Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

VARIETÀ ALGEBRICHE AFFINI

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
MONICA IDÀ
Correlatore:
DAVIDE VANZO

Presentata da:
CHIARA CASCIOLI

Sessione III
2014/2015

Ai miei due angeli custodi,
Sergio e Rosanna …

Introduzione

La Geometria Algebrica è uno dei temi che ha attraversato tutta la storia della Matematica e, come suggerisce il nome, è una materia che unisce strettamente l'Algebra Commutativa alla Geometria. È il naturale sviluppo della Geometria Analitica quando, dallo spazio a due dimensioni, ci si estende a spazi n-dimensionali; si occupa prevalentemente dello studio delle varietà affini definite come luogo di zeri di polinomi.

Questa tesi vuole essere una breve introduzione ad essa; nel corso dei Capitoli successivi vedremo infatti i primi risvolti geometrici di alcune strutture algebriche già note, e ne tratteremo di nuove, approfondendo le loro proprietà e caratteristiche.

L'elaborato è suddiviso in tre Capitoli; nel primo abbiamo introdotto alcune nozioni di base dell'Algebra Commutativa, focalizzando in primo luogo la nostra attenzione sugli ideali radicali: essi infatti saranno il prototipo degli insiemi algebrici da noi studiati. Un altro prerequisito su cui abbiamo posto la nostra attenzione è la proprietà di un anello di essere noetheriano: una delle sue possibili caratterizzazioni è il fatto di avere ogni ideale finitamente generato. Questo, ai fini dello studio delle varietà, rappresenta un'enorme semplificazione per il fatto che rende possibile definire gli insiemi algebrici come luogo di zeri di un numero finito di polinomi.

Nel secondo Capitolo abbiamo parlato invece della Topologia di Zariski. Abbiamo, per prima cosa, definito la corrispondenza V come l'applicazione che, ad un ideale di $k[x_1, \ldots, x_n]$, associa un sottoinsieme di $\mathcal{A}_k^n$, formato dai punti che annullano ogni polinomio dell'ideale stesso; questi rappresentano i chiusi della nostra topologia. In seguito, abbiamo definito la corrispondenza $\mathfrak{I}$: ad ogni sottoinsieme di $\mathcal{A}_k^n$, $\mathfrak{I}$ associa tutti i polinomi di $k[x_1, \ldots, x_n]$ che si annullano in ogni punto del sottoinsieme stesso.

Dal punto di vista topologico, la Topologia di Zariski non è di Hausdorff, anzi, in maniera

ancora più forte, essa ammette una base di aperti che si intersecano a due a due tra loro. Gli aperti di questa base vengono definiti come i complementari delle ipersuperfici, ossia i complementari degli insiemi del tipo $V(I)$, con I ideale principale di $k[x_1, \ldots, x_n]$. Il motivo per cui questi insiemi si intersecano sempre è dovuto al fatto che gli aperti nella Topologia di Zariski sono ben più grandi di quelli della Topologia Euclidea.
Il Capitolo termina con la dimostrazione di un risultato molto importante: il Nullstellensatz. Nelle particolari circostanze in cui i sottoinsiemi di $\mathcal{A}_k^n$ siano algebrici e gli ideali di $k[x_1, \ldots, x_n]$ siano radicali, le due applicazioni V ed $\mathfrak{I}$ sono una l'inversa dell'altra. Ciò significa che ad ogni sottoinsieme algebrico viene associato uno ed un solo ideale radicale, e viceversa. Questo è il primo importante parallelo che siamo arrivati ad ottenere tra le strutture astratte dell'Algebra (cioè gli ideali radicali) e quelle della Geometria (ossia i sottoinsiemi algebrici).
Nel terzo Capitolo abbiamo, infine, parlato di insiemi irriducibili nello spazio $\mathcal{A}_k^n$, arrivando poi a definire la struttura di varietà affine come sottoinsieme algebrico irriducibile. Il risultato finale del Capitolo, e della tesi stessa, è la dimostrazione di un importante teorema che ci permette di dire che ogni sottoinsieme algebrico di $\mathcal{A}_k^n$ può essere espresso come unione finita di varietà.

