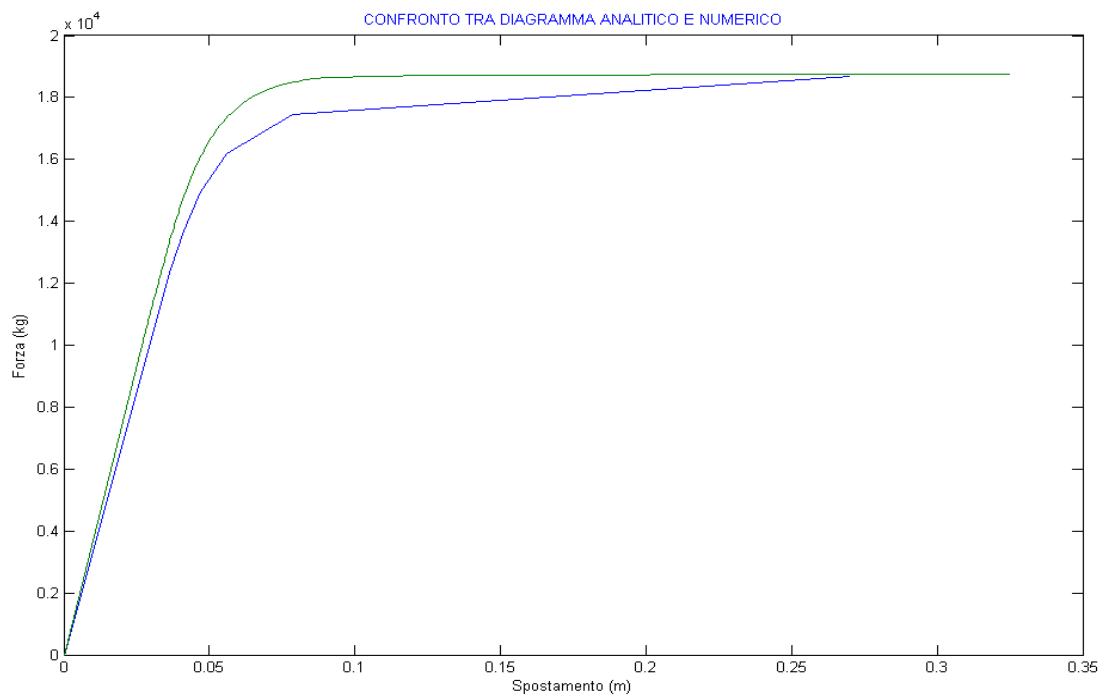
Abbiamo trovato così i punti  $F - \delta$  della parte non lineare del legame del controvento. Possiamo adesso procedere alla costruzione di tale legame.

In figura 4.11 è rappresentato il legame complessivo della nostra struttura cioè comprendente la parte elastica e quella non lineare.



**Figura 4.11 Legame Forza - Spostamento del controvento**

Come nel primo caso anche qui si fa una soluzione numerica della struttura con il programma di calcolo STRAUS 7. In figura 4.12 è rappresentato il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica.



**Figura 4.12 Confronto tra soluzione analitica e numerica della struttura**



**Figura 4.14 Distribuzione delle tensioni sulla struttura**

In figura 4.14 invece è rappresentato uno statto di sollecitazione della struttura quando il carico ha superato il valore di snervamento. Si vede che le tensioni hanno un andamento costante per tutta la lunghezza del blocco plastico come è stato previsto analiticamente.

Si vede chiaramente dalla figura 4.11 e si capisce quando si fanno i calcoli che gli spostamenti in campo non lineare soprattutto per valori di forza vicini al valore ultimo sono abbastanza elevati. Quindi il controvento costruito secondo questa tipologia strutturale ha una duttilità complessiva molto elevata. Gli spostamenti non lineari sono di gran lunga superiori rispetto a quelli elastici anche per incrementi piccoli di carico.

La spiegazione di questi risultati cioè di questo miglioramento in termini di duttilità che ha questa struttura rispetto alla tipologia usata nel capitolo precedente si può sempre dare analiticamente.

Come si vede dai calcoli fatti per trovare gli spostamenti l'integrale generale è diviso in 6 parti:

- parte elastica destra ad altezza della sezione costante
- parte non lineare destra ad altezza della sezione costante

- parte non lineare destra ad altezza della sezione variabile
- parte elastica sinistra ad altezza della sezione costante
- parte non lineare sinistra ad altezza della sezione costante
- parte non lineare sinistra ad altezza della sezione variabile

Le parti che danno gli spostamenti maggiori sono quelle non lineari ad altezza della sezione variabile

$$\delta_5^3 = \frac{2700 \text{ kg/m}^2 \cdot 10^4 \cdot 2^{3,27}}{\cos \alpha \cdot E h_{x_2}} \int_{2,62} \frac{x_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27}}}{\sqrt{3 \left( 1 - 0,382307433 \cdot x_2 \cdot \left( 1 - \frac{x_2 - 2,62}{3,27} \right) \right)}} dx_2$$

Come nel capitolo precedente l'integrale da calcolare numericamente che compare sulla formula lo possiamo chiamare coefficiente di amplificazione degli spostamenti. La funzione che sta sull'integrale è la funzione che descrive l'andamento delle curvature sulla parte non lineare ad altezza della sezione variabile o come l'abbiamo chiamato prima blocco plastico. Se facciamo il grafico di tale funzione si vede che le curvature esplodono all'infinito per valori della forza vicino a  $F_u$  in una zona un po più larga rispetto a ciò che succedeva nel capitolo precedente. Quindi l'integrale di tale funzione tende ad un numero finito ma abbastanza elevato in modo tale da dare spostamenti molto grandi rispetto a quelli elastici. Proprio il modo in cui variano le curvature sul blocco plastico comporta il beneficio in termini di duttilità che comporta questa scelta strutturale.

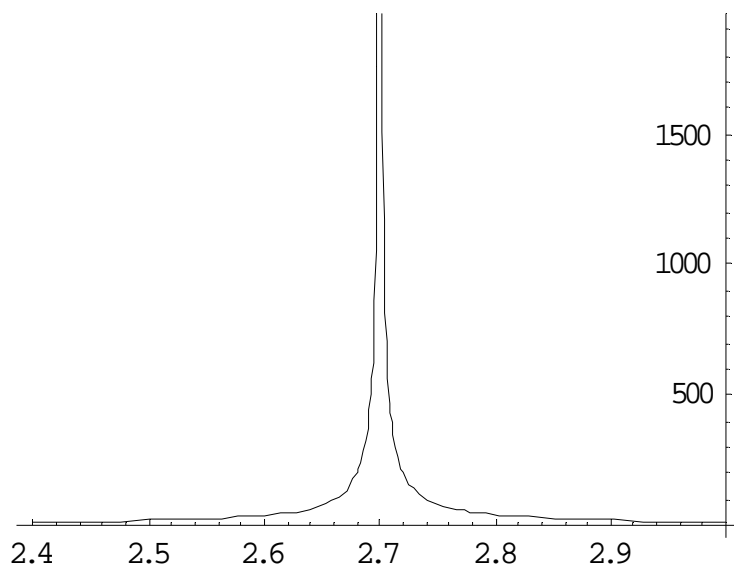


Figura 4.12 L'andamento delle curvature sulla parte ad altezza della sezione variabile

In figura 2.12 è stato rappresentato l'andamento delle curvature ovvero la funzione amplificazione degli spostamenti. In ordinata è riportato il valore di tale funzione, in ascissa invece è riportata l'ascissa rettilinea  $x$  che descrive il blocco plastico.

La scelta strutturale di usare un controvento ad altezza della sezione variabile comporta una duttilità elevata della struttura anche se si associa ad un legame costitutivo del materiale come quello di Prandtl. Il legame costitutivo reale dell'acciaio comporta come si vedrà nei capitoli successivi un incrudimento molto piccolo quindi il suo legame può essere tranquillamente semplificato in quello di Prandtl. Quindi se non si vuole tenere conto sui calcoli dei miglioramenti che comporta l'incrudimento sulla duttilità della struttura questa tipologia strutturale dei controventi diventa fondamentale.

## CAPITOLO 5

### **FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.**

In questa parte dello studio si considera un'altra forma geometrica come soluzione strutturale, quella circolare. Per molte ragioni architettoniche il costruttore può essere obbligato ad usare una forma diversa da quelle triangolari viste nei capitoli precedenti. Come prima l'obiettivo dello studio è quello di trovare il legame  $F-\delta$  del controvento, di analizzare la dipendenza di questo legame da tutti parametri geometrici e meccanici della struttura e di trovare la migliore tipologia strutturale in termini della duttilità della struttura.

Le ipotesi fondamentali dove si basa il nostro studio sono le seguenti:

- c) Altezza della sezione costante lungo la lunghezza del controvento, di conseguenza momento d'inerzia costante.
- d) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame di Prandtl cioè il legame elastico perfettamente plastico, di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti è quello che deriva dal legame costitutivo di Prandtl

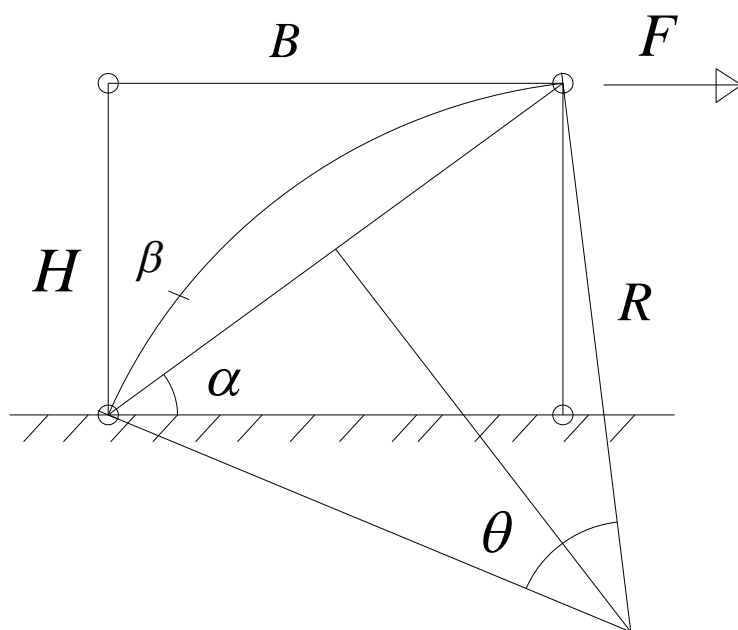
Sopra queste due ipotesi base si considera la struttura. Le fasi del calcolo del legame sono le stesse di prima. Si trova prima la rigidezza elastica della struttura in base ai parametri geometrici e poi si costruisce per punti la parte non lineare del legame.

Si considera la forma geometrica in figura 3.1

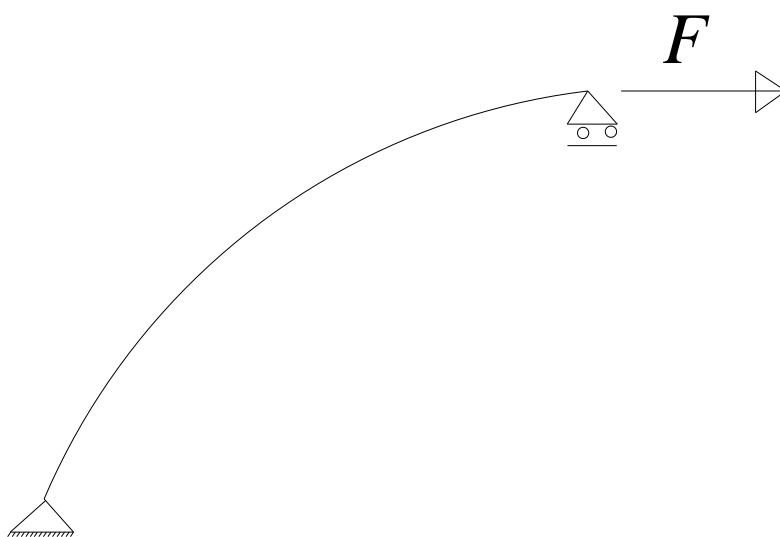
I parametri geometrici fondamentali dove si basa il calcolo della struttura sono

- $R$  raggio di curvatura del cerchio, parte del quale è il controvento
- $H$  altezza del telaio
- $B$  lunghezza del telaio
- $\theta$  angolo di base del controvento
- $\alpha$  angolo della diagonale del telaio

- $\beta$  ascissa curvilinea polare dove si integra la struttura.



**Figura 5.1 Schema di calcolo della struttura**



**Figura 5.2 Modalità di sollecitazione della struttura**



In figura 5.1 è rappresentato lo schema di calcolo della struttura, in figura 5.2 invece è rappresentata la struttura estrapolata dal telaio e il suo modo di sollecitazione e di deformazione.

$\theta$  è l'angolo di base del controvento ed insieme al raggio di curvatura  $R$  sono i parametri che definiscono il braccio che dà il momento sul controvento cioè  $d$ . Sono due parametri linearmente dipendenti. Una volta fissata la geometria del telaio  $d$  si determina in base a  $R$  e  $\theta$ .

$\beta$  è l'ascissa curvilinea polare dove si integra la struttura per trovare gli spostamenti. Il sistema di riferimento in figura 5.1 è molto utile perché dovendo lavorare sulla lunghezza del controvento permette in base alle sue coordinate polari e l'ascissa curvilinea polare  $\beta$  di semplificare i calcoli, a differenza di altre forme geometriche che si vedranno nei capitoli successivi dove non si può usare tale sistema di riferimento.

## 5.1) CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DELLA STRUTTURA

L'ascissa curvilinea polare  $\beta$  nel mio sistema di riferimento varia da un estremo all'altro del

controvento ed analiticamente varia da  $-\frac{\theta}{2}$  a  $\frac{\theta}{2}$   $-\frac{\theta}{2} \leq \beta \leq \frac{\theta}{2}$

In pratica l'estremo in basso a sinistra del controvento a coordinata  $\beta = -\frac{\theta}{2}$

L'estremo in alto a destra  $\beta = \frac{\theta}{2}$

Nel nostro caso il braccio  $d$  del controvento cioè la distanza tra un punto del controvento e la diagonale del telaio può essere espresso in base ai parametri geometrici della struttura ed in particolare in base a  $\theta$  e  $R$ . Si ricava mediante semplici passaggi geometrici che

$$d = d_{(\beta)} = R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Allora si ricava che il momento in un qualsiasi punto del controvento con ascissa  $\beta$  può essere espresso da

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$\frac{F}{\cos \alpha}$  è la forza di tiro che il controvento trasmette da un suo estremo all'altro diretta sempre

secondo la diagonale del telaio.

Adesso possiamo applicare il Principio Dei Lavori Virtuali e trovare la rigidezza elastica della struttura.

$$1 \cdot \delta = \left[ \int_0^{l_1} M'(s) \cdot \frac{M(s)}{EJ} ds \right]$$

$$1 \cdot \delta = \left[ \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos \alpha} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{F}{\cos \alpha EJ} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) R d\beta \right]$$

Sviluppando l'integrale si ricava

$$\delta = \frac{FR^3 \left( \theta + \operatorname{sen}\theta - 8 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}{2EJ \cos^2 \alpha}$$

Da cui si ricava la rigidezza

$$K = \frac{2EJ \cos^2 \alpha}{R^3 \left( \theta + \operatorname{sen}\theta - 8 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

## 5.2) CALCOLO DELLA FORZA DI SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA

Dopo avere calcolato la rigidezza elastica della struttura di controvento si procede al calcolo della parte non lineare del legame F-  $\delta$  del controvento. Il modo in cui si procede in questa fase è uguale a quello dei capitoli precedenti. Si calcola prima l'ultimo spostamento elastico della struttura mediante la forza di snervamento e la rigidezza elastica poi si calcolano gli spostamenti non lineari della struttura. Questa seconda fase si calcola per passi o incrementi di carico mediante il Principio Dei Lavori Virtuali. Per ogni valore di carico si divide la struttura in due parti

- parte in campo elastico lineare della struttura

- parte in campo non lineare

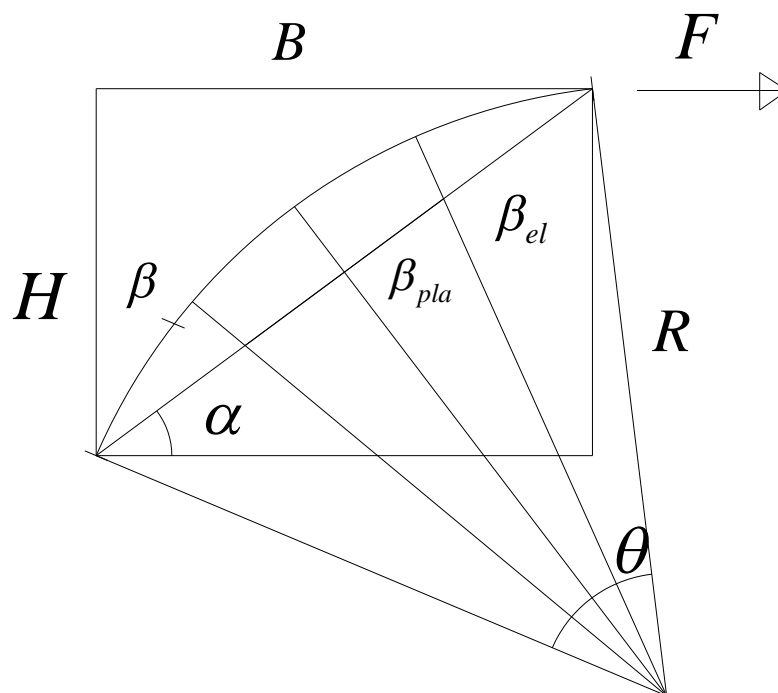


Figura 5.3 Divisione della struttura in parte lineare e non lineare

Nella parte lineare della struttura le curvature seguono la legge

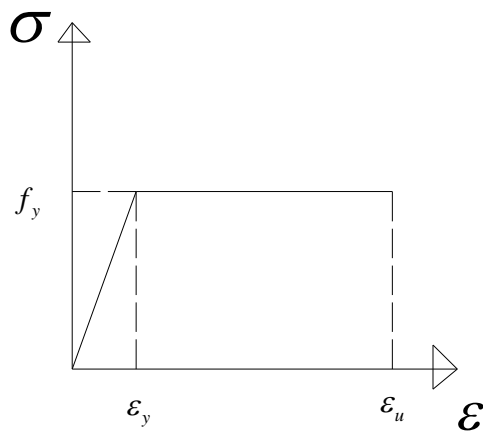
$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

Nella parte non lineare invece le curvature variano secondo il legame momento – curvatura che deriva dal legame costitutivo di Prandtl del materiale.

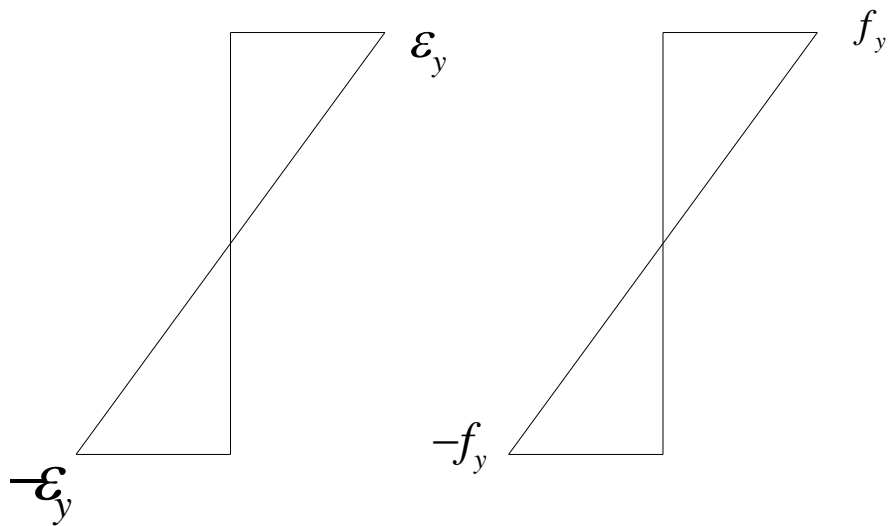
$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right)$$

A questo punto dopo avere definito anche l'andamento delle curvature sulla lunghezza della struttura in base alla forza esterna applicata si procede al calcolo del integrale che mi da lo spostamento collegato a quel valore di forza. Per il calcolo di questi integrali come e stato detto anche in precedenza dovendo procedere per metodi numerici si devono definire tutte le

caratteristiche geometriche della struttura e della sezione e le caratteristiche meccaniche del materiale. Seguendo questo procedimento uno si può costruire il legame per ogni tipo di struttura con questa forma geometrica.



**Figura 5.4** Legame costitutivo usato per il calcolo



**Figura 5.5** Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo lineare

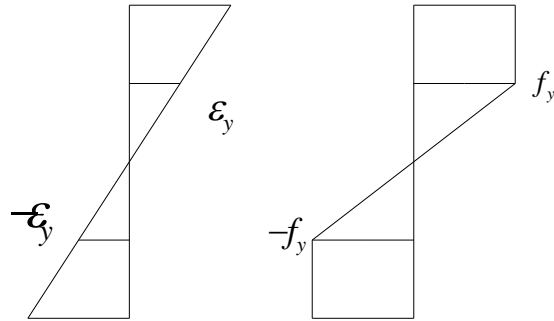


Figura 5.6 Distribuzione delle tensioni e delle deformazioni in campo non lineare

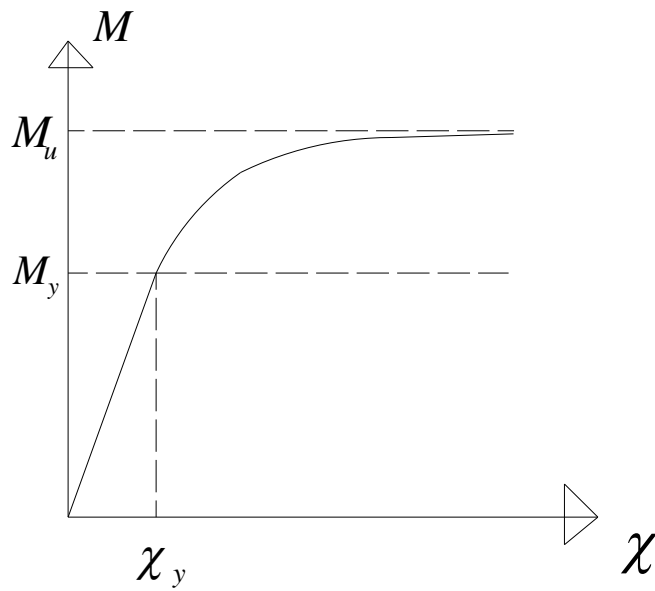


Figura 5.7 Legame Momento - Curvatura derivante dal legame di Prandtl

H



Figura 5.8 Forma della sezione del controvento

Come negli esempi precedenti la forza di snervamento, gli spostamenti non lineari e la duttilità complessiva della struttura sono funzioni di:

- Le caratteristiche geometriche della struttura di controvento
- il legame costitutivo del materiale che compone il controvento
- le caratteristiche geometriche della sezione del controvento

I parametri geometrici usati per la struttura sono uguali a quelli del capitolo precedente in modo tale da potere paragonare i risultati ( vedi figura 5.1 )

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$R = 4m$$

$$\theta = 77^\circ \quad \frac{\theta}{2} = 38,5^\circ = \frac{\pi}{4,6753}$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

I parametri meccanici della sezione sono i seguenti:

$$f_y = 2700 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = 1,3 \text{‰}$$

$$\varepsilon_u = 100 \cdot \varepsilon_y = 13\%$$

$$E = 2039432 \frac{kg}{cm^2}$$

I parametri geometrici della sezione sono i seguenti:

$$H = 0,3m$$

$$b = 0,05m$$

$$w = \frac{bH^2}{6} = 75 \cdot 10^{-5} m^3$$

$$M_y = w_{el} \cdot f_y = 75 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 20250 kg \cdot m$$

$$d = d_{(\beta)} = R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$d_{\max}$  si ha per  $\beta = 0$

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0,7826$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$d_{\max} = R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = 0,87m$$

$$\frac{0,87}{\cos \alpha} = 1,0875$$

$$F_y = \frac{M_y}{1,0875} = \frac{20250 kg \cdot m}{1,0875m} = 18620 kg$$

Calcolo l'ultimo spostamento lineare cioè quello che si ha quando si applica la forza di snervamento della struttura:

$$\delta_y = \frac{F_y}{K}$$

$$K = \frac{2EJ \cos^2 \alpha}{R^3 \left( \theta + \text{sen} \theta - 8 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \theta \right)} = 701640 \frac{kg}{m}$$

$$\delta_y = \frac{F_y}{K} = \frac{18620 kg}{701640 \frac{kg}{m}} = 0,0265m$$

Adesso procedo con il calcolo degli spostamenti non lineari per incrementi di carico.

-PASSO 1

$$F_1 = 1,1 \cdot F_y = 20482 kg$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 25602 kg$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 0,8m$$

$$d_1 = R \left( \cos \beta_1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_1 = 12^\circ = \frac{\pi}{15}$$

Entro in campo non lineare per  $12^\circ$  da tutti e due i lati.

Inverto il legame  $M - \chi$  ed esprimo le curvature in base al momento.

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right) \quad \chi = \frac{\chi_y}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M_u} \right)}}$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{15}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_y} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{15}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,3715 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{15}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,3715 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_1^1 = 0,0166m$$

$$\delta_1^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{15}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot R \cdot d\beta$$



$$\delta_1^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{15}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^2 = 0,0135m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 = 0,03m$$

PUNTO 1 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_1$
	20482kg	0,03m

-PASSO 2

$$F_2 = 1,2 \cdot F_y = 22344kg$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 27930kg$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 0,73m$$

$$d_2 = R \left( \cos \beta_2 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_2 = 16^\circ = \frac{\pi}{11,25}$$

Entro in campo non lineare per  $16^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{11,25}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_y} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{11,25}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,6780 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{11,25}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,6780 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = 0,0237m$$

$$\delta_2^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{11,25}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^2 = \frac{2F_2 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{11,25}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^2 = 0,0097m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 = 0,034m$$

PUNTO 2 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_2$	$\delta_2$
	22344kg	0,034m

### PASSO 3

$$F_3 = 1,3 \cdot F_y = 24206kg$$

$$P_3 = \frac{F_3}{\cos \alpha} = 30257kg$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 0,67m$$

$$d_3 = R \left( \cos \beta_3 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_3 = 19^\circ = \frac{\pi}{9,4736}$$

Entro in campo non lineare per  $19^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{9,4736}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_y} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{9,4736}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,9845 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{9,4736}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,9845 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_3^1 = 0,031m$$

$$\delta_3^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{11,25}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_3 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^2 = \frac{2F_3 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{9,4736}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^2 = 0,0075m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 = 0,039m$$

PUNTO 3 SULLA PARTE NON LINEARE

$F_3$	$\delta_2$
24206kg	0,039m

PASSO 4

$$F_4 = 1,4 \cdot F_y = 26068 \text{kg}$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 32585 \text{kg}$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,62 \text{m}$$

$$d_4 = R \left( \cos \beta_4 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_4 = 21^\circ = \frac{\pi}{8,5714}$$

Entro in campo non lineare per  $21^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{8,5714}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_y} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{8,5714}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,291 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{8,5714}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,291 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_4^1 = 0,042 \text{m}$$

$$\delta_4^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{8,5714}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_4 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^2 = \frac{2F_4 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{8,5714}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^2 = 0,006m$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 = 0,048m$$

PUNTO 4 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_4$	$\delta_4$
	26068kg	0,048m

PASSO 5

$$F_5 = 1,5 \cdot F_y = 27930kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 34912kg$$

$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,58m$$

$$d_5 = R \left( \cos \beta_5 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_5 = 22^\circ = \frac{\pi}{8,1818}$$

Entro in campo non lineare per  $22^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{8,1818}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_y} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{8,1818}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M_y}{EJ}}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,5975 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{8,1818}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,5975 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = 0,11m$$

$$\delta_5^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{8,1818}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_5 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

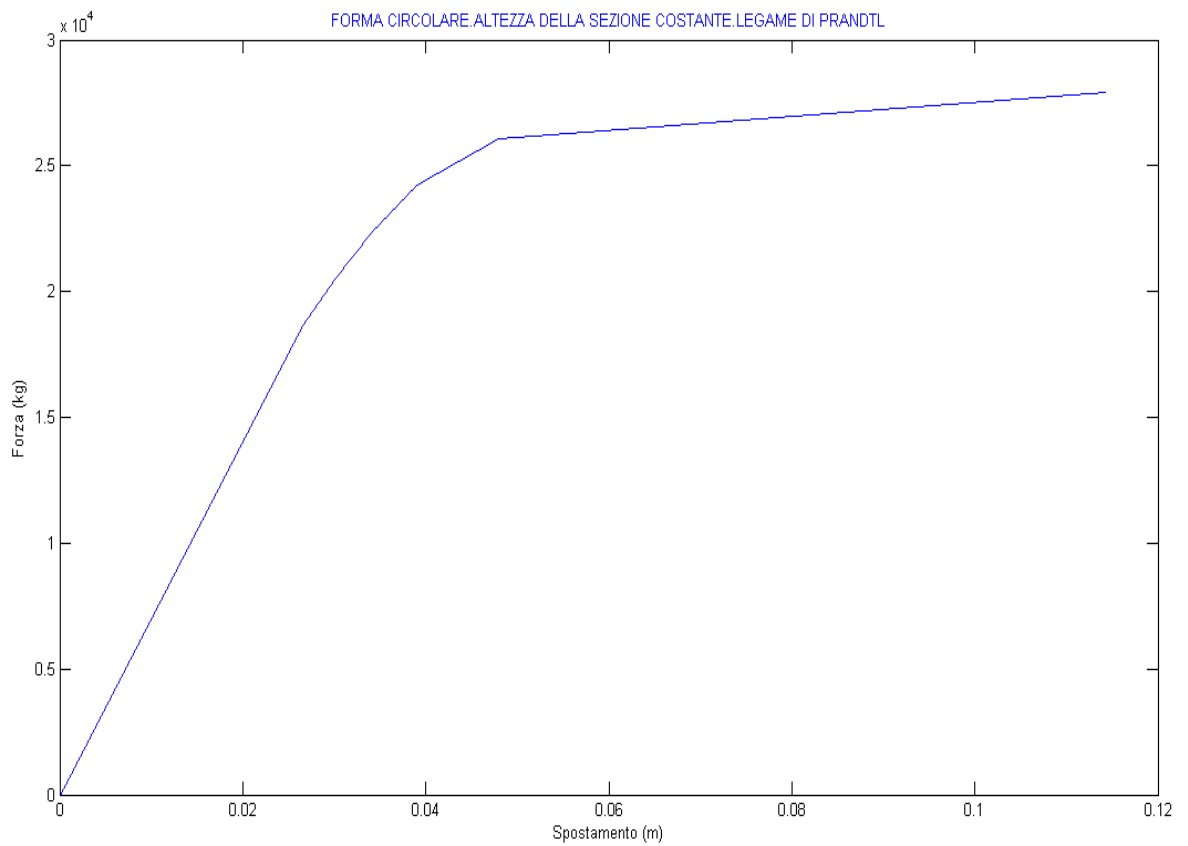
$$\delta_5^2 = \frac{2F_5 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{8,1818}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^2 = 0,0044m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 = 0,1144m$$

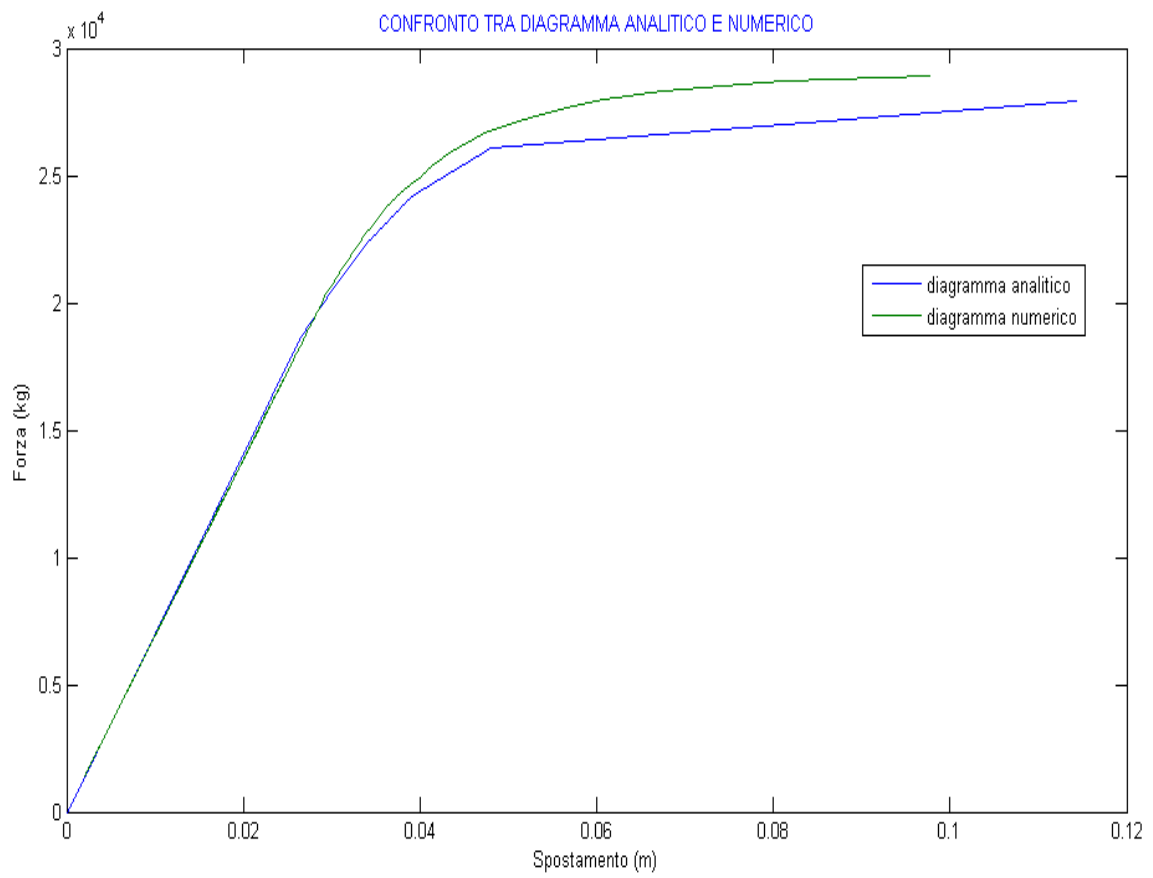
PUNTO 5 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_5$	$\delta_5$
	27930kg	0,1144m

Dopo avere calcolato i punti in campo non lineare della struttura si procede alla costruzione del legame F –  $\delta$  del controvento.

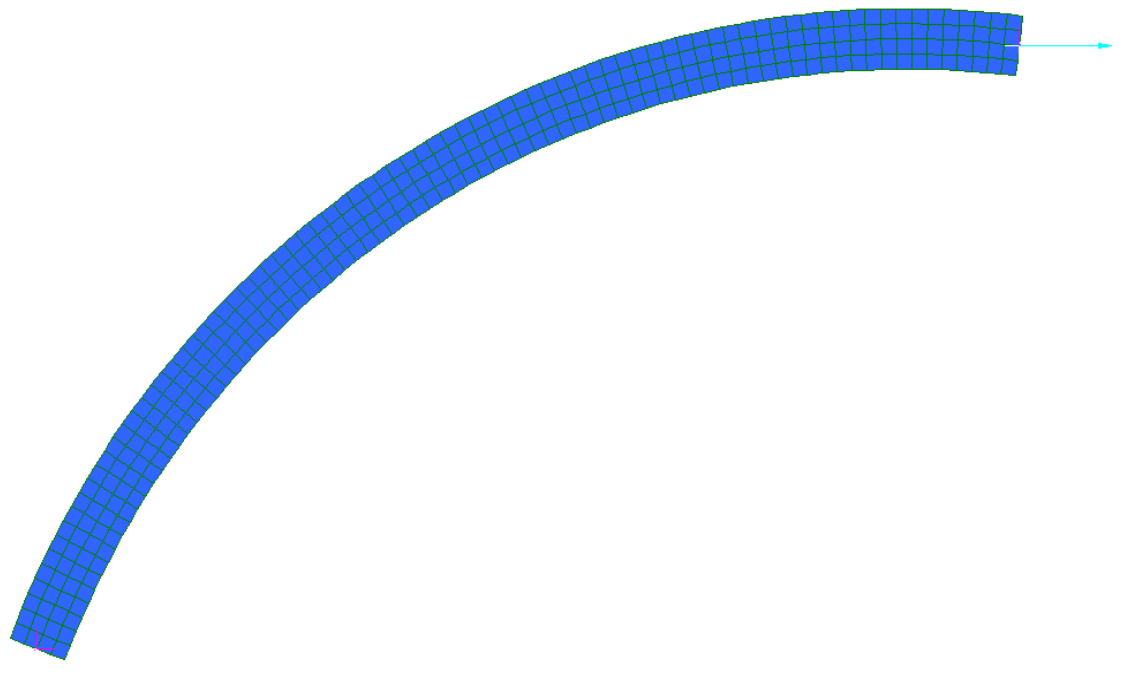


**Figura 5.9 Legame Forza - spostamento del controvento**

In figura 5.9 viene rappresentato il legame  $F - \delta$  della struttura calcolato con la modalità sopraindicata e secondo le ipotesi di base indicate al inizio del capitolo. In figura 5.10 invece è rappresentato il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica



**Figura 5.10** Confronto tra soluzione analitica e numerica della struttura



**Figura 5.11** Modello di calcolo numerico della struttura



Si vede dalla rappresentazione grafica e si intuisce anche quando si fanno i calcoli che la struttura così costruita è poco duttile. Gli spostamenti non lineari per valori di forza vicino alla forza di snervamento seguono un andamento quasi lineare e solo per valori di forza crescenti e vicino alla forza ultima sono elevati rispetto all'ultimo spostamento lineare.

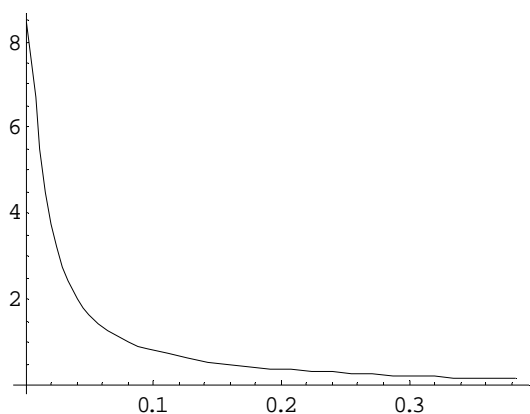
Ancora una volta questa inconvenienza strutturale in termini degli spostamenti si può spiegare come nei capitoli precedenti analiticamente.

Gli spostamenti come abbiamo già detto sono dati dall'integrale delle curvatures in campo non lineare e quello in campo lineare ( vedi figura 5.7 e 5.3 ), però quelli che hanno maggiore peso sono quelli della parte non lineare dati dall'espressione:

$$\delta_5^1 = \frac{2 \cdot M_y \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ} \int_0^{\frac{\pi}{8,1818}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,5975 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

Qua è stato riportato l'espressione per il valore della forza ultima però l'espressione è uguale anche per altri valori della forza, cambia solo il coefficiente sotto radice ( 4,5975 ) che è appunto funzione della forza.

La parte data dall'integrale possiamo ancora una volta chiamarla coefficiente di amplificazione degli spostamenti. La funzione che sta nell'integrale rappresenta l'andamento delle curvatures nella parte non lineare. Se si grafica questo andamento ( vedi figura 5.10 ) si vede che le curvatures tendono all'infinito per il valore della forza ultima ( questo è perfettamente in linea con la teoria che abbiamo usato cioè il legame costitutivo di Prandtl e il legame  $M - \delta$  che ne deriva, figura 5.7 ) però in una zona molto ristretta vicino al centro del controvento cioè per  $\beta = 0$ .



**Figura 5.12** Andamento delle curvatures sulla lunghezza del controvento.

In figura 5.11 viene rappresentato l'andamento delle curvature nella parte non lineare della struttura. In ascissa è indicata l'ascissa curvilinea  $\beta$  espressa in radianti, in ordinata invece viene portata la curvatura rispettiva.

Anche se la curvatura tende all'infinito per valori di forza vicino a quella ultima in  $\beta = 0$  l'integrale di tale funzione tende sempre ad un valore finito e piccolo, di conseguenza il valore dello spostamento corrispettivo non è molto elevato e non dista di molto da quelli lineari.

Per  $F = 1,5 \cdot F_y$  questo integrale vale 0,31081

Questa spiegazione analitica è frutto delle ipotesi di base che abbiamo usato nella costruzione di questa struttura cioè il legame costitutivo di Prandtl e l'altezza della sezione costante sulla lunghezza del controvento. Si vede ancora una volta anche se il risultato è lievemente migliore di quello della forma triangolare che il legame costitutivo elastico perfettamente plastico accoppiato a una altezza costante della sezione porta ad una duttilità complessiva della struttura limitata. Si deve quindi procedere con soluzioni strutturali sia in termini geometrici che meccanici della struttura diversi. Queste soluzioni verranno presentate nei capitoli successivi.

## CAPITOLO 6

### **FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE VARIABILE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE DI PRANDTL.**

In questo capitolo si considera ancora una volta la struttura di controvento in forma geometrica circolare. Si cerca di trovare un'altra soluzione strutturale per la geometria della sezione del controvento per vedere se si hanno eventuali miglioramenti di duttilità nei termini in cui stimo studiando queste strutture cioè per gli spostamenti non lineari.

Come abbiamo visto prima l'uso di un legame elastico perfettamente plastico del materiale in una struttura circolare con altezza della sezione costante lungo tutta la lunghezza del controvento non dà dei buoni risultati di duttilità. Il motivo di questa inconvenienza strutturale come abbiamo visto analiticamente stava nel modo in cui si propagava la non linearità della sezione dalla sezione più sollecitata a quelle adiacenti perciò gli spostamenti che producevano le caratteristiche di spostamento cioè le curvature in campo non lineari erano piccoli. Da lì ce ne è stata la conclusione che bisogna cercare soluzioni strutturali differenti. I modi in cui si può procedere sono due:

- usare un altro andamento dell'altezza della sezione lungo il controvento
- usare un altro legame costitutivo  $\sigma - \varepsilon$  della sezione.

In questo capitolo studieremo solo la prima modalità di costruzione della struttura, l'uso di diversi legami  $\sigma - \varepsilon$  della sezione sarà oggetto dei capitoli successivi.

Come motivo dell'inconvenienza strutturale in termini di duttilità delle strutture precedenti abbiamo detto che era il modo in cui si propaga la non linearità nelle sezioni adiacenti da quella più sollecitata. Allora se devo cambiare l'altezza della sezione in modo da avere una diffusione molto veloce della non linearità la prima soluzione che possiamo adoperare è quella di fare sì che si abbia non linearità cioè che si plasticizzi in contemporanea una lunghezza ben definita di controvento. Questa lunghezza la chiamo blocco plastico della struttura. Nei paragrafi successivi in questo capitolo viene studiato proprio questo sistema strutturale.

## 6.1) MODALITÀ DI COSTRUZIONE DELLA STRUTTURA E SOLUZIONE ANALITICA DELLA VARIAZIONE DELL'ALTEZZA DELLA SEZIONE SULLA LUNGHEZZA DEL CONTROVENTO

Per prima cosa dobbiamo anche in questa parte dello studio definire le ipotesi di base che governeranno i nostri calcoli:

- e) Altezza della sezione variabile lungo la lunghezza del controvento, di conseguenza momento d'inerzia variabile
- f) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame di Prandtl cioè il legame elastico perfettamente plastico, di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti e quello che deriva dal legame costitutivo di Prandtl

Il modo in cui si vuole cambiare l'altezza della sezione del controvento è quello di plasticizzare in contemporanea una lunghezza ben definita di controvento così che si abbia non linearità subito su un blocco della struttura e che poi si diffonda nelle sezioni adiacenti al blocco.