Indice

Capitolo 1

Prerequisiti

In questa tesi lavoreremo sempre con anelli commutativi unitari, e k indicherà un campo algebricamente chiuso.

1.1 Ideali radicali

Iniziamo questo Capitolo ricordando alcune nozioni fondamentali che sono già state apprese durante il Corso di Algebra 2; al termine della Sezione vedremo invece una nuova categoria di ideali ed alcune proprietà relative ad essi, che useremo nei Capitoli seguenti.

Definizione 1.1.1. Sia R un anello e $I \subseteq R$ un ideale. Diciamo che I è *primo* se $I \neq \big(1\big)$ e vale: $xy \in I \Rightarrow x \in I \quad o \quad y \in I$.

Definizione 1.1.2. Sia R un anello e $I \subseteq R$ un ideale. Diciamo che I è *massimale* se $I \neq \big(1\big)$ e se non esiste un ideale J tale che $I \subseteq J \subseteq R$ per cui tali inclusioni sono strette.

Definiamo ora qualche operazione fra ideali che verrà utilizzata più avanti:

Proposizione-Definizione 1.1.3. *Siano I_1, I_2 due ideali di R. Definiamo*

$$I_1 + I_2 := \{x + y \quad | \quad x \in I_1, y \in I_2\}$$

Allora $I_1 + I_2$ è ancora un ideale, che chiamiamo ideale somma*.*

Dimostrazione. Mostriamo che I_1+I_2 è sottogruppo di R: $0 \in I_1+I_2$ poiché $0 = 0+0$, con $0 \in I_1$ e $0 \in I_2$; sia $f = x+y \in I_1+I_2$ con $x \in I_1$ e $y \in I_2$, allora $-f = -(x+y) = -x-y$, dato che $-x \in I_1$ e $-y \in I_2$, appartiene ad $I_1 + I_2$; inoltre siano $f_1, f_2 \in I_1 + I_2$, allora $f_1 + f_2 \in I_1 + I_2$, infatti $f_1 = x_1 + y_1$ e $f_2 = x_2 + y_2$ con $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$, allora $f_1 + f_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$, dove $x_1 + x_2 \in I_1$ e $y_1 + y_2 \in I_2$.
Dopo aver dimostrato che è un sottogruppo, proviamo che per ogni $f \in I_1 + I_2$ e per ogni $p \in R$, il prodotto $fp \in I_1 + I_2$; infatti poiché $f = x + y$ con $x \in I_1$, $y \in I_2$, allora $fp = (x + y)p = xp + yp$ con $xp \in I_1$ e $yp \in I_2$, quindi fp sta in $I_1 + I_2$.
Dunque $I_1 + I_2$ è un ideale. □

Proposizione-Definizione 1.1.4. *Siano I_1, I_2 due ideali di R. Definiamo*

$$I_1 I_2 := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad | \quad x_i \in I_1, y_i \in I_2, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Allora $I_1 I_2$ è ancora un ideale, che chiamiamo ideale prodotto*.*

Dimostrazione. Anche in questo caso mostriamo che $I_1 I_2$ è sottogruppo di R: $0 \in I_1 I_2$ poiché $0 = 0 \cdot 0$ con $0 \in I_1$ e $0 \in I_2$; inoltre sia $h = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in I_1 I_2$ con $x_i \in I_1$ e $y_i \in I_2$, allora $-h = -(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} -(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} (-x_i) y_i$ con $y_i \in I_2$ e $-x_i \in I_1$, cioè $-h \in I_1 I_2$; infine dati $h_1, h_2 \in I_1 I_2$ allora $h_1 + h_2 \in I_1 I_2$, infatti $h_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e $h_2 = \sum_{j=1}^{s} t_j z_j$ con $x_i, t_j \in I_1$ e $y_i, z_j \in I_2$, allora $h_1 + h_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{j=1}^{s} t_j z_j$, cioè $h_1 + h_2$ si scrive come somma di elementi composti dal prodotto di un elemento appartenente ad I_1 con uno appartenente ad I_2, come nella definizione.
Mostriamo ora che $\forall h \in I_1 I_2, \forall p \in R$ si ha $h \cdot p \in I_1 I_2$; infatti sia $h = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ con $x_i \in I_1, y_i \in I_2$, allora $y_i \cdot p \in I_2$ per ogni i, quindi $h \cdot p = (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) \cdot p = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i \cdot p)$ sta in $I_1 I_2$, con $x_i \in I_1$, $(y_i \cdot p) \in I_2$.