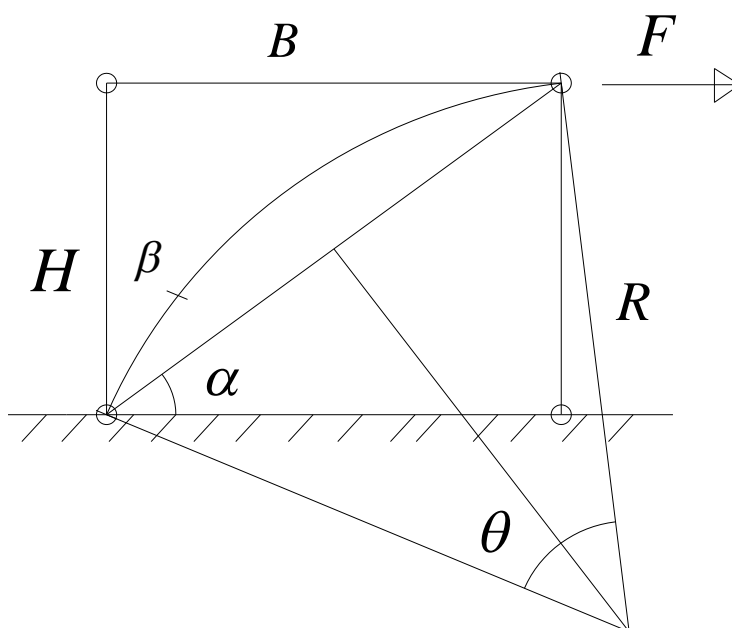
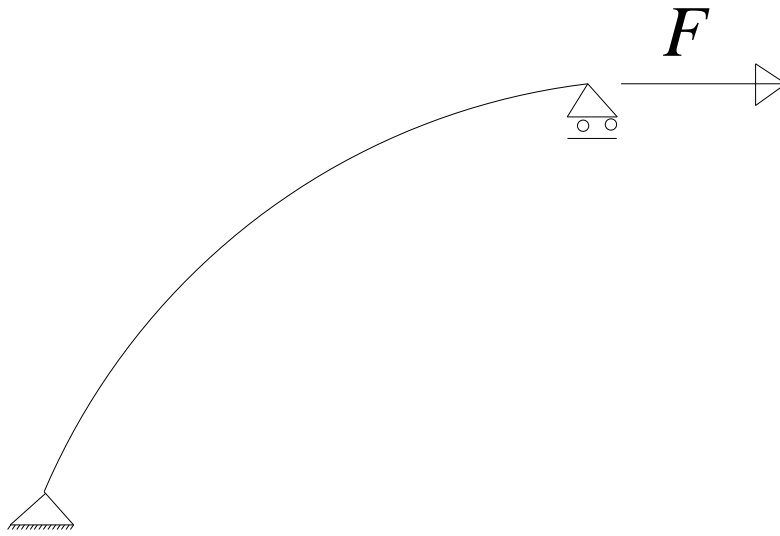


Figura 6.1 Schema di calcolo della struttura



**Figura 6.2 Modalità di deformazione della struttura**

In figura 6.1 è rappresentato lo schema di calcolo della struttura, in figura 6.2 invece è rappresentato il modo in cui è vincolata la struttura ovvero il modo in cui si può deformare.

I parametri geometrici fondamentali dove si basa il calcolo della struttura sono

- $R$  raggio di curvatura del cerchio, parte del quale è il controvento
- $H$  altezza del telaio
- $B$  lunghezza del telaio
- $\theta$  angolo di base del controvento
- $\alpha$  angolo della diagonale del telaio
- $\beta$  ascissa curvilinea polare dove si integra la struttura.

L'ascissa curvilinea polare  $\beta$  nel mio sistema di riferimento varia da un estremo all'altro del

controvento ed analiticamente varia da  $-\frac{\theta}{2}$  a  $\frac{\theta}{2}$   $-\frac{\theta}{2} \leq \beta \leq \frac{\theta}{2}$

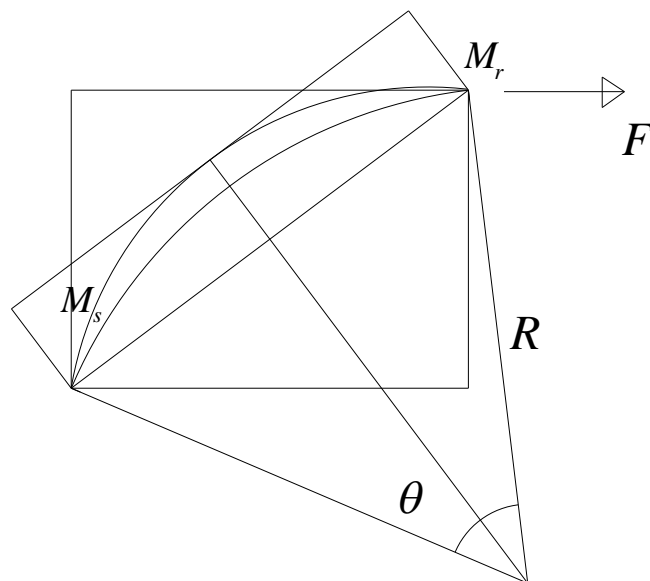
Il braccio  $d$  che mi dà il momento sul controvento ovvero la distanza del controvento in un qualsiasi suo punto e la diagonale del telaio è funzione dei parametri geometrici della struttura e dell'ascissa curvilinea polare  $\beta$ .

$$d = d_{(\beta)} = R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Di conseguenza il momento sollecitante sul controvento vale:

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Come abbiamo già detto il modo in cui tendiamo a procedere e quello di costruire la struttura in modo tale che sia abbia non linearità in contemporanea su una lunghezza ben definita del controvento.



**Figura 6.3** Diagramma dei momenti per la struttura con altezza della sezione costante.

In figura 6.3 sono stati rappresentati i diagrammi dei momenti per la struttura con altezza della sezione costante. Si vede che il momento sollecitante  $M_s$  ha andamento sinusoidale dato dalla formula:

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Il momento resistente  $M_r$  invece è costante su tutta la lunghezza del controvento perché il momento d'inerzia è costante lungo tutta la struttura essendo costante l'altezza della sezione

$$M_y = f_y \cdot w$$

$$w = \frac{bh^2}{6}$$

Si vede che in questo schema strutturale che è tipico delle strutture del capitolo precedente la non linearità avviene inizialmente solo alla sezione più sollecitata e poi si diffonde su quelle adiacenti.

Il momento massimo sollecitante si stabilisce a metà del tratto di circonferenza cioè per  $\beta = 0$  e vale :

$$M_{\max} = \frac{F}{\cos \alpha} R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Nel generico angolo  $\beta$  il momento sollecitante vale

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

Posso esprimere il momento sollecitante nel generico angolo  $\beta$  come funzione del momento massimo e del angolo  $\beta$  .

$$\frac{M_{(\beta)}}{M_{\max}} = \frac{\frac{F}{\cos \alpha} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\frac{F}{\cos \alpha} R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}$$

$$M_{(\beta)} = M_{\max} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}$$

Al punto centrale della circonferenza l'altezza della sezione è pari ad H

Decido di plasticizzare contemporaneamente un concio di controvento pari all'angolo  $\gamma$  che lo chiamo lunghezza di plasticizzazione.

Se la legge della variazione dell'altezza della sezione è descritta da

$$h = H \sqrt{\frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}}$$

Allora nel punto espresso dalla coordinata  $\gamma$  l'altezza è pari a

$$h_{(\gamma)} = H \sqrt{\frac{\left( \cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}}$$

Il controvento così descritto avrà un'altezza della sezione data da

$$h_{(\beta)} = H \sqrt{\frac{\left(\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}$$

fino all'angolo  $\beta$  e poi rimane costante.

Suppongo che come seguito dell'applicazione della forza  $F$  in centro del controvento cioè per  $\beta = 0$  il momento sollecitante raggiunge quello plastico cioè

$$\frac{M_{\max}}{w_{\max}} = f_y$$

$$\frac{M_{\max}}{\frac{bH^2}{6}} = f_y$$

Il momento nel punto descritto dall'angolo  $\gamma$  vale:

$$M_{(\gamma)} = M_{\max} \frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}$$

La tensione invece in tale punto vale

$$\frac{M_{(\gamma)}}{w_{(\gamma)}} = \frac{M_{\max} \frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}{\frac{bh_{(\gamma)}^2}{6}} = \frac{M_{\max} \frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}{b \left[ H \sqrt{\frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}} \right]^2} = \frac{M_{\max} \frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}{bH^2 \frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{M_{\max}}{w_{\max}} = f_y$$

Si capisce chiaramente che se l'altezza della sezione del controvento segue la legge sopraindicata il momento sollecitante raggiunge quello massimo elastico in contemporanea su tutta la lunghezza del controvento fino all'angolo  $\gamma$  cioè raggiunge la non linearità del materiale subito su tutto il blocco plastico della struttura.



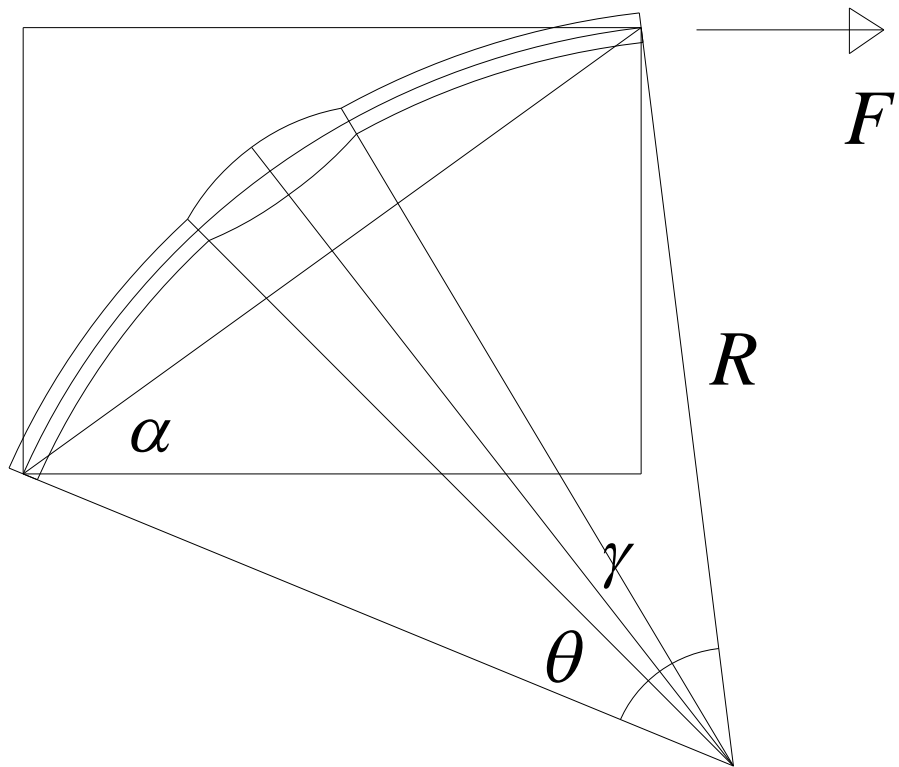


Figura 6.4 Forma geometrica della sezione lungo la struttura.

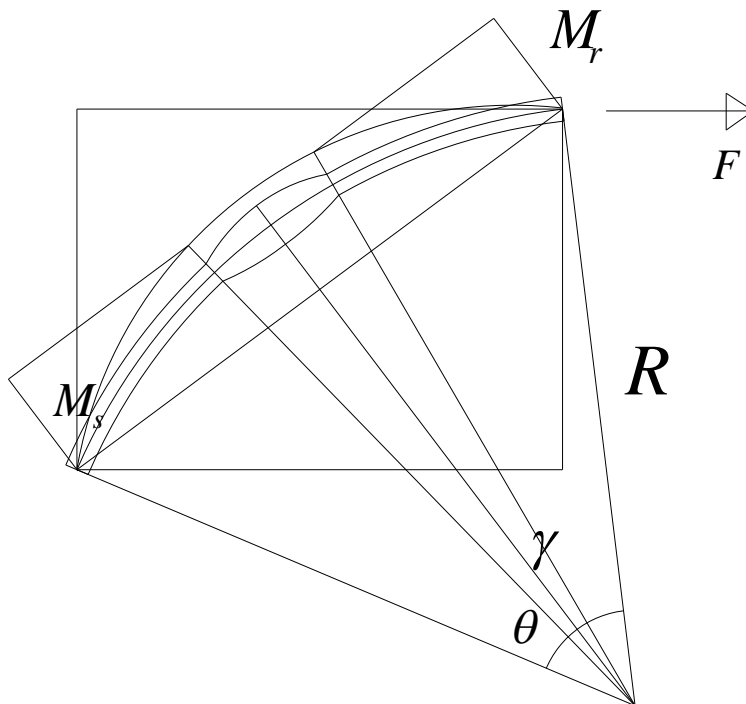


Figura 6.5 Diagramma dei momenti sulla struttura con altezza della sezione variabile

In figura 6.4 è stata rappresentata la forma geometrica che deve avere la sezione del controvento seguendo la legge sinusoidale

$$h = H \sqrt{\frac{\left(\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}$$

In figura 6.5 invece sono stati rappresentati i diagrammi dei momenti sulla struttura. Si vede che il diagramma del momento resistente  $M_r$  è costante fino all'ascissa espressa dal angolo  $\gamma$ , poi ha un andamento sinusoidale ed è uguale al momento sollecitante  $M_s$ . Costruendo la struttura con un'altezza della sezione che segue la legge sopraindicata abbiamo fatto sì che si plasticizzi in contemporanea il blocco plastico della struttura. Nei paragrafi successivi verranno indicati gli effetti che produce questo aspetto sul diagramma  $F - \delta$  del controvento.

## 6.2) CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA DEL CONTROVENTO

Per trovare la rigidezza elastica della struttura si procede come nei capitoli precedenti, si applica Il Principio Dei Lavori Virtuali. Si divide il controvento in 2 parti:

- parte della struttura con altezza della sezione costante
- parte della struttura con altezza della sezione variabile

Nella prima parte ho:

$$1 \cdot \delta_1 = \int_0^{l_1} M'(s) \cdot \frac{M(s)}{EJ} ds$$

$$1 \cdot \delta_1 = 2 \left[ \int_{\gamma}^{\frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos \alpha} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{F}{\cos \alpha EJ} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) R d\beta \right] = \frac{2FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{\gamma}^{\frac{\theta}{2}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 d\beta$$

$$\delta_1 = \frac{FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \frac{1}{2} \left[ -4\gamma + 2\theta + (\theta - 2\gamma) \cos \theta + 8 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen}(2\gamma) - 3 \operatorname{sen} \theta \right]$$

$$1 \cdot \delta_2 = 2 \left[ \int_0^\gamma \frac{1}{\cos \alpha} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \frac{F}{\cos \alpha E b \frac{h(\gamma)^3}{12}} R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) R d\beta \right] = \frac{2FR^3}{\cos^2 \alpha E \frac{b}{12}} \int_0^\gamma \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3} d\beta$$

$$\delta_2 = \frac{2FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \int_0^\gamma \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3} d\beta$$

Questo integrale si calcola numericamente.

$$\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2$$

$$\delta_{tot} = \frac{FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \frac{1}{2} \left[ -4\gamma + 2\theta + (\theta - 2\gamma) \cos \theta + 8 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen}(2\gamma) - 3 \operatorname{sen} \theta \right] +$$

$$\frac{2FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \int_0^\gamma \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3} d\beta$$

$$\delta_{tot} = \frac{FR^3}{\cos^2 \alpha EJ} \left[ \frac{1}{2} \left( -4\gamma + 2\theta + (\theta - 2\gamma) \cos \theta + 8 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen}(2\gamma) - 3 \operatorname{sen} \theta \right) + 2 \int_0^\gamma \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3} d\beta \right]$$

$$K = \cos^2 \alpha EJ \left[ \frac{1}{2} \left( -4\gamma + 2\theta + (\theta - 2\gamma) \cos \theta + 8 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} (2\gamma) - 3 \operatorname{sen} \theta \right) + 2 \int_0^\gamma \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3} d\beta \right]$$

### 6.3) CALCOLO DELLA FORZA DI SNERVAMENTO E DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA

Dopo avere definito la rigidezza elastica della struttura si procede alla costruzione del legame  $F - \delta$  del controvento. Anche in questa fase opereremo sempre con la modalità eseguita nei capitoli precedenti, cioè troviamo gli spostamenti non lineari della struttura per passi di carico dopo di che dall'interpolazione di tali punti si costruisce il legame  $F - \delta$  della struttura. Quando si applicano le forze superiori alla forza di snervamento della struttura si divide il controvento in due parti

- parte della struttura in campo elastico lineare
- parte della struttura in campo non lineare.

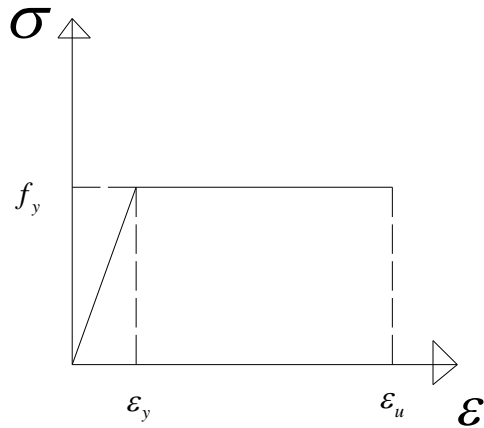
Per ognuna di queste parti si attribuisce alle curvature la legge corrispettiva. Nella parte lineare ho:

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

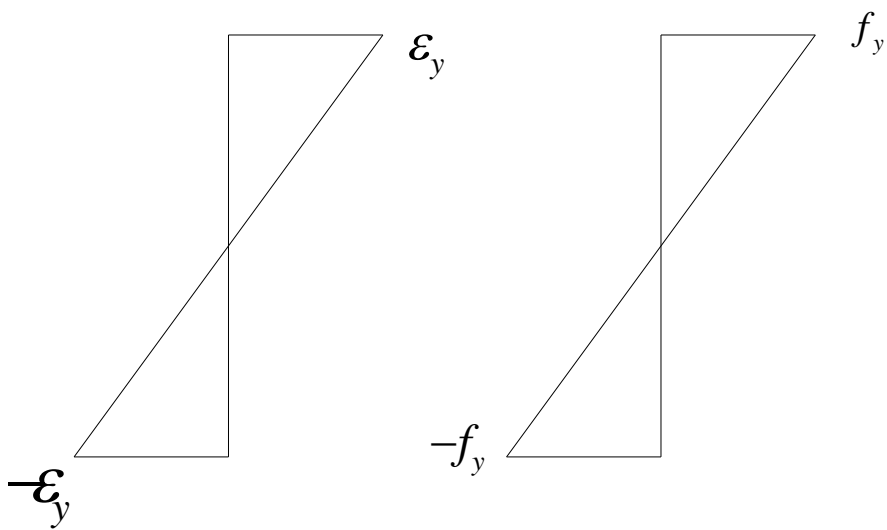
In quella non lineare invece le curvature seguono la legge che da il legame  $M - \chi$  che deriva dall'uso del legame costitutivo di Prandtl per il materiale

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_Y}{\chi} \right)^2 \right)$$

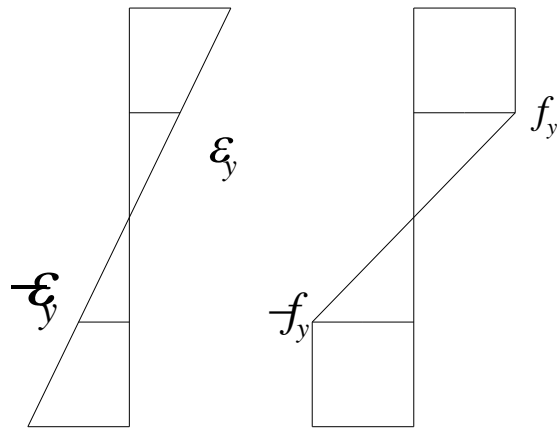
All'inizio del capitolo abbiamo definito nelle ipotesi di base il legame elastico - perfettamente plastico per il materiale. Di conseguenza le tensioni le curvature in campo lineare e non lineare si definiscono da questo legame.



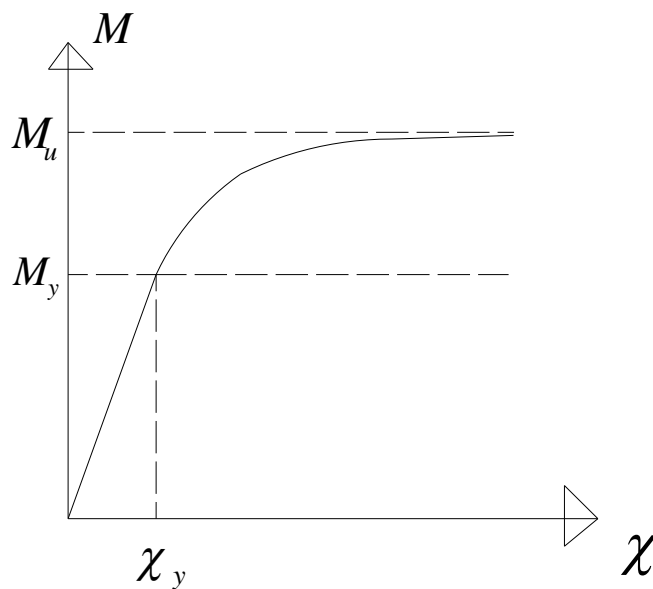
**Figura 6.6** Legame costitutivo di Prandtl



**Figura 6.7** Tensioni e deformazioni in campo lineare



**Figura 6.8 Tensioni e deformazioni in campo non lineare**



**Figura 6.9 Legame momento - curvatura che deriva dal legame di Prandtl**

La duttilità di ogni struttura è somma di tre contributi fondamentali:

- la duttilità del materiale
- la duttilità della sezione
- la duttilità dell'elemento strutturale

Allora è chiaro che i parametri fondamentali che influiscono il nostro studio sono:

- il legame costitutivo usato
- la geometria della sezione
- la geometria della struttura

Anche in questa parte dello studio come nei capitoli precedenti dovendo effettuare nei calcoli degli integrali numerici dobbiamo definire tutti i parametri geometrici e meccanici della nostra struttura perche solo in questo modo possiamo ottenere dei risultati sugli spostamenti ovvero costruire il legame  $F - \delta$  della struttura. nello stesso modo si potrebbe costruire tale legame analiticamente per qualsiasi altra struttura sotto le ipotesi fondamentali fatte all'inizio del capitolo.

Per prima devo trovare l'ultimo spostamento elastico della struttura cioè quello che si ha quando applico sul controvento la forza di snervamento.

I parametri geometrici usati per la struttura sono uguali a quelli del capitolo precedente in modo tale da potere paragonare i risultati.

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$R = 4m$$

$$\theta = 77^\circ \quad \frac{\theta}{2} = 38,5^\circ = \frac{\pi}{4,6753}$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

I parametri meccanici della sezione sono i seguenti:

$$f_y = 2700 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = 1,3 \text{‰}$$

$$\varepsilon_u = 100 \cdot \varepsilon_y = 13\%$$

$$E = 2039432 \frac{kg}{cm^2}$$

I parametri geometrici della sezione sono i seguenti:

$$H = h_{(\beta=0)} = 0,3m$$

$$b = 0,05m$$

Decido di applicare al controvento la legge di variazione dell'altezza della sezione trovata nel paragrafo precedente:

$$h_{(\gamma)} = H \sqrt{\frac{\left(\cos \gamma - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}}$$

H



**Figura 6.10 Geometria della sezione**

Decido di plasticizzare in contemporanea la struttura per una lunghezza descritta dall'ascissa curvilinea polare  $\gamma = 10^\circ$   $\gamma = \frac{\pi}{18}$  da tutti e due i lati. Il controvento è simmetrico rispetto al suo centro cioè rispetto al punto descritto da  $\beta = 0$

- Passo 0 applicazione della forza di snervamento.

Avendo una lunghezza definita di plasticizzazione contemporanea posso scegliere qualsiasi punto del blocco plastico e mediante il suo braccio  $d = d_{(\beta)} = R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$  posso trovare la forza di snervamento del blocco plastico del controvento. Decido di usare il punto descritto da  $\beta = 0$

$$H = h_{(\beta=0)} = 0,3m$$

$$b = 0,05m$$



$$w_{(\beta=0)} = \frac{bH^2}{6} = 75 \cdot 10^{-5} m^3$$

$$M_{Y(\beta=0)} = w_{(\beta=0)} \cdot f_y = 75 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 20250 kg \cdot m$$

$$h_{\left(\gamma=\frac{\pi}{18}\right)} = H \sqrt{\frac{\left(\cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)}} = 0,28m$$

$$w_{\left(\gamma=\frac{\pi}{18}\right)} = \frac{bh_{\left(\gamma=\frac{\pi}{18}\right)}^2}{6} = 65,33 \cdot 10^{-5} m^3$$

$$M_{Y\left(\gamma=\frac{\pi}{18}\right)} = w_{\left(\gamma=\frac{\pi}{18}\right)} \cdot f_y = 65,33 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 17640 kg \cdot m$$

$$d = d_{(\beta)} = R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$M_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot d_{(\beta)} = \frac{F}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$d_{\max}$  si ha per  $\beta = 0$

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0,7826$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

$$d_{\max} = R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = 0,87m$$

$$\frac{0,87}{\cos \alpha} = 1,0875$$

$$F_y = \frac{M_y}{1,0875} = \frac{20250 kg \cdot m}{1,0875m} = 18620 kg$$

Adesso posso applicare Il Principio Dei Lavori Virtuali per trovare lo spostamento che corrisponde a questa forza. Siccome la struttura è simmetrica divido l'integrale in due parti:

- parte con altezza della sezione costante
- parte con altezza della sezione variabile

$$\delta_0^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{F_y}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{E \left( \frac{H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}}{12} \right)^3} \cdot R d\beta$$

$$\delta_0^1 = 2 \frac{FR^3}{\cos^2 \alpha EJ_{(\beta=0)}} \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2}{\left( \frac{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}}{12} \right)^3} \cdot d\beta$$

$$\delta_0^1 = 0,01322m$$

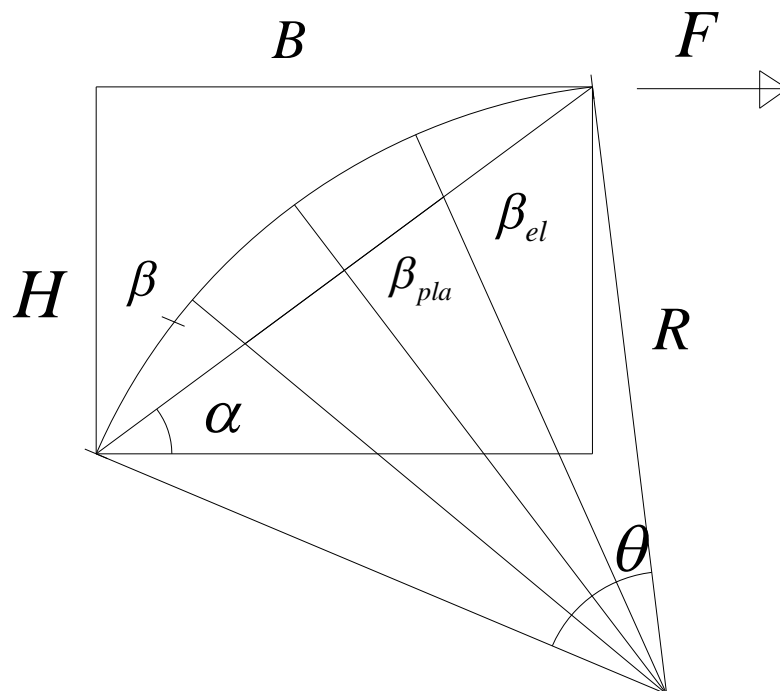
$$\delta_0^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{4,67532}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ_{\left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \cdot R d\beta$$

$$\delta_0^2 = \frac{2FR^3}{\cos^2 \alpha EJ_{\left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{4,67532}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \cdot d\beta$$

$$\delta_0^2 = 0,0177m$$

$$\delta_0^{tot} = \delta_0^1 + \delta_0^2 = 0,03m$$

Dopo avere calcolato l'ultimo spostamento elastico del controvento si procede al calcolo degli spostamenti non lineari della controvento stesso. Si procede come spiegato prima per passi di carico. Per ogni valore di carico si divide la struttura nella parte elastica e nella parte non lineare, si applica in queste parti la corrispondente legge di variazione delle curvature e poi si effettua l'integrale che mi da gli spostamenti.



**Figura 6.11** Divisione della struttura in parti lineari e non lineari

Siccome la struttura è simmetrica l'integrale totale o il controvento stesso sarà diviso in tre parti:

- parte in campo non lineare con altezza della sezione variabile lungo il controvento
- parte in campo non lineare con altezza della sezione costante lungo il controvento
- parte in campo lineare

-PASSO 1

$$F_1 = 1,1 \cdot F_y = 20482 \text{ kg}$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 25602 \text{ kg}$$

$$d_1 = \frac{M_{y\left(\beta=\frac{\pi}{18}\right)}}{P_1} = 0,69 \text{ m}$$

$$d_1 = R \left( \cos \beta_1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_1 = 17^\circ = \frac{\pi}{10,588}$$

Ho  $10^\circ$  di parte in campo non lineare con altezza della sezione costante e  $7^\circ$  di parte non lineare con altezza della sezione costante, da tutti e due i lati.

Inverto il legame  $M - \chi$  ed esprimo le curvature in base al momento.

$$M = M_u \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 \right) \quad \chi = \frac{\chi_y}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M}{M_u} \right)}}$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\pi/18} M'_{(\beta)} \cdot \chi_{(\beta)} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\pi/18} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\chi_{y(\beta)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\pi/18} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\frac{M_{y(\beta)}}{EJ_{(\beta)}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{b \left( H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6}}{E \cdot \frac{b \left( H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3}{12}} - 1 \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_1 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{b \left( H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6} \right)$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot EH \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}}{F_1 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)} - 1 \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_1 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{bH^2 \left( \frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right)}{6} \right)$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \frac{\overline{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}}{EH \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\left( 3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 R}{\cos \alpha}}{1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right) \right)$$

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \frac{\overline{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}}{EH \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\left( 3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right) \right)$$

$$\delta_1^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH} \int_0^{\pi/18} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

$$\left( 3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right) \right)$$

$$\delta_1^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_1^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{F_1 R \cdot 0,2174}{\cos \alpha \cdot 30375} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_1^1 = 0,015m$$

$$\delta_1^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{10,588}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R \cdot d\beta \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \right)}$$

$$\delta_1^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{10,588}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R \cdot d\beta \cdot \sqrt{3 \left( 1 - 3,87 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}$$

$$\delta_1^2 = \frac{2 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{10,588}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 3,87 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_1^2 = 0,01m$$

$$\delta_1^3 = 2 \int_{\frac{\pi}{10,588}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^3 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{10,588}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^3 = 0,0098m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^1 + \delta_1^3 = 0,035m$$

PUNTO 1 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_1$
	20482kg	0,035m

## PASSO 2

$$F_2 = 1,2 \cdot F_y = 22344kg$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 27930kg$$

$$d_2 = \frac{M_{y\left(\beta=\frac{\pi}{18}\right)}}{P_2} = 0,63m$$

$$d_2 = R \left( \cos \beta_2 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_2 = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$$

Ho 10° di parte in campo non lineare con altezza della sezione costante e 10° di parte non lineare con altezza della sezione costante, da tutti e due i lati.

$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \chi_{(\beta)} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\chi_{y(\beta)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\frac{M_{y(\beta)}}{EJ_{(\beta)}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$



$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left[ \frac{2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6} + \frac{E \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3}{12} \right] \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left[ 1 - \frac{F_2 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2 \right]$$

$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left[ \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}{EH} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} + \frac{F_2 R}{\cos \alpha} \right] \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left[ 1 - \frac{F_2 R}{\cos \alpha} - 30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right]$$

$$\delta_2^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{F_2 R \cdot 0,2174}{\cos \alpha \cdot 30375} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_2^1 = 0,018m$$

$$\delta_2^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_2}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \right)}}$$

$$\delta_2^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,2222222 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}}$$

$$\delta_2^2 = \frac{2 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,2222 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = 0,015m$$

$$\delta_2^3 = 2 \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ_{\left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^3 = \frac{2F_2 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^3 = 0,0072m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 = 0,04m$$

PUNTO 2 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_2$
	22344kg	0,04m

PASSO 3

$$F_3 = 1,3 \cdot F_y = 24206kg$$

$$P_3 = \frac{F_3}{\cos \alpha} = 30258kg$$

$$d_3 = \frac{M_{y\left(\beta = \frac{\pi}{18}\right)}}{P_3} = 0,58m$$

$$d_3 = R \left( \cos \beta_3 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_2 = 22^\circ = \frac{\pi}{8,18}$$

Ho 10° di parte in campo non lineare con altezza della sezione costante e 12° di parte non lineare con altezza della sezione costante, da tutti e due i lati.

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \chi_{(\beta)} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\chi_{y(\beta)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\frac{M_{y(\beta)}}{EJ_{(\beta)}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left[ \frac{2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6} + \frac{E \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3}{12} \right] \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left[ 1 - \frac{F_3 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2 \right]$$

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left[ \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}{EH} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} + \frac{F_3 R}{\cos \alpha} \right] \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left[ 1 - \frac{F_3 R}{\cos \alpha} - 30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right]$$

$$\delta_3^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

$$\delta_3^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{F_3 R \cdot 0,2174}{\cos \alpha \cdot 30375} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_3^1 = 0,022m$$

$$\delta_3^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{8,18}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_3}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \right)}}$$

$$\delta_3^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{8,1818}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,574074 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}}$$

$$\delta_3^2 = \frac{2 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{8,18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,574074 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_3^2 = 0,021m$$

$$\delta_3^3 = 2 \int_{\frac{\pi}{8,18}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_3 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ_{\left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^3 = \frac{2F_3 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{8,18}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^3 = 0,0058m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 = 0,048m$$

PUNTO 3 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_2$
	24206kg	0,0488m

#### PASSO 4

$$F_4 = 1,4 \cdot F_y = 26068kg$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 32585kg$$

$$d_4 = \frac{M_{y\left(\beta = \frac{\pi}{18}\right)}}{P_4} = 0,54m$$

$$d_4 = R \left( \cos \beta_4 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_4 = 24^\circ = \frac{\pi}{7,5}$$

Ho 10° di parte in campo non lineare con altezza della sezione costante e 14° di parte non lineare con altezza della sezione costante, da tutti e due i lati.

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \chi_{(\beta)} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\chi_{y(\beta)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\frac{M_{y(\beta)}}{EJ_{(\beta)}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6} + \frac{E \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3}{12} \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_4 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2 \right)$$

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}{EH} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} + \frac{F_4 R}{\cos \alpha} \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_4 R}{\cos \alpha} - 30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\delta_4^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

$$\delta_4^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{F_4 R \cdot 0,2174}{\cos \alpha \cdot 30375} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_4^1 = 0,03m$$

$$\delta_4^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,5}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_4}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \right)}}$$

$$\delta_4^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,5}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,92592592 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}}$$

$$\delta_4^2 = \frac{2 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,5}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 4,9259259 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_4^2 = 0,033m$$



$$\delta_4^3 = 2 \int_{\frac{\pi}{7,5}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_4 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ_{\left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^3 = \frac{2F_2 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{7,5}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^3 = 0,0044m$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 + \delta_4^3 = 0,068m$$

PUNTO 4 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_2$
	26068kg	0,068m

#### PASSO 5

$$F_5 = 1,5 \cdot F_y = 27930kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 34913kg$$

$$d_5 = \frac{M_{y\left(\beta = \frac{\pi}{18}\right)}}{P_5} = 0,5m$$

$$d_5 = R \left( \cos \beta_5 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_4 = 25^\circ = \frac{\pi}{7,2}$$

Ho 10° di parte in campo non lineare con altezza della sezione costante e 15° di parte non lineare con altezza della sezione costante, da tutti e due i lati.

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \chi_{(\beta)} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\chi_{y(\beta)}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{18}} M'_{(\beta)} \cdot \frac{\frac{M_{y(\beta)}}{EJ_{(\beta)}}}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{M_{(\beta)}}{M_{u(\beta)}} \right)}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2}{6} + \frac{E \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^3}{12} \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_5 R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} - 1,5 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot \left( b H \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)^2 \right)$$

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\pi/18} \frac{1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha} \cdot \left( \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4}{EH} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} + \frac{F_5 R}{\cos \alpha} \right) \cdot R \cdot d\beta$$

$$3 \left( 1 - \frac{F_5 R}{\cos \alpha} - 30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$\delta_5^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{F_5 R \cdot 0,2174}{\cos \alpha \cdot 30375} \right)}} \cdot 0,038$$

$$\delta_5^1 = 0,34m$$

$$\delta_5^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,2}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{1,5 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}} \right)}}$$

$$\delta_5^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,2}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{\frac{M}{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)}}{EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot \frac{R \cdot d\beta}{\sqrt{3 \left( 1 - 5,277777777 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}}$$

$$\delta_5^2 = \frac{2 \cdot M_{y \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} \int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{7,2}} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - 5,277777777 \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \right)}} \cdot d\beta$$

$$\delta_5^2 = 0,0366m$$

$$\delta_5^3 = 2 \int_{\frac{\pi}{7,2}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_5 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ \left( \beta = \frac{\pi}{18} \right)} R \cdot d\beta$$

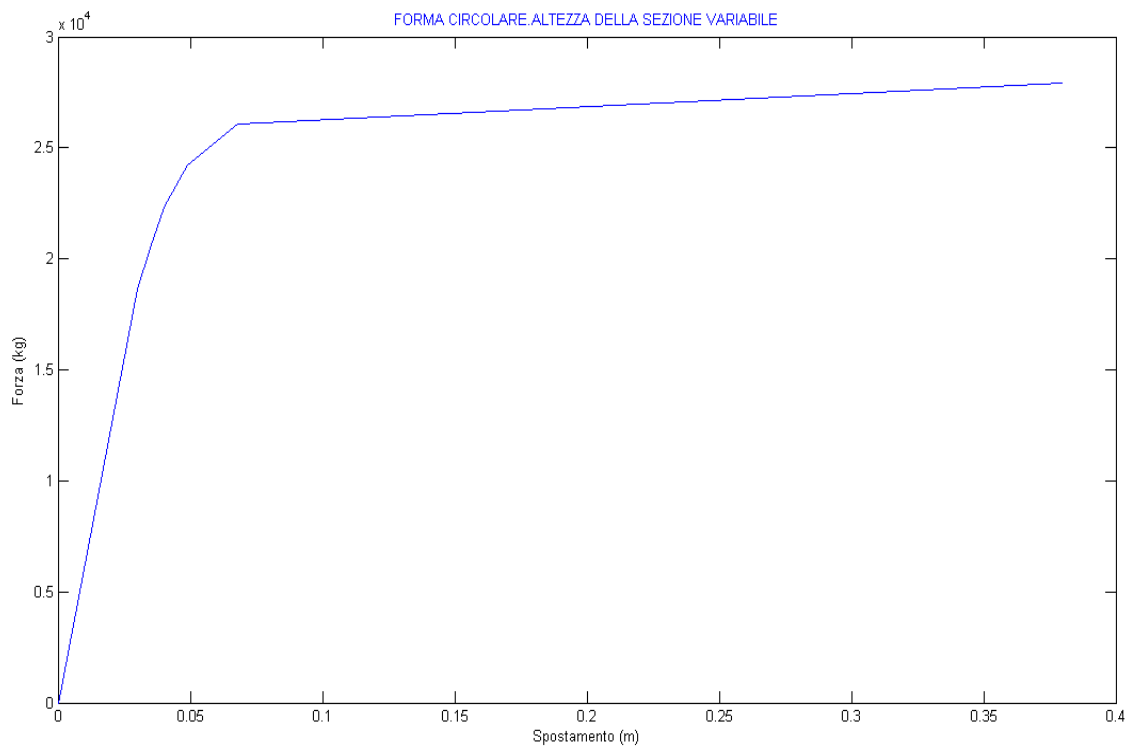
$$\delta_5^3 = \frac{2F_5 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{7,2}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^3 = 0,0039m$$

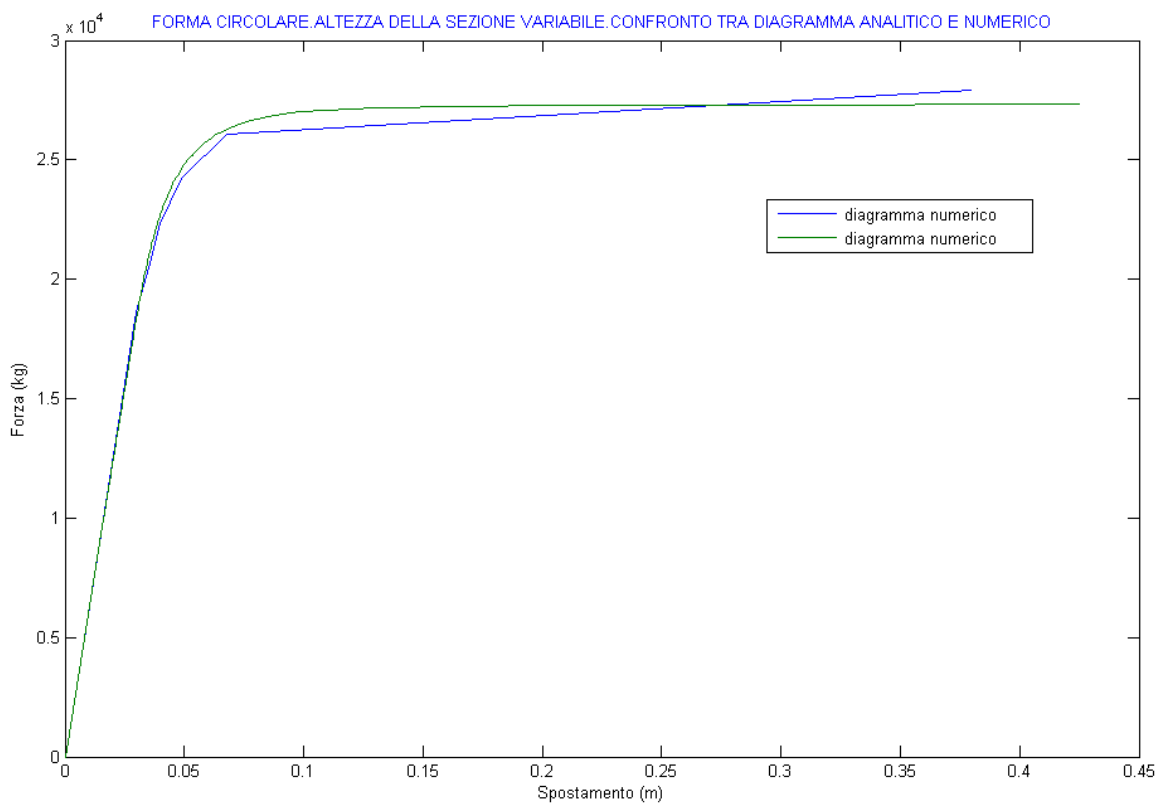
$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 + \delta_5^3 = 0,38m$$

PUNTO 5 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_1$	$\delta_2$
	27930kg	0,38m

Abbiamo così trovato punti  $F - \delta$  appartenenti alla parte non lineare del diagramma Forza - spostamento del controvento. Possiamo adesso costruirci questo diagramma come collegamento della parte lineare e l'interpolazione dei punti della parte non lineare.



**Figura 6.12 Legame Forza - Spostamento del controvento**



**Figura 6.13 Confronto tra soluzione analitica e numerica della struttura**

In figura 6.12 è stato rappresentato il legame  $F - \delta$  del controvento, in figura 6.13 invece è stato rappresentato il confronto tra la soluzione analitica e quella numerica della struttura

Si vede chiaramente che questa struttura così costruita geometricamente e meccanicamente è molto duttile secondo i nostri parametri di studio della duttilità cioè spostamenti ultimi nella direzione della forza. Rispetto alla struttura con altezza della sezione costante lungo tutto il controvento studiata nel capitolo precedente si vede che gli spostamenti non lineari sono molto più grandi, evidenziando così la convivenza di questa scelta strutturale rispetto la prima.

Ancora una volta come nei capitoli precedenti essendo questo legame frutto di un lavoro analitico la spiegazione di questo miglioramento nei risultati può essere fatta analiticamente.

Abbiamo visto che nelle strutture di controvento con altezza della sezione variabile lungo il controvento nell'integrale generale che mi dà lo spostamento il contributo più grande lo dà la parte in campo non lineare con altezza della sezione variabile.

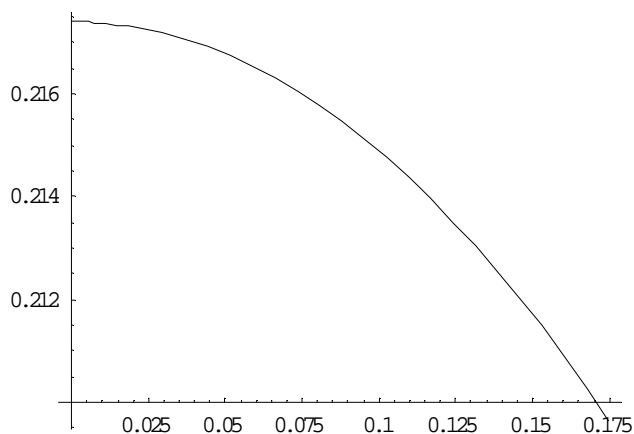
Nel nostro caso questi spostamenti sono dati dalla formula:

$$\delta_5^1 = 2 \frac{2 \cdot 2700 \cdot 10^4 \cdot R^2}{\cos \alpha \cdot EH \cdot \sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)}} \int_0^{\pi/18} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

Possiamo ancora una volta definire il nostro coefficiente di amplificazione degli spostamenti ovvero la funzione che descrive l'andamento delle curvature lungo la parte non lineare con altezza della sezione variabile

$$\int_0^{\pi/18} \frac{\left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{3 \left( 1 - \frac{\frac{F_5 R}{\cos \alpha}}{30375 \cdot \frac{1}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}} \right)} \sqrt{\frac{\cos \beta - \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}}}} \cdot d\beta$$

La funzione che sta sotto l'integrale tende a valori molto elevati per valori di forza vicini al valore ultimo, di conseguenza il valore dell'integrale numerico è molto grande e quindi anche gli spostamenti che lui descrive. Se grafichiamo questa funzione si vede che prende valori elevati lungo tutta la lunghezza del blocco plastico e non solo in punti isolati come succedeva per le curvature che abbiamo rappresentato graficamente nei capitoli precedenti. Si vede allora che la struttura circolare descritta con questo sistema di riferimento e con altezza della sezione variabile è più duttile di tutte le altre strutture studiate fino adesso.



**Figura 6.14 Funzione amplificazione degli spostamenti.**

In figura 6.14 è stato rappresentato il grafico della funzione amplificazione degli spostamenti, in ordinata è riportato il valore della funzione invece in ascissa è riportata il valore dell'ascissa curvilinea polare  $\beta$  che descrive il blocco plastico del controvento. Come abbiamo già detto lo spazio che questa curva racchiude è molto più grande di tutte le altre forme viste in precedenza.

La forma circolare costruita con un'altezza della sezione variabile lungo il controvento è un'ottima soluzione strutturale che mi dà una elevatissima duttilità trovando rimedio anche all'inconvenienza che porta dietro il legame di Prandtl che essa usa. Queste tipologie strutturali sono esclusivamente formate dal materiale acciaio però non è detto che non si possano usare altri materiali con legami costitutivi diversi. Il legame reale dell'acciaio non è perfettamente plastico ma ha un incrudimento basso. Volendo allora trascurare questo incrudimento e supponendo che il materiale del nostro controvento sia perfettamente plastico questa tipologia strutturale cioè controventi con altezza variabile secondo una definita legge è di fondamentale importanza per garantire duttilità all'elemento strutturale. Lo studio di queste strutture e della meccanica dei

materiali può portare a materiali compositi che abbiano appunto un legame costitutivo tipo quello di Prandtl, e allora un'altra volta si sottolinea la convenienza strutturale che porta dietro la legge di variazione dell'altezza della sezione lungo il controvento in termini di duttilità strutturale.



## **CAPITOLO 7**

### **FORMA TRIANGOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE ELASTO – PLASTICO CON INCRUDIMENTO**

Le strutture di controvento deformabili per flessione o come di solito si chiamano “CRESCENT SHAPED BRACES” possono come tutte le altre strutture essere costruite in vari modi geometricamente e meccanicamente. Sulla geometria di una struttura si ha una vasta gama si scelta perche il costruttore può scegliere sia la forma geometrica del controvento, triangolare circolare ellittica e parabolica o qualsiasi altra forma egli ne dispone i metodi di progetto e di verifica, ma può scegliere anche l’andamento delle altezze delle sezioni lungo il controvento che egli ritiene opportuno. Sull’altro aspetto invece collegato al carattere meccanico del materiale che compone la sua struttura il costruttore non ha molte alternative se no il legame costitutivo del materiale del suo controvento. Almeno che non ci sia la possibilità di produrre materiali con diversi legami costitutivi in base alle leghe metalliche e composite che si possono usare egli è tenuto a studiare l’andamento deformativo della sua struttura basandosi solo sul legame costitutivo del materiale che dispone. Questo legame può in varie fasi accoppiarlo analiticamente a varie forme geometriche che ritiene studiare e scegliere quella più opportuna in termini di duttilità ma non può mai cambiare il legame costitutivo del materiale.

Nel nostro studio di queste strutture siamo partiti dal caso più semplice da considerare, una forma geometrica triangolare con l’altezza della sezione costante su tutto il controvento accoppiata ad un legame costitutivo elastico – perfettamente plastico tipo quello di Prandtl. I risultati ottenuti dallo studio di questa struttura abbiamo visualizzato i suoi limiti ma soprattutto le strade da percorrere per l’ottimizzazione delle nostre strutture in termini della duttilità da raggiungere.

Durante il primo percorso dello studio abbiamo seguito la prima strada da fare, quella legate alla geometria della struttura. Geometria intesa sia in termini di forma della struttura di controvento sia in termini di geometria delle sezioni che lo compongono. Abbiamo studiato diverse forme di controvento ed abbiamo visto i vantaggi di una rispetto al altra. Abbiamo pero massimizzato il nostro lavoro e migliorato notevolmente i nostri risultati variando l’andamento dell’altezza del controvento. I risultati ottenuti sono stati più che soddisfacenti perche per ogni forma abbiamo definito un modo di costruire la struttura ovvero una legge di variazione dell’altezza della sezione lungo il controvento che mi massimizza la mia duttilità e da degli ottimi risultati. Siamo arrivati

quindi al capolinea nella nostra prima fase di studio perché avendo il limite del legame costitutivo di Prandtl, che nelle situazioni reali si produce nel legame che il materiale in commercio contiene, abbiamo sfruttato tutte le nostre possibilità per ottimizzare i nostri risultati in termini di diversi tipi di variazione della geometria della nostra struttura.

Dobbiamo quindi adesso percorrere la seconda strada del nostro studio, quella di adoperare un altro tipo di legame costitutivo del materiale. D'ora in poi useremo nei nostri vari casi il legame sforzo - deformazione del materiale elasto - plastico con incrudimento. Questa strada che percorreremo è frutto sia della ricerca di trovare altri risultati analitici dovuto al fatto che abbiamo esaurito le possibilità di ricerca nella prima fase ma soprattutto di studiare ed avvicinarsi più possibile ai casi reali che si incontrano nella pratica progettuale e costruttiva di questo tipo di strutture di controvento. Il materiale che si usa nella grande maggioranza dei casi per queste strutture è l'acciaio da carpenteria. Il suo legame costitutivo contiene una fase di incrudimento variabile fino a rottura del materiale. Proprio questo legame reale cercheremo di cogliere e rappresentare mediante la nostra teoria in modo tale da essere più vicini possibile al comportamento di una struttura reale.

Nella prima parte di studio di questa nuova fase della nostra ricerca si introduce il legame costitutivo con incrudimento e si accorpora ad una struttura per trovare un procedimento di studio per le strutture con questo tipo di legame costitutivo. Nella seconda fase invece si usa un legame tale che possa cogliere il legame reale del nostro materiale e si prova a ricavare il legame  $F - \delta$  di un controvento che contiene il legame costitutivo che abbiamo scelto.

## 7.1) LEGAME COSTITUTIVO ELASTO - PLASTICO LINEARMENTE INCRUDENTE

Come prima cosa nel nostro studio dobbiamo rappresentare e studiare il nuovo legame costitutivo con cui intendiamo lavorare di seguito. Dobbiamo innanzitutto studiare il legame  $M - \chi$  momento - curvatura che ne deriva e trovare la legge che esprime l'andamento delle mie caratteristiche si spostamento cioè le curvature. Dopo di che dobbiamo verificare se è possibile lavorare con questa legge cioè integrarla lungo la nostra struttura per trovare come sempre il legame  $F - \delta$  del nostro controvento.

Il legame costitutivo elasto - plastico linearmente incrudente del materiale è composto da due parti:

- una parte elastica lineare fino alla deformazione di snervamento
- una seconda parte lineare che esprime l'incrudimento del materiale fino alla deformazione ultima.

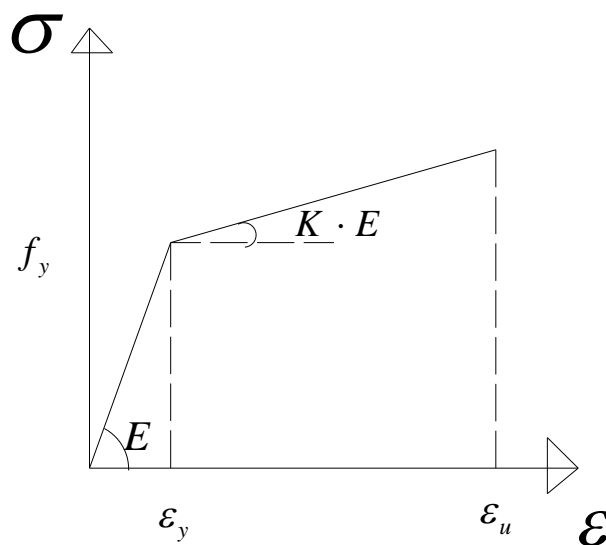
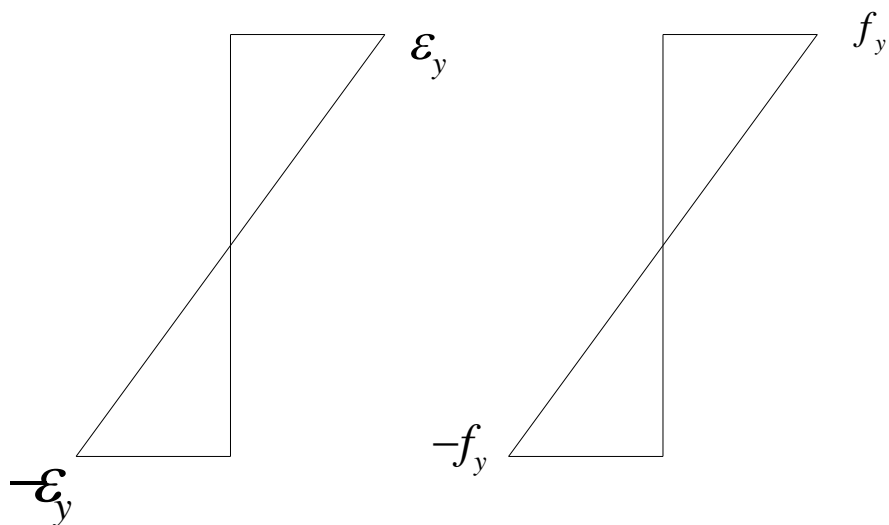


Figura 7.1 Legame elasto - plastico linearmente incrudente

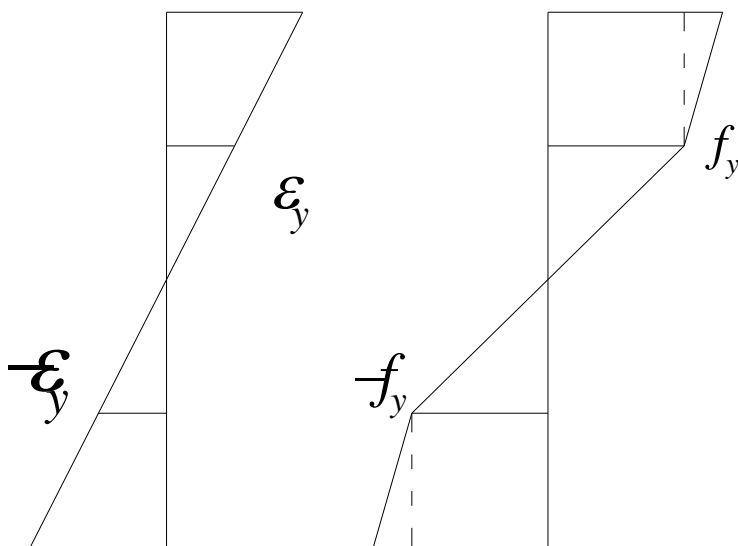
La prima parte del legame essendo quella elastica lineare è governata dalla rigidità elastica  $E$  del materiale. La seconda parte invece, quella che descrive il comportamento incrudente del materiale è legata alla rigidità elastica del materiale mediante il fattore correttivo  $K$ . Questo modo di esprimere la parte incrudente del legame è molto utile nella procedura del calcolo.

L'andamento delle tensioni e delle deformazioni nel campo lineare è del tutto uguale a quello che deriva dal legame di Prandtl, (vedi figura 7.2 )



**Figura 7.2 Andamento delle tensioni e delle deformazioni in campo lineare**

Il cambiamento che introduce questo legame e il modo in cui variano le tensioni in campo non lineare, ( vedi figura 7.3 )



**Figura 7.3 Andamento delle tensioni e delle deformazioni in campo non lineare.**

Si vede in figura 7.3 che le tensioni aumentano anche se lievemente rispetto al valore di snervamento. Si intuisce che la sezione riceve ancora carico prima di raggiungere il suo valore ultimo di deformazione. Questa duttilità sezionale si tradurrà come si vedrà in seguito in una maggiore duttilità dell'elemento strutturale. Da questo andamento delle tensioni e delle deformazioni nel campo non lineare mediante passaggi matematici il legame  $M - \chi$  momento curvatura della sezione:

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Questo legame può essere visto come somma di due termini:

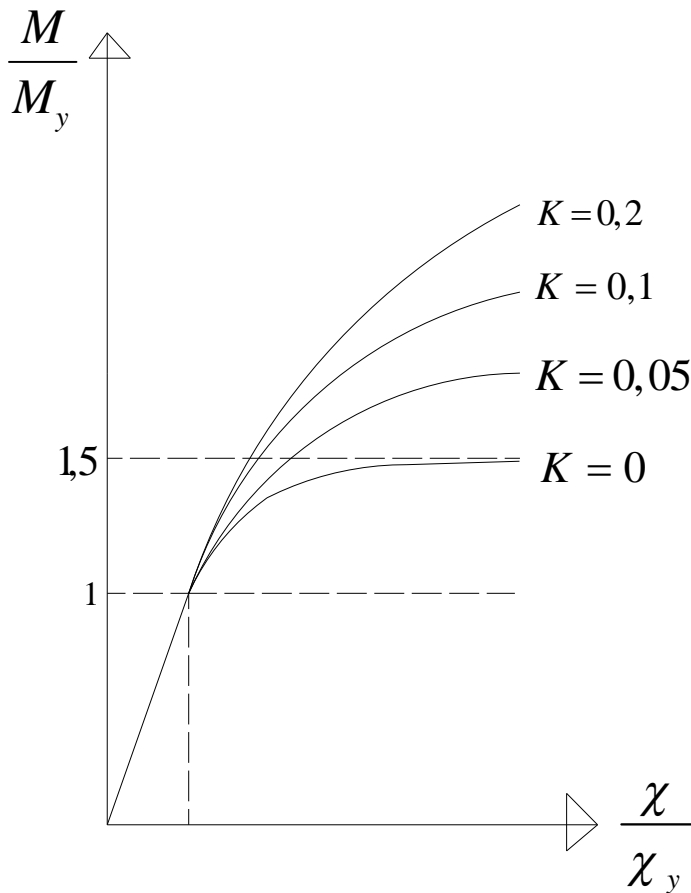
$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right]$$

Il primo è esattamente il legame momento – curvatura che deriva dal legame elastico – perfettamente plastico.

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_e} - 3 \right) \right]$$

Questa seconda parte invece è il contributo che comporta l'incrudimento sul legame  $M - \chi$  momento curvatura della sezione, e rappresenta fisicamente il carico che la sezione può ancora subire prima di arrivare a rottura, quindi l'incrudimento influisce fortemente sulla duttilità della sezione.

Si vede che sul legame totale  $M - \chi$  compare la costante  $K$ , quindi questo legame oltre ai soliti parametri  $M_y$  e  $\chi_y$  sarà funzione anche del parametro  $K$ .



**Figura 7.4 Legami momento - curvatura per diversi valori del parametro K**

In figura 7.4 sono stati rappresentati diversi legami  $M - \chi$  momento curvatura della sezione al variare del parametro dell'incrudimento  $K$ . Si vede chiaramente che il caso più semplice ovvero quello che abbiamo usato fino adesso in tutti i capitoli precedenti cioè il  $M - \chi$  che deriva dal legame costitutivo di Prandtl è un caso particolare del legame generale ed è quello che corrisponde ad un valore della costante di incrudimento  $K = 0$ . Dal grafico della figura 7.4 si vede che per questo caso il momento ultimo  $M_u$  tende asintoticamente al valore  $M_u = 1,5 \cdot M_y$  quando le curvature tendono all'infinito. Per altri valori di  $K$  invece si vede che il momento prende valori ben più elevati quando le curvature crescono

Come abbiamo già detto prima la duttilità strutturale è somma di tre parametri fondamentali:

- la duttilità del materiale data dal suo legame costitutivo.
- la duttilità della sezione data dal legame  $M - \chi$ .
- la duttilità dell'elemento strutturale data dalla sua geometria.

Se indichiamo come la duttilità sezionale il rapporto  $\frac{M_u}{M_y}$  capiamo allora l'effetto benefico che comporta l'incrudimento sulla duttilità sezionale della struttura. Nei paragrafi successivi cercheremo di vedere l'effetto dell'incrudimento sulla duttilità totale della struttura.

## **7.2) LEGAME FORZA-SPOSTAMENTO DELLA STRUTTURA DI CONTROVENTO CON LEGAME COSTITUTIVO DEL SUO MATERIALE ELASTO-PLASTICO LINEAREMENTE INCRUDENTE.**

Dopo avere introdotto il nuovo legame costitutivo del materiale e visualizzati i benefici che esso comporta sulla duttilità della sezione si cerca ora di vedere che risultati comporterà sul comportamento totale della struttura. Si cerca quindi di trovare il legame  $F - \delta$  del controvento composto da un materiale che ha come legame costitutivo quello elasto - plastico linearmente incrudente.

Le ipotesi di base che governano i calcoli di questa parte del nostro studio sono:

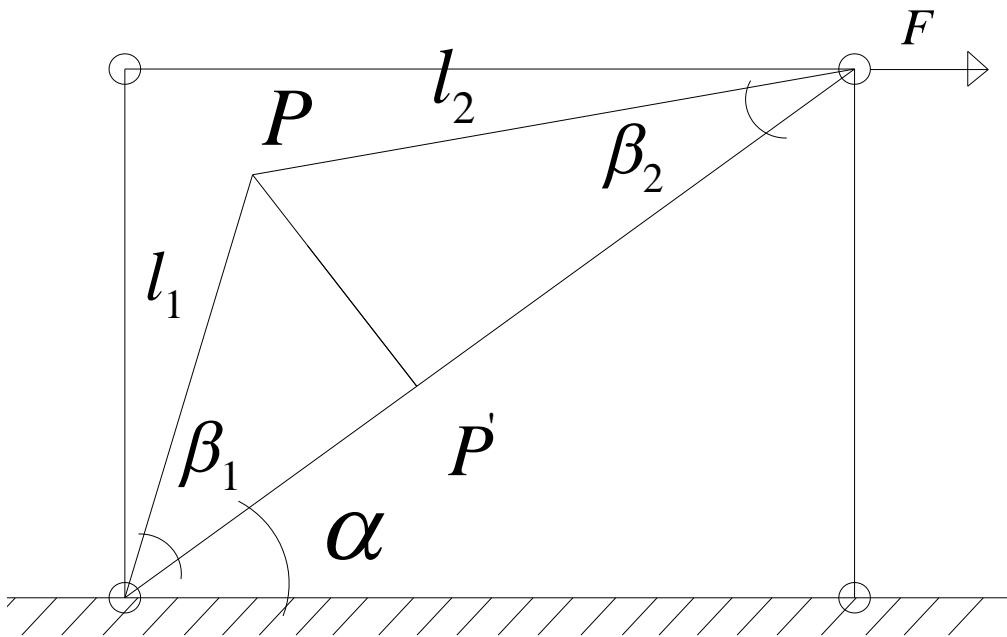
- c) Altezza della sezione costante lungo tutto il controvento, di conseguenza momento d'inerzia costante del controvento per tutta la sua lunghezza.
- d) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame elasto - plastico linearmente incrudente di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti è quello che deriva da questo legame costitutivo

Come forma geometrica della struttura studieremo quella più usata in realtà cioè la forma triangolare con altezza della sezione costante lungo il controvento.

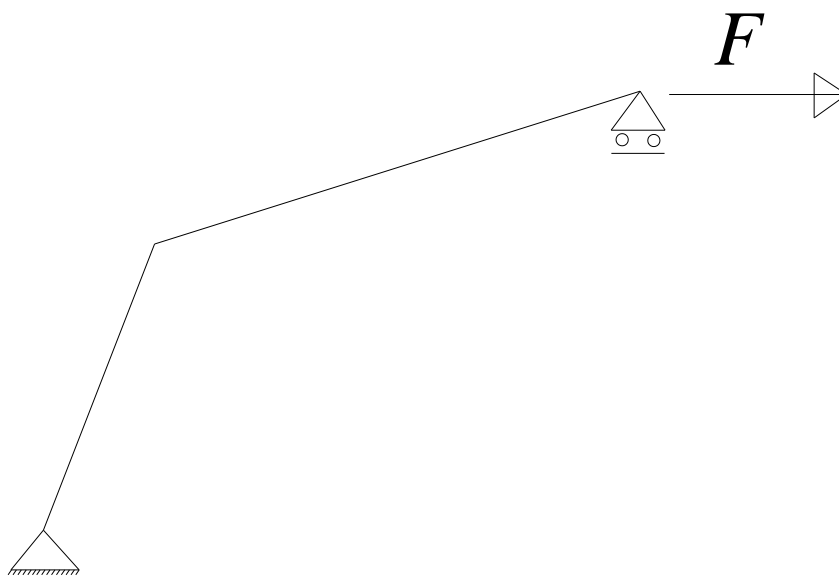
In figura 5.5 è stato rappresentato lo schema di calcolo della struttura che abbiamo già studiato e risolto per il materiale con comportamento elastico - perfettamente plastico. In figura 5.6 invece è rappresentato il modo in cui viene sollecitato il controvento e il modo in cui egli è vincolato cioè il modo in cui si può deformare.

Per la costruzione del legame  $F - \delta$  del controvento possiamo operare nella stessa maniera che abbiamo fatto nei capitoli precedenti. Troviamo prima la sua rigidezza elastica e l'ultimo spostamento lineare e poi troviamo con il metodo incrementale punti  $F - \delta$  che appartengono alla parte non lineare della struttura in modo da interpolarle e costruirci anche la parte non lineare del

legame. Come in tutte le altre strutture che abbiamo studiato prima noi conosciamo il diagramma dei momenti sulla struttura come seguito dell'applicazione della forza. Dobbiamo mediante questo legame trovare il modo in cui variano le curvature lungo il controvento in modo tale da poterle integrare per trovare gli spostamenti. Ancora una volta considereremo anche in questa parte dello studio solo la deformabilità flessionale del controvento.



**Figura 7.5** Schema di calcolo della struttura



**Figura 7.6** Modalità di sollecitazione e di deformazione della struttura



Dovendo come sempre integrare in modo numerico dobbiamo definire tutti i parametri meccanici e geometrici della struttura .

Con riferimento alla figura 7.5 i parametri geometrici della struttura studiata sono i seguenti

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$L = l_1 + l_2 = 5m$$

$$l_1 = 2m$$

$$l_2 = 3m$$

$$d = 1,3m$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \alpha = 36,87^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{1,3}{2} \quad \beta_1 = 33,02^\circ$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{1,3}{3} \quad \beta_2 = 23,43^\circ$$

I parametri meccanici della sezione sono i seguenti:

$$f_y = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E} = 1,3 \text{‰}$$

$$\varepsilon_u = 100 \cdot \varepsilon_y = 13\%$$

$$E = 2039432 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

#

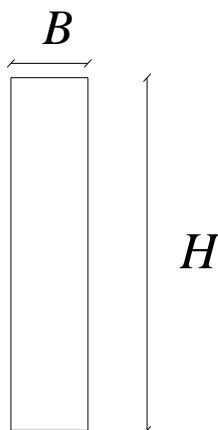


Figura 7.7 Geometria della sezione

I parametri geometrici della sezione sono i seguenti:

$$b = 0,05m$$

$$h = 0,3m$$

Un altro parametro fondamentale che dobbiamo definire è la costante  $K$

$$K = 0,2$$

Dobbiamo adesso invertire il legame  $M - \chi$  della sezione in modo tale da conoscere l'andamento delle curvature lungo il controvento

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = X \quad \frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

Sostituendo nell'equazione di prima ricavo:

$$X = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot Y^2 + \frac{1}{10} \left( Y^2 + \frac{2}{Y} - 3 \right) \right]$$

$$X = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} \cdot Y^2 + \frac{1}{5 \cdot Y}$$

$$2Y^3 + (5X - 6)Y - 1 = 0$$

Ho ricavato così un'equazione del terzo grado. Risolvendola nel termine  $X$  ricavo la dipendenza di  $Y$  che contiene  $\chi$  da  $X$  che contiene  $M_{(\chi)}$ .

Questa equazione la risolvo con il programma MATHEMATICA e ricavo 3 soluzioni, una reale e due immaginarie. Prendo solo la soluzione reale che è:

$$Y = \frac{-36 + 30X}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30X)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30X)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}$$

$$\frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{Y}$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30X}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30X)^3} \right)^{1/3} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30X)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}}}$$

$$\frac{M_{(x)}}{M_y} = X$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}}}$$

Abbiamo così invertito il legame  $M - \chi$  ed espresso le curvature in base al momento corrispondente. Il fatto che il diagramma  $M - \chi$  dipenda da  $K$  ci dice che avremo un diagramma diverso per ogni valore di  $K$  e di conseguenza una relazione come quella trovata diversa per ogni valore di  $K$ .

Possiamo a questo punto procedere con il calcolo e la costruzione del legame  $F - \delta$  seguendo i vari passi della nostra procedura :

## 7.2.1) CALCOLO DELLA RIGGIDEZZA ELASTICA, FORZA DI SNERVAMENTO E L'ULTIMO SPOSTAMENTO LINEARE DELLA STRUTTURA

Questa prima fase di studio di questo paragrafo è del tutto uguale alla parte corrispondente del Capitolo 3 cioè quella che studia questa struttura però adottando per il suo materiale il legame

costitutivo di Prandtl. Avendo a che fare con la rigidezza elastica  $E$  dei due legami la parte non lineare ovvero quella post snervamento di ogni legame non influisce il calcolo.

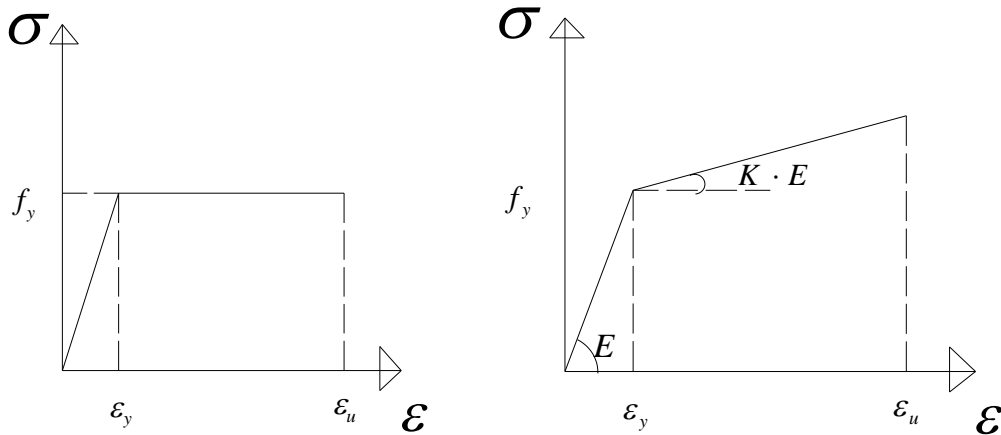


Figura 7.8 I due legami costitutivi

Quindi possiamo usare i risultati del terzo capitolo

$$K_{el} = \frac{3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot EJ}{d^2 \cdot l_{tot}}$$

$$F_y = 12461,53kg$$

$$\delta_{el} = \frac{F_y}{K} = \frac{12461,53kg}{416347 \frac{kg}{m}} = 0,027m$$

## 7.2.2) CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI NON LINEARI DELLA STRUTTURA

Il modo in cui si procede è quello usato in tutti i capitoli precedenti cioè il modo per passi della forza. Per ogni passo o valore della forza superiore a quella di snervamento  $F_y$  si divide la struttura in due parti:

- parte della struttura in campo elastico
- parte della struttura in campo incrudente

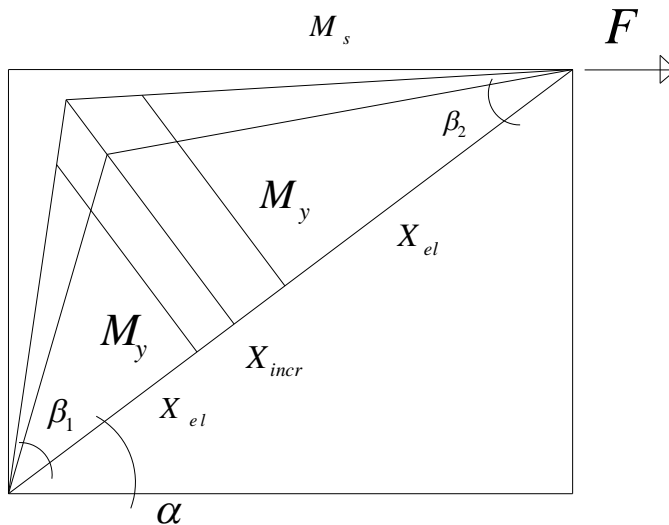


Figura 7. 9 Divisione della struttura in due parti

La divisione si fa in base alla forza che applichiamo. Ogni valore della forza individua un tratto del controvento dove il momento sollecitante  $M_s$  è minore del momento di snervamento della sezione  $M_y$  ed uno dove è maggiore di  $M_y$ .

Per ognuna delle due parti si applica la corrispettiva legge di variazione delle curvature:

Nella parte elastica:

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

Nella parte incrudente:

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M(x)}{M_y}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}}$$

Abbiamo visto dalla rappresentazione grafica del legame  $M - \chi$  che il momento assume dei valori ben più superiori da  $\frac{3}{2} M_y$  quando siamo in campo incrudente quindi i valori per ogni passo di

carico saranno superiori a quelli usati nei capitoli precedenti dove usavamo il legame di Prandtl per il materiale.

Possiamo adesso procedere all'applicazione dei vari valori del carico e calcolo dei rispettivi spostamenti mediante l'integrale dato dal Principio Dei Lavori Virtuali. Dividiamo l'integrale generale in 4 parti:

- parte elastica lineare destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte incrudente destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte elastica lineare sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$
- parte incrudente sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$

- PASSO 1

$$F_1 = 1,5 \cdot F_y = 18700 \cdot kg$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 23375 kg$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 0,87 m$$

$$x_{incr}^{1d} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_2} = 1 m$$

$$x_{incr}^{1s} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_1} = 0,67 m$$

Quindi entro in campo incrudente per 1 m dalla parte destra e 67 cm dalla parte sinistra.

$$\delta_1^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = \int_0^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^2 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = 0,0057 m$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \int_2^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot d$$

Nella formula di sopra  $x$  è l'ascissa rettilinea che descrive il controvento nel nostro sistema di riferimento.

$$\delta_1^2 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_2^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(0,5 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30(0,5 \cdot x) \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30(0,5 \cdot x) \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = 0,018m$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{1,33} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,33} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = 0,0047m$$

$$\delta_1^4 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = \int_{1,33}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{20250} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{tg} \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,33}^2 \frac{x}{\frac{-36 + 30(0,75 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(0,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(0,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = 0,011m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_1^3 + \delta_1^4 = 0,039m$$

PUNTO 1 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	18700kg	0,039m

- PASSO 2



$$F_2 = 2,25 \cdot F_y = 28040 \cdot \text{kg}$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 35050 \text{kg}$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 0,58 \text{m}$$

$$x_{incr}^{2d} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_2} = 1,67 \text{m}$$

$$x_{incr}^{2s} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_1} = 1,12 \text{m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1,67 m dalla parte destra e 1,12 m dalla parte sinistra.

$$\delta_2^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = \int_0^{1,33} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,33} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = 0,0029 \text{m}$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \int_{1,33}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,33}^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(0,75 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(0,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(0,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = 0,053m$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{0,88} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,88} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = 0,0019m$$

$$\delta_2^4 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = \int_{0,88}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot \frac{\left( \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^3}{-36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250}} \cdot \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,88}^2 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,125 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,125 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,125 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = 0,035m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 = 0,092m$$

PUNTO 2 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	28040kg	0,092m

- PASSO 3

$$F_3 = 3 \cdot F_y = 37385 \cdot kg$$

$$P_3 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 46730kg$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 0,44m$$

$$x^{3d}_{incr} = \frac{1,3 - 0,44}{\text{sen} \beta_2} = 2m$$

$$x^{3s}_{incr} = \frac{1,3 - 0,44}{\text{sen} \beta_1} = 1,34m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2 m dalla parte destra e 1,34 m dalla parte sinistra.

$$\delta_3^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = \int_0^1 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = 0,0016m$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \int_1^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250}}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_1^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = 0,098m$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{0,66} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,66} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = 0,0011m$$

$$\delta_3^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^4 = \int_{0,66}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{20250} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,66}^2 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,5 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,5 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,5 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^4 = 0,066m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 + \delta_3^4 = 0,17m$$

PUNTO 3 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	37385kg	0,17m

- PASSO 4

$$F_4 = 3,5 \cdot F_y = 43615 \cdot kg$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 54518kg$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,38m$$

$$x_{incr}^{Ad} = \frac{1,3 - 0,38}{\text{sen} \beta_2} = 2,15m$$

$$x_{incr}^{As} = \frac{1,3 - 0,38}{\text{sen} \beta_1} = 1,43m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2,15 m dalla parte destra e 1,43 m dalla parte sinistra.

$$\delta_4^1 = \int_0^{x_d} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = \int_0^{0,85} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,85} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = 0,0012m$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \int_{0,85}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250}}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,85}^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,666 \cdot x)}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30(1,666 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30(1,666 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = 0,13m$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{0,57} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,57} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = 0,00078m$$

$$\delta_4^4 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = \int_{0,57}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{-36 + 30 \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha}}{20250} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,57}^2 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,75 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,75 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = 0,088m$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 + \delta_4^3 + \delta_4^4 = 0,23m$$

PUNTO 4 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	43615kg	0,23m

- PASSO 5

$$F_5 = 4 \cdot F_y = 49850 \cdot kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 62312kg$$



$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,33m$$

$$x_{incr}^{5d} = \frac{1,3 - 0,33}{\text{sen}\beta_2} = 2,25m$$

$$x_{incr}^{5s} = \frac{1,3 - 0,33}{\text{sen}\beta_1} = 1,5m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2,25 m dalla parte destra e 1,5 m dalla parte sinistra.

$$\delta_5^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = \int_0^{0,75} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,75} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = 0,0009m$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{-36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y}}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = \int_{0,75}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot \frac{\left( \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^3}{-36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250}} \cdot \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}} \cdot \frac{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}} dx$$

$$\delta_5^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,75}^3 \frac{x}{-36 + 30(1,333 \cdot x)} \cdot \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,33 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}} \cdot \frac{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,333 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}} dx$$

$$\delta_5^2 = 0,165m$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{0,5} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,5} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = 0,0006m$$

$$\delta_5^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^4 = \int_{0,5}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx$$

$$\frac{\frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{-36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250}}}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4 \left( -36 + 30 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}$$

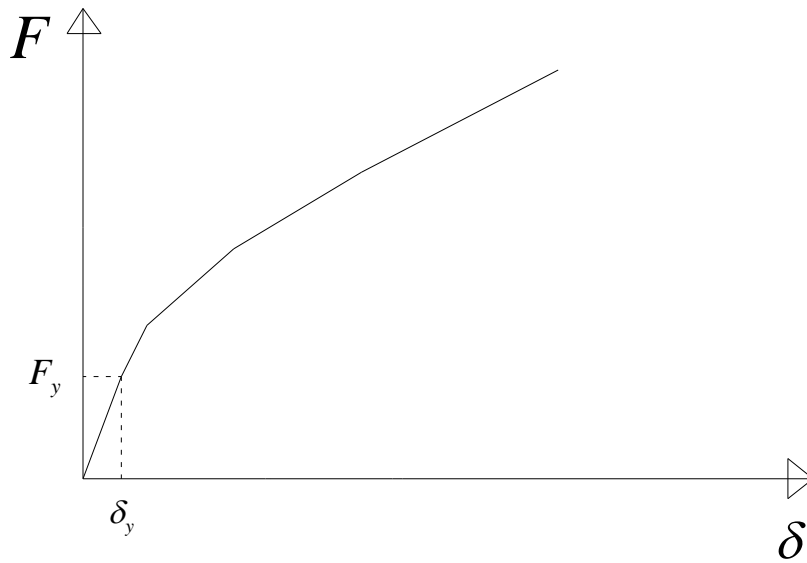
$$\delta_5^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,5}^2 \frac{x}{\frac{-36 + 30(2 \cdot x)}{32^{\frac{2}{3}} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(2 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(2 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_5^4 = 0,11m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 + \delta_5^3 + \delta_5^4 = 0,28m$$

PUNTO 5 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	49850kg	0,28m

Abbiamo così trovato dei punti appartenenti alla parte non lineare del legame  $F - \delta$  del controvento, possiamo quindi adesso procedere alla costruzione di tale legame.



**Figura 7.10 Legame forza - spostamento del controvento**

In figura 7.10 è stato rappresentato il diagramma  $F - \delta$  del controvento calcolato secondo la procedura di sopra e con la costante del incrudimento  $K = 0,2$ . In questo diagramma si possono vedere due differenze fondamentali rispetto al diagramma  $F - \delta$  del controvento costruito con la stessa forma geometrica ma con il legame costitutivo del materiale elastico perfettamente plastico:

- 1) la prima cosa che si nota è la duttilità di questa struttura rispetto alla prima. Si vede che gli spostamenti in campo incrudente sono molto più elevati rispetto a quelli in campo plastico della prima struttura. Questo si vede analiticamente quando si fanno i calcoli. Abbiamo già detto che per valori di forza superiori a quella dello snervamento l'integrale generale che mi dà lo spostamento viene diviso in quattro parti, le due parti in campo elastico lineare e le due parti in campo incrudente. Il contributo più grande sugli spostamenti è dato proprio dalle deformazioni delle parti in campo incrudente date dalla formula:

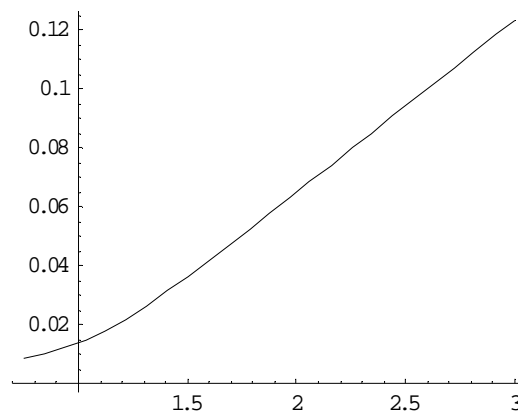
$$\delta_5^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,75}^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,333 \cdot x)}{32^{2/3} \left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,333 \cdot x))^3} \right)^{1/3} + \frac{\left( 108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,333 \cdot x))^3} \right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

In questa formula è dato lo spostamento della parte lineare per l'ultimo valore della forza che abbiamo usato però è uguale anche per gli altri valori, cambia solo la costante (1,3333) e gli estremi dell'integrazione che sono funzione della forza.

Come abbiamo già fatto nei casi precedenti la parte della formula data dall'integrale lo chiamiamo coefficiente di amplificazione degli spostamenti

$$\int_{0,75}^3 \frac{x}{\frac{-36 + 30(1,333 \cdot x)}{32^{2/3} \left(108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,333 \cdot x))^3}\right)^{1/3} + \frac{\left(108 + \sqrt{11664 + 4(-36 + 30(1,333 \cdot x))^3}\right)^{1/3}}{62^{1/3}}} \cdot dx$$

La funzione che sta sotto l'integrale descrive l'andamento delle curvature sulla parte incrudente del controvento. Se si fa il grafico di questa funzione vede che rispetto all'andamento delle curvature della struttura con legame del materiale di Prandtl, i valori sono elevati in un campo più largo del controvento quindi quando si fa l'integrale il suo valore è molto più grande e di conseguenza anche gli spostamenti della struttura.



**Figura 7.11 Andamento delle curvature in campo incrudente della struttura**

In figura 7.11 è stato rappresentato l'andamento delle curvature della struttura in campo incrudente. In ascissa è riportato l'ascissa rettilinea  $x$  che descrive il controvento, in ordinata invece il valore che la curvatura assume in quella sezione del controvento.

Così si nota e si spiega il vantaggio che porta sulla duttilità del controvento il legame del materiale con incrudimento.

2) La seconda differenza che si nota nel legame  $F - \delta$  del controvento in figura 5.12 è l'andamento lineare di questo diagramma nella sua parte corrispondente a valori di forza molto più elevati di quella dello snervamento  $F_y$ . Guardando in figura 5.12 si vede che gli spostamenti tra il passo 3 e il passo 5 della forza stiano quasi su una retta.

Nei paragrafi successivi si studieranno altri due casi della stessa geometria strutturale però che adottano sul legame  $\sigma - \varepsilon$  del materiale un altro valore della costante di incrudimento  $K$  e si cercherà di spiegare questo andamento lineare del legame  $F - \delta$  del controvento per valori di forza elevati.

### 7.3) LEGAME FORZA – SPOSTAMENTO DEL CONTROVENTO CON UN PARAMETRO INCRUDENTE $K = 0,1$

Cerchiamo adesso di risolvere la stessa struttura di prima però che abbia un altro valore della costante di incrudimento ( vedi figura 7.1 ). I parametri geometrici della struttura sono sempre gli stessi del paragrafo precedente. Nei parametri meccanici del materiali invece viene adottata come  $K$  il valore 0,1

$$K = 0,1 = \frac{1}{10}$$

Per gli stessi motivi spiegati nel capitolo precedente i parametri del controvento quando si trova tutto in campo elastico lineare ( rigidità elastica, forza di snervamento e l'ultimo spostamento lineare ) saranno uguali a quelli della prima struttura.

Quindi possiamo scrivere i seguenti valori:

$$K_{el} = \frac{3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot EJ}{d^2 \cdot l}$$

$$F_y = 12461,53 \text{ kg}$$

$$\delta_y = \frac{F_y}{K} = \frac{12461,53 \text{ kg}}{521322,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = 0,0239 \text{ m}$$

Il procedimento per trovare gli spostamenti non lineari del controvento è sempre quello di prima.

Per ogni valore della forza dividiamo in nostro controvento in 4 parti ( vedi figura 7.9 ) :

- parte elastica lineare destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte incrudente destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte elastica lineare sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$
- parte incrudente sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$

Quando abbiamo introdotto il legame  $M - \chi$  che deriva dal legame costitutivo con incrudimento abbiamo detto che questo legame è funzione del parametro incrudente  $K$  . Quindi dobbiamo trovare il nuovo legame  $M - \chi$  da associare alla struttura.

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Dalla forma generale del legame passiamo al nostro caso

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{1}{20} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Quando facciamo l'integrale per trovare gli spostamenti nelle varie parti del controvento ci serve l'espressione della curvatura in base al momento quindi dobbiamo anche qui invertire il nostro legame  $M - \chi$  .

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{1}{20} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = X \qquad \frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

Sostituendo nell'equazione di prima ricavo:

$$X = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot Y^2 + \frac{1}{20} \left( Y^2 + \frac{2}{Y} - 3 \right) \right]$$

$$X = \frac{27}{20} - \frac{9}{20} \cdot Y^2 + \frac{2}{20 \cdot Y}$$

$$9Y^3 + (20X - 27)Y - 2 = 0$$

Ho ricavato così un'equazione del terzo grado. Risolvendola nel termine  $X$  ricavo la dipendenza di  $Y$  che contiene  $\chi$  da  $X$  che contiene  $M_{(\chi)}$ .