□

Osservazione 1.1.5. Si può osservare che, dati I e J due ideali di R, il prodotto di essi è contenuto nella loro intersezione, cioè $IJ \subseteq I \cap J$. Infatti questo è vero perché se $f \in IJ$ significa che $f = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, dove $x_i \in I$ e $y_i \in J$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e con $n \in \mathbb{N}$. Questo implica che ogni $x_i y_i$ appartiene ad I e quindi anche la somma di tutti gli $x_i y_i$ appartiene a I; facendo lo stesso ragionamento per J, si ottiene che f appartiene sia ad I che a J, e cioè $f \in I \cap J$.

Dopo questo breve riepilogo, possiamo iniziare a parlare di ideali radicali e di alcune loro caratteristiche.

Definizione 1.1.6. Sia $I \subseteq R$ un ideale di R. Definiamo *radicale di* I l'insieme $\sqrt{I} = \{f \in R \mid \exists\, n > 0 \quad per\ cui \quad f^n \in I\}$.

Proposizione 1.1.7. *Sia I un ideale di R; allora $\sqrt{I}$ è un ideale.*

Dimostrazione. $0 \in \sqrt{I}$ poiché per un qualsiasi $n > 0$ si ha che $0^n = 0 \in I$.
Sia $f \in \sqrt{I}$, allora esiste $n > 0$ tale che $f^n \in I$. Quindi $-(f^n) \in I$. Dobbiamo mostrare che esiste $t > 0$ tale che $(-f)^t \in I$. Se n è pari allora $(-f)^n = f^n$ che appartiene ad I; se n è dispari, $(-f)^n = -f^n$, che è anch'esso un elemento di I. Allora $-f \in \sqrt{I}$.
Siano ora $f, g \in \sqrt{I}$, allora esistono $n, m > 0$ tali che $f^n \in I$ e $g^m \in I$. Dobbiamo trovare t tale che $(f+g)^t \in I$. Preso $t = n + m$, si ha che $(f+g)^t = \sum_{q=0}^{t} c_q f^q g^{t-q}$, con c_q un intero. Nel caso in cui $q \geq n$ si ottiene che $f^q \in I$, e di conseguenza anche $f^q g^{t-q} \in I$. Mentre se $q < n$, allora $t - q > m$, e quindi $g^{t-q} \in I$, con la conseguenza che anche $f^q g^{t-q} \in I$. In conclusione, avremo una somma di elementi che appartengono ad I, ma allora anche tale somma appartiene ad I; dunque $(f+g)^t \in I$ e quindi $f + g \in \sqrt{I}$.
Infine, sia $f \in \sqrt{I}$. Allora esiste $n > 0$ tale che $f^n \in I$ e, poiché I è un ideale, allora per un qualunque $a \in R$ si ha che $a^n \cdot f^n = (a \cdot f)^n \in I$, e quindi $a \cdot f \in \sqrt{I}$. □

Osservazione 1.1.8. In generale, $\sqrt{I} \supseteq I$. Infatti, per $p \in I$ possiamo sempre prendere $n = 1$, e quindi ottenere $p^n = p^1 = p \in \sqrt{I}$. Si ha inoltre che, se $I \subseteq J$, allora $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$. Infatti se $f \in \sqrt{I}$ esiste un $n > 0$ tale che $f^n \in I \subseteq J$, e quindi $f \in \sqrt{J}$.