Questa equazione la risolvo con il programma MATHEMATICA e ricavo 3 soluzioni, 1 reale e due immaginarie. Prendo solo la soluzione reale che è:

$$Y = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540X)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{Y}$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540X)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = X$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}}$$



Possiamo adesso procedere con il calcolo degli spostamenti in campo incrudente della struttura. Nelle parti in campo elastico lineare si applica alle curvature la legge :

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

Nelle parti incrudenti invece si applica la legge :

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}}$$

- PASSO 1

$$F_1 = 1,5 \cdot F_y = 18700 \cdot \text{kg}$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 23375 \text{kg}$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 0,87 \text{m}$$

$$x^{1d}_{incr} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_2} = 1 \text{m}$$

$$x^{4s}_{incr} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_1} = 0,67 \text{m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1 m dalla parte destra e 0,67 m dalla parte sinistra.

$$\delta_1^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = \int_0^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^2 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = 0,0057m$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \int_2^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{\frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{\frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{\frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha}}{20250} \right)^3}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_2^3 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (0,5x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (0,5x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (0,5x))^3}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = 0,019m$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{1,33} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,33} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = 0,0047m$$

$$\delta_1^4 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = \int_{1,33}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_1^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,33}^2 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (0,75x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (0,75x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (0,75x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = 0,012m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_1^3 + \delta_1^4 = 0,042m$$

PUNTO 1 SUL CAMPO NON LINERE	F	δ
	18700kg	0,042m

- PASSO 2

$$F_2 = 2,25 \cdot F_y = 28040 \cdot \text{kg}$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 35050 \text{kg}$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 0,58 \text{m}$$

$$x_{incr}^{2d} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_2} = 1,67 \text{m}$$

$$x_{incr}^{2s} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_1} = 1,12 \text{m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1,67 m dalla parte destra e 1,12 m dalla parte sinistra.

$$\delta_2^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = \int_0^{1,33} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,33} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = 0,0029 \text{m}$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \int_{1,33}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot a$$

$$= \frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}} \cdot d$$

$$\delta_2^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{1,33}^3 \frac{x}{2^{1/3} \cdot (-729 + 540 \cdot (0,75x))} \cdot \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (0,75x))^3} \right)^{1/3}}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (0,75x))^3} \right)^{1/3}} + \frac{1}{272^{1/3}}} \cdot d$$

$$\delta_2^2 = 0,076m$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{0,88} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,88} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = 0,0019m$$

$$\delta_2^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = \int_{0,88}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot d \cdot \left( 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right) + \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_2^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,88}^2 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (1,125x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (1,125x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (1,125x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = 0,051m$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 = 0,1318m$$

PUNTO 2 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	28040kg	0,1318m

- PASSO 3

$$F_3 = 3 \cdot F_y = 37385 \cdot kg$$

$$P_3 = \frac{F_1}{\cos\alpha} = 46730kg$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 0,44m$$

$$x_{incr}^{3d} = \frac{1,3 - 0,44}{\text{sen}\beta_2} = 2m$$

$$x_{incr}^{3s} = \frac{1,3 - 0,44}{\text{sen}\beta_1} = 1,34m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2 m dalla parte destra e 1,34 m dalla parte sinistra.

$$\delta_3^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = \int_0^1 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = 0,0016m$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \int_1^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{\frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ}}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{\frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_1^3 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (1 \cdot x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (1 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (1 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = 0,165m$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{0,66} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,66} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = 0,0011m$$

$$\delta_3^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$



$$\delta_3^4 = \int_{0,66}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot d \cdot \left( \frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}} \right)^{1/3} \cdot dx$$

$$\delta_3^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,66}^2 \frac{x}{\frac{2^{1/3} \cdot (-729 + 540 \cdot (1,5x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (1,5x) \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (1,5x) \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_3^4 = 0,11m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 + \delta_3^4 = 0,277m$$

PUNTO 3 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	37385kg	0,277m

- PASSO 4

$$F_4 = 3,5 \cdot F_y = 43615 \cdot kg$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos\alpha} = 54518kg$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,38m$$

$$x_{incr}^{Ad} = \frac{1,3 - 0,38}{\text{sen}\beta_2} = 2,15m$$

$$x_{incr}^{4s} = \frac{1,3 - 0,38}{\text{sen}\beta_1} = 1,43m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2,15 m dalla parte destra e 1,43 m dalla parte sinistra.

$$\delta_4^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = \int_0^{0,85} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,85} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = 0,0012m$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \int_{0,85}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_4^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,85}^3 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (1,166 \cdot x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (1,166 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (1,166 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = 0,23m$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{0,57} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,57} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = 0,00078m$$

$$\delta_4^4 = \int_{x_{el}}^{x_{iner}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = \int_{0,66}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot d \cdot \left[ \frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}} \right]^{1/3} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,57}^2 \frac{x}{\frac{2^{1/3} \cdot (-729 + 540 \cdot (1,75x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (1,75x) \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot (1,75x) \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = 0,15m$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 + \delta_4^3 + \delta_4^4 = 0,38m$$

PUNTO 4 SUL CAMPO NON LINERE

$F$	$\delta$
43615kg	0,38m

- PASSO 5

$$F_5 = 4 \cdot F_y = 49850 \cdot kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos\alpha} = 62312kg$$

$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,33m$$

$$x_{incr}^{5d} = \frac{1,3 - 0,33}{\text{sen}\beta_2} = 2,25m$$

$$x_{incr}^{5s} = \frac{1,3 - 0,33}{\text{sen} \beta_1} = 1,5m$$

Quindi entro in campo incrudente per 2,25 m dalla parte destra e 1,5 m dalla parte sinistra.

$$\delta_5^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = \int_0^{0,75} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,75} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = 0,0009m$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \frac{\chi_y}{\frac{2^{1/3} \cdot \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{1/3}}{272^{1/3}}} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = \int_{0,75}^3 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_5^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,75}^3 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (1,333 \cdot x))} \cdot \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (1,333 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \cdot (-729 + 540 \cdot (1,333 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 272^{\frac{1}{3}}} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = 0,29m$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{0,5} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_1}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen}\beta_1}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,5} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = 0,0006m$$

$$\delta_5^4 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^4 = \int_{0,66}^2 \frac{1 \cdot x \cdot \sin \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot d \cdot \left( 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -729 + 540 \frac{F_5 \cdot x \cdot \sin \beta_1}{20250} \right) + \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_5 \cdot x \cdot \sin \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left( 27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4 \left( -729 + 540 \frac{F_5 \cdot x \cdot \sin \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 272^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

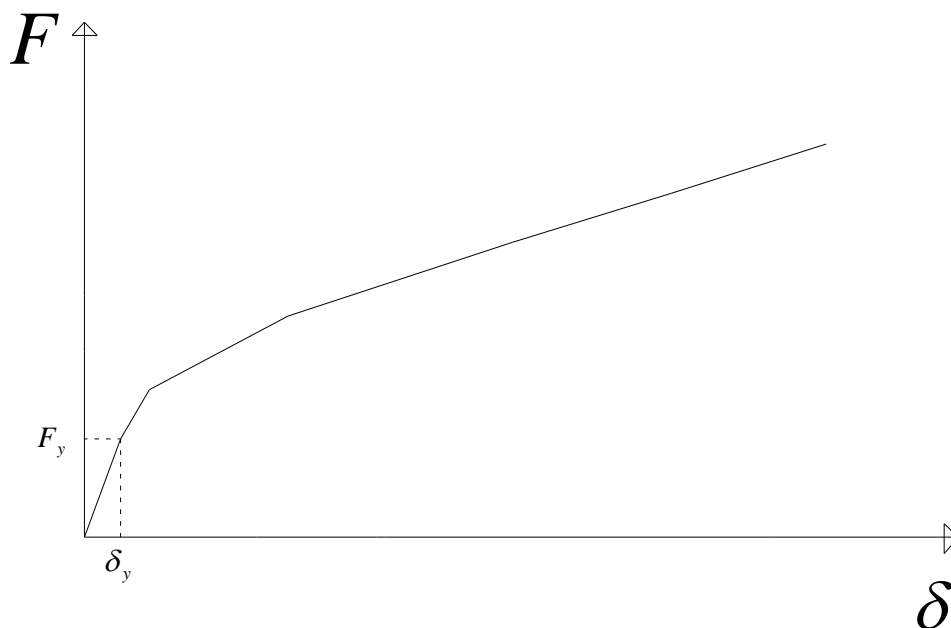
$$\delta_5^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \sin \beta_1}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{0,5}^2 \frac{x}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-729 + 540 \cdot (2x))}{27 \left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (2x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 4374 + \sqrt{19131876 + 4(-729 + 540 \cdot (2x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{272^{\frac{1}{3}}}} \cdot dx$$

$$\delta_5^4 = 0,19m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 + \delta_5^3 + \delta_5^4 = 0,48m$$

PUNTO 5 SUL CAMPO NON LINERE	$F$	$\delta$
	49850kg	0,48m

Abbiamo così tutti i dati necessari per costruire il legame  $F - \delta$  del controvento.



**Figura 7.12 Legame Forza - Spostamento del controvento con  $K = 0,1$**

In figura 7.12 è stato rappresentato il legame  $F - \delta$  del controvento costruito con i parametri meccanici e geometrici sopraesposti.

Si vede chiaramente anche in questo legame un aspetto fondamentale che si vedeva anche nel grafico della prima struttura di questo capitolo cioè la linearità che il diagramma ha nel ultimo tratto della sua parte incrudente ( costruita per passi di forza quando la struttura si trova in campo incrudente)

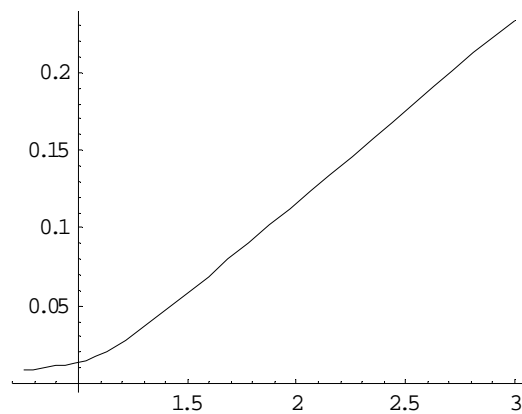
La spiegazione o la causa di questo aspetto molto importante che si vede nelle strutture che adottano un legame costitutivo con incrudimento del suo materiale si trova analiticamente e deriva tutta dal legame costitutivo che usiamo per queste strutture ( vedi figura 7.1 )

In figura 7.1 dove abbiamo rappresentato il legame costitutivo usato abbiamo dato alla parte incrudente del legame un andamento lineare rappresentata da una rigidezza lineare funzione della rigidezza elastica del materiale.

Questa linearità sul materiale si traduce in una seconda linearità, quella sezionale.

In figura 7.13 viene rappresentato l'andamento delle curvature sulla lunghezza del controvento. In ascissa viene data l'ascissa rettilinea  $x$  che descrive il controvento ( vedi figura 7.5 ) , in ordinata invece è data il valore che la curvatura prende in quella parte della sezione.





**Figura 7.13 Rappresentazione grafica delle curvature sulla lunghezza del controvento**

Si vede chiaramente che per  $1,5 \leq x \leq 3$  le curvature hanno un andamento lineare. Questo si può intuire fisicamente pensando che per un dato valore della forza esterna oltre il valore di snervamento della sezione più sollecitata in una parte del controvento che nel nostro caso coincide con il segmento  $[1,5 - 3]$  le tensioni sulla sezione in tutte le sezioni di questa parte della struttura abbiano superato il valore  $f_y$  di snervamento ed il carico viene trasmesso sulla sezione e di conseguenza sulla struttura solo per effetto della rigidità incrudente data da  $(K \cdot E)$  che a sua volta è una rigidità lineare.

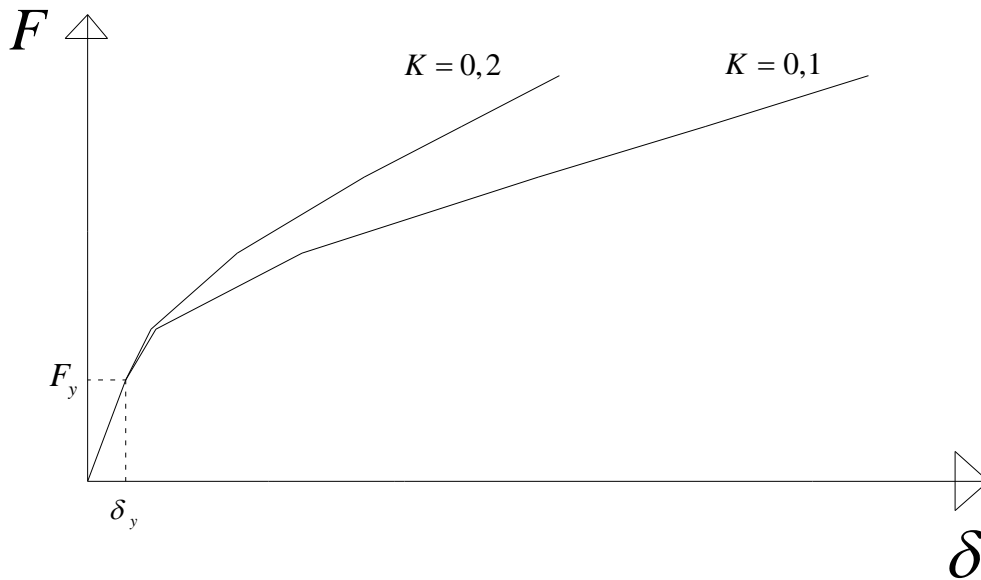
Quindi succede così per questa geometria strutturale dove il momento sollecitante segue anche lui un andamento lineare e proporzionale ad  $x$  secondo la legge  $M_s = \frac{F \cdot x \cdot \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha}$  che la linearità del materiale si traduce in linearità del comportamento sezionale. Dopo questo passaggio fondamentale quello successivo è facile da intuire perché la linearità sezionale si traduce in linearità strutturale nello stesso modo in cui succede per valori di forza inferiori a quella di snervamento  $f_y$  dove tutta la struttura si trova in campo elastico lineare.

Possiamo quindi dire che il legame  $F - \delta$  del controvento costruito con questa geometria e con il legame costitutivo del materiale elasto - plastico linearmente incrudente è sostanzialmente rappresentabile da due parti lineari, quella elastica e quella incrudente che abbiamo spiegato prima.

In figura 7.16 sono stati rappresentati i grafici dei legami  $F - \delta$  della struttura risolta in questo capitolo con i due corrispettivi valori della costante di incrudimento  $K$ . Come abbiamo detto la struttura è la stessa in termini di geometria cambia solo il valore del parametro incrudente  $K$ . I valori di carico sono uguali per tutti e due i casi risolti.

Un altro aspetto che si nota dal confronto di questi due legami è il fatto che la duttilità strutturale aumenta con la diminuzione del parametro  $K$ . Questo è facile da intuire perché come abbiamo detto

dopo un certo valore di forza il carico sulle sezioni viene trasmessa solo mediante la rigidità incrudente ( $K \cdot E$ ).



**Figura 7.14** Due diagrammi Forza - Spostamento a confronto

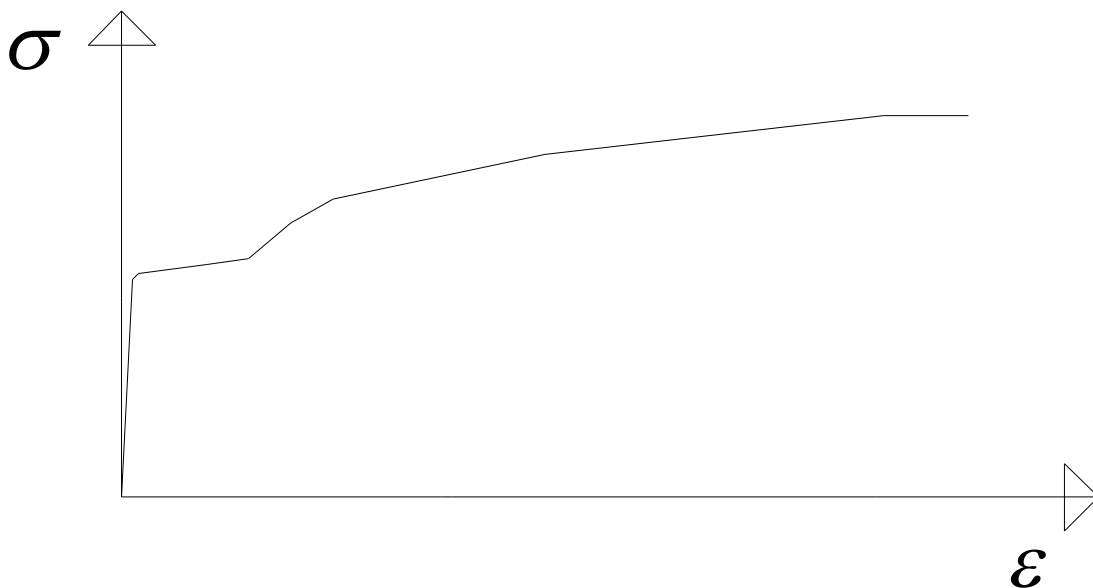
Più è grande  $K$  più è rigida la sezione più sono piccole le curvature e di conseguenza gli spostamenti.

Abbiamo così mediante questi due casi trovato un modo per studiare le strutture di controvento che ci interessano anche per legami costitutivi del materiale che presentano l'incrudimento nella loro parte non lineare. Nel prossimo paragrafo si cercherà di approssimare il legame costitutivo reale del materiale acciaio con un legame elasto - plastico linearmente incrudente e si risolverà la stessa struttura di controvento.

#### 7.4) STUDIO DELLA STRUTTURA CON UN LEGAME COSTITUTIVO DEL MATERIALE ELASTO – PLASTICO LINEARMENTE INCRUDENTE CHE APROSSIMA IL LEGAME REALE DEL MATERIALE ACCIAIO.

L'ultimo passo di questo studio è quello di cercare di risolvere analiticamente la struttura più usata di questo tipo particolare di controventi, cioè il controvento in forma triangolare composto dal materiale acciaio.

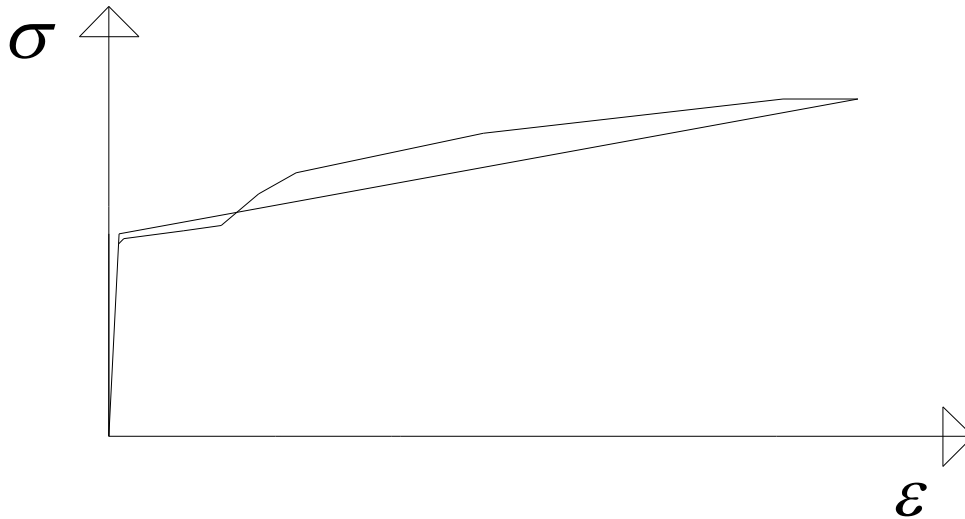
Vedendo il modo in cui si risolve una struttura con un legame elasto – plastico linearmente incrudente si può pensare appunto di approssimare il legame costitutivo reale del nostro materiale con un legame di questo tipo.



**Figura 7.15 Legame costitutivo reale del materiale acciaio**

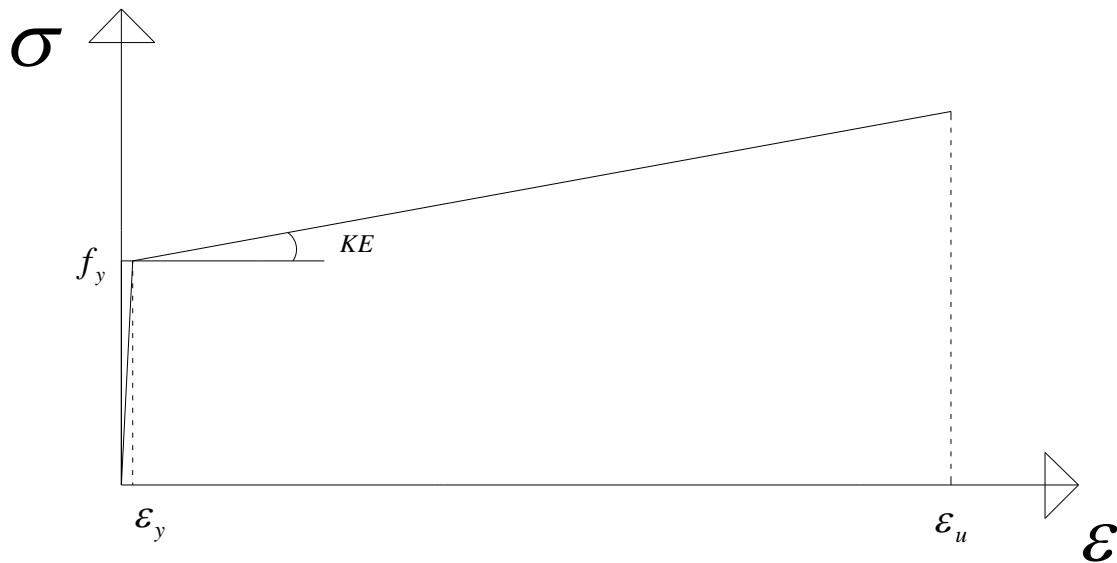
In figura 7.15 è stato rappresentato il legame costitutivo reale del materiale acciaio. Si vede che questo legame è composto da due parti, una elastica lineare ed una incrudente con incrudimento variabile. L'incrudimento dopo un certo valore dello sforzo tende a mantenere un andamento quasi lineare. Il primo modo che si può pensare di adottare per l'approssimazione che dobbiamo fare è quello di riportare anche sul diagramma approssimato i valori caratteristici del legame reale, cioè la

sua rigidità elastica, la forza di snervamento e lo spostamento di snervamento, l'inclinazione del tratto incrudente e la deformazione ultima del materiale.



**Figura 7.16** Legame approssimato sovrapposto a quello reale

In figura 7.16 è stato rappresentato il legame approssimato sovrapposto a quello reale. Senza entrare in discorsi energetici sulla parità del lavoro che dovrebbero contenere le aree sottese dalle due curve si è cercato nell'approssimazione di mantenere inalterati la maggior parte dei parametri sopraindicati.



**Figura 7.17** Legame elasto - plastico linearmente incrudente che approssima il legame reale

In figura 7.17 è stato rappresentato il diagramma approssimato del materiale acciaio.

I suoi parametri fondamentali sono:

$$f_y = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = 0,0013$$

$$E = 2039432 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_u = 0,1$$

$$K = 0,01 = \frac{1}{100}$$

Adesso ci siamo ricondotti al caso che riusciamo a risolvere quindi possiamo calcolare e costruire il legame  $F - \delta$  del controvento triangolare che adotta per il suo materiale il legame costitutivo che approssima quello reale.

Seguiamo lo stesso procedimento dei altri due casi che abbiamo risolto nei paragrafi precedenti di questo capitolo.

Come abbiamo già detto essendo per la parte lineare del diagramma  $F - \delta$  del controvento responsabile solo la parte elastica del legame costitutivo del materiale i primi tre parametri del

diagramma  $F - \delta$  del controvento saranno uguali a quelli dei casi precedenti, quindi possiamo scrivere:

$$K_{el} = \frac{3 \cdot \cos^2 \alpha \cdot EJ}{d^2 \cdot l}$$

$$F_y = 12461,53 \text{ kg}$$

$$\delta_y = \frac{F_y}{K} = \frac{12461,53 \text{ kg}}{521322,26 \frac{\text{kg}}{\text{m}}} = 0,0239 \text{ m}$$

Per trovare gli spostamenti non lineari dobbiamo invertire il legame  $M - \chi$  della sezione per potere attribuire alla parte della struttura che si trova in campo incrudente la giusta legge di variazione delle curvature.

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Dalla forma generale del legame passiamo al nostro caso

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{1}{200} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Quando facciamo l'integrale per trovare gli spostamenti nelle varie parti del controvento ci serve l'espressione della curvatura in base al momento quindi dobbiamo anche qui invertire il nostro legame  $M - \chi$ .

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{1}{200} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = X \qquad \frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

Sostituendo nell'equazione di prima ricavo:

$$X = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot Y^2 + \frac{1}{200} \left( Y^2 + \frac{2}{Y} - 3 \right) \right]$$

$$X = \frac{297}{200} - \frac{99}{200} \cdot Y^2 + \frac{2}{200 \cdot Y}$$

$$99Y^3 + (200X - 297)Y - 2 = 0$$

Ho ricavato così un'equazione del terzo grado. Risolvendola nel termine  $X$  ricavo la dipendenza di  $Y$  che contiene  $\chi$  da  $X$  che contiene  $M_{(\chi)}$ .

Questa equazione la risolvo con il programma MATHEMATICA e ricavo 3 soluzioni, 1 reale e due immaginarie. Prendo solo la soluzione reale che è:

$$Y = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-88209 + 59400X)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{Y}$$

$$\frac{M_{(\chi)}}{M_y} = X$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(\chi)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

Per ogni valore della forza dividiamo in nostro controvento in 4 parti ( vedi figura 7.9 ) :

- parte elastica lineare destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte incrudente destra cioè inclinata del angolo  $\beta_2$
- parte elastica lineare sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$
- parte incrudente sinistra cioè inclinata del angolo  $\beta_1$

Nelle parti in campo elastico lineare si applica alle curvatures la legge :

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

Nelle parti incrudenti invece si applica la legge :

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

Essendo il valore del parametro  $K$  molto basso se sostituiamo sulla formula che mi da il legame  $M - \chi$  un valore della curvatura ultima all'incirca  $\chi_u = 100\chi_y$  ricaviamo un momento ultimo che è circa  $M_u = 2,5M_y$  , perciò i valori delle forze da usare nei vari passi saranno più inferiori a quelli di prima dove il momento ultimo era ben più superiore.

PASSO 1

$$F_1 = 1,25 \cdot F_y = 15575kg$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 19470kg$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 0,96m$$



$$x_{incr}^{1d} = \frac{1,3 - 0,96}{\text{sen}\beta_2} = 0,78m$$

$$x_{incr}^{4s} = \frac{1,3 - 0,96}{\text{sen}\beta_1} = 0,52m$$

Quindi entro in campo incrudente per 0,78 m dalla parte destra e 0,52 m dalla parte sinistra.

$$\delta_1^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = \int_0^{2,22} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen}\beta_2}{\cos\alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen}\beta_2}{\cos\alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{2,22} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^1 = 0,0072m$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_y \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_1^2 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha EJ} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_1 \text{sen} \beta_2}{20250} \right)}{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_1 \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} + \frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_1 \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_1^4 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{2,22}^x \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 (0,41 \cdot x) \right) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 (0,41 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$= \frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 (0,41 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_1^2 = 0,011$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = \int_0^{1,48} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_1 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,48} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_1^3 = 0,0048m$$

$$\delta_1^4 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_1^4 = \int_{x_d}^{x_{int}} M'_{(x)} \frac{\chi_y}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right) + \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}} dx$$

$$\delta_1^4 = \int_{x_d}^{x_{int}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha} \frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha EJ} \frac{F_1 x \text{sen} \beta}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{\cos \alpha}{20250} \right) + \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{\cos \alpha}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}} dx$$

$$\delta_1^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{1,48}^2 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400(0,62 \cdot x) \right) + \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,62 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,62 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}} dx$$

$$\delta_1^4 = 0,0057$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_1^3 + \delta_1^4 = 0,029m$$

PUNTO 1 SUL CAMPO INCRUDENTE	$F$	$\delta$
	15575kg	0,029m

PASSO 2

$$F_2 = 1,5 \cdot F_Y = 18700 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 23375 \text{ kg}$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 0,87 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{2d} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_2} = 1 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{4s} = \frac{1,3 - 0,87}{\text{sen} \beta_1} = 0,67 \text{ m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1 m dalla parte destra e 0,67 m dalla parte sinistra.

$$\delta_2^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = \int_0^2 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^2 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^1 = 0,0057 \text{ m}$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_y \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_2^2 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha EJ} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_2^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \int_2^3 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400(0,5 \cdot x) \right)} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,5 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,5 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_2^2 = 0,021$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = \int_0^{1,33} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_2 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_2 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,33} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_2^3 = 0,0047m$$

$$\delta_2^4 = \int_{x_{el}}^{x_{mer}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_2^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} M'(x) \frac{\chi_y}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_2^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha EI}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_1}{20250} \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_2 x \text{sen} \beta_1}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_2^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EI} \int_{1,33}^2 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400(0,75 \cdot x) \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,75 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,75 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_2^4 = 0,014$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^2 + \delta_2^3 + \delta_2^4 = 0,046m$$

PUNTO 2 SUL CAMPO INCRUDENTE	F	δ
	18700kg	0,046m

PASSO 3

$$F_3 = 1,75 \cdot F_y = 21807 \text{ kg}$$

$$P_3 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 27258 \text{ kg}$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 0,74 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{3d} = \frac{1,3 - 0,74}{\text{tg } \beta_2} = 1,3 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{3s} = \frac{1,3 - 0,74}{\text{tg } \beta_1} = 0,87 \text{ m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1,3 m dalla parte destra e 0,87 m dalla parte sinistra.

$$\delta_3^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = \int_0^{1,7} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen } \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen } \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen } \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,7} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^1 = 0,0046 \text{ m}$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_y \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{\left( 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\delta_3^2 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha EJ} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_3^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{1,7}^3 x \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-88209 + 59400(0,58 \cdot x)) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,58 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,58 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_3^2 = 0,077$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = \int_0^{1,13} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_3 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_3 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,13} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_3^3 = 0,0034m$$

$$\delta_3^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$



$$\delta_3^4 = \int_{x_d}^{x_{int}} M'_{(x)} \frac{\chi_y}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_3^4 = \int_{x_d}^{x_{int}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha} \frac{\frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha EI}}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta}{20250} \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_3 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_3^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta}{\cos^2 \alpha EI} \int_{1,13}^2 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400(0,87 \cdot x) \right) + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,87 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(0,87 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_3^4 = 0,067$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3 + \delta_3^4 = 0,152m$$

PUNTO 3 SUL CAMPO INCRUDENTE	F	δ
	21807kg	0,152m

PASSO 4

$$F_4 = 2 \cdot F_Y = 24923 \text{ kg}$$

$$P_4 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 31153 \text{ kg}$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,65 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{Ad} = \frac{1,3 - 0,65}{\text{sen} \beta_2} = 1,5 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{3s} = \frac{1,3 - 0,65}{\text{sen} \beta_1} = 1 \text{ m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1,5 m dalla parte destra e 1 m dalla parte sinistra.

$$\delta_4^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = \int_0^{1,5} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,5} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^1 = 0,0035 \text{ m}$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_y \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{\left( 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\delta_4^2 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha EJ} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_4 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_4 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_4 x \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\delta_4^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{1,5}^3 x \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-88209 + 59400(0,66 \cdot x))}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,66 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,66 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}} dx$$

$$\delta_4^2 = 0,274m$$

$$\delta_4^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = \int_0^1 \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_4 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_4 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot dx$$

$$\delta_4^3 = 0,0024m$$

$$\delta_4^4 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_4^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} M'_{(x)} \frac{\chi_y}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_4^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha} \frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha EI} \frac{F_4 \cdot \text{sen} \beta}{20250} \frac{F_4 x \text{sen} \beta}{20250} \frac{529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_4 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3}}{2972^{\frac{1}{3}}} + \frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_4 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_4^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EI} \int_1^2 \frac{x}{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400(1 \cdot x) \right) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(1 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400(1 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_4^4 = 0,183$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 + \delta_4^3 + \delta_4^4 = 0,46m$$

PUNTO 4 SUL CAMPO INCRUDENTE

$F$	$\delta$
24923kg	0,46m

PASSO 5

$$F_5 = 2,25 \cdot F_Y = 28038 \text{ kg}$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 35047 \text{ kg}$$

$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,58 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{5d} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_2} = 1,66 \text{ m}$$

$$x_{incr}^{5s} = \frac{1,3 - 0,58}{\text{sen} \beta_1} = 1,1 \text{ m}$$

Quindi entro in campo incrudente per 1,66 m dalla parte destra e 1,1 m dalla parte sinistra.

$$\delta_5^1 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = \int_0^{1,34} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{1,34} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^1 = 0,0028 \text{ m}$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_y \cdot dx$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{\left( 297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\delta_5^2 = \int_{x_{el}}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_Y \cdot d}{\cos \alpha EJ} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 \text{sen} \beta_2}{20250} \right) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 \text{sen} \beta_2}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_5^2 = \frac{F_Y \cdot d \cdot \text{sen} \beta_2}{\cos^2 \alpha EJ} \int_{1,34}^3 x dx$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-88209 + 59400(0,75 \cdot x)) \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,75 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400(0,75 \cdot x))^3} \right)^{\frac{1}{3}} + 2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\delta_5^2 = 0,5m$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{x_{el}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = \int_0^{0,9} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \cdot \frac{F_5 \cdot x \cdot \text{sen} \beta_1}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot dx = \frac{F_5 \left( \frac{\text{sen} \beta_1}{\cos \alpha} \right)^2}{EJ} \cdot \int_0^{0,9} x^2 \cdot dx$$

$$\delta_5^3 = 0,00087m$$

$$\delta_5^4 = \int_{x_{el}}^{x_{incr}} M'_{(x)} \cdot \chi_{(x)} \cdot dx$$

$$\delta_5^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} M'(x) \frac{\chi_y}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right)}{2972^{\frac{1}{3}}} \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M(x)}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_5^4 = \int_{x_d}^{x_{inc}} \frac{1 \cdot x \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha} \frac{F_y \cdot d}{\cos \alpha EI} \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)}{2972^{\frac{1}{3}}} \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)}{2972^{\frac{1}{3}}} \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{F_5 x \text{sen} \beta}{20250} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} dx$$

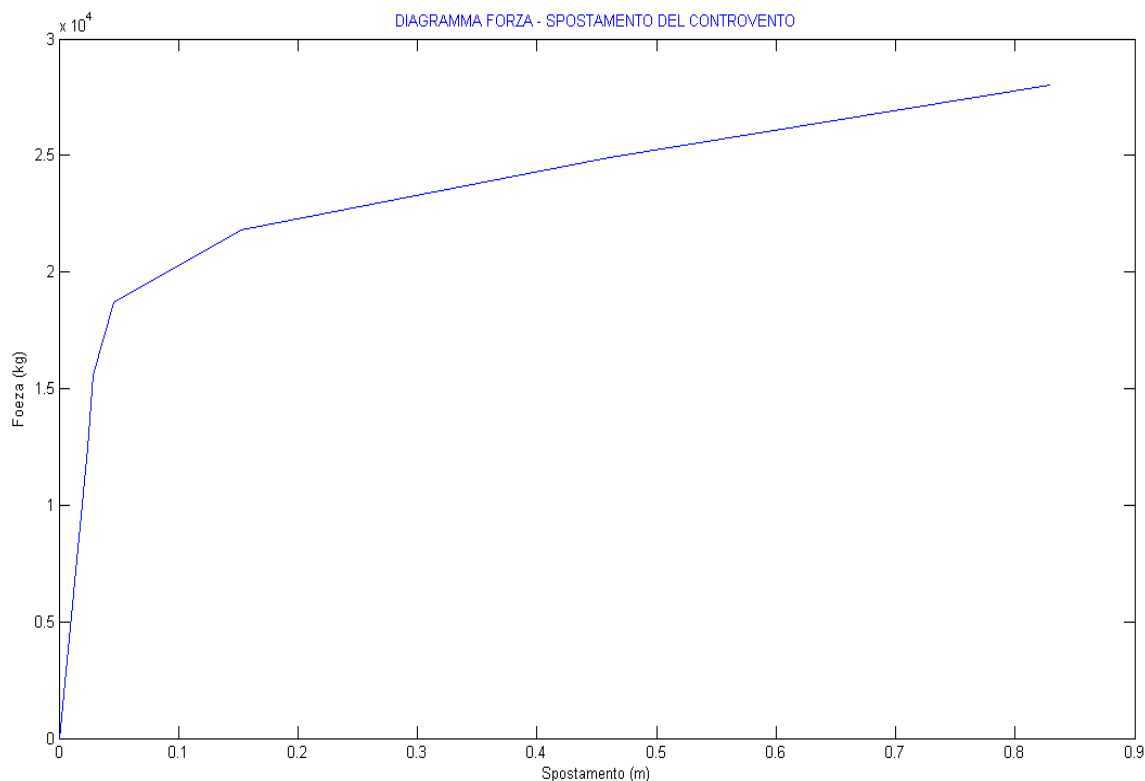
$$\delta_5^4 = \frac{F_y \cdot d \cdot \text{sen} \beta}{\cos^2 \alpha EI} \int_{0,9}^2 \frac{x}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 (1,12 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 (1,12 \cdot x) \right)}{2972^{\frac{1}{3}}} \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 (1,12 \cdot x) \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} dx$$

$$\delta_5^4 = 0,33$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^3 + \delta_5^3 + \delta_5^4 = 0,83m$$

PUNTO 5 SUL CAMPO INCRUDENTE	$F$	$\delta$
	28038kg	0,83m

Possiamo adesso costruirci il legame  $F - \delta$  della nostra struttura di controvento avendo sia i dati della parte elastica lineare sia i punti per l'interpolazione della parte non lineare.



**Figura 7.18** Legame Forza - Spostamento del controvento con legame costitutivo del materiale che approssima quello reale

In figura 7.18 viene rappresentato il legame  $F - \delta$  del controvento che adotta come legame costitutivo del materiale quello che approssima il legame reale. Questo diagramma approva ancora una volta i risultati ottenuti nei diagrammi precedenti di questo capitolo sull'andamento lineare che il legame assume quando la maggior parte della struttura si trova in campo incrudente e che il legame  $F - \delta$  del controvento è approssimabile a due tratti lineari uno della parte elastica lineare l'altro della parte incrudente.



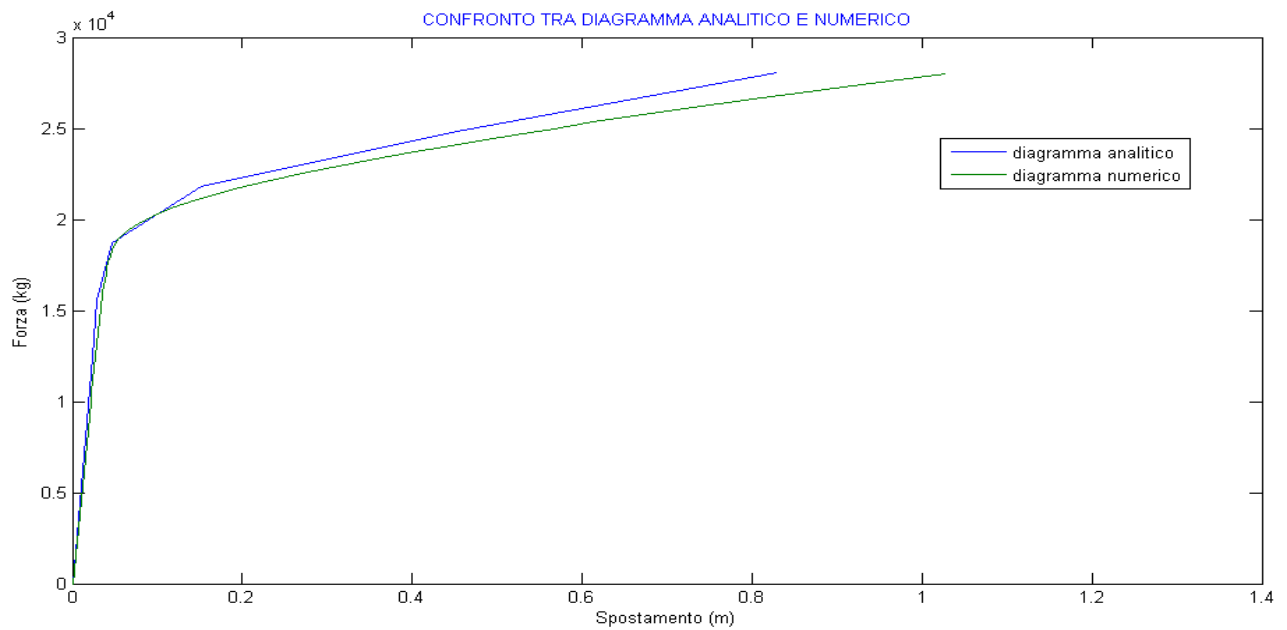


Figura 7.19 Confronto tra soluzione analitica e numerica della struttura

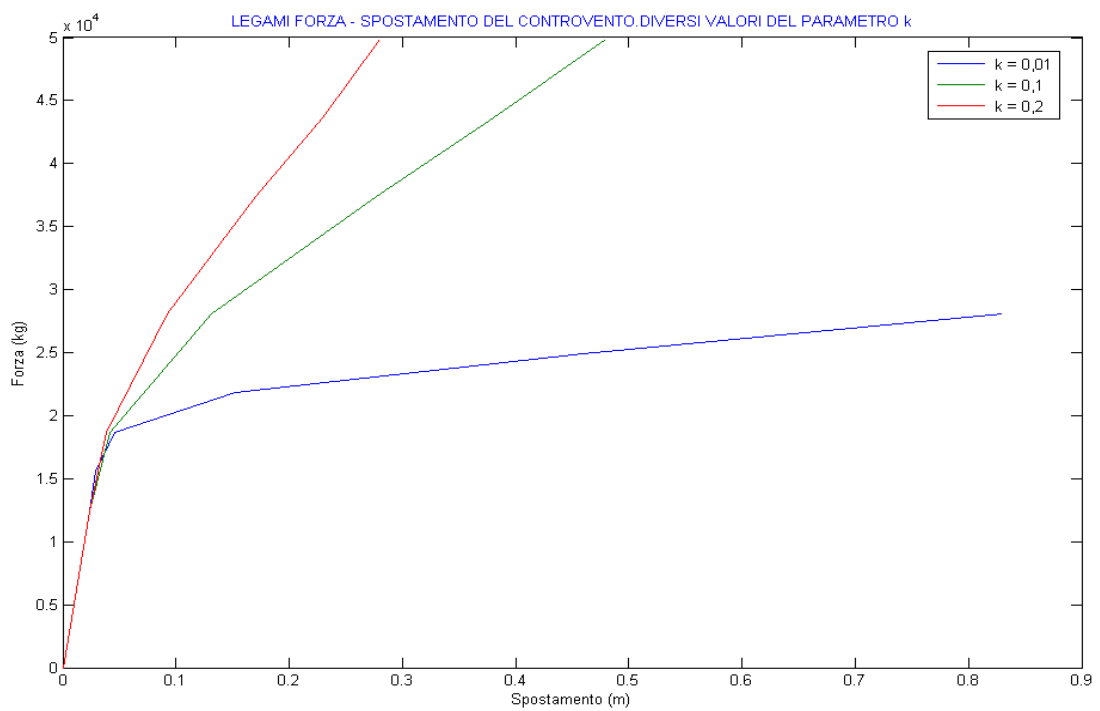


Figura 7.20 Confronto tra tre diagrammi della stessa struttura risolta con tre diversi parametri della costante incrudente  $K$  sul legame costitutivo del materiale

In oltre questo diagramma da ragione ai diagrammi precedenti per quanto riguarda il valore del parametro incrudente  $K$  sulla duttilità complessiva del controvento. Più è bassa  $K$  più aumenta la duttilità del controvento (vedi figura 7.20). Nel caso reale dove il materiale acciaio riporta nel suo legame costitutivo un incrudimento bassissimo la duttilità è molto elevata come si vede in figura 7.18.

Abbiamo quindi dopo un lungo lavoro di ricerca e teoria risolto analiticamente una struttura reale sia per il fatto che è la geometria più usata sia perché abbiamo usato un legame costitutivo del materiale che è quasi uguale a quello reale.

Lo sviluppo sulla teoria per il legame costitutivo con incrudimento ci permette quindi di avvicinarsi il più possibile al comportamento reale delle strutture di controvento superando quindi il limite che ci imponeva l'uso di un legame costitutivo elastico perfettamente plastico. I risultati ottenuti sui legami  $F - \delta$  dei controventi in questo capitolo dimostrano che abbiamo amplificato molto di più i nostri mezzi di progetto di questi legami. Lo sviluppo delle tecnologie dei materiali può portare a materiali che abbiano un legame costitutivo con incrudimento e che possa quindi essere come quello del materiale acciaio ricondotto ad un legame elasto - plastico linearmente incrudente e quindi mediante l'applicazione della nostra teoria il suo legame  $F - \delta$  si può facilmente calcolare con una buonissima approssimazione.

Come percorso da seguire nella nostra ricerca ci rimane adesso l'applicazione di questa teoria sulle altre forme geometriche in cui possono essere costruiti i nostri controventi. Nei capitoli successivi si cercherà di costruire il legame  $F - \delta$  del controvento con un'altra forma geometrica e con un legame costitutivo del suo materiale elasto - plastico linearmente incrudente.

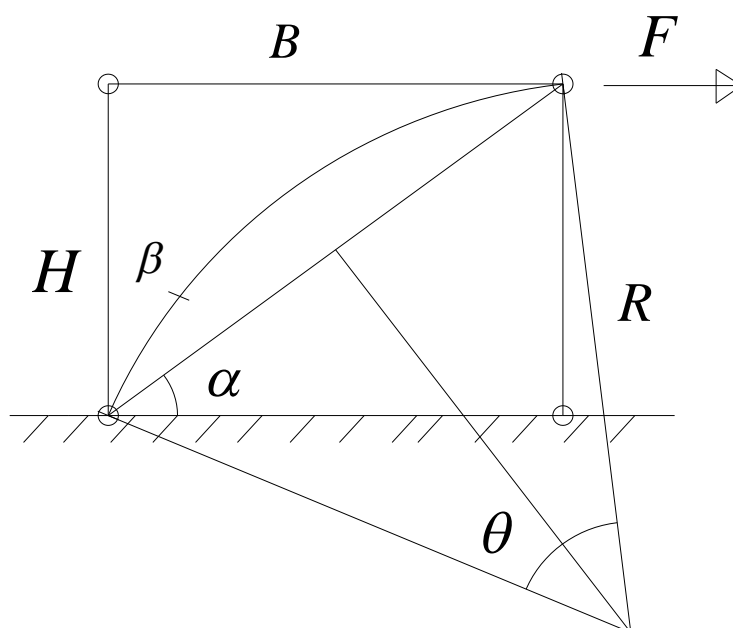
## CAPITOLO 8

### **FORMA CIRCOLARE. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE. LEGAME COSTITUTIVO SFORZO – DEFORMAZIONE ELASTO – PLASTICO CON INCRUDIMENTO.**

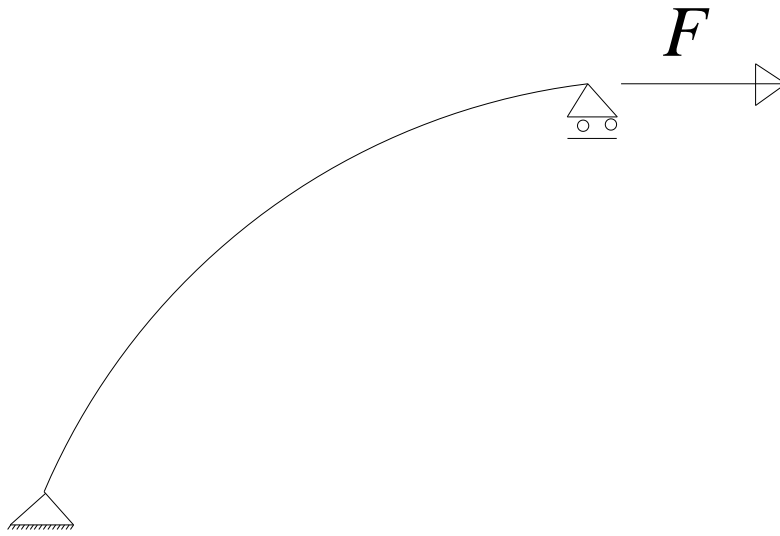
Nel capitolo precedente abbiamo raggiunto degli obiettivi importanti nel nostro studio. Calcolare il diagramma  $F - \delta$  delle strutture di controvento usando un legame costitutivo per i materiali che prevede l'incrudimento ci avvicina come abbiamo già detto molto di più al comportamento reale di questo tipo di strutture.

In questo capitolo cercheremo di calcolare il diagramma  $F - \delta$  di una altra forma geometrica basandosi sui risultati che abbiamo ottenuto in precedenza dallo studio del legame costitutivo elasto – plastico linearmente incrudente.

Consideriamo ancora una volta la forma circolare del controvento:



**Figura 8.1** Schema di calcolo del controvento



**Figura 8.2 Modalità di deformazione della struttura**

Riportiamo di nuovo dai capitoli precedenti i parametri geometrici che compongono la nostra struttura.

- $R$  raggio di curvatura del cerchio, parte del quale è il controvento
- $H$  altezza del telaio
- $B$  lunghezza del telaio
- $\theta$  angolo di base del controvento
- $\alpha$  angolo della diagonale del telaio
- $\beta$  ascissa curvilinea polare dove si integra la struttura.

Dobbiamo anche in questa parte dello studio fare le ipotesi base che governeranno i nostri calcoli:

- e) Altezza della sezione costante lungo tutto il controvento, di conseguenza momento d'inerzia costante del controvento per tutta la sua lunghezza.
- f) Si adotta come legame costitutivo del materiale il legame elasto – plastico linearmente incrudente di conseguenza il legame momento - curvatura che si usa per il calcolo degli spostamenti è quello che deriva da questo legame costitutivo

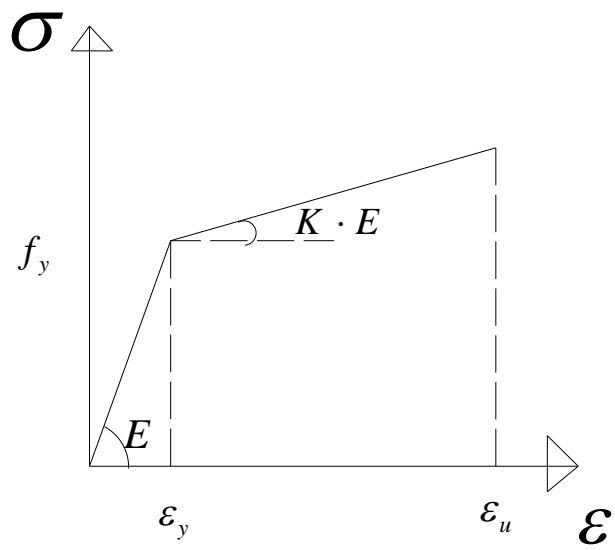


Figura 8.3 Legame costitutivo che useremo

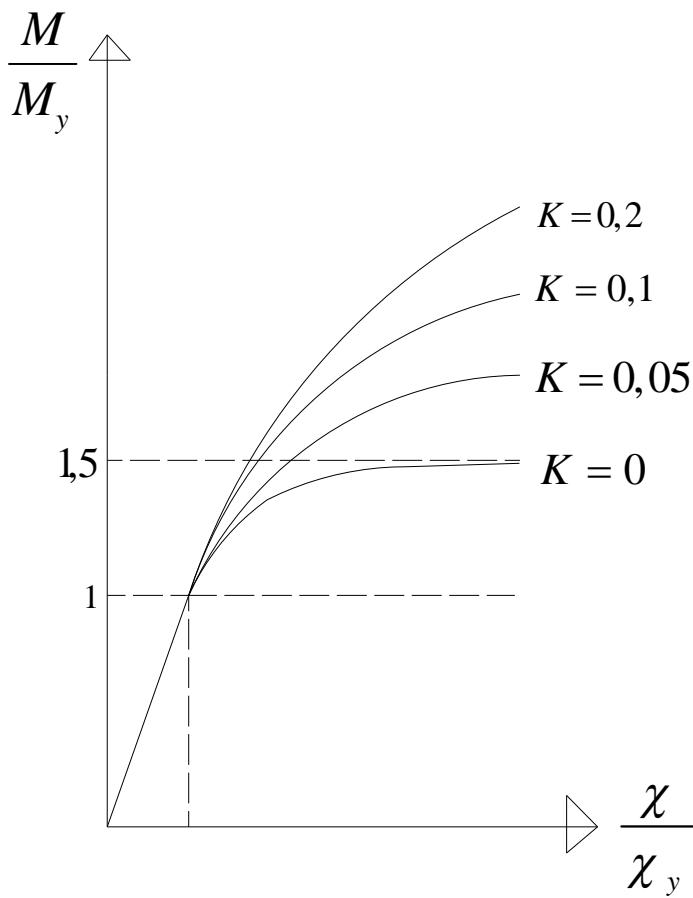


Figura 8.4 Legame Momento - Curvatura che useremo

## 8.1) CALCOLO DEL DIAGRAMMA F – δ DEL CONTROVENTO

Studieremo per semplicità di calcoli e per potere paragonare i risultati la stessa struttura di controvento che abbiamo trattato con il legame costitutivo di Prandtl.

$$B = 4m$$

$$H = 3m$$

$$R = 4m$$

$$\theta = 77^\circ \quad \frac{\theta}{2} = 38,5^\circ = \frac{\pi}{4,6753}$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

Considereremo solo il legame costitutivo che approssima quello reale del materiale

I suoi parametri fondamentali sono:

$$f_y = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = 0,0013$$

$$E = 2039432 \text{ kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_u = 0,1$$

$$K = 0,01 = \frac{1}{100}$$

"



Figura 8.5 Forma geometrica della sezione della sezione

I parametri geometrici della sezione sono i seguenti:

$$b = 0,05m$$

$$h = 0,3m$$

La prima parte del diagramma  $F - \delta$  del controvento cioè quella che contiene la sua rigidezza elastica e l'ultimo spostamento lineare è la stessa della struttura che usa per il materiale il legame costitutivo di Prandtl. Per questa parte del diagramma a parità di geometria del controvento è responsabile solo la prima parte del legame costitutivo cioè quella dell'elasticità lineare che è uguale per tutti e due i legami costitutivi.

Quindi possiamo scrivere :

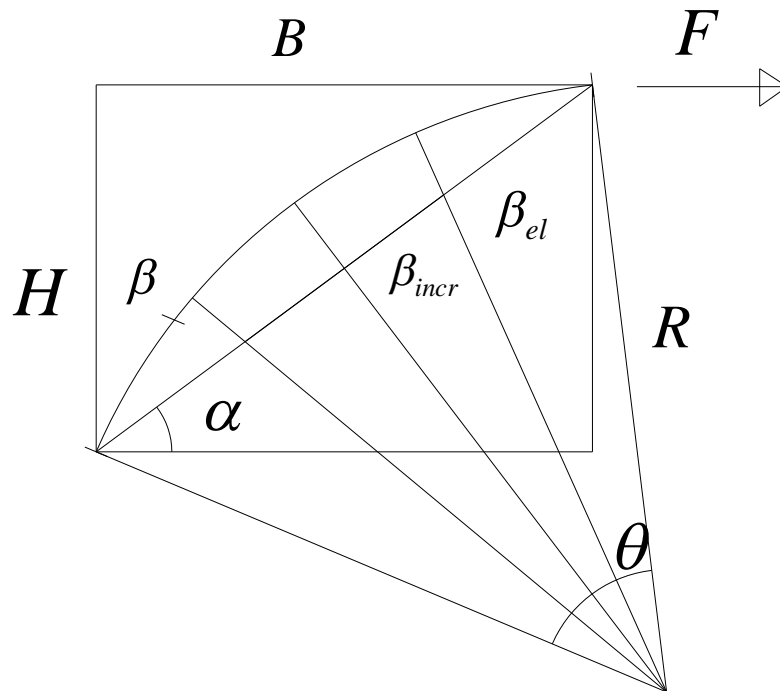
$$M_Y = w_{el} \cdot f_y = 75 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 2700 \frac{kg}{cm^2} = 20250 kg \cdot m$$

$$F_y = 18620 kg$$

$$K_{el} = \frac{2EJ \cos^2 \alpha}{R^3 \left( \theta + \sin \theta - 8 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \theta \right)} = 701640 \frac{kg}{m}$$

$$\delta_y = \frac{F_y}{K} = \frac{18620 kg}{701640 \frac{kg}{m}} = 0,0265 m$$

Per il calcolo della parte post snervamento del diagramma  $F - \delta$  usiamo lo stesso metodo che abbiamo usato fino adesso:



**Figura 8.6** Divisione della struttura in parte elastica ed in parte incrudente

Per ogni valore di carico si divide la struttura in due parti

- parte in campo elastico lineare della struttura
- parte in campo non lineare

Il legame  $M - \chi$  che useremo è quello che deriva dall'uso del legame costitutivo che approssima quello reale.

Questo legame lo dobbiamo invertire in modo tale da conoscere l'andamento delle curvature sulle parti incrudenti del controvento in modo tale da potere effettuare gli integrali numerici che dobbiamo calcolare per gli spostamenti.

$$M_{(\chi)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{K}{2} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

Dalla forma generale del legame passiamo al nostro caso



$$M_{(x)} = M_y \cdot \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + \frac{1}{200} \left( \left( \frac{\chi_y}{\chi} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\chi}{\chi_y} - 3 \right) \right]$$

$$\frac{M_{(x)}}{M_y} = X \qquad \frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

Sostituendo nell'equazione di prima ricavo:

$$X = \left[ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot Y^2 + \frac{1}{200} \left( Y^2 + \frac{2}{Y} - 3 \right) \right]$$

$$X = \frac{297}{200} - \frac{99}{200} \cdot Y^2 + \frac{2}{200 \cdot Y}$$

$$99Y^3 + (200X - 297)Y - 2 = 0$$

Ho ricavato così un'equazione del terzo grado. Risolvendola nel termine  $X$  ricavo la dipendenza di  $Y$  che contiene  $\chi$  da  $X$  che contiene  $M_{(x)}$ .

Questa equazione la risolvo con il programma MATHEMATICA e ricavo 3 soluzioni, 1 reale e due immaginarie. Prendo solo la soluzione reale che è:

$$Y = \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot (-88209 + 59400X)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4(-88209 + 59400X)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\chi_y}{\chi} = Y$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{Y}$$

$$\frac{M_{(z)}}{M_y} = X$$

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

Nelle parti in campo elastico lineare si applica alle curvatures la legge :

$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

Nelle parti in campo plastico si applica la legge :

$$\chi = \frac{\chi_y}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

PASSO 1

$$F_1 = 1,2 \cdot F_y = 22344 \text{ kg}$$

$$P_1 = \frac{F_1}{\cos \alpha} = 27930 \text{ kg}$$

$$d_1 = \frac{M_y}{P_1} = 0,72 \text{ m}$$

$$d_1 = R \left( \cos \beta_1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_1 = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

Entro in campo non lineare per  $15^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_1^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot$$

$$\frac{M_y}{EJ} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (0,0639758)$$

$$\delta_1^1 = 0,022m$$

$$\delta_1^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_1 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_1^2 = 0,01m$$

$$\delta_1^{tot} = \delta_1^1 + \delta_1^2 = 0,032m$$

PUNTO 1 SULLA PARTE NON LINEARE

$F_1$	$\delta_1$
22344kg	0,032m

PASSO 2

$$F_2 = 1,4 \cdot F_y = 26068 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{F_2}{\cos \alpha} = 32585 \text{ kg}$$

$$d_2 = \frac{M_y}{P_2} = 0,62 \text{ m}$$

$$d_2 = R \left( \cos \beta_2 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_2 = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$$

Entro in campo non lineare per  $20^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_2^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot$$

$$\frac{\frac{M_y}{EJ}}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (0,111)$$

$$\delta_1^1 = 0,04 \text{ m}$$

$$\delta_2^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_2^2 = 0,007 \text{ m}$$

$$\delta_2^{tot} = \delta_2^1 + \delta_2^1 = 0,047m$$

PUNTO 2 SULLA PARTE NON LINEARE  $F_2$   $\delta_1$   
 26068kg 0,047m

PASSO 3

$$F_3 = 1,6 \cdot F_y = 29792kg$$

$$P_3 = \frac{F_3}{\cos \alpha} = 37240kg$$

$$d_3 = \frac{M_y}{P_3} = 0,54m$$

$$d_3 = R \left( \cos \beta_3 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_3 = 23^\circ = \frac{\pi}{7,71}$$

Entro in campo non lineare per  $23^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_3^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{7,7186}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot$$

$$\frac{M_y}{EJ} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}$$

$$297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\delta_3^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (0.396615)$$

$$\delta_3^1 = 0,14m$$

$$\delta_3^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{7,71}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{7,71}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_3^2 = 0,0046m$$

$$\delta_3^{tot} = \delta_3^1 + \delta_3^2 = 0,144m$$

PUNTO 3 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_3$	$\delta_1$
	29792kg	0,144m

PASSO 4

$$F_4 = 1,8 \cdot F_y = 33516kg$$

$$P_4 = \frac{F_4}{\cos \alpha} = 41895kg$$

$$d_4 = \frac{M_y}{P_4} = 0,48m$$

$$d_4 = R \left( \cos \beta_4 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_4 = 25^\circ = \frac{\pi}{7,2}$$

Entro in campo non lineare per  $25^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_4^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{7,2}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{M_y}{EJ} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\frac{\frac{M_y}{EJ} \cdot R \cdot d\beta \cdot \left( 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right) \right)}{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}}$$

$$\delta_4^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (1.27449)$$

$$\delta_4^1 = 0,44m$$

$$\delta_4^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{7,2}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{7,2}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_4^2 = 0,0038m$$

$$\delta_4^{tot} = \delta_4^1 + \delta_4^2 = 0,443m$$

PUNTO 4 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_4$	$\delta_4$
	33516kg	0,443m

PASSO 5

$$F_5 = 2 \cdot F_y = 37240kg$$

$$P_5 = \frac{F_5}{\cos \alpha} = 46550kg$$

$$d_5 = \frac{M_y}{P_5} = 0,43m$$

$$d_5 = R \left( \cos \beta_5 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_4 = 27^\circ = \frac{\pi}{6,66}$$

Entro in campo non lineare per  $27^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_5^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{7,2}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot$$

$$\frac{\frac{M_y}{EJ}}{\frac{297 \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)}{2972^{\frac{1}{3}}}} \left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(z)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (2,41258)$$

$$\delta_5^1 = 0,85m$$

$$\delta_5^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{7,2}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_2 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{6,66}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_5^2 = 0,0027m$$

$$\delta_5^{tot} = \delta_5^1 + \delta_5^2 = 0,852m$$



PUNTO 5 SULLA PARTE NON LINEARE

$$\begin{array}{ll} F_5 & \delta_5 \\ 37240kg & 0,852m \end{array}$$

Con questo valore di forza sono già abbastanza vicino al momento ultimo della sezione. Decido di proseguire il calcolo ancora per un altro passo di carico per vedere se l'andamento lineare della parte incrudente del legame  $F - \delta$  del controvento si riscontra anche per questa geometria strutturale.

PASSO 6

$$F_6 = 2,2 \cdot F_y = 40964kg$$

$$P_6 = \frac{F_6}{\cos \alpha} = 51205kg$$

$$d_6 = \frac{M_y}{P_6} = 0,4m$$

$$d_6 = R \left( \cos \beta_6 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\beta_6 = 28^\circ = \frac{\pi}{6,42}$$

Entro in campo non lineare per  $28^\circ$  da tutti e due i lati.

$$\delta_6^1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6,42}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot$$

$$\frac{\frac{M_y}{EJ}}{\frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)}{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left( 529254 + \sqrt{280109796516 + 4 \left( -88209 + 59400 \frac{M_{(x)}}{M_y} \right)^3} \right)^{\frac{1}{3}}}{2972^{\frac{1}{3}}}} \cdot R \cdot d\beta$$

$$\delta_6^1 = \frac{2M_y R^2}{\cos \alpha EJ} \cdot (3,67922)$$

$$\delta_6^1 = 1,298m$$

$$\delta_6^2 = 2 \int_{\frac{\pi}{6,42}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \frac{1}{\cos \alpha} \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{F_6 \cdot R \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \alpha \cdot EJ} R \cdot d\beta$$

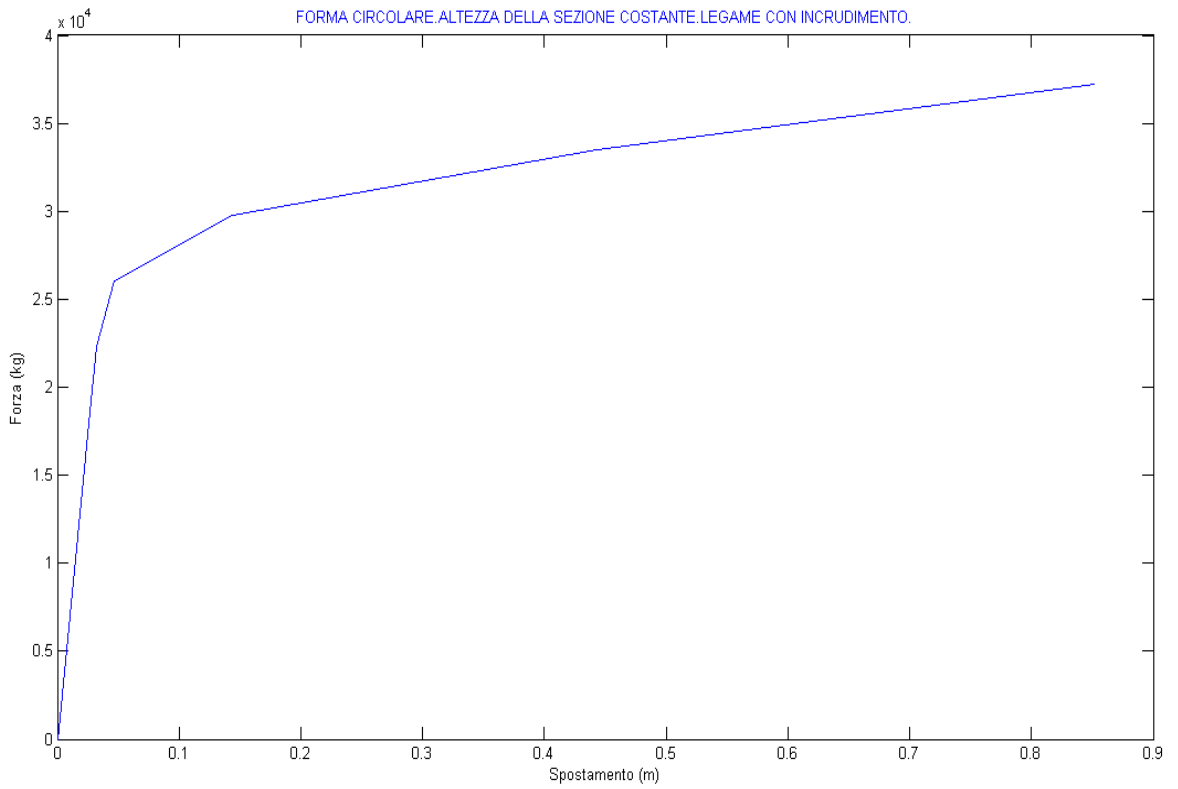
$$\delta_6^2 = \frac{2F_1 \cdot R^3}{\cos \alpha^2 \cdot EJ} \int_{\frac{\pi}{6,42}}^{\frac{\pi}{4,6753}} \left( \cos \beta - \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 R \cdot d\beta$$

$$\delta_6^2 = 0,0023m$$

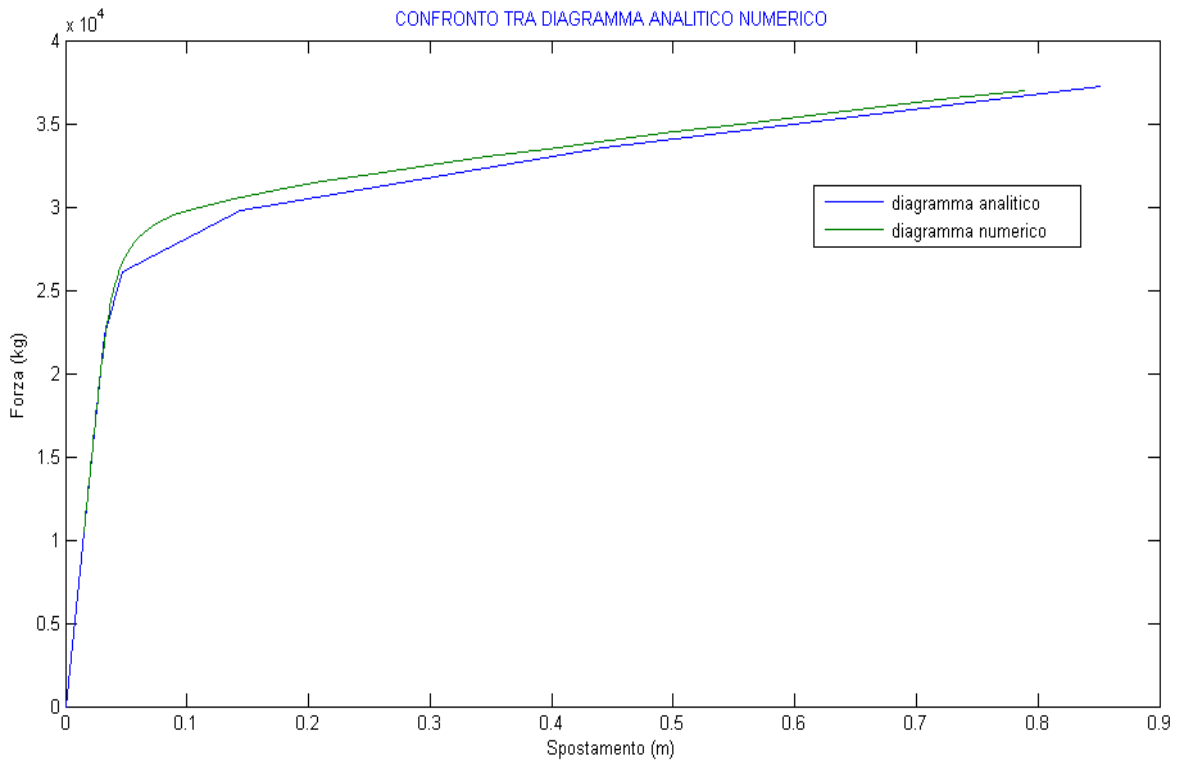
$$\delta_6^{tot} = \delta_6^1 + \delta_6^2 = 1,3m$$

PUNTO 6 SULLA PARTE NON LINEARE	$F_5$	$\delta_5$
	40964kg	1,3m

Adesso posso costruire il legame  $F - \delta$  del controvento del mio controvento.



**Figura 8.7 Legame Forza Spostamento del controvento**



**Figura 8.8 Confronto tra soluzione analitica e numerica della struttura**

Guardando questo legame in figura 8.7 si evidenzia ancora una volta l'elevatissima duttilità che hanno i controventi con un legame costitutivo che prevede l'incrudimento. Inoltre si ritrova ancora una volta un andamento lineare del legame  $F - \delta$  nella sua parte incrudente. Si confermano quindi ancora una volta le ipotesi fatte nel capitolo precedente sul passaggio della linearità del legame costitutivo del materiale che abbiamo introdotto nella sua parte incrudente in una linearità sezionale ed infine in una linearità dell'elemento strutturale.

## CAPITOLO 9

### **FORMA ELLITTICA E FORMA PARABOLICA. ALTEZZA DELLA SEZIONE COSTANTE.**

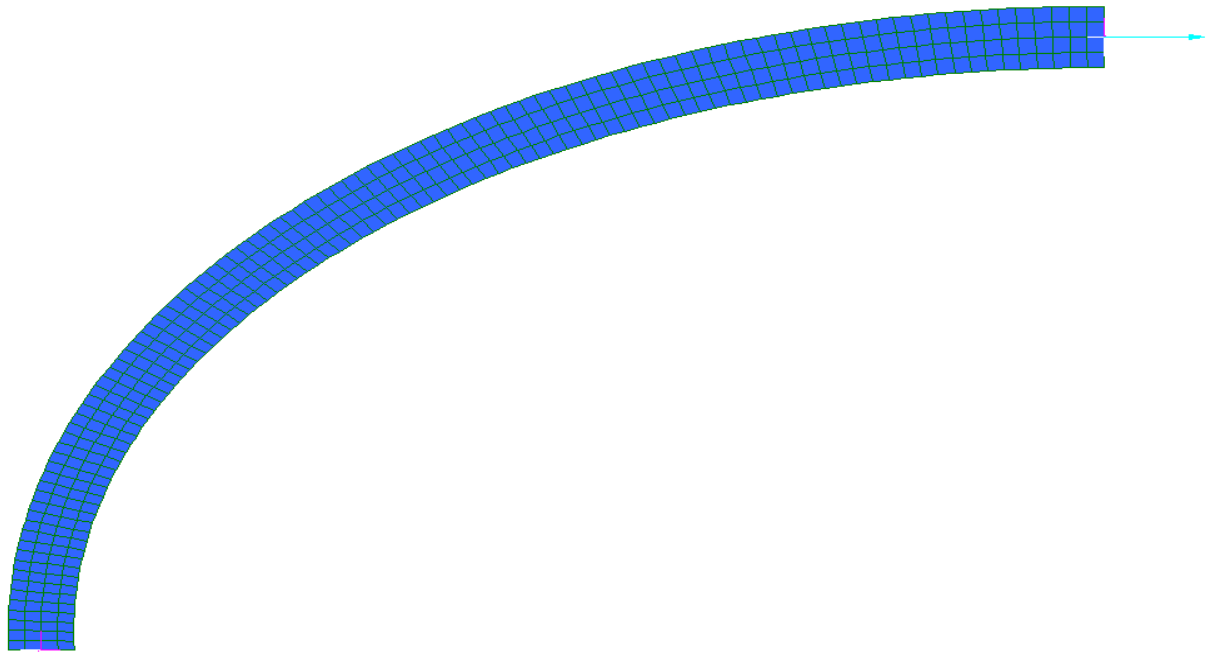
Nei capitoli precedenti abbiamo esaminato a fondo la forma triangolare e la forma circolare. Abbiamo risolto la struttura e calcolato il diagramma  $F - \delta$  del controvento per queste forme in tutte le possibilità che esse potevano essere costruite. Altezza della sezione costante o variabile. Legame costitutivo del materiale elastico – perfettamente plastico, elasto – plastico linearmente incrudente e il legame reale del materiale acciaio. Tutti questi risultati analitici che poi venivano confrontati con quelli numerici è frutto del sistema di riferimento introdotto per ognuna di queste strutture, cioè il sistema di riferimento che mi permette di inserire un ascissa curvilinea lungo la struttura per esprimere le sue caratteristiche di sollecitazione e di deformazione e come loro conseguenza gli spostamenti effettivi della struttura.

Per la forma ellittica e quella parabolica non possiamo introdurre un tale sistema di riferimento quindi non possiamo esprimere l'andamento delle curvature lungo il controvento come seguito della forza applicata. Di conseguenza non possiamo trovare analiticamente il diagramma  $F - \delta$  del controvento per queste due forme geometriche. non avendo a disposizione il sistema di riferimento per esprimere neanche il momento lungo la struttura non possiamo quindi fare neanche delle considerazioni sull'andamento dell'altezza della sezione lungo il controvento.

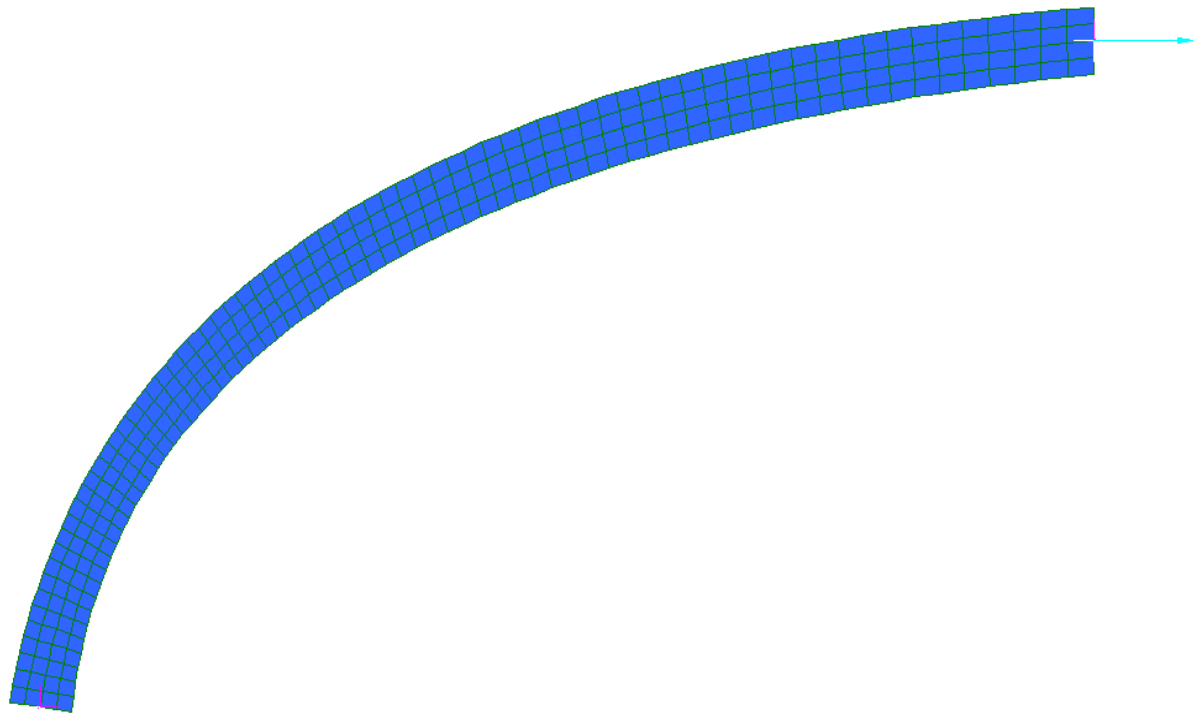
Quindi per queste strutture sono state fatte solo delle analisi numeriche per trovare i loro diagrammi  $F - \delta$ . Queste analisi sono state fatte con tutti e tre i legami costitutivi del materiale che disponiamo.

Volendo riassumere le analisi eseguite possiamo dire che abbiamo calcolato il diagramma  $F - \delta$  del controvento con queste due forme geometriche, con un'altezza costante lungo tutto il controvento e con tutti e tre i legami costitutivi del materiale che disponiamo.

Tutte le analisi numeriche di questo studio sono state eseguite con il programma STRAUS 7. Nei modelli numerici la struttura si vincola in modo tale da presentare l'esatto modo in cui si sollecita nella realtà il controvento. Nel estremo basso a sinistra delle strutture è libera solo la rotazione nel piano della struttura, quindi cui si impone il vincolo cerniera fissa. Nel estremo alto a destra delle strutture è libera la rotazione nel piano della struttura e lo spostamento nella direzione della forza, quindi cui si impone il vincolo cerniera scorrevole.

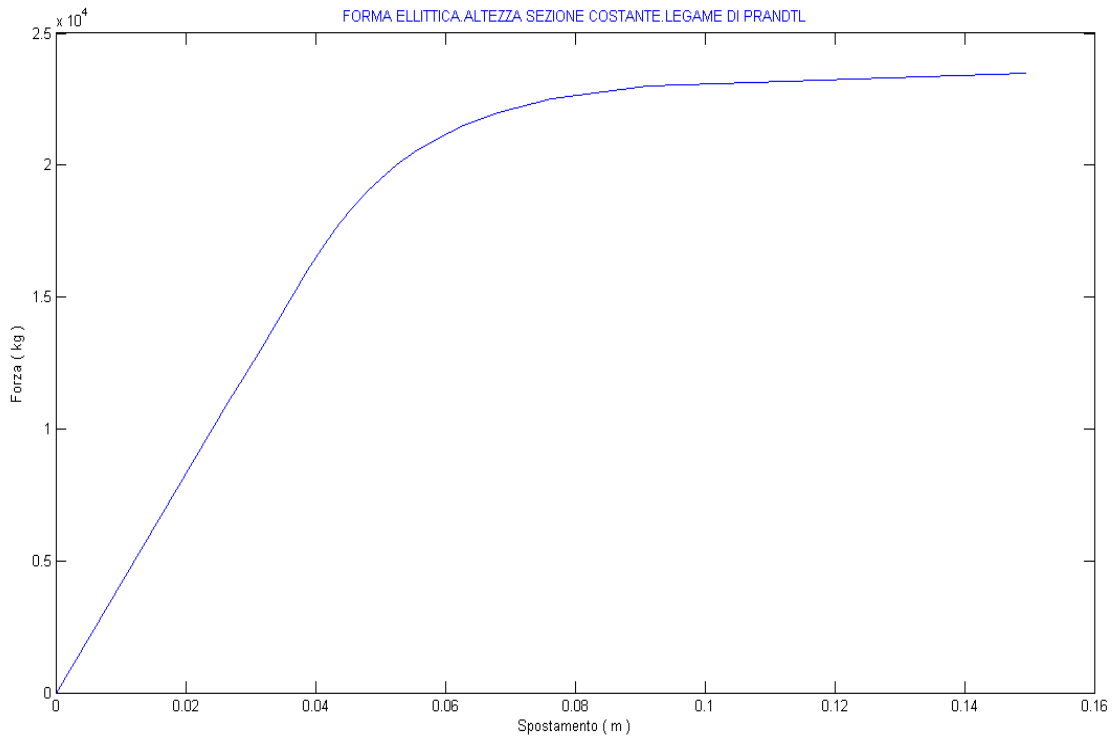


**Figura 9.1** Modello di calcolo per la forma ellittica

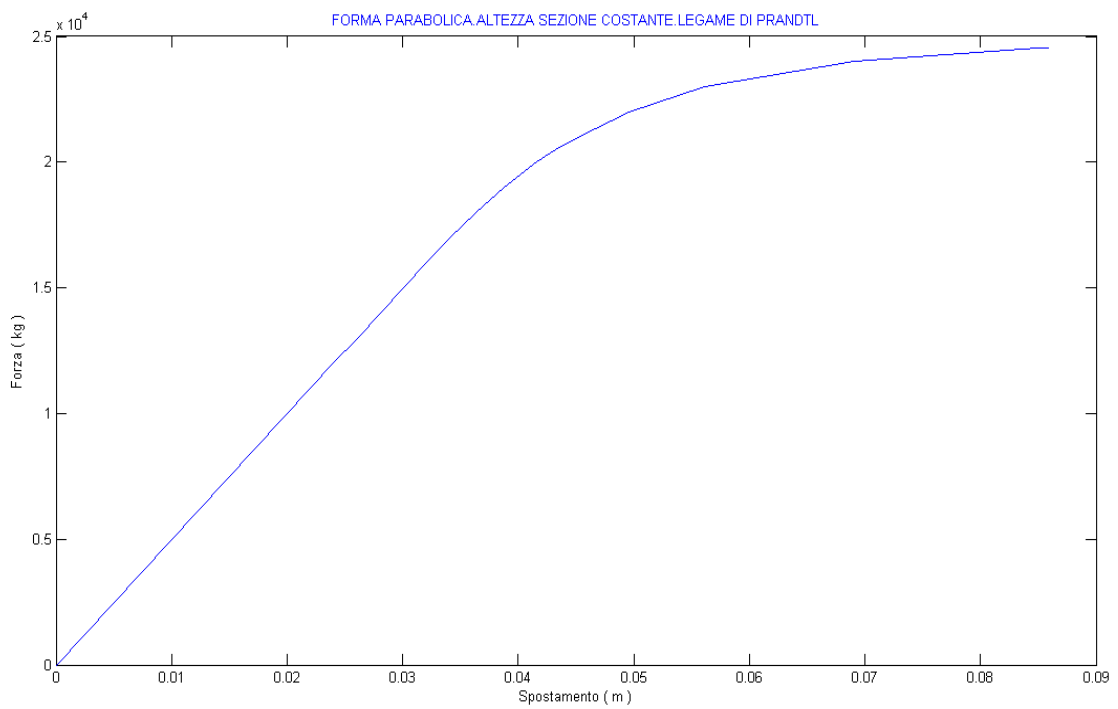


**Figura 9.2** Modello di calcolo per la forma parabolica

Nel primo caso le strutture si risolvono con il legame del materiale di Prandtl.

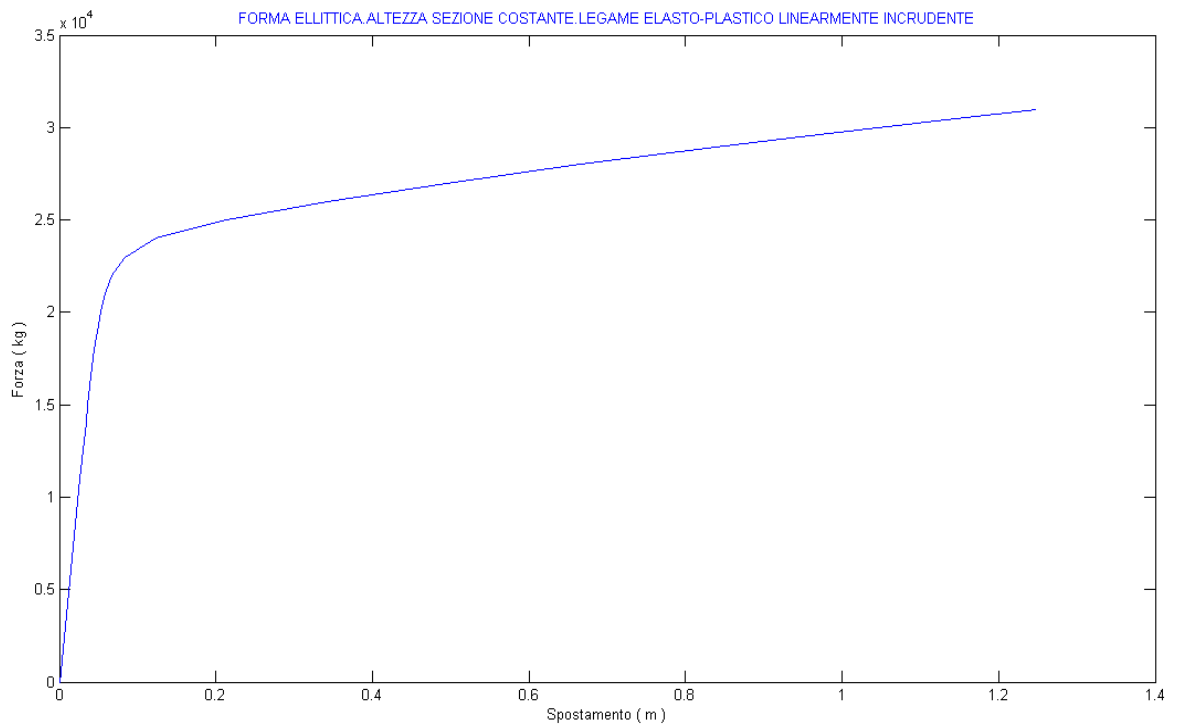


**Figura 9.3** Diagramma della forma ellittica con legame costitutivo del materiale di Prandtl

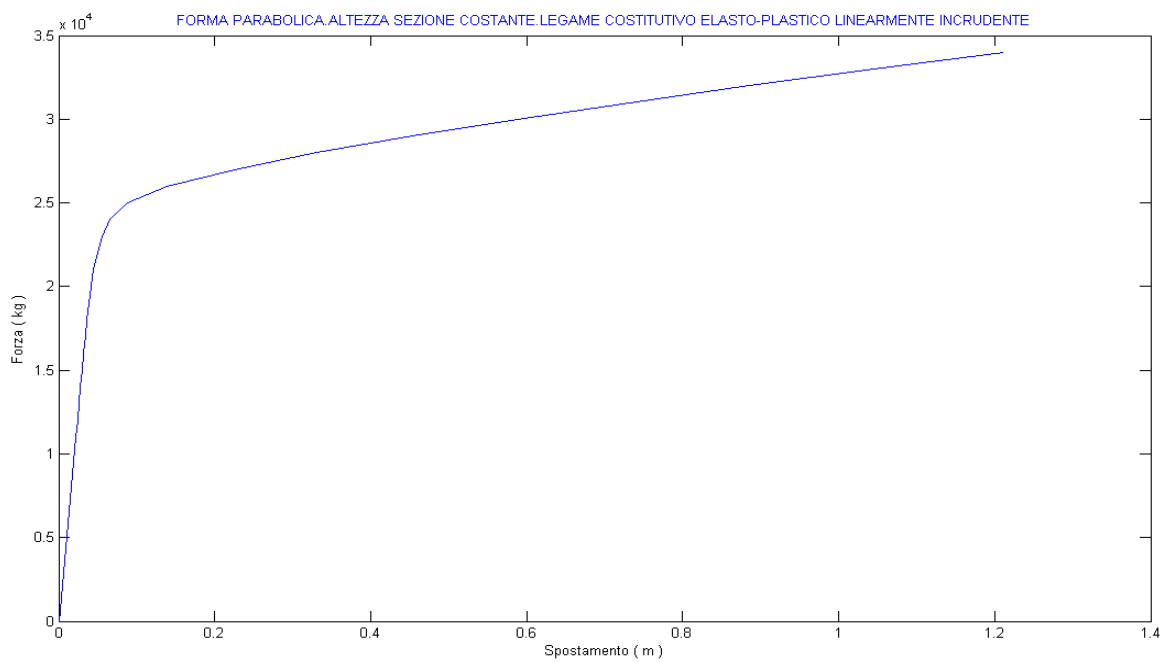


**Figura 9.4** Diagramma della forma parabolica con legame costitutivo del materiale di Prandtl

Come secondo caso invece le strutture si risolvono con il legame del materiale elasto – plastico linearmente incrudente.