Definizione 1.1.9. Sia $I \subseteq R$ un ideale. Diremo che I è radicale se vale $\sqrt{I} = I$.

Un importante risultato è il seguente:

Proposizione 1.1.10. *Sia $I \subseteq R$ un ideale primo; allora I è un ideale radicale.*

Dimostrazione. Sia I primo; per l'Osservazione 1.1.8 vale $I \subseteq \sqrt{I}$. Viceversa, sia $x \in \sqrt{I}$. Allora esiste $\bar{n} > 0$ tale che $x^{\bar{n}} \in I$, ma, poiché I è primo, se contiene un prodotto deve contenere almeno uno dei fattori, da cui segue che $x \in I$. Dunque $\sqrt{I} \subseteq I$. □

Esempio 1.1.11. Supponiamo che il nostro anello sia $\mathbb{C}[x]$, l'anello dei polinomi a una variabile su $\mathbb{C}$; un esempio di ideale radicale è $\big(x\big)$, infatti esso è primo poiché è generato da un elemento irriducibile e grazie alla Proposizione 1.1.10 è radicale. Al contrario $\big(x^2\big)$ non lo è in quanto $x \in \sqrt{I}$ ma non appartiene a (x^2).

Elenchiamo ora alcune importanti proprietà:

Proposizione 1.1.12. *Siano I e J due ideali di R; allora valgono:*

1. $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;
2. $\sqrt{IJ} = \sqrt{(I \cap J)} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;
3. $\sqrt{I} = \big(1\big) \Longleftrightarrow I = \big(1\big)$;
4. $\sqrt{I + J} = \sqrt{(\sqrt{I} + \sqrt{J})}$;
5. *Se I è un ideale primo allora* $\sqrt{I^n} = I, \quad \forall n > 0.$

Dimostrazione. Proviamo le 5 proprietà sopra elencate:

1. Dimostriamo l'uguaglianza con la doppia inclusione; $\sqrt{\sqrt{I}} \supseteq \sqrt{I}$ è conseguenza dell'Osservazione 1.1.8. Viceversa, sia $f \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Allora esiste $m > 0$ tale che $f^m \in \sqrt{I}$; ciò implica che esiste $n > 0$ tale che $(f^m)^n \in I$, cioè esiste $t = mn > 0$ tale che $f^t \in I$. Quindi $f \in \sqrt{I}$, e allora $\sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I}$.

2. Dalla definizione di radicale è facile ottenere la seconda uguaglianza:
$\sqrt{(I \cap J)} = \{f \in R \mid \exists\, n > 0 \quad \textit{per cui} \quad f^n \in I \cap J\}$ e
$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \{f \in R \mid \exists\, n, m > 0 \quad \textit{per cui} \quad f^n \in I \quad \textit{e} \quad f^m \in J\}$.
Sia $f \in \sqrt{(I \cap J)}$, allora esiste $n > 0$ per cui $f^n \in I$ e $f^n \in J$, da cui, ponendo $m = n$ si ottiene che $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Viceversa, sia $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, quindi esistono $n, m > 0$ tali che $f^n \in I$ e $f^m \in J$; allora $f^n \cdot f^m$ appartiene ad I (poiché I è un ideale), e per il medesimo motivo appartiene anche a J; quindi $f^n \cdot f^m \in I \cap J$, ma allora abbiamo trovato $t = n + m > 0$ tale che $f^t \in I \cap J$.
Proviamo ora la prima uguaglianza, sfruttando anche in questo caso la doppia inclusione: sia $f \in \sqrt{IJ}$; poiché vale che $IJ \subseteq I \cap J$, allora dall'Osservazione

1.1.8 segue che $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{(I \cap J)}$. Viceversa, sia $f \in \sqrt{(I \cap J)}$. Dalla seconda uguaglianza si ottiene che $f \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, cioè esistono $n, m > 0$ tali che $f^n \in I$ e $f^m \in J$, allora $f^n \cdot f^m = f^{n+m}$ appartiene a IJ e quindi $f \in \sqrt{IJ}$. Dunque $\sqrt{(I \cap J)} \subseteq \sqrt{(IJ)}$.