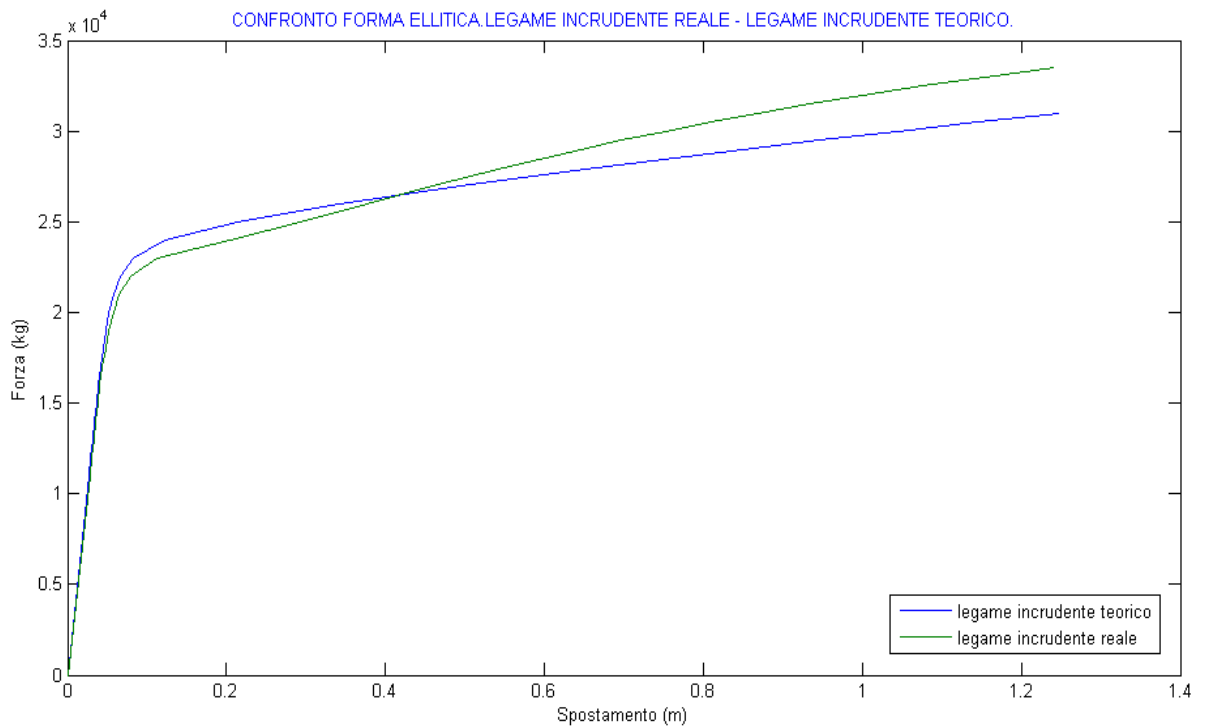
**Figura 9.5** Diagramma della forma ellittica con legame costitutivo del materiale elasto-plastico linearmente incrudente



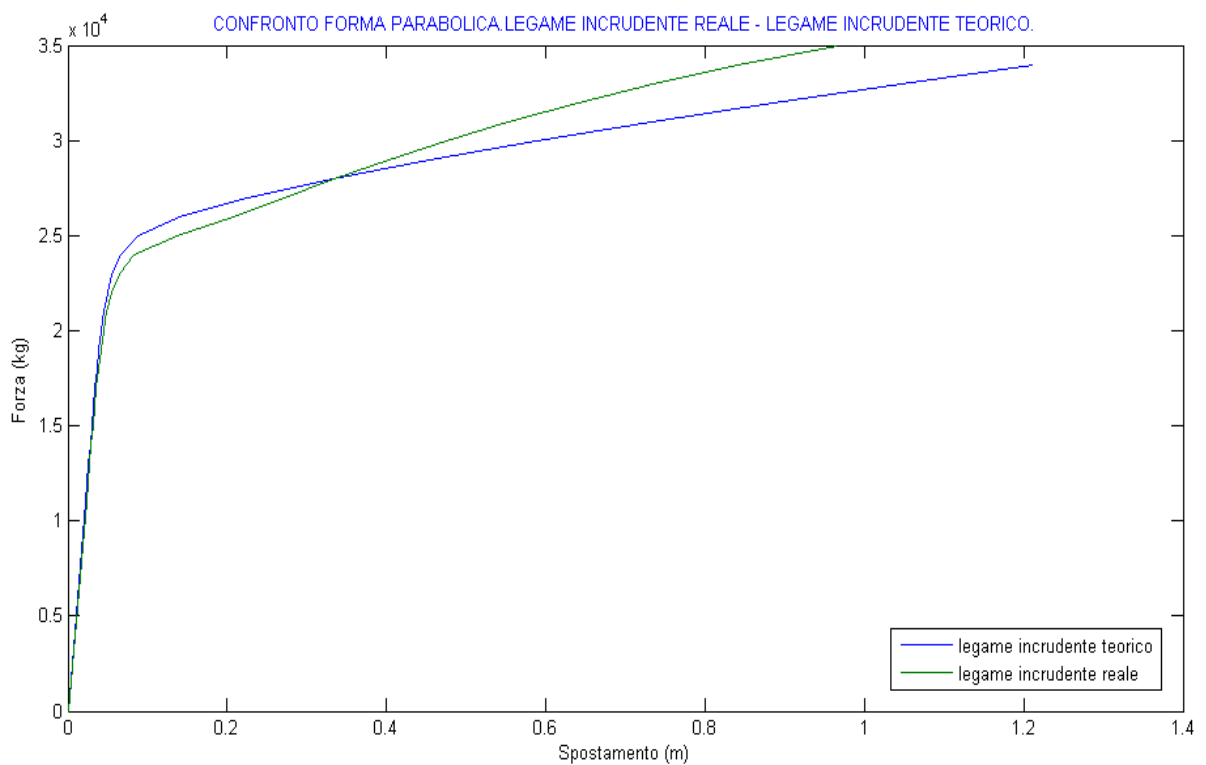
**Figura 9.6** Diagramma della forma parabolica con legame costitutivo del materiale elasto-plastico linearmente incrudente



Come terzo caso le strutture si risolvono con il legame costitutivo reale del materiale.



**Figura 9.7** Diagramma della forma ellittica con legame reale del materiale in confronto con il diagramma con legame del materiale elasto- plastico linearmente incrudente



**Figura 9.8** Diagramma della forma parabolica con legame reale del materiale in confronto con il diagramma con legame del materiale elasto- plastico linearmente incrudente

Nelle figure precedenti sono stati rappresentati tutti i diagrammi di queste forme strutturali fatte con tutti e tre i legami costitutivi del materiale. Non avendo dei risultati analitici non possiamo interpretare analiticamente i risultati come è stato fatto nei capitoli precedenti con il grafico delle curvature lungo il controvento.

Si vede che quando si usa il legame di Prandtl per il materiale la duttilità strutturale è bassissima, abbiamo spostamenti ultimi di 15 cm e 9 cm.

Numericamente questo risultato si può interpretare con la singolarità che il programma di calcolo vede nella struttura per il valore della forza ultima cioè  $F_u = 1,5 \cdot F_y$ , e che si traduce in un errore nella soluzione. La sezione più sollecitata quando la forza raggiunge il suo valore ultimo si plasticizza completamente e non può più ricevere carico quindi numericamente si traduce in un rigidezza nulla della struttura cioè in una singolarità nella struttura ed infine in un errore nella soluzione. Quindi l'ultimo valore di spostamento che riesco a misurare numericamente è quello che corrisponde alla forza ultima cioè  $F_u = 1,5 \cdot F_y$ .

Quando si usano invece i legami incrudenti per il materiale la sezione per come si traduce il legame incrudente  $\sigma - \varepsilon$  del materiale nel legame  $M - \chi$  della sezione continua ancora a ricevere carico ed a opporre resistenza ( cioè rigidezza e non singolarità numerica ) anche per valori di carico superiori a quello che corrisponde al valore ultimo della forza quando si usa il legame di Prandtl. Tutto questo si traduce in una maggiore duttilità del controvento.

Il tratto lineare nella parte post snervamento del diagramma  $F - \delta$  del controvento si interpreta ancora una volta come passaggio della linearità che noi introduciamo sul legame del materiale in una linearità della sezione ed infine in una linearità della struttura.

Possiamo ancora una volta affermare che il legame di Prandtl del materiale accoppiato ad un'altezza costante della sezione lungo il controvento comporta una duttilità bassissima della struttura. I legami incrudenti del materiale invece comportano una duttilità molto elevata del “ Crescent – Shaped Braces”

## CAPITOLO 10

# **ANALISI CONDOTTE. INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI. CONFRONTO TRA VARIE MODALITÀ DI COSTRUZIONE DELLE “CRESCENT – SHAPED BRACES”**

### **10.1) ANALISI CONDOTTE E INTERPRETAZIONE DEI RISULTATI.**

Nei primi due capitoli di introduzione della tesi sono state presentate le strutture speciali di controventi chiamati “Crescent – Shaped Braces”. È stato presentato il loro ruolo fondamentale nella nuova concezione strutturale per la progettazione antisimica ed è stato visualizzato l'importanza cruciale dello studio di queste strutture sotto l'aspetto di “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*” .

In questo studio fatto durante questo lavoro di ricerca si è cercato di costruire queste strutture in tutte le modalità possibili sia in termini geometrici della struttura sia in termini meccanici per il materiale che lo compone.

Sostanzialmente si è cercato di esplorare queste modalità seguendo 3 direzioni fondamentali di studio e ricerca:

- a) geometria totale della struttura di controvento
- b) andamento geometrico dell'altezza della sezione lungo il controvento
- c) legame costitutivo usato per il materiale che compone la struttura.

Si è cercato quindi di amplificare al massimo le nostre conoscenze sui diagrammi Forza – Spostamento (  $F - \delta$  ) di queste strutture riempiendo il più possibile una matrice tridimensionale dove ogni suo elemento è una struttura di “Crescent – Shaped Braces” fatta con caratteristiche geometriche e meccaniche diverse dalle altre componenti della matrice. Le tre assi principali della matrice dello studio sono le tre direzioni sopraindicate.

La prima direzione della ricerca è quella della geometria totale della struttura. Durante questa fase sono state presentate e studiate 4 forme principali geometriche:

- 1) forma triangolare
- 2) forma circolare
- 3) forma ellittica
- 4) forma parabolica

Per ognuna di queste forme si è studiato il suo diagramma  $F - \delta$  e tutti i parametri che lo influenzano in termini di “*Stiffness-Strength-Ductility*”

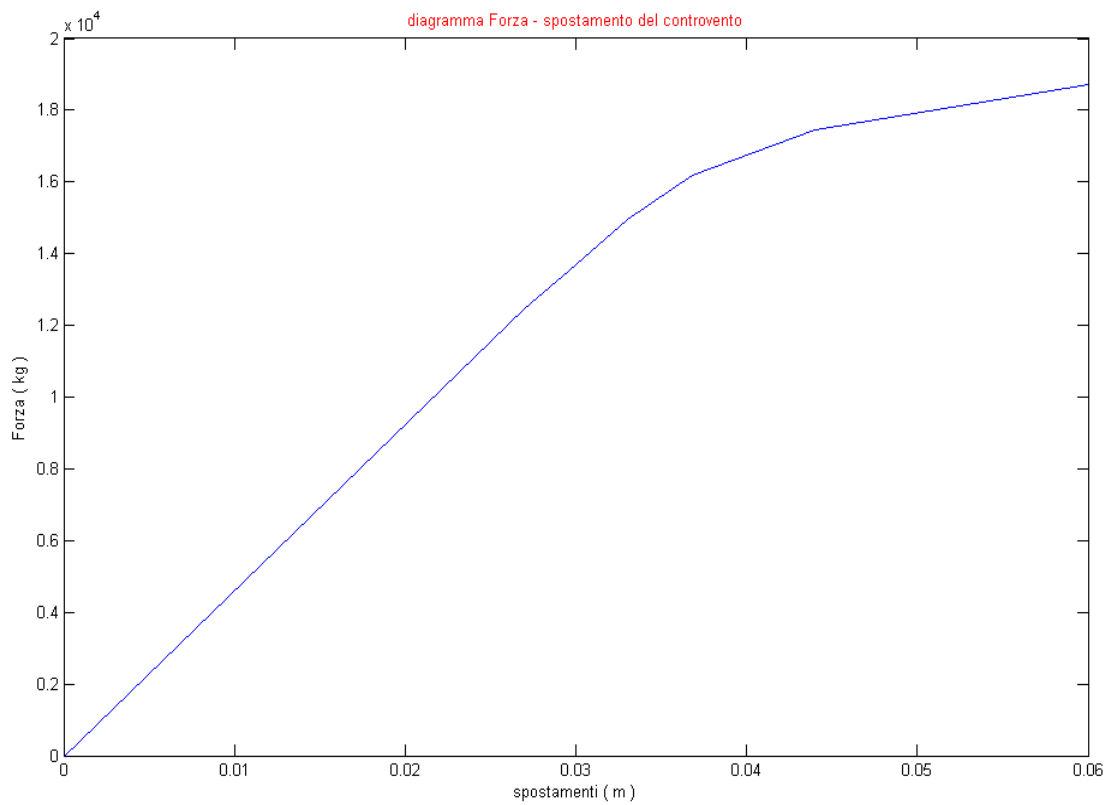
In particolare per le due prime forme cioè quella triangolare e quella ellittica è stato introdotto una modalità di studio e di costruzione del diagramma. Praticamente si introduce un sistema di riferimento per ogni forma dove è possibile effettuare valutazione di spostamenti partendo dalla entità delle forze applicate. Quindi per queste due forme si ricava analiticamente il diagramma evidenziando parametri che lo influenzano e poi si fanno delle analisi numeriche per confrontare i risultati analitici con quelli numerici.

Per le altre due forme invece non c'è la possibilità analitica di trovare un sistema di riferimento sulla lunghezza del controvento quindi non si può procedere alla costruzione analitica del diagramma  $F - \delta$ . Si fanno quindi solo delle analisi numeriche e si ricava il diagramma da esse.

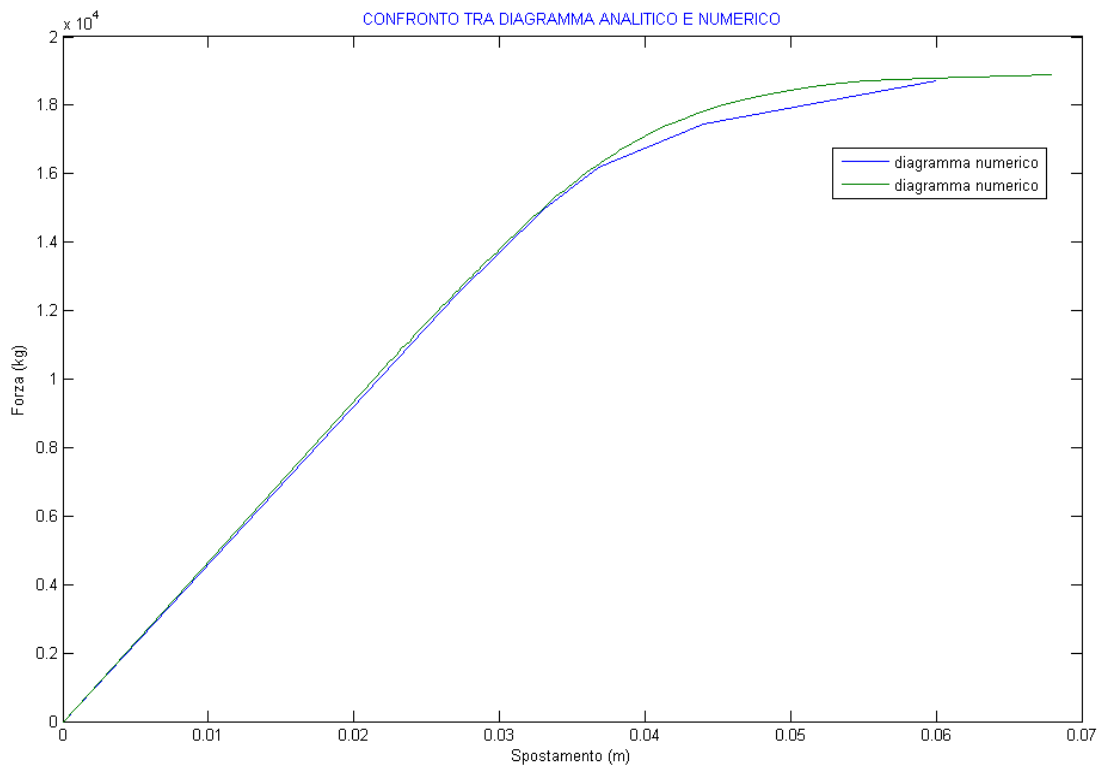
La seconda direzione dello studio è quella legata all'andamento dell'altezza della sezione lungo il controvento. Durante questa fase sono state considerate due andamenti principali. Il primo è quello costante cioè l'altezza della sezione rimane costante per tutta la lunghezza della struttura. Il secondo è un andamento parabolico che permette di plastizzare contemporaneamente un concio con una lunghezza ben definita di controvento partendo dalla sua sezione più sollecitata.

La terza direzione di ricerca è quella sul legame costitutivo del materiale che compone la struttura. Durante questa fase sono state prese in considerazione tre tipi diversi di legami, quello elastico perfettamente plastico, quello elasto - plastico linearmente incrudente e il legame reale del materiale acciaio. Per i primi due diagrammi c'è la possibilità di applicarli analiticamente per calcolare il diagramma  $F - \delta$ , per il terzo invece si segue solo la via numerica.

Nel terzo capitolo si studia la forma triangolare con altezza della sezione costante e materiale elastico - perfettamente plastico. Questa è la tipologia più semplice di “*Crescent - Shaped Braces*” per quello si colloca come primo elemento della nostra matrice di controventi. Si è calcolato il suo diagramma  $F - \delta$  analiticamente e numericamente.

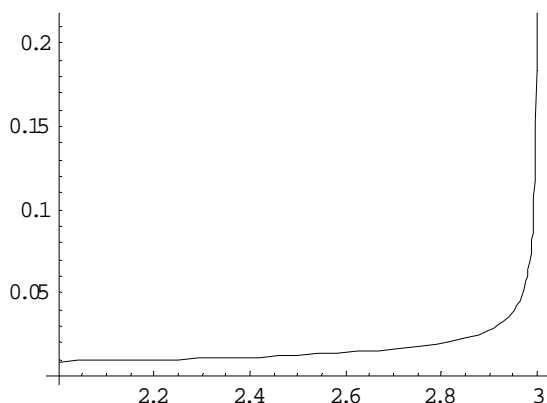


**Figura 60.1 Diagramma della forma triangolare con altezza della sezione costante e materiale elastico - perfettamente plastico**



**Figura 10. 2 Confronto tra diagramma analitico e numerico**

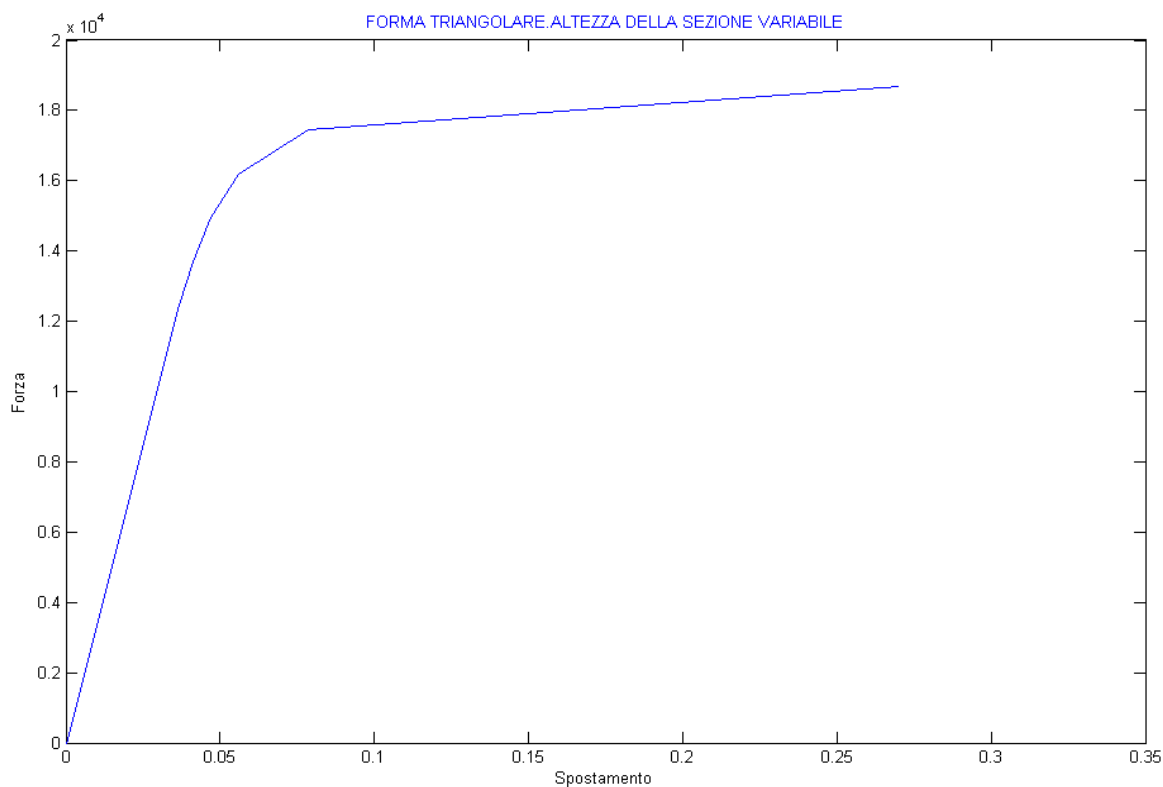
In questo confronto si possono vedere due parametri fondamentali del diagramma. La sua rigidezza elastica che corrisponde perfettamente tra la soluzione analitica e numerica e l'andamento che seguirà il diagramma nel suo tratto post snervamento della struttura. Inoltre si vede la duttilità minima che questa scelta strutturale comporta. L'interpretazione di questa inconvenienza strutturale si da analiticamente.



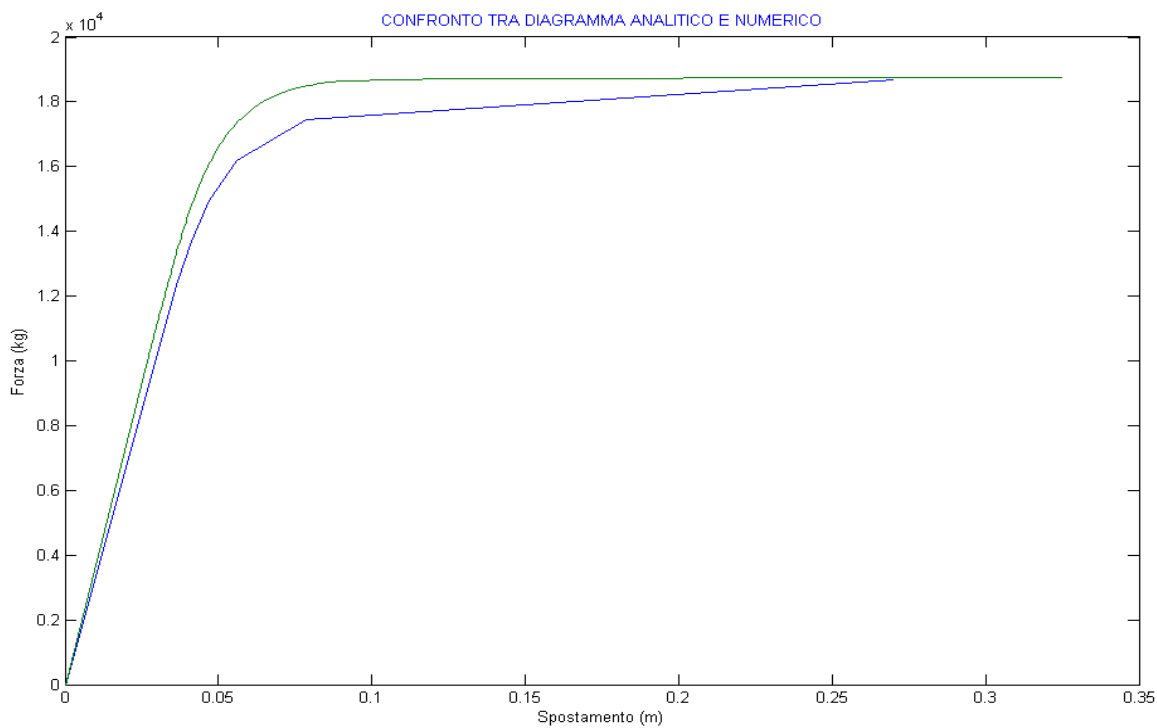
**Figura 10.3 Andamento delle curvature lungo la struttura.**

La causa di questi spostamenti non lineari bassi ovvero la minima duttilità della struttura è frutto della combinazione altezza della sezione costante e legame costitutivo del materiale tipo quello di Prandtl. In figura 10.2 è rappresentato l'andamento delle curvature lungo la lunghezza del controvento. Si vede chiaramente che queste curvature tendono all'infinito solo in una zona molto ristretta alla sezione più sollecitata quindi il loro integrale e di conseguenza lo spostamento misurato è un numero finito e non molto elevato.

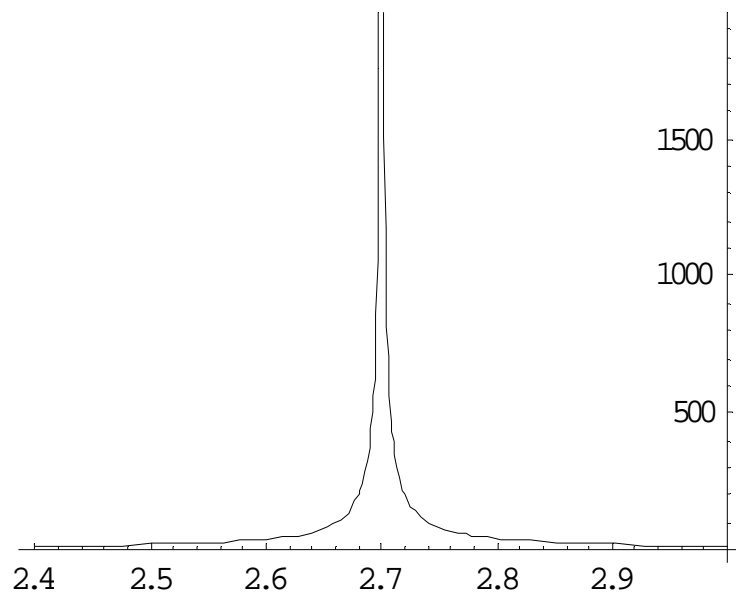
Nel quarto capitolo si è studiata di nuovo la forma triangolare e come legame del materiale quello di Prandtl però adottando un'altezza delle sezioni variabile lungo il controvento in modo tale da portare allo snervamento contemporaneo di un blocco di lunghezza ben definita di controvento chiamata lunghezza di plasticizzazione. Si è ricavato analiticamente il suo diagramma  $F - \delta$  e confrontato poi con la soluzione numerica. In figura 10.4 e 10.5 sono stati rappresentati i grafici di questa tipologia strutturale. Si vede subito un aumento considerevole di duttilità di questa tipologia rispetto a quella di prima. Ancora una volta l'interpretazione si può fare analiticamente. Facendo il grafico delle curvature sulla lunghezza del controvento si vede che le curvature prendono dei valori grandi in una zona più larga rispetto a quella di prima quindi gli spostamenti non lineari calcolati sono più elevati.



**Figura 10.4** Diagramma della forma triangolare con altezza della sezione variabile e legame costitutivo di Prandtl

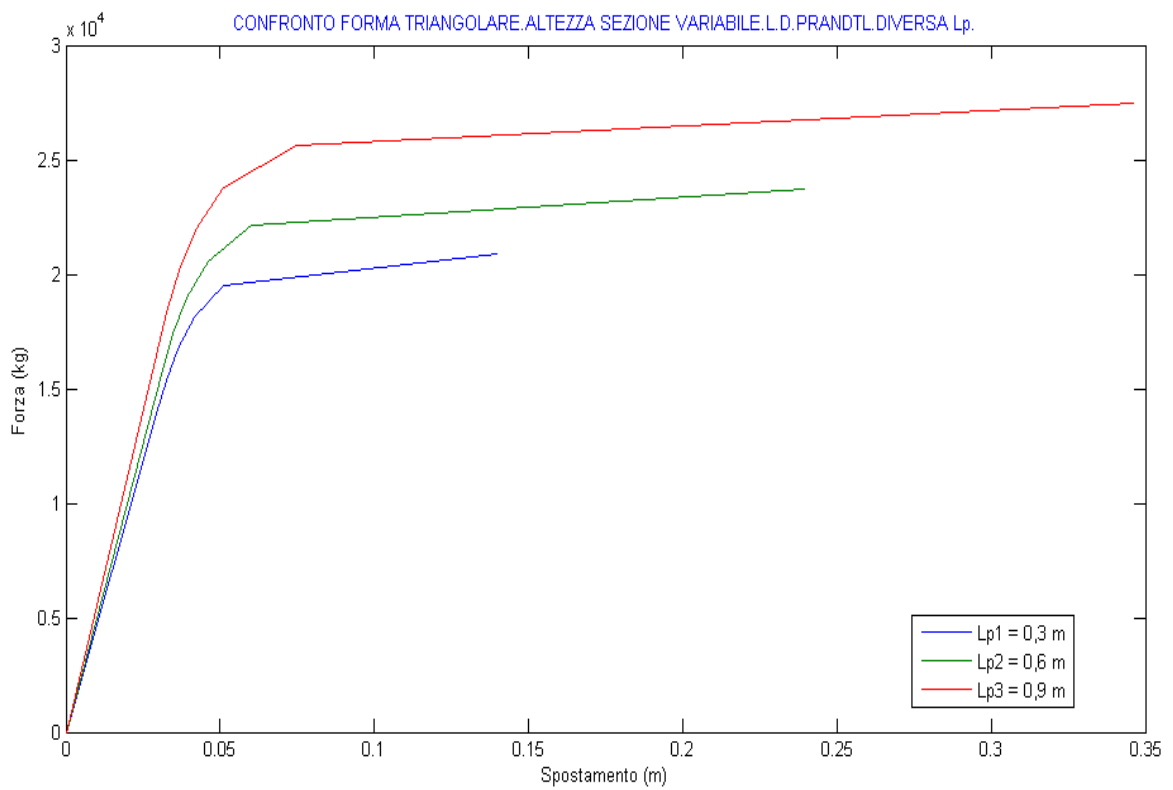


**Figura 10.5** Confronto tra soluzione analitica e numerica.



**Figura 10.6 Andamento delle curvature sulla lunghezza della struttura**

Sempre in questo capitolo si è studiata una altra struttura triangolare pero adottando tre diverse lunghezze di plasticizzazione rispettivamente  $l_{p1} = 0,3m$  ,  $l_{p2} = 0,6m$  ,  $l_{p3} = 0,9m$  .



**Figura 10.7 Confronto tra grafici della stessa struttura adottando 3 diverse lunghezze di plasticizzazione**



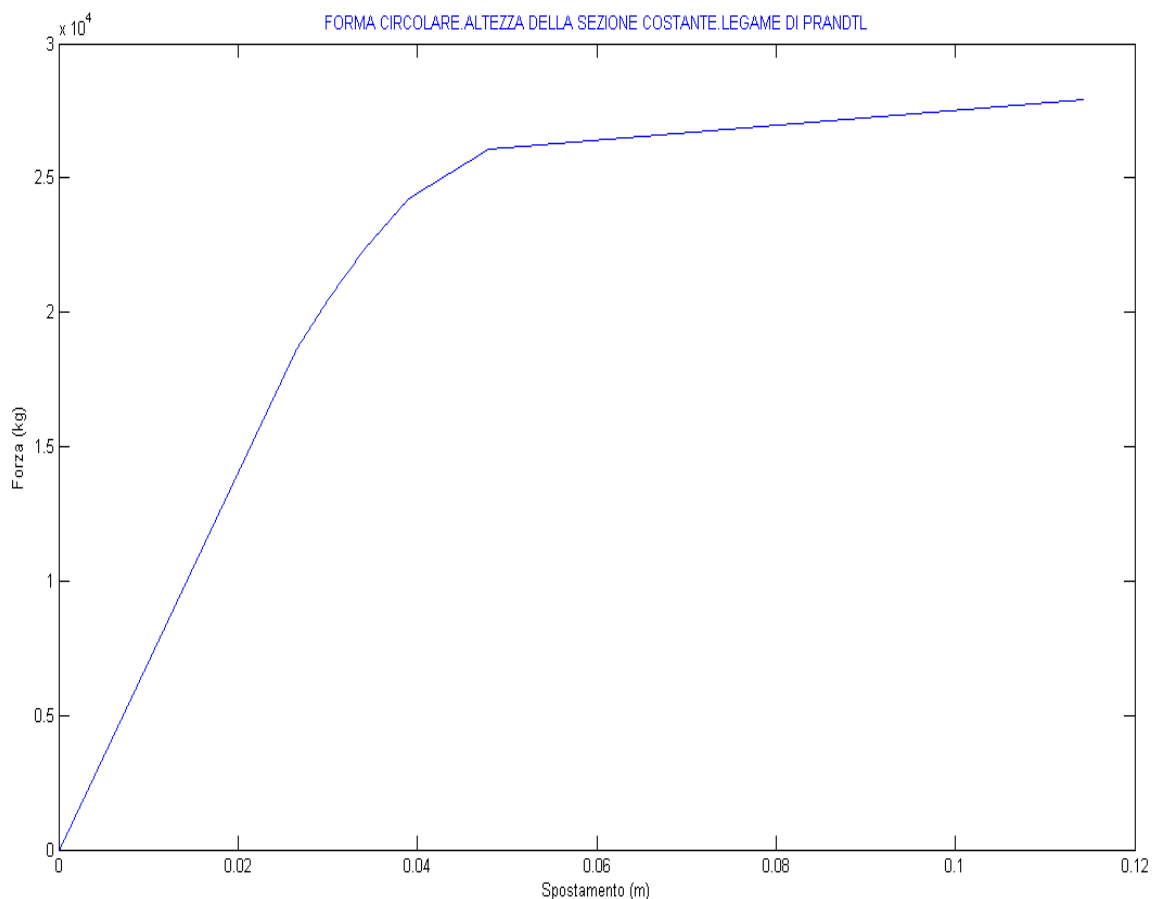
$$l_{p1} = 0,3m \quad \delta_1 = 0,14cm$$

$$l_{p2} = 0,6m \quad \delta_1 = 0,24cm$$

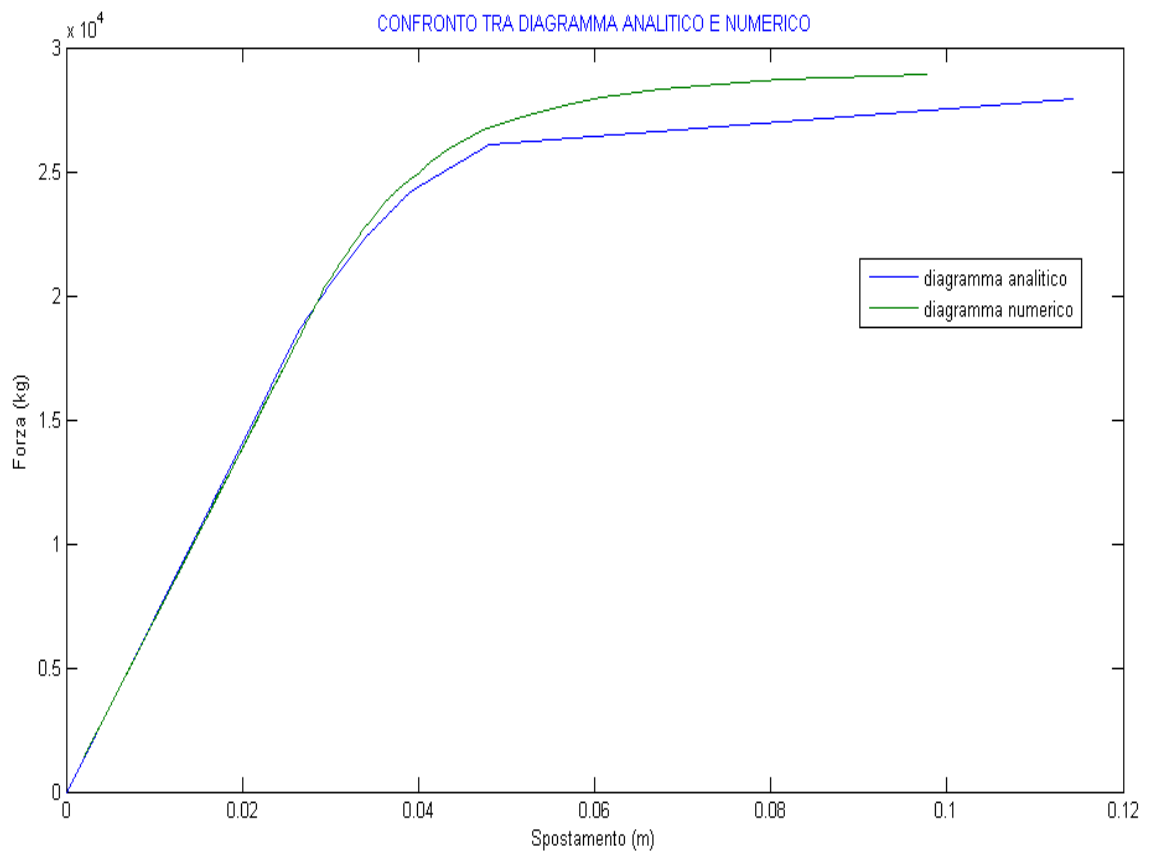
$$l_{p3} = 0,9m \quad \delta_1 = 0,34cm$$

L'interpretazione di questo aumento quasi lineare degli spostamenti ultimi della struttura si fa sempre analiticamente. Aumentando la lunghezza di plasticizzazione aumento il campo dove si integrano delle curvatures di valore elevato e la zona dove le curvatures tendono all'infinito quindi l'integrale numerico di queste curvatures e sempre più grande.

Nel quinto capitolo si inizia a studiare la forma circolare. Si adotta un'altezza della sezione costante e un legame costitutivo di Prandtl. Anche qui si calcola analiticamente il diagramma della struttura e lo si confronta con quello calcolato numericamente.

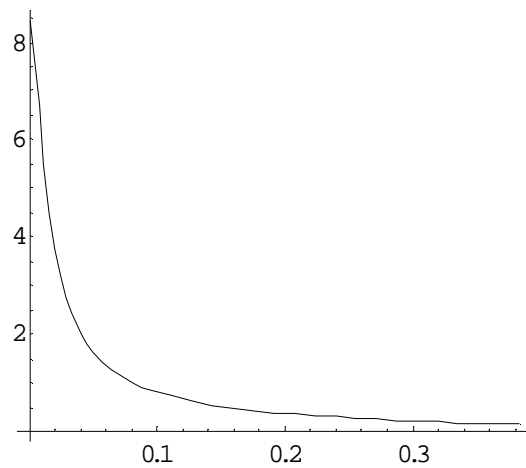


**Figura 10.8** Diagramma analitico della forma circolare con altezza della sezione costante e legame costitutivo di Prandtl



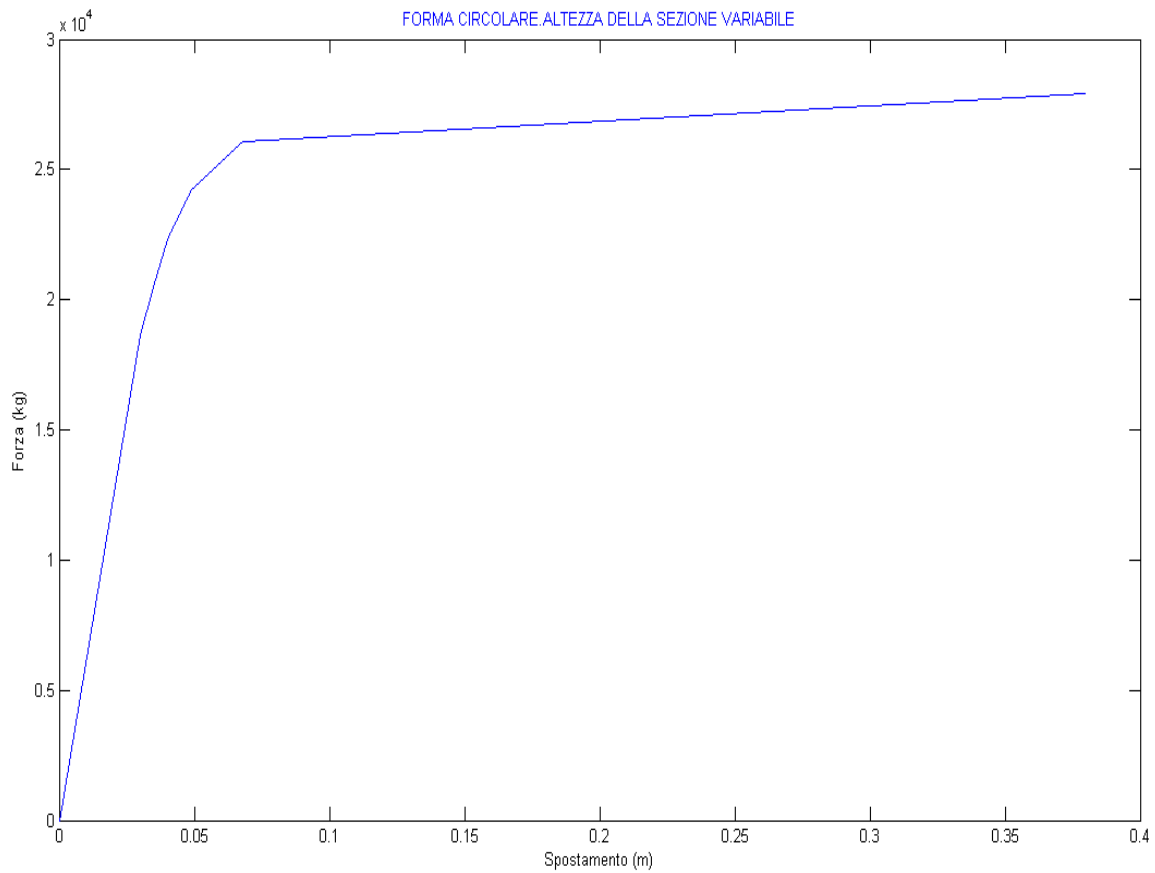
**Figura 10.9 Confronto tra diagramma analitico e diagramma numerico perla forma circolare**

Si nota ancora una volta anche se con qualche miglioramento rispetto alla forma triangolare una bassissima duttilità di questa struttura. L'interpretazione si da sempre analiticamente per questo risultato. Gli spostamenti non lineari bassi sono sempre frutto della combinazione dell'altezza della sezione costante lungo il controvento con il legame costitutivo di Prandtl. Le curvature anche in questo caso tendono all'infinito in una zona più larga rispetto alla forma triangolare ma sempre molto ristretta alla sezione più sollecitata del controvento.

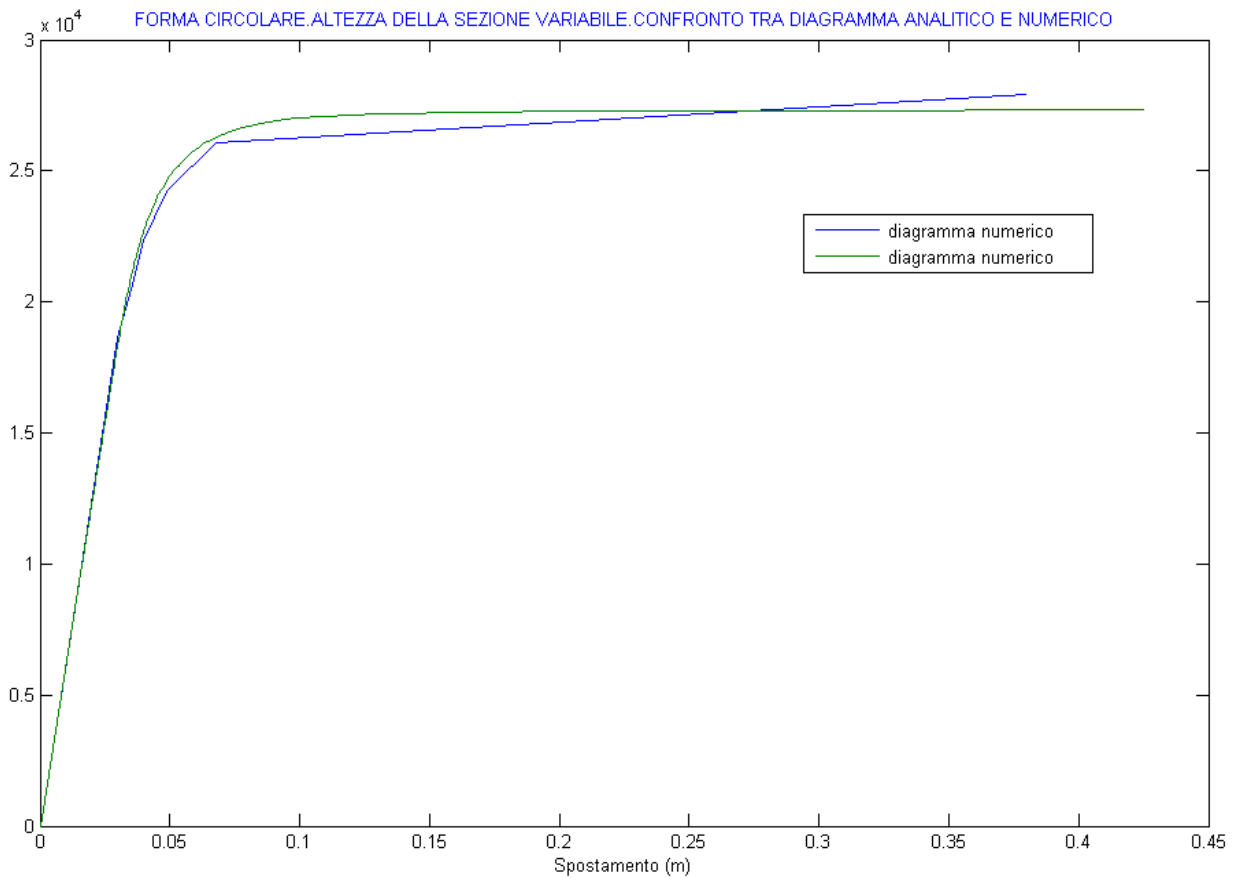


**Figura 7.10** Andamento delle curvature lungo il controvento

Nel sesto capitolo si studia di nuovo questa struttura cambiando però l'altezza della sezione lungo il controvento. Si ricava ancora una volta analiticamente il suo diagramma e lo si confronta con quello numerico.

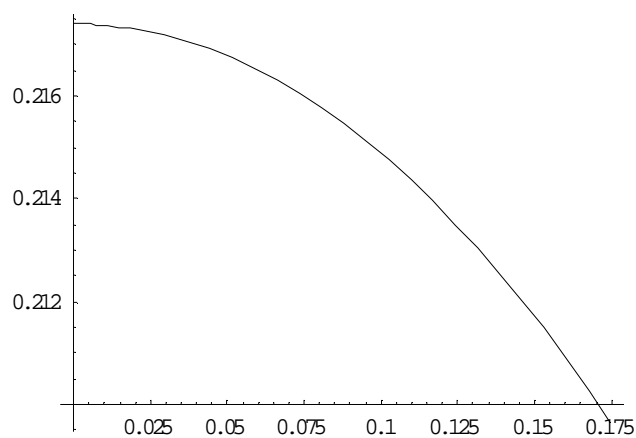


**Figura 8.11** Diagramma della forma circolare con altezza della sezione variabile e legge di Prandtl



**Figura 9.12** Confronto tra il diagramma analitico e numerico per la forma circolare con altezza della sezione variabile

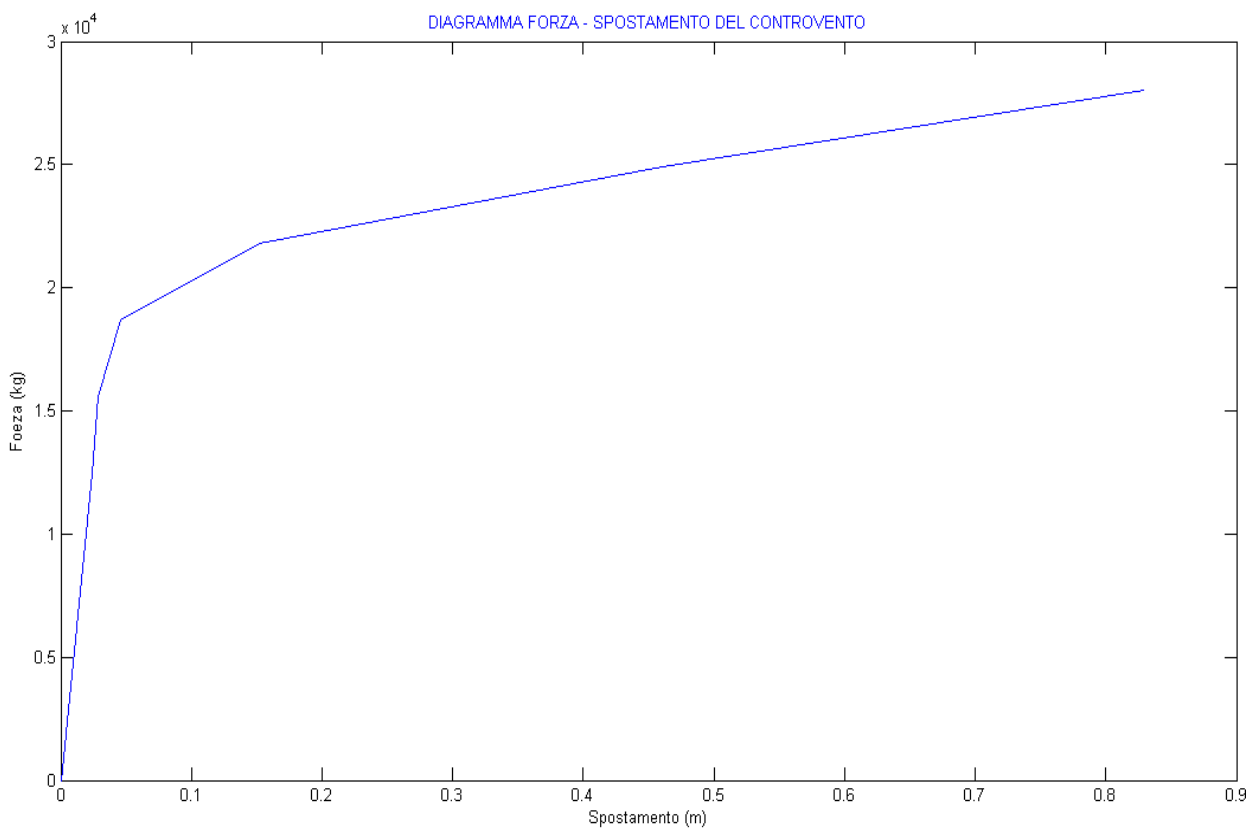
Si vede subito che questa scelta strutturale comporta un aumento notevole di duttilità complessiva del controvento. Se si grafica l'andamento delle curvature lungo il controvento si vede che queste hanno dei valori elevati in una zona molto più larga di tutte le altre tipologie studiate prima.



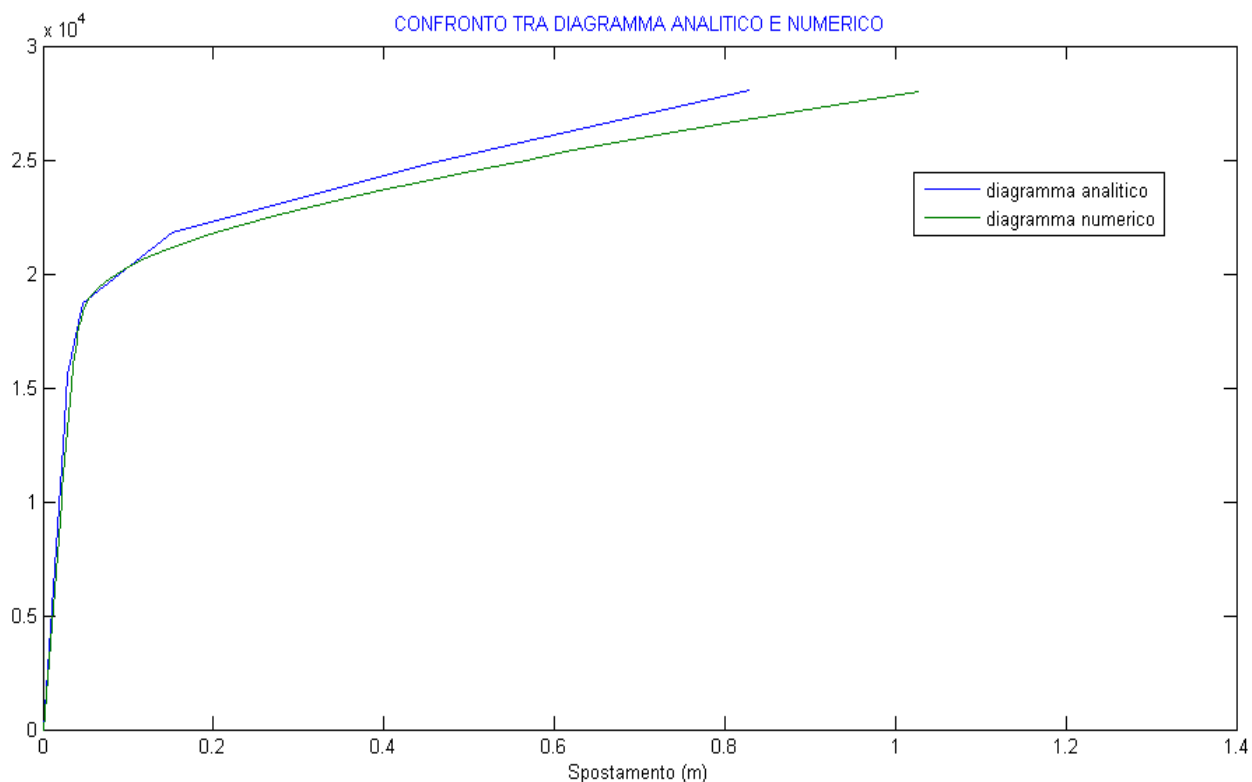
**Figura 10.13** Andamento delle curvature lungo il controvento

Abbiamo ancora una volta dato una interpretazione analitica di questo risultato conveniente in termini di duttilità per la struttura.

Nel settimo capitolo si inizia una nuova fase dello studio. Si cerca l'esplorazione della nostra matrice delle tipologie di "Crescent – Shaped Braces" seguendo un'altra direzione. Quella dei diversi possibili legami costitutivi da adottare per il materiale che compone il controvento. Si inizia con lo studio della forma triangolare con una altezza della sezione costante e si adotta un legame costitutivo elasto – plastico linearmente incrudente. Si elabora prima un metodo di calcolo analitico del diagramma della struttura e poi si confronta con quello numerico.



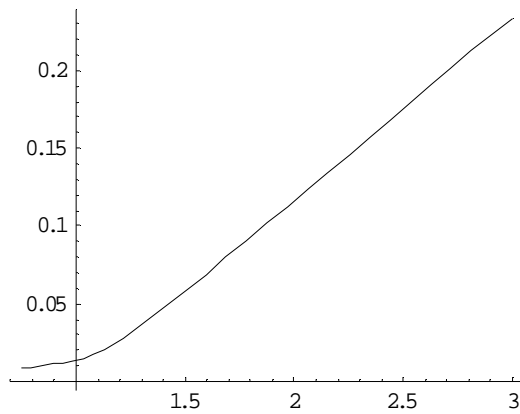
**Figura 10.14** diagramma della forma triangolare con un legame costitutivo con incrudimento



**Figura 10.15** Confronto tra diagramma numerico e diagramma analitico per la forma triangolare con un legame incrudente

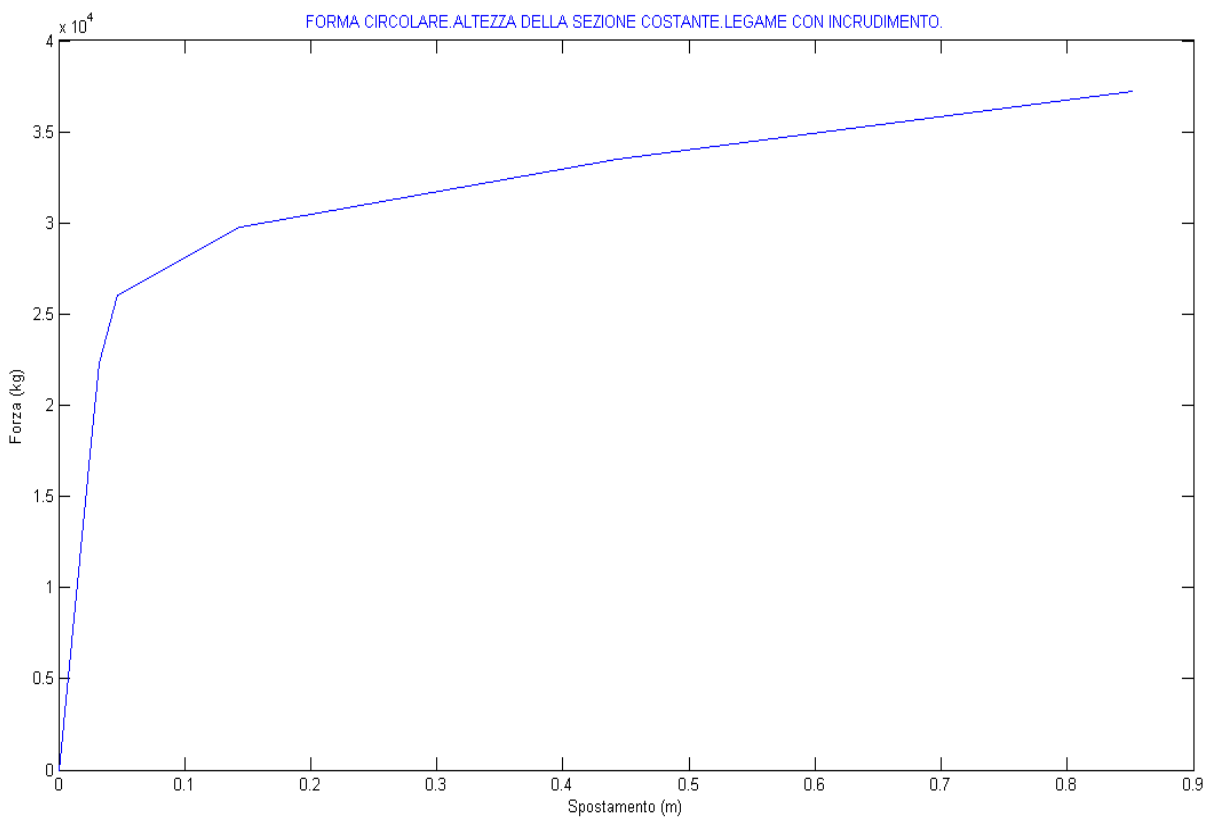
In questi due grafici si vedono due differenze importanti rispetto a quelli di prima. La prima è la duttilità molto alta che questa scelta strutturale comporta rispetto a tutte le altre esaminate prima e la seconda è l'andamento completamente lineare che assume il diagramma nella sua parte post snervamento. L'interpretazione di questi risultati sta tutta nel legame costitutivo elasto – plastico linearmente incrudente che abbiamo adottato.

La grande duttilità si spiega con il fatto che adottando un legame incrudente la sezione continua a ricevere carico anche dopo la sua plasticizzazione quindi continua a deformarsi anche per valori di carico superiori a quello che era il carico ultimo nelle scelte precedenti dove si usava il legame di Prandtl per il materiale. Il tratto lineare invece si spiega con il fatto che dopo lo snervamento la sezione riceve carico e risponde con la rigidità del tratto incrudente del legame del suo materiale che noi l'abbiamo scelta lineare, quindi la struttura risponde in maniera lineare nel suo tratto post snervamento. Abbiamo quindi un passaggio di linearità dal legame  $\sigma - \varepsilon$  del materiale al legame  $M - \chi$  della sezione ed infine al legame  $F - \delta$  della struttura.

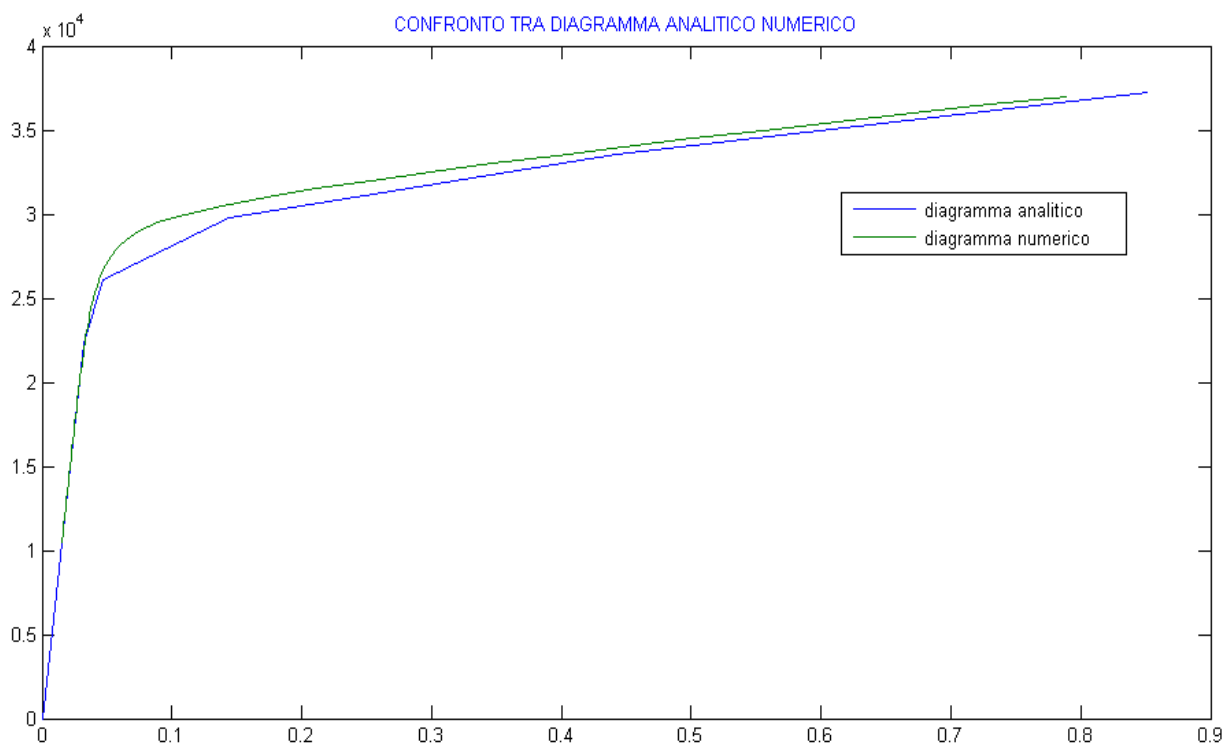


**Figura 10.16 Andamento delle curvature lungo la struttura**

Nel ottavo capitolo si riprende la forma circolare con altezza della sezione costante e si considera per il suo materiale il legame elasto - plastico inrudente. Lo si risolve sia analiticamente e sia numericamente.



**Figura 10.17 Diagramma della forma circolare con altezza della sezione costante e legame inrudente per il materiale**

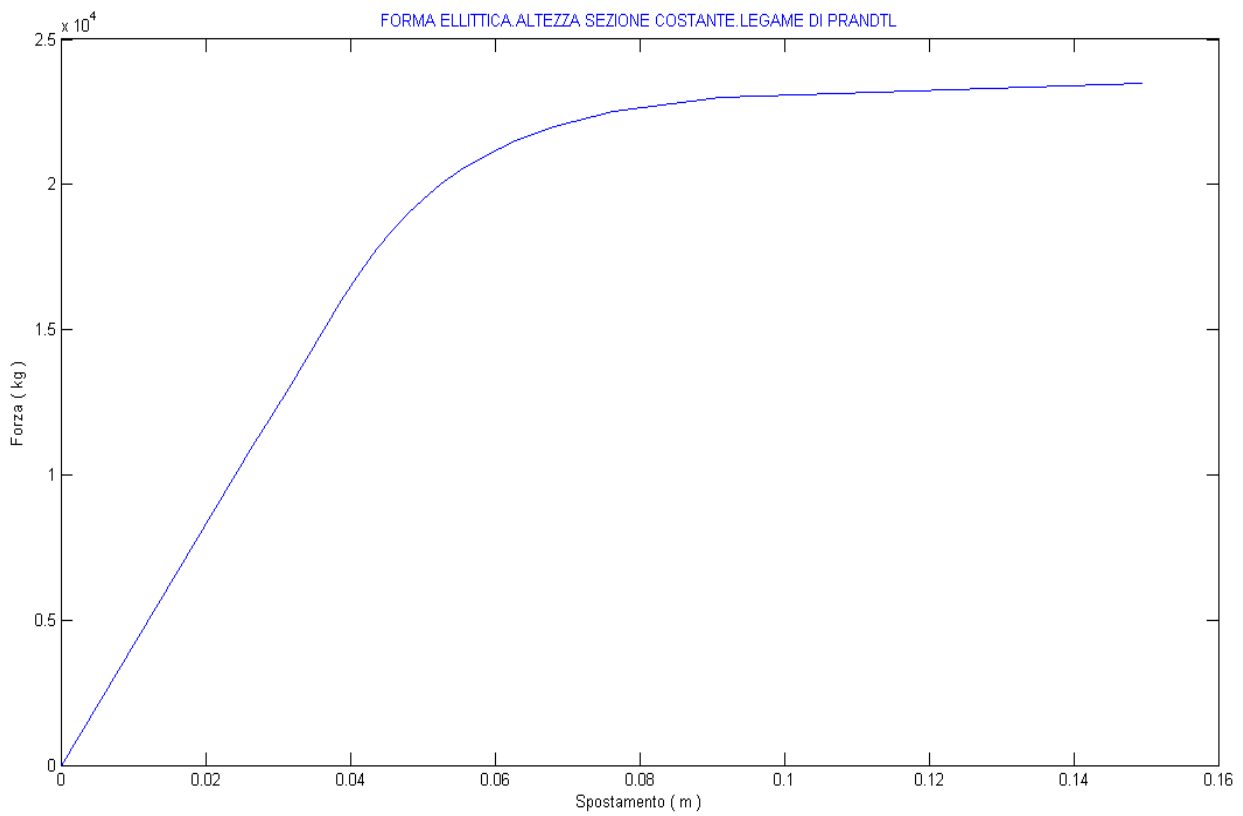


**Figura 10.18** Confronto tra diagramma analitico e numerico per la forma circolare con altezza della sezione costante e legame incrudente del materiale

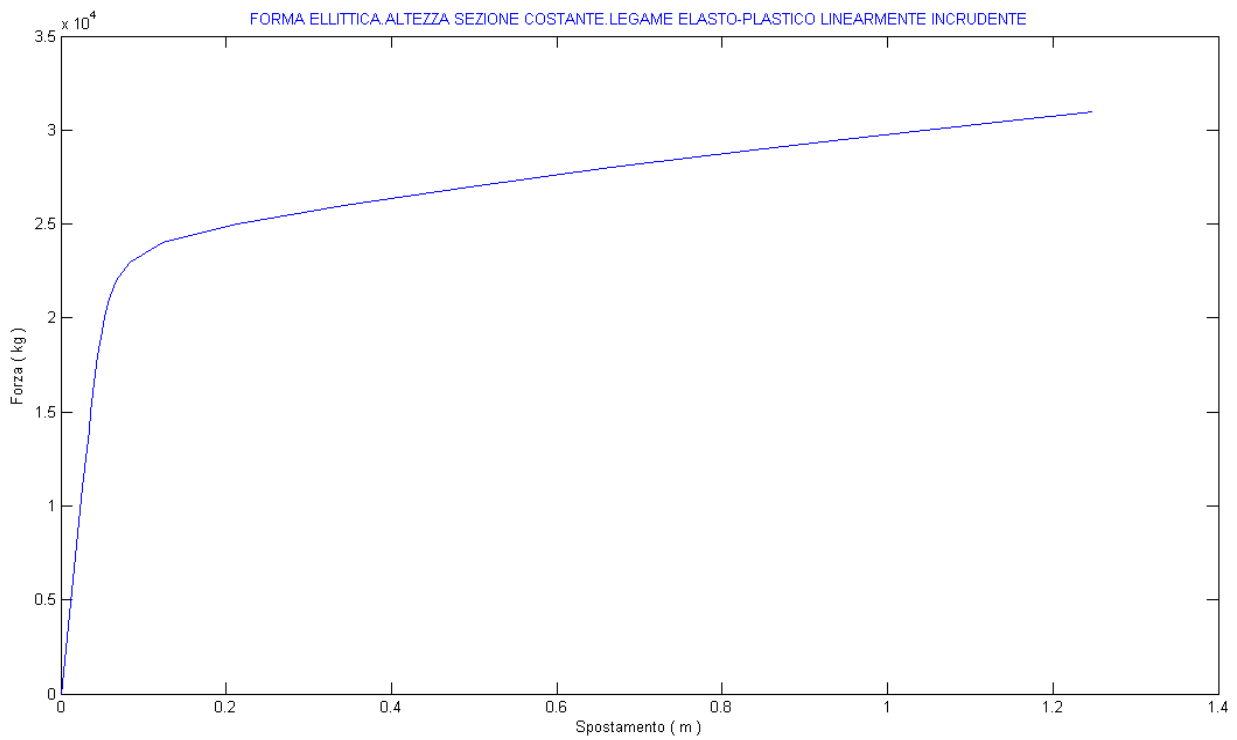
Si vedono ancora una volta i due aspetti fondamentali che nascono nell'adottare un legame con incrudimento lineare del materiale che abbiamo riscontrato anche prima per la forma triangolare cioè la duttilità elevata della struttura e l'andamento lineare del diagramma  $F - \delta$  del controvento nel suo tratto post snervamento. Le spiegazioni e le interpretazioni per questi due risultati sono gli stessi che abbiamo dato prima per la forma triangolare.

Nel nono capitolo invece si torna la ricerca dello studio delle nostre strutture seguendo la direzione delle geometrie dei controventi. Si studiano in particolare due nuove forme, quella ellittica e quella parabolica. Per queste due forme ci è impossibile definire un sistema di riferimento che abbia una ascissa curvilinea che percorre proprio la lunghezza del controvento quindi non possiamo procedere al calcolo del diagramma  $F - \delta$  del controvento analiticamente. In questo capitolo si fanno solo delle analisi numeriche e si traggono conclusioni sui comportamenti delle strutture solo dai risultati numerici.

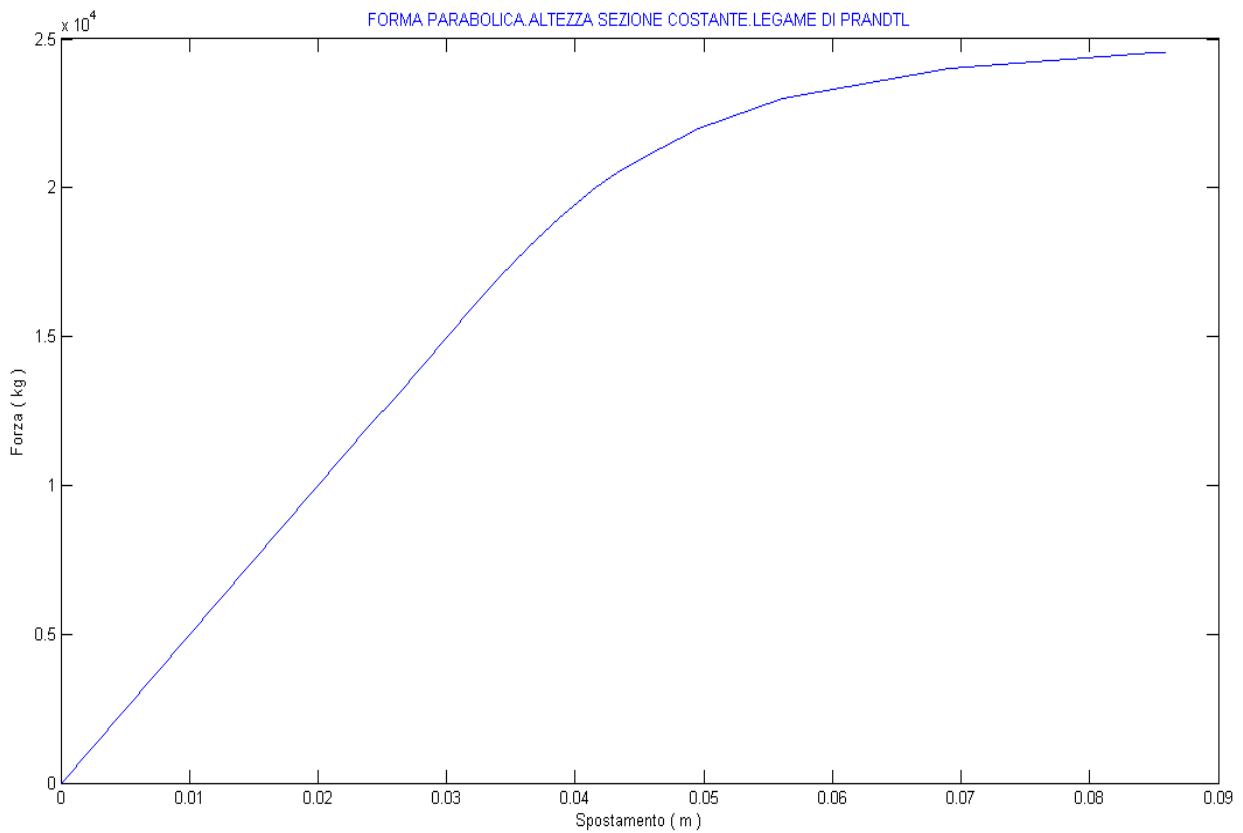




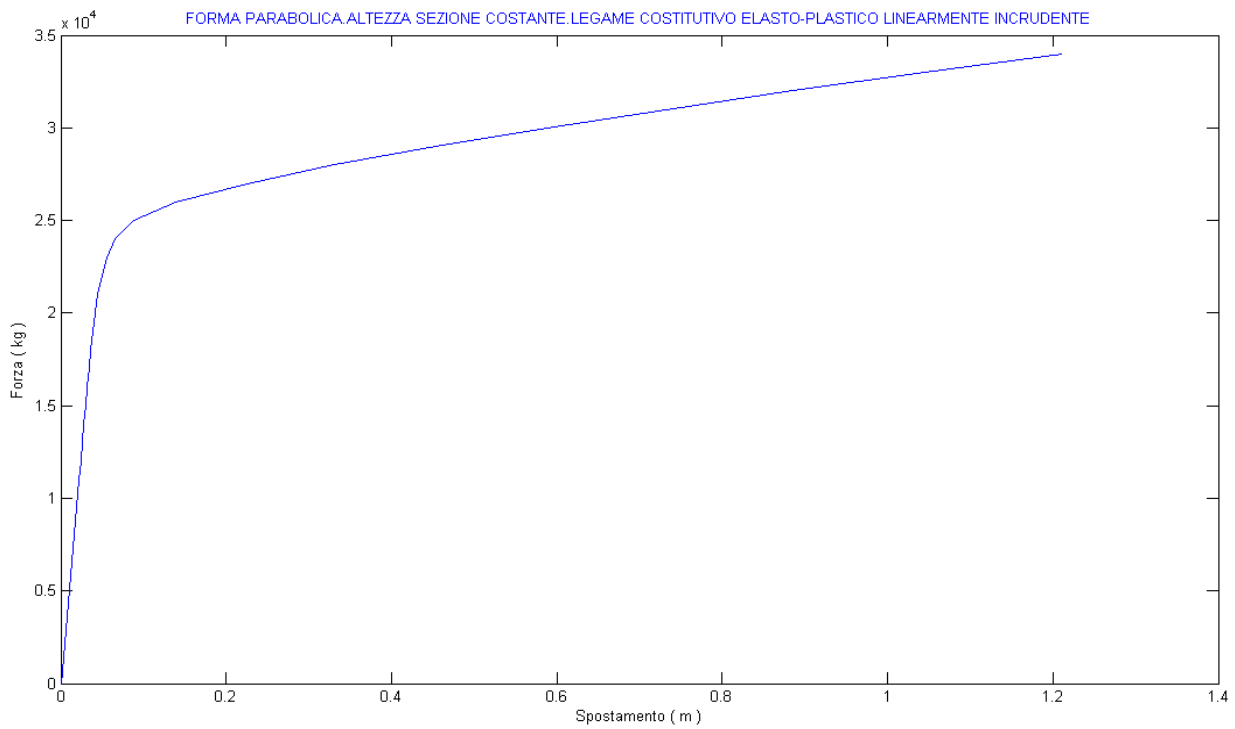
**Figura 10.19** Diagramma della forma ellittica con altezza della sezione costante e legame costitutivo del materiale di Prandtl



**Figura 10.20** diagramma della forma ellittica con altezza della sezione costante e legame incrudente



**Figura 11.21** Diagramma della forma parabolica con altezza della sezione costante e legame costitutivo di Prandtl



**Figura 10.22** Diagramma della forma parabolica con altezza della sezione costante e legame costitutivo elasto-plastico linearmente incrudente

In figura 10.19 e 10.20 sono stati rappresentati i diagrammi  $F - \delta$  della forma ellittica calcolati rispettivamente con il legame costitutivo di Prandtl e quello linearmente incrudente, in figura 10.21 e 10.22 invece sono stati rappresentati i diagrammi della forma parabolica calcolati sempre con i due legami di sopra.

Per queste due forme non disponendo dei risultati di calcolo analitici sul andamento delle curvature sulla struttura non si possono interpretare i dati analiticamente come prima. Però con occhio alle interpretazioni per le altre due forme possiamo affermare che la bassissima duttilità delle tipologie con legami costitutivi di Prandtl è legata proprio all'accoppiamento di questo legame con l'altezza della sezione costante. Numericamente l'interruzione del diagramma di queste forme per i valori del momento ultimo quando si usa il legame di Prandtl si interpreta con il fatto che la struttura diventa singolare in quel punto visto che la sezione non può più accettare carico cioè per un altro incremento di carico la struttura non offre più rigidità quindi il programma di calcolo riscontra una singolarità che si trasforma in un errore nella soluzione numerica.

La linearità del tratto post snervamento dei diagrammi quando si adotta il legame linearmente incrudente si spiega con la solita interpretazione di prima per le altre due forme cioè il passaggio della linearità dal materiale alla sezione ed infine alla struttura.

## 10.2) CONFRONTO DEI RISULTATI

Dall'inizio quando abbiamo iniziato a studiare la molteplicità delle possibilità di costruzione di queste strutture speciali di controvento abbiamo cercato di orientarci secondo tre direzioni preferenziali nella nostra ricerca. È chiaro allora che il confronto dei risultati delle tantissime prove analitiche e numeriche che abbiamo ottenuto si può fare solo lungo uno delle tre direzioni preferenziali tenendo invariate le altre. Abbiamo già definito queste direzioni di ricerca come:

- a) geometria totale della struttura di controvento
- b) andamento geometrico dell'altezza della sezione lungo il controvento
- c) legame costitutivo usato per il materiale che compone la struttura.

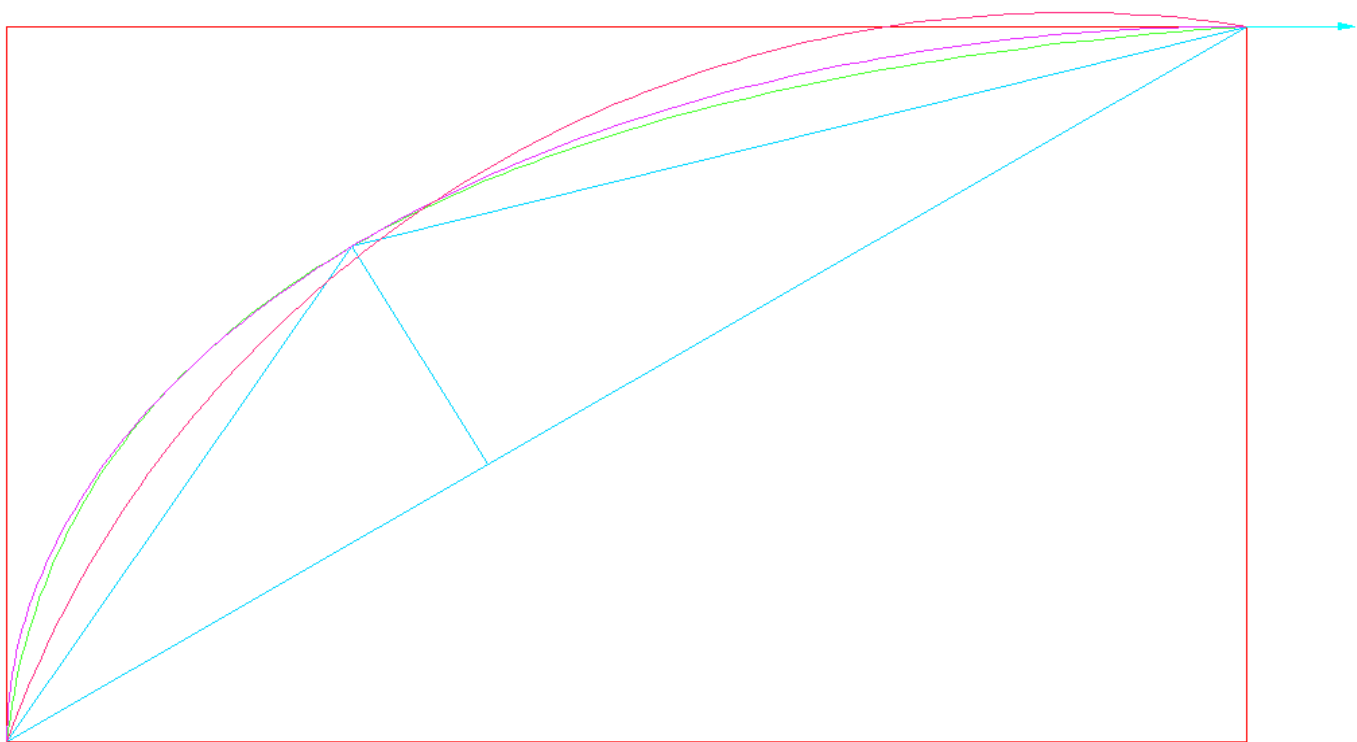
Quindi da quanto è stato esposto nella prima parte di questo capitolo non ha senso confrontare i diagrammi di una data forma geometrica con un dato legame costitutivo del materiale con una forma geometrica diversa ed un legame costitutivo diverso. E chiaro quindi che per conoscere al meglio la nostra matrice delle possibilità di costruzione delle forme bisogna saper l'andamento dei diagrammi  $F - \delta$  lungo una direzione principale della matrice. Dopo di che la conoscenza delle altri componenti di questa matrice diventa più facile.

La prima direzione di confronto che seguiamo è quella della forma geometrica della struttura.

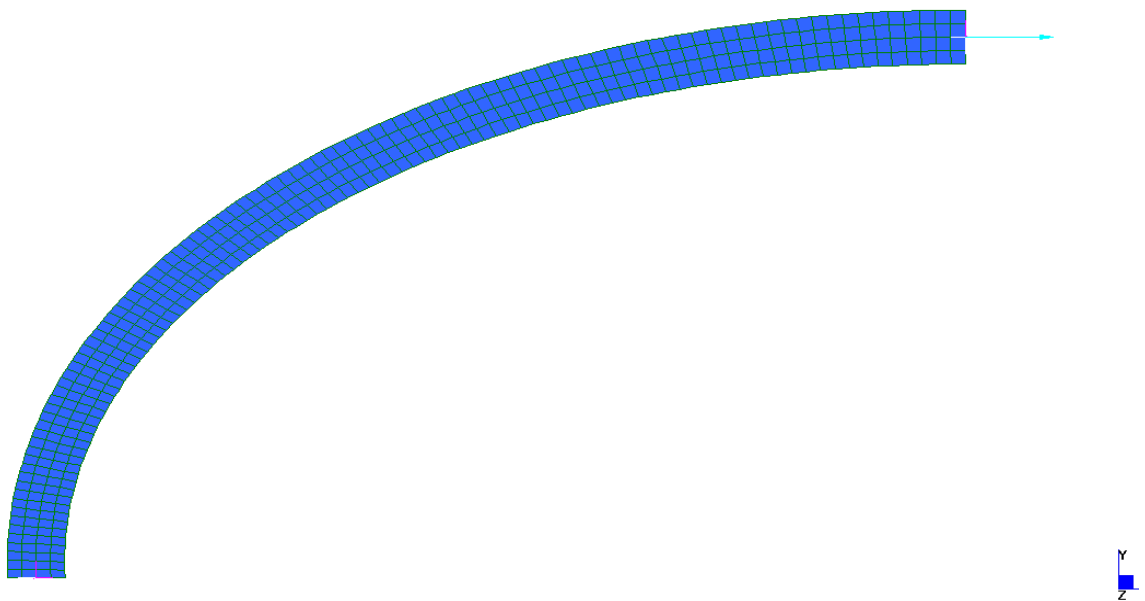
Per fare questo confronto si è deciso di studiare le quattro forme geometriche fondamentali inserite nello stesso telaio di struttura globale e avendo un braccio massimo o lunghezza massima del controvento dalla diagonale del telaio uguale per tutte e quattro le forme. Abbiamo già stabilite prima che gli altri due parametri della ricerca rimangono costanti quindi l'altezza della sezione è stata presa costante ed uguale per tutte e quattro le forme e il legame costitutivo uguale per tutte e quattro.

In figura 10.23 sono state rappresentate tutte e quattro le forme geometriche da confrontare secondo le modalità di sopra. La forma di colore blu è quella triangolare quella di colore rosso è la forma circolare quella di colore verde è la forma parabolica e quella di colore magenta è la forma ellittica.

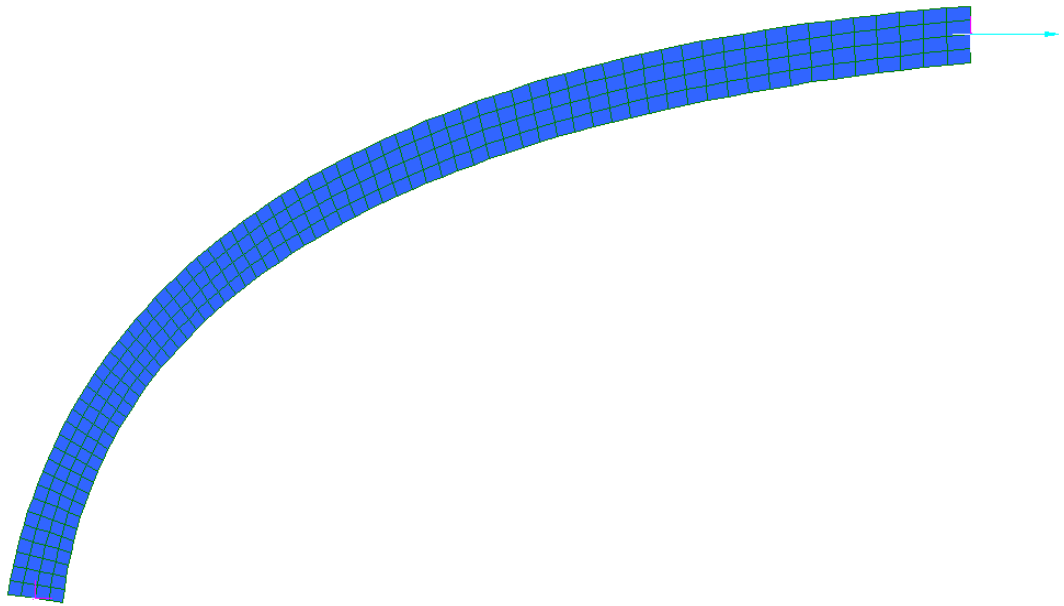
Il primo confronto che si fa tra queste quattro strutture è quello usando come legame costitutivo quello di Prandtl.



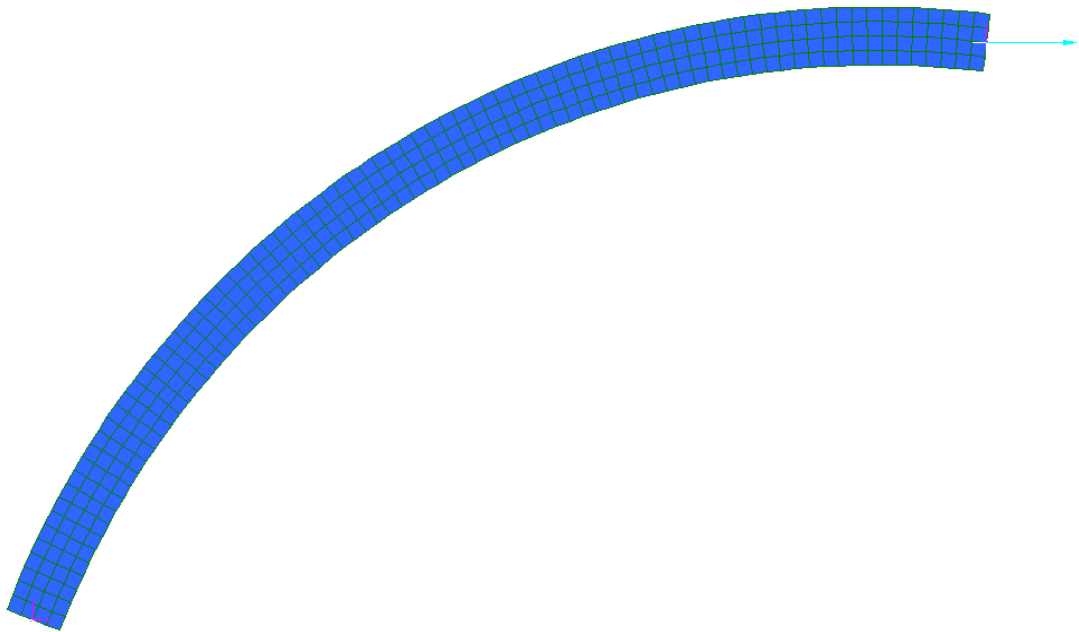
**Figura 10.23** Le quattro forme geometriche di Crescent-Shaped Braces



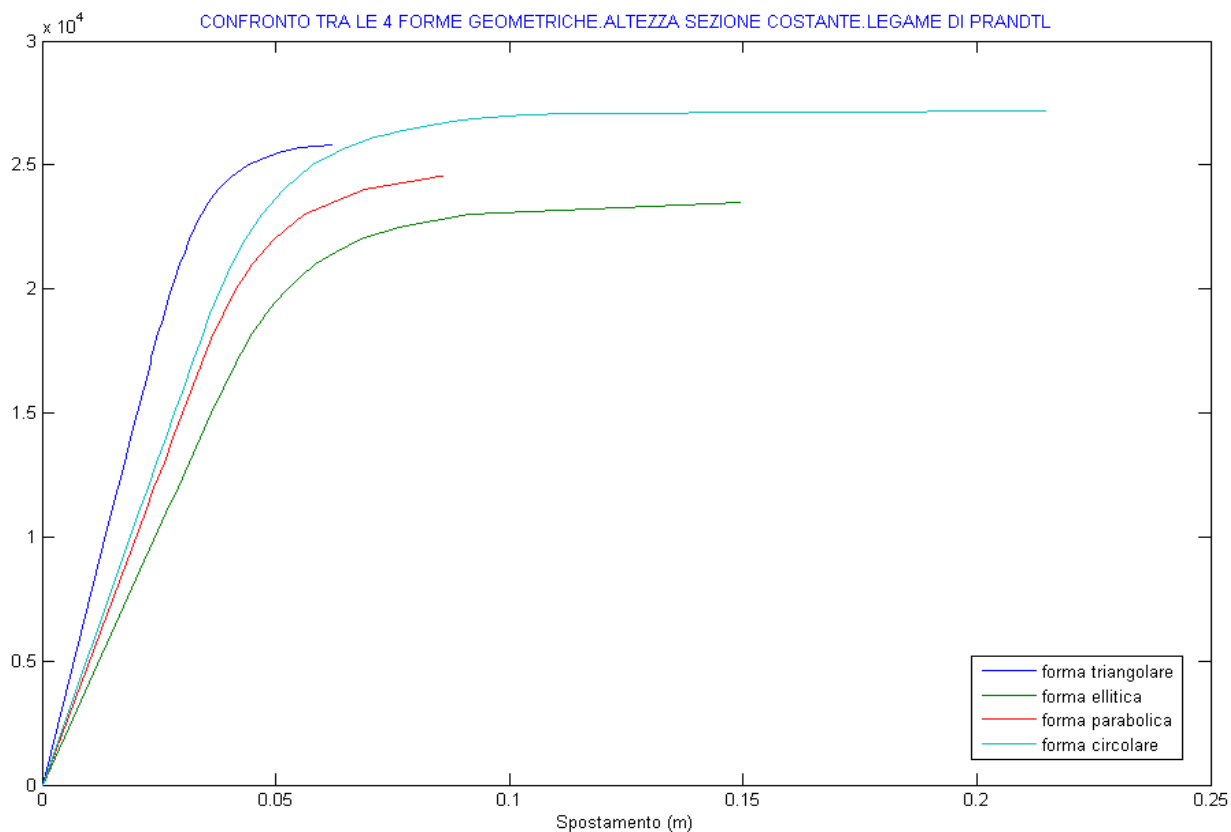
**Figura 10.24** Modello di calcolo numerico per la forma ellittica.



**Figura 10.25** Modello di calcolo numerico per la forma parabolica



**Figura 10.26** modello di calcolo numerico per la forma circolare



**Figura 10.27** confronto tra i diagrammi delle quattro forme geometriche con legame costitutivo del materiale di Prandtl

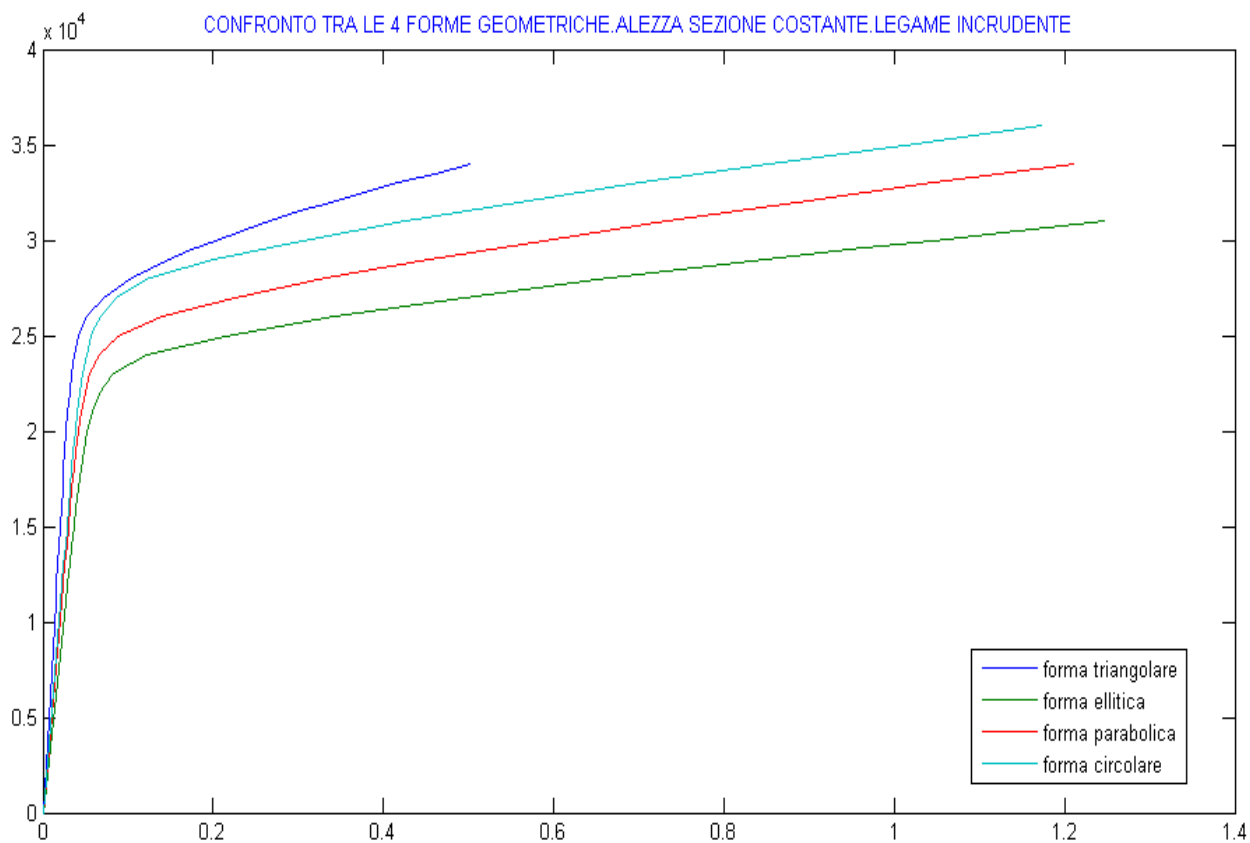
Come abbiamo già detto dal inizio il comportamento di queste strutture schematizzato con il loro diagramma  $F - \delta$  lo si interpreta o si studia in termini di “*Stiffness-Strength-Ductility*” ovvero rigidezza forza di snervamento e duttilità della struttura. Quindi anche i nostri confronti gli faremo in questi termini.

Si evidenzia chiaramente dal confronto della figura 10.27 che a parità di tutti i parametri geometrici e meccanici sopraindicati la forma triangolare ha la rigidezza elastica più grande. Inoltre questa forma ha anche la forza di snervamento più grande. La forza di snervamento in questi diagrammi diventa il punto dove il diagramma cambia pendenza ovvero il punto di intersezione delle due rette una del tratto elastico e l'altra del tratto post snervamento con le quali può essere rappresentato il diagramma. Questa forma geometrica sviluppa però anche la duttilità minore rispetto a tutte le altre forme.

La forma ellittica invece è quella che ha i valori più bassi di rigidezza e di forza di snervamento.

La duttilità più grande invece si trova nella forma circolare.

Il secondo confronto che si fa è sempre sulla stessa geometria delle forme pero adottando adesso come legame costitutivo quello elasto – plastico linearmente incrudente.



**Figura 10.28** Confronto tra i diagrammi delle quattro forme geometriche con altezza della sezione costante e legame del materiale elasto - plastico linearmente incrudente

In figura 10.28 è stato rappresentato il confronto dei diagrammi delle quattro forme geometriche costruite con i parametri sopraindicati e con un legame costitutivo del materiale elasto – plastico linearmente incrudente.

Si vede chiaramente che la forma ellittica a parità di geometria del telaio dove si appoggia il controvento, a parità di sezione usata, a parità di braccio del controvento ed a parità di legame del materiale, è la forma più duttile in assoluto ed è anche la forma che ha il punto più basso di snervamento in termini di forza. Inoltre questa forma è anche quella che ha la rigidezza elastica minore rispetto a tutte le altre. La forma triangolare invece è quella che rappresenta i valori opposti rispetto a quella ellittica cioè rigidezza più grande, duttilità più piccola e punto di snervamento più elevato. La forma circolare e quella parabolica invece sono come due casi intermedi tra i primi due. La causa o la spiegazione di tutti questi cambiamenti nei diagrammi delle forme a parità di tutti gli altri parametri si trova tutta nella forma geometrica di questi controventi.

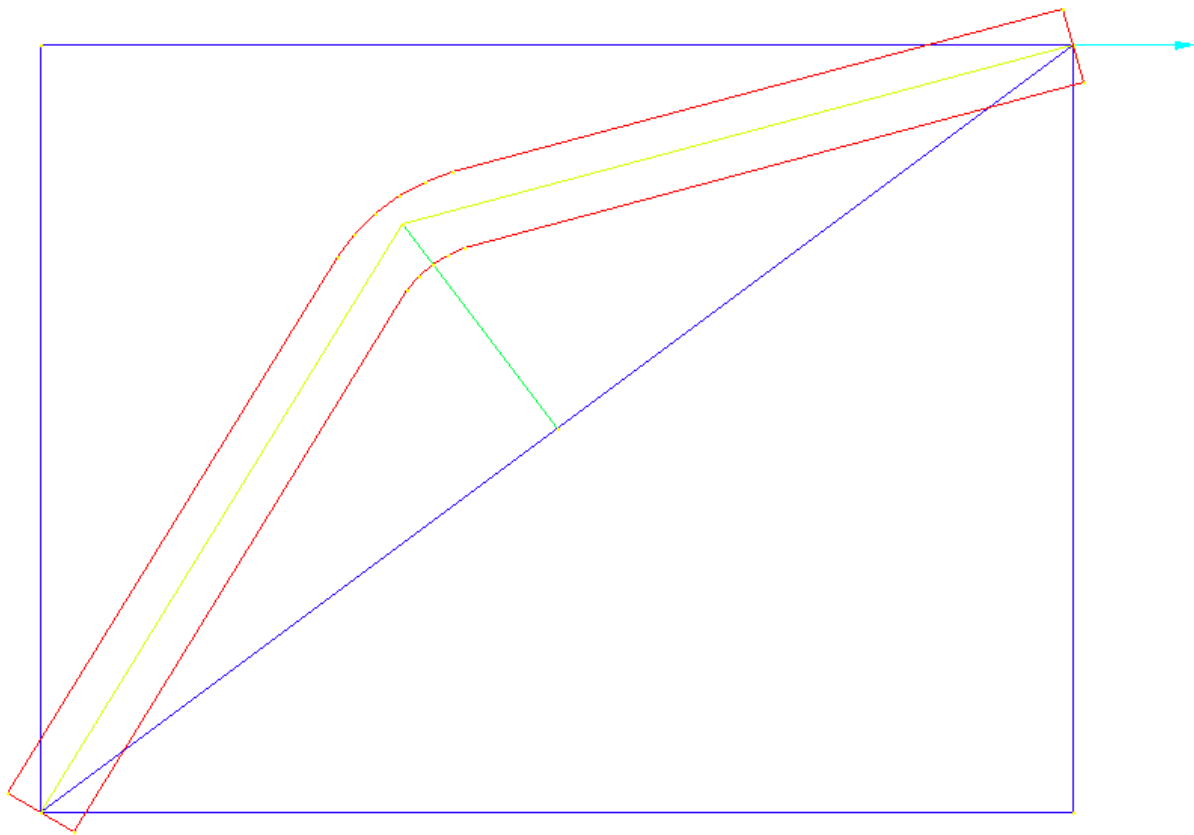


Il fattore che guida la rigidità di queste forme ovvero il valore dello spostamento che subiscono se si sollecitano con la stessa forza avendo lo stesso braccio quindi avendo momento uguale nella sezione più sollecitata è il modo in cui si distribuiscono le tensioni sulle altre sezioni adiacenti ad essa nelle quattro forme geometriche. Si vede che se mi allontano dalla stessa ascissa curvilinea dalla sezione più sollecitata nelle quattro forme il braccio diminuisce molto di più in assoluto nella forma triangolare e di meno in assoluto nella forma ellittica ( vedi figura 10.23 ). Di conseguenza nella forma ellittica le sezioni sono più sollecitate le curvature più grandi e di conseguenza gli spostamenti più grandi. Questa è la ragione anche della forza di snervamento più piccola e della duttilità maggiore perché se mi trovo nel campo non lineare per un piccolo incremento di carico nella forma ellittica sollecitata con un momento maggiore un numero più grande di sezioni rispetto a ciò che farei nella forma triangolare.

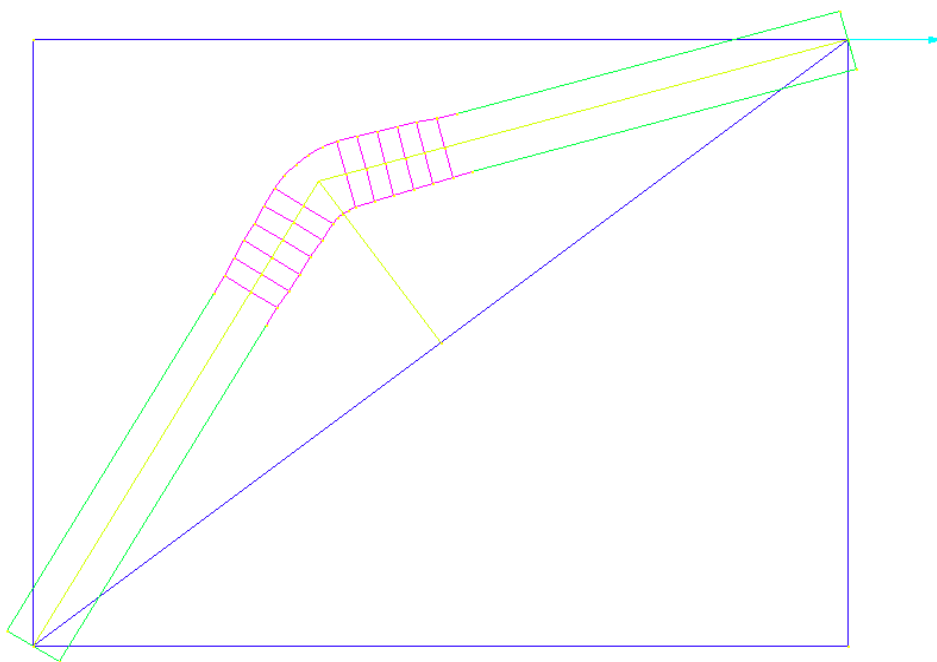
Come secondo percorso di confronto delle nostre strutture seguiamo adesso la direzione Y della nostra matrice delle "Crescent – Shaped Braces" cioè l'andamento che segue l'altezza della sezione lungo il controvento.

I due casi principali che studiamo sono un andamento costante lungo il controvento e un andamento parabolico lungo il controvento in modo tale da portare allo snervamento contemporaneamente una lunghezza ben definita di controvento che chiamo lunghezza di plasticizzazione. I parametri delle altre due direzioni del confronto rimangono costanti. Cioè ho la stessa forma geometrica della struttura e lo stesso legame costitutivo.

Per primo caso faccio questo confronto alla forma triangolare.

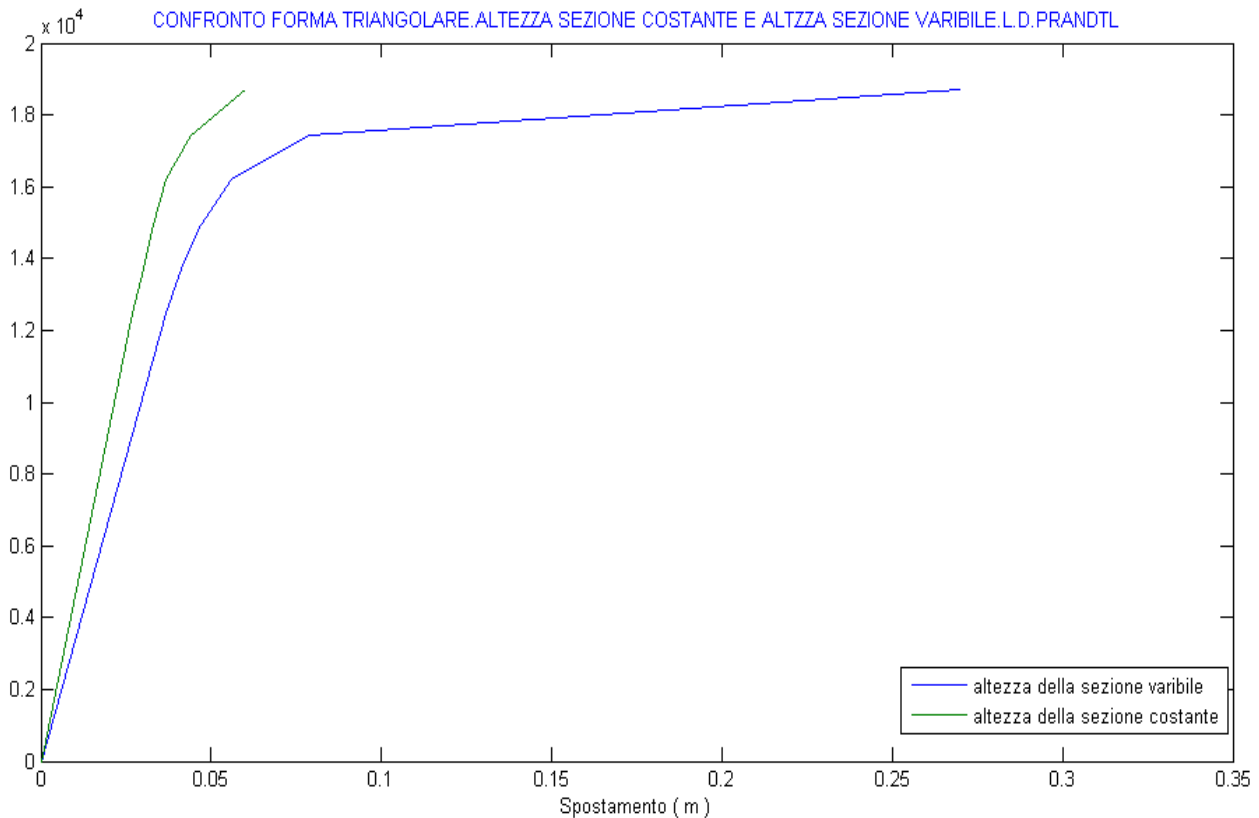


**Figura 10.29 Telaio e forma triangolare considerata con altezza della sezione costante**



**Figura 10.30 Telaio e forma triangolare considerata con altezza della sezione variabile**

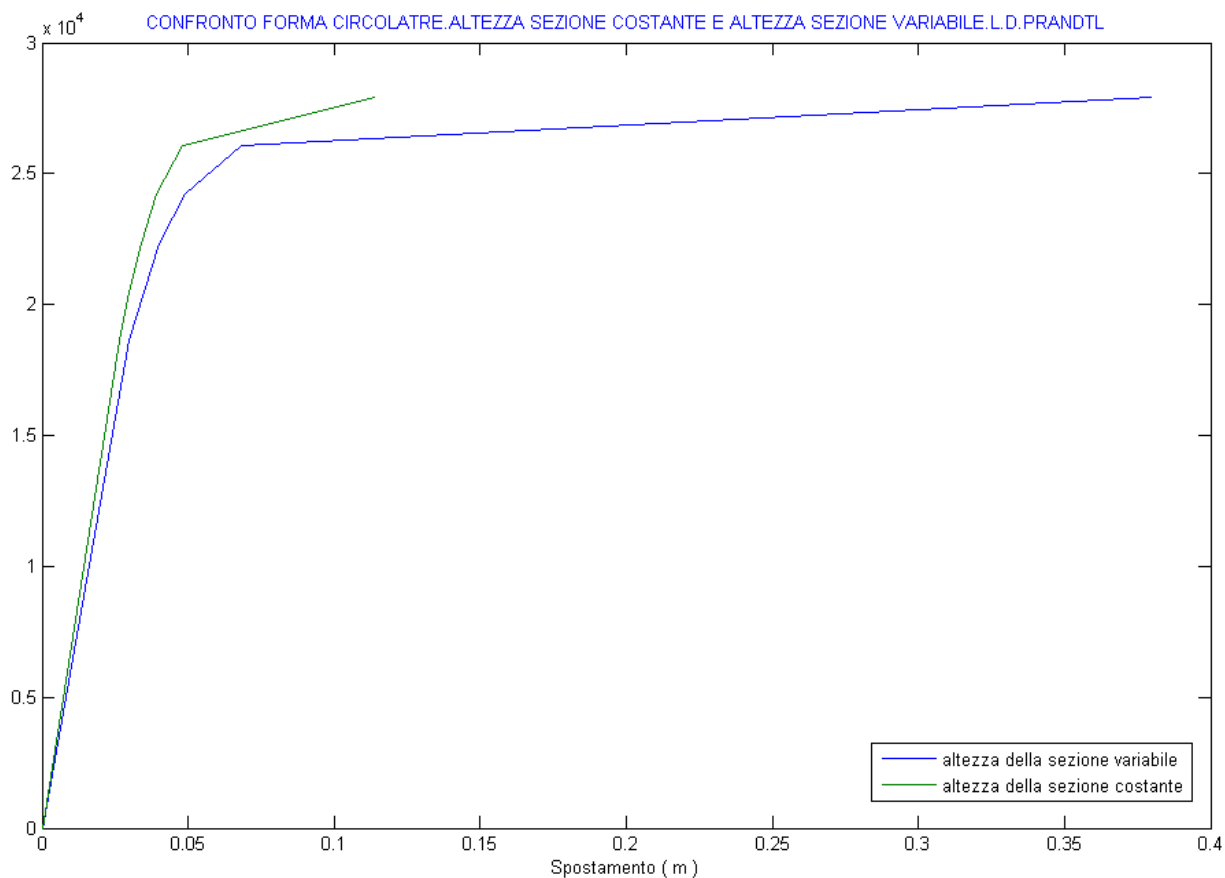
In figura 10.29 e 10.30 è stata presentata la stessa forma geometrica strutturale con altezza della sezione costante e variabile lungo il controvento. Il tratto di colore magenta in figura 10.30 è proprio il cosiddetto blocco plastico dove l'altezza della sezione varia in modo tale da plasticizzare per lo stesso valore di carico tale blocco.



**Figura 10.31** Confronto dei digrammi della forma triangolare costruita con altezza della sezione costante e variabile

Si vede chiaramente dal confronto grafico che la forma con altezza della sezione variabile ha una duttilità molto più elevata rispetto alla forma con altezza della sezione costante. La spiegazione di questo cambiamento che si verifica in termini di duttilità si è dato analiticamente nel Capitolo 4 e nel primo paragrafo di questo capitolo.

Il secondo confronto che si è fatto è quello sulla forma circolare



**Figura 10.32 Confronto dei digrammi della forma circolare costruita con altezza della sezione costante e variabile**

Si evidenzia ancora una volta la duttilità molto più elevata che presenta la forma con altezza della sezione variabile. La spiegazione di questi risultati è stata data analiticamente nel Capitolo 6 e nel primo paragrafo di questo capitolo.

La rigidità elastica più grande invece si trova sulle forme con altezza della sezione costante. Anche la spiegazione di questo risultato si trova nel Capitolo 6.

L'ultimo confronto che si può effettuare in questa direzione dello studio è quello di adattare per la stessa struttura diverse lunghezze di plasticizzazione. Questo confronto è stato fatto per la forma triangolare ( vedi figura 10.7 ) ed è stato riportato nel primo paragrafo di questo capitolo.

L'ultima direzione di confronto dei risultati che possiamo percorrere è quello dei diversi legami costitutivi del materiale che compone le strutture. Come prima nel percorre questa direzione lasciamo invariati i parametri delle altre due direzioni.

Il primo confronto che possiamo fare per ogni forma geometrica è quello tra il legame elastico - perfettamente plastico e il legame elasto - plastico linearmente incrudente. Questi confronti sono stati fatti nel primo paragrafo di questo capitolo.

L'altro confronto che è stato fatto è quello tra il legame elasto – plastico linearmente incrudente ed il legame reale del materiale.

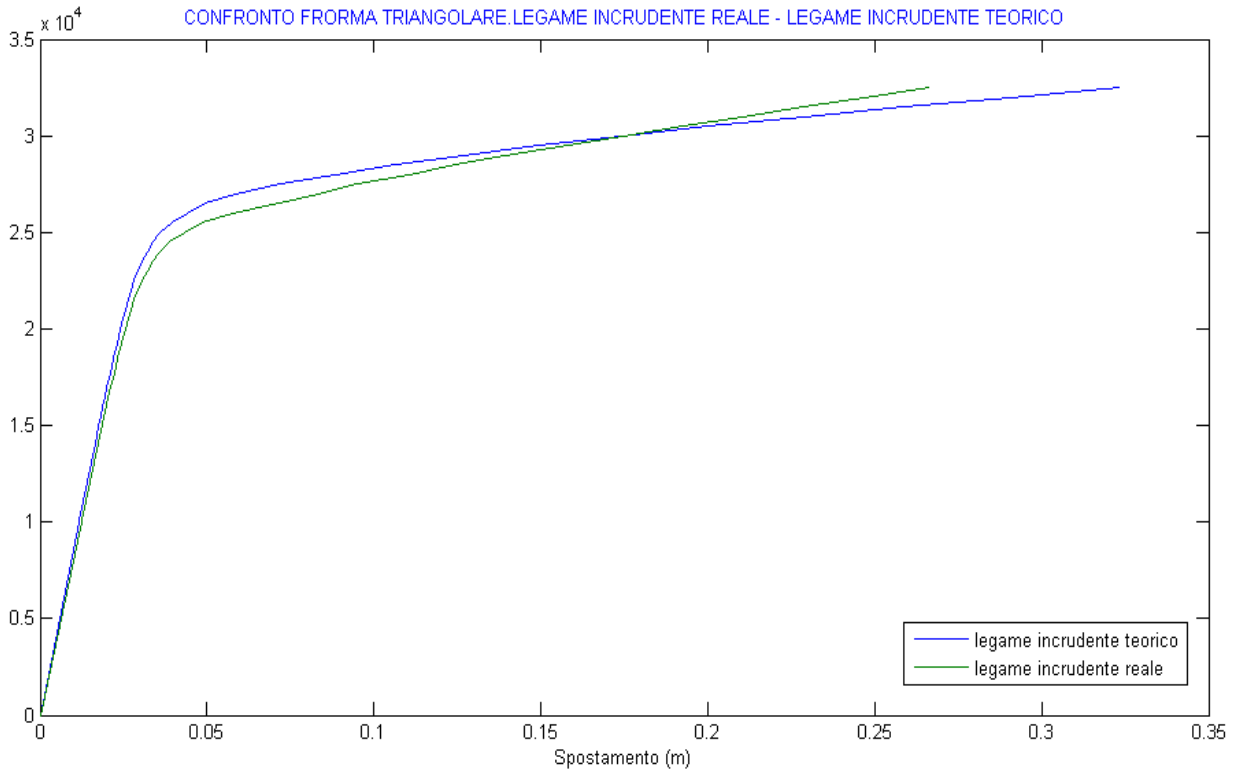


Figura 10.32 Confronto tra i diagrammi della forma triangolare costruita con i due legami costitutivi diversi

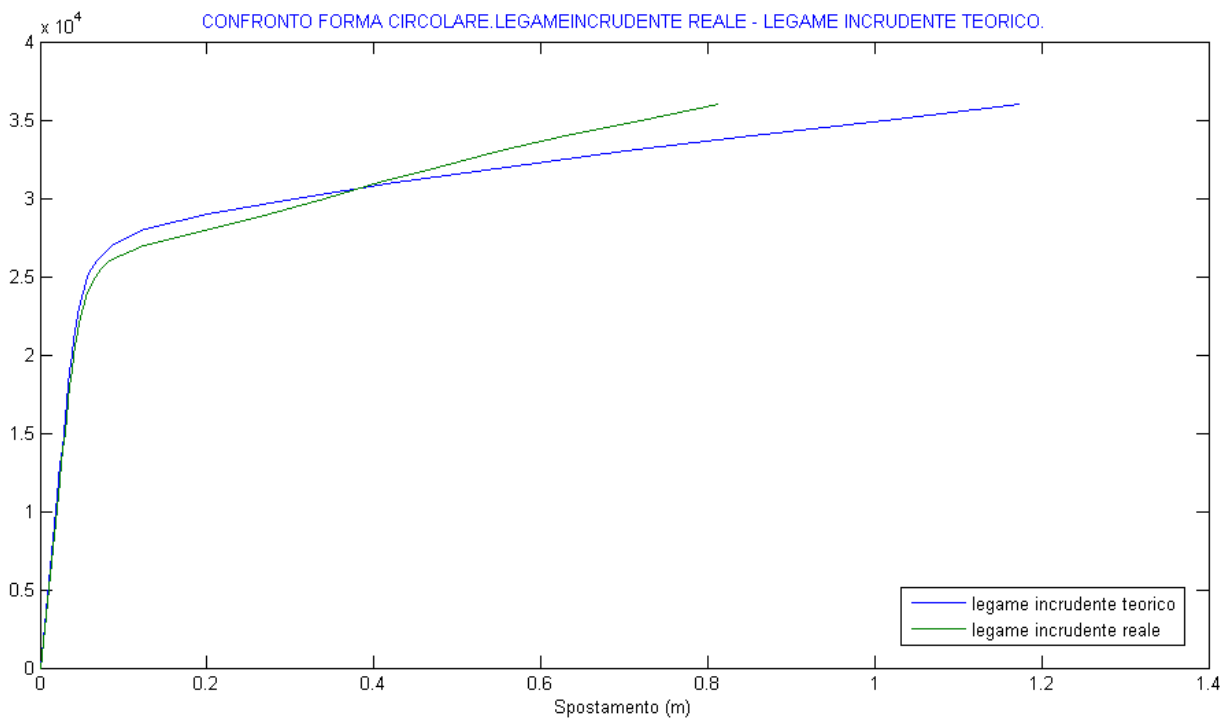
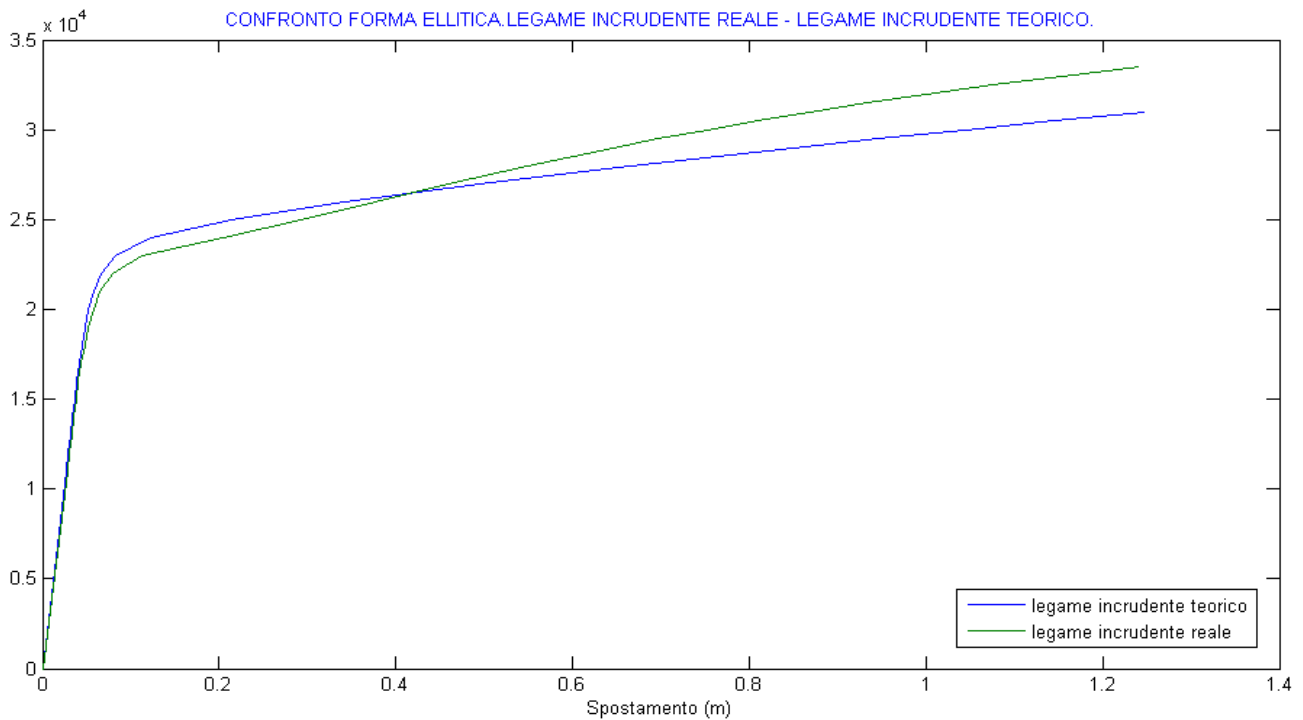
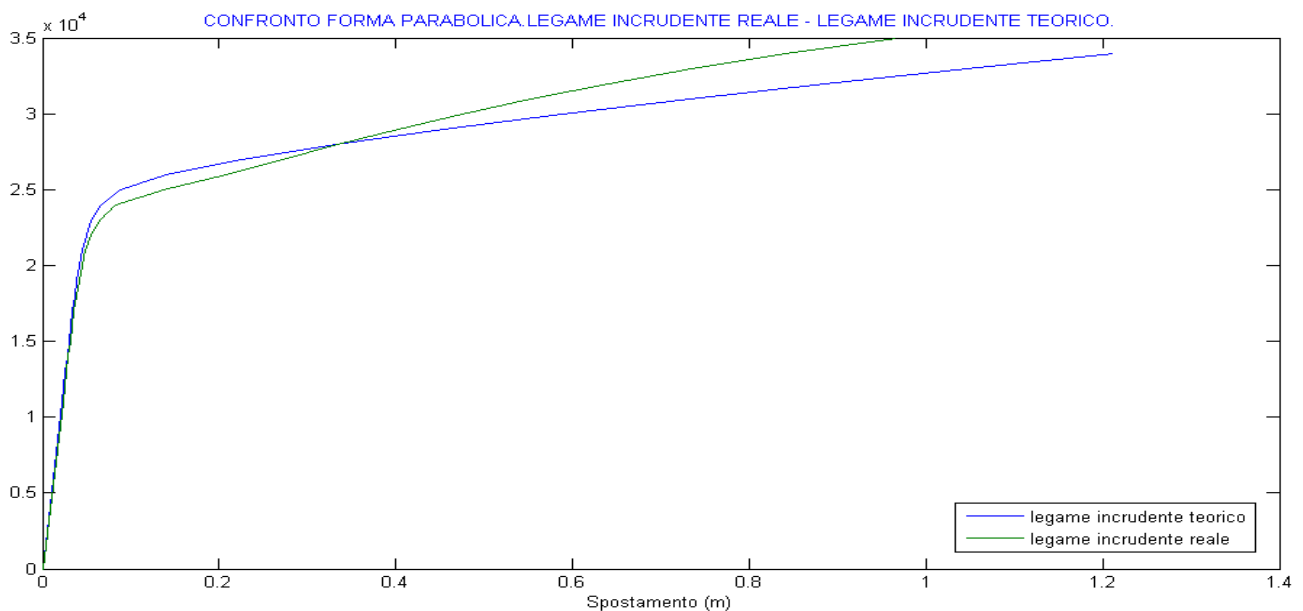


Figura 10.33 Confronto tra i diagrammi della forma circolare costruita con i due legami costitutivi diversi



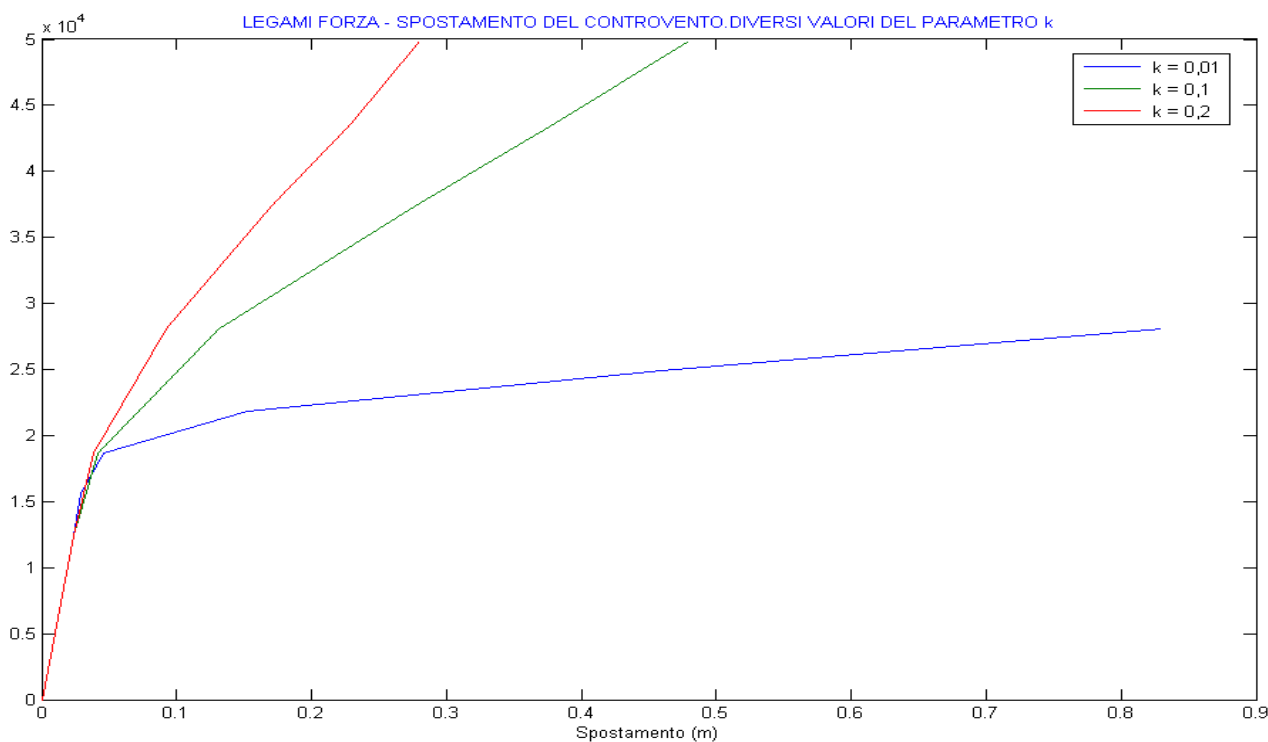
**Figura 10.34** Confronto tra i diagrammi della forma ellittica costruita con i due legami costitutivi diversi



**Figura 10.35** Confronto tra i diagrammi della forma parabolica costruita con i due legami costitutivi diversi

Si vede in tutte e quattro i casi che le strutture con il legame incrudente teorico sono più duttili rispetto a quelle con il legame reale. Si riscontra sempre un andamento lineare nel tratto post snervamento anche quando si usa il legame reale però con una pendenza maggiore rispetto ai casi con legame incrudente teorico. La spiegazione di questi risultati sta nel modo in cui si costruisce il

diagramma teorico partendo da quello reale. Come è stato spiegato nel Capitolo 7 il legame teorico considera il tratto incrudente del legame reale come se fosse una retta e quindi sottostima in un certo senso il suo incrudimento reale per questo che si viene ad essere più duttile. Questa ultima affermazione si spiega analiticamente nei diagrammi della figura 10.36



**Figura 10.36** Diagrammi analitici della stessa struttura con diversi valori del parametro incrudente k

Siamo arrivati così alla fine dei nostri percorsi di confronto. Possiamo adesso fare un riepilogo di livello tecnico di tutte le conclusioni che abbiamo tratto per ogni percorso di studio che abbiamo seguito.

Seguendo il confronto secondo la direzione sulla forma geometrica dei controventi si può affermare che a parità di telaio, a parità di braccio del controvento ed a parità di sezione la forma ellittica è la più duttile in assoluto ha la rigidezza minore e la forza di snervamento minore. La forma triangolare invece si trova sulla sponda opposta riguardo tutti questi criteri della “*Stiffness-Strength-Ductility Approach*”. Ha la duttilità più bassa, la forza di snervamento più alta e la rigidezza più alta. Le altre due forme quella circolare e quella parabolica si trovano in una posizione intermedia alle altre due (ved figura 10.27 e 10.28).

Possiamo affermare quindi come indicazione progettuale che se non ci sono dei vincoli architettonici sulla forma da usare e la scelta del controvento:

- a) Se si vuole la rigidezza più alta possibile e non si vuole intervenire sulla sezione o sul braccio del controvento bisogna usare la forma triangolare.
- b) Se invece la scelta è governata dalla duttilità alta bisogna usare la forma ellittica.
- c) Se il controvento deve avere la forza di snervamento più alta intesa sempre come punto di passaggio dal tratto lineare elastico a quello lineare post snervamento, e non si vuole intervenire sulla sezione o sul braccio del controvento bisogna usare la forma triangolare.

Seguendo invece la seconda direzione di confronto cioè quella dell'andamento dell'altezza della sezione lungo il controvento si è visto che a parità di sezione ed a parità di braccio del controvento la struttura con l'altezza della sezione variabile secondo quanto indicato analiticamente dalla formazione del blocco plastico, è la più duttile ( vedi figura 10.31 e 10.32 ). Ad un incremento lineare della lunghezza di plasticizzazione corrisponde un incremento quasi lineare della duttilità della struttura ( vedi figura 10.7 ). La pendenza del tratto lineare post snervamento è più bassa per la forma con altezza della sezione variabile quando si usa un legame incrudente.

Quindi come indicazione progettuale possiamo affermare che :

- d) Se la scelta della struttura è governata dalla duttilità alta e il legame costitutivo del materiale è elastico perfettamente plastico e questo materiale non si può cambiare di conseguenza non si può cambiare il legame che indica la duttilità sezionale bisogna usare la forma con l'altezza della sezione variabile.
- e) Fare almeno tre modelli analitici con tre diverse lunghezze di plasticizzazione in modo da scoprire il parametro che lega la dipendenza lineare della lunghezza di plasticizzazione allo spostamento ultimo della struttura.
- f) Se si vuole una pendenza del tratto post snervamento più bassa di quella che indica già la struttura con andamento della sezione costante bisogna usare la forma con l'andamento parabolico della variazione dell'altezza della sezione secondo quanto indicato analiticamente dalla presenza del blocco plastico.

Nella terza ed ultima direzione di confronto cioè quella del tipo di legame costitutivo del materiale si è visto che la struttura che considera il legame incrudente del materiale è la più duttile a parità di struttura ( vedi figura 10.19 10.20 10.21 10.22 ). Il legame incrudente che approssima in maniera lineare il legame reale sottostima la sua costante incrudente e quindi si trasforma in una duttilità



maggiore del controvento ( vedi figura 10.32 10.33 10.34 10.35 ) ovvero in un tratto lineare post snervamento con pendenza più bassa.

Quindi come indicazione progettuale possiamo affermare :

- g) Se la scelta della struttura è governata dalla duttilità alta ed a parità di struttura si dispone di due controventi con legami costitutivi del materiale elastico – perfettamente plastico ed elasto – plastico incrudente bisogna scegliere la struttura con il secondo materiale.
- h) Restano validi le procedure analitiche del calcolo del legame  $F - \delta$  del controvento approssimando il suo legame reale con quello linearmente incrudente. La pendenza del tratto lineare post snervamento si deve aumentare di un angolo da definire numericamente.

Alla fine di questo percorso di studio si sono date tutte le informazioni e le indicazioni necessarie per valutare tutti i parametri dell'approccio "*Stiffness-Strength-Ductility Approach*" del diagramma  $F - \delta$  di un qualsiasi "*Crescent – Shaped Braces*"

Quindi il progettista può determinare facilmente la struttura speciale di controvento che comporta un qualsiasi legame  $F - \delta$  che viene indicato dal progetto anti sismico della struttura globale.

## **BIBLIOGRAFIA**

- 1] **T. Trombetti, S. Silvestri, G. Gasparini, I. Ricci (2009), Stiffness – Strength – Ductility Design Approaches For Crescent – Shaped Braces.** The open construction and building technology journal (2009)
- 2] **SEAOC Vision 2000 Committee. Performance-based seismic engineering. Report prepared by Structural Engineers Association of California, Sacramento, CA, 1995.**
- 3] **R. D. Bertero and V. V. Bertero (2002), Performance-based seismic engineering: the need for a reliable conceptual comprehensive approach,** John Wiley & Sons.
- 4] **Priestley, M.J.N., Calvi, G.M. and Kowalsky, M.J. (2007), Direct Displacement-Based Seismic Design of Structures,** IUSS Press, Pavia.
- 5] **“Norme Tecniche per le Costruzioni” adottate con il D.M. del 14 settembre 2005 e pubblicate sul S.O. n. 159 alla G.U. n. 222 del 23/09/2005.**
- 6] **“Norme Tecniche per le Costruzioni” adottate con il D.M. del 14 gennaio 2008 e pubblicate sul S.O. n. 30 alla G.U. n. 29 del 04/02/2008.**
- 7] **Eurocode 2: “Design of structures for earthquake resistance”, EN 1998-3. NEHRP.**
- 8] **CNR – UNI 10011, Costruzioni in acciaio; Istruzioni per il calcolo, l’esecuzione, il collaudo e la manutenzione, Giugno 1988.**
- 9] **Pozzati, Ceccoli (1987), Teoria e Tecnica delle struttura, Volume Terzo, Sistemi di Travi, Interpretazione del Collasso, Parte Prima, Travi Metalliche, UTET, Torino.**