3. Sia $\sqrt{I} = \big(1\big) = R$, allora per ogni $f \in R$ esiste $m > 0$ tale che $f^m \in I$. È sufficiente mostrare che $1 \in I$; per farlo notiamo che $1 \in \sqrt{I}$, quindi esiste $m > 0$ tale che $1^m \in I$, ma $1^m = 1$ per ogni m. Quindi $1 \in I$ e allora $I = \big(1\big)$.
Viceversa, sia $I = \big(1\big)$; poiché per la 1.1.8 $\sqrt{I} \supseteq I = \big(1\big)$, allora $\sqrt{I} = \big(1\big)$.

4. Sempre per la 1.1.8 si ha che $I \subseteq \sqrt{I}$ e $J \subseteq \sqrt{J}$; ciò implica che $I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$ e quindi $\sqrt{I + J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
Viceversa, sia $f \in \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$; allora esiste $n > 0$ tale che $f^n \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$, cioè $f^n = x + y$ con x e y rispettivamente in $\sqrt{I}$ e $\sqrt{J}$. Dunque esistono $m, t > 0$ tali che $x^m \in I$ e $y^t \in J$. Sia ora $q = m + t$; allora $f^{nq} = (x + y)^q = \sum_{k=0}^{q} c_k x^k y^{q-k}$. con c_k costante. Se $k \geq m$ allora a^k apparterrebbe sicuramente ad I e quindi anche l'elemento $c_k a^k b^{q-k} \in I$. Se invece $k < m$ si ha che $q - k > t$, quindi $b^{q-k} \in J$ e di conseguenza anche $c_k a^k b^{q-k} \in J$. Quindi la sommatoria sarà composta da alcuni elementi appartenenti ad I e da altri appartenenti a J, e in definitiva tale somma apparterrà ad $I + J$, cioè $f^{nq} \in I + J$ e quindi $f \in \sqrt{I + J}$. Dunque $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} \subseteq \sqrt{I + J}$.

5. Ricordiamo che, per la 1.1.10, se I è primo allora I è radicale, cioè $I = \sqrt{I}$. Inoltre in generale vale che $I^n \subseteq I$ e per l'Osservazione 1.1.8 si ha che $\sqrt{I^n} \subseteq \sqrt{I}$, ma per quello che abbiamo appena ricordato $\sqrt{I^n} \subseteq \sqrt{I} = I \Rightarrow \sqrt{I^n} \subseteq I$.
Viceversa sia $f \in I$, allora $f^n \in I^n$ e quindi $f \in \sqrt{I}$.

□

1.2 Anelli noetheriani

Introduciamo ora il concetto di anello noetheriano; in questa Sezione definiremo di cosa si tratta e ne vedremo alcuni esempi.

Proposizione-Definizione 1.2.1. *Un anello R si dice* noetheriano *se soddisfa una delle seguenti caratteristiche equivalenti:*

1. *Ogni ideale $I \subset R$ è finitamente generato; cioè esistono $f_1, \ldots, f_k \in R$, tali che $I = \big(f_1, \ldots, f_k\big)$.*

2. *Ogni catena ascendente di ideali di R, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$, è stazionaria; cioè esiste N tale che $I_N = I_M$ per ogni $M \geq N$.*

3. *Ogni insieme non vuoto di ideali di R ha un elemento massimale.*

Dimostrazione. Proviamo quindi l'equivalenza delle 3 caratteristiche:

- $\big(1. \Rightarrow 2.\big)$ Sia $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ e sia $I = \big(\bigcup_j I_j\big)$, il più piccolo ideale contenente ogni ideale della catena appena definita. I è per ipotesi finitamente generato; sia quindi $I = \big(f_1, \ldots, f_k\big)$. Ogni f_i è del tipo $a_{i_1}g_{i_1} + \ldots + a_{i_{h_i}}g_{i_{h_i}}$, dove i g_j appartengono a un certo I_t. Poiché per ogni f_i la somma è finita, esisterà un certo m_i tale che $f_i \in I_{m_i}$. Sia ora $M = \max\{m_i\}$, allora per ogni i si ha che $f_i \in I_M$. Proviamo ora che $I = I_M$; $I_M \subseteq I$ perché I contiene tutti gli ideali della catena, quindi in particolare contiene anche I_M. Inoltre $f_i \in I_M$ per ogni i, allora poiché $I = \big(f_1, \ldots, f_k\big)$ si ha che $I \subseteq I_M$. Quindi $I_M = I$, dunque tale catena da un certo punto in poi diventa stazionaria, in particolare $I_M = I_N$ per ogni $N > M$.

- $\big(2. \Rightarrow 3.\big)$ Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di ideali di R; chiamiamo un suo elemento I_0. Se I_0 è l'elemento massimale, allora la dimostrazione è terminata. Altrimenti è possibile scegliere $I_1 \in \mathcal{F}$, con $I_0 \subset I_1$. Allo stesso modo, se I_1 è massimale, ottengo la tesi; altrimenti si sceglie I_2 tale che $I_0 \subset I_1 \subset I_2$. Iterando il ragionamento, si genera una catena di ideali di R che, se si suppone per assurdo che non esista un elemento massimale, avrà tutte le inclusioni strette. Ma questo va contro l'ipotesi che assicura che questa catena diventerà stazionaria ad un certo punto.

- $\big(3. \Rightarrow 1.\big)$ Sia I un ideale di R e sia $S = \{J \subseteq I \mid J \; finitamente \; generato\}$. Questo insieme è sicuramente non vuoto in quanto $(0) \in S$. Dunque avrà un elemento massimale. Chiamiamo $\tilde{J} = (f_1, \ldots, f_k)$ questo ideale. Se $\tilde{J}$ fosse diverso da I, esisterebbe $f \in I \smallsetminus \tilde{J}$. Quindi potremmo costruire l'ideale $\big(\tilde{J} \cup \{f\}\big)$ che è finitamente generato in quanto un insieme di generatori possono essere $f_1, \dots, f_k, f$; verrebbe quindi contraddetta l'ipotesi di $\tilde{J}$ massimale, e allora $I = \tilde{J}$. Dunque I è finitamente generato.

$\square$

Ora che abbiamo provato l'equivalenza delle tre proprietà, vediamo alcuni esempi di questi anelli:

Osservazione 1.2.2. Ogni campo K è noetheriano; infatti gli unici ideali di K sono $\big(0\big)$ e $\big(1\big)$, che sono entrambi finitamente generati.
Se R è un anello noetheriano e I è un ideale di R, allora il quoziente R/I è noetheriano. Ciò è vero perché gli ideali del quoziente sono del tipo $[J]$, dove $J \subseteq R$ ideale, e quindi finitamente generato, diciamo $J = \big(g_1, \dots, g_t\big)$; allora $[J] = \big([g_1], \dots, [g_t]\big)$, cioè ogni ideale del quoziente è finitamente generato.

Il seguente Teorema, detto *Teorema della Base di Hilbert*, è il risultato più importante della Sezione:

Teorema 1.2.3. *Sia R un anello noetheriano; allora $R[x]$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $I \subseteq R[x]$ ideale. Per ogni $m > 0$ chiamiamo J_m l'insieme che contiene 0 e i coefficienti direttori dei polinomi di grado m appartenenti ad I. Tale insieme è un ideale di R: infatti lo 0 vi appartiene; se $f \in I$ ha come coefficiente direttore a_m allora anche $-a_m \in J_m$ poiché $-f \in I$; inoltre, presi $a_m, b_m \in J_m$ esistono f, g due polinomi in I di grado m con a_m, b_m i rispettivi coefficienti direttori, allora $f + g \in I$ e $f + g = (a_m + b_m)x^m + \dots + (a_0 + b_0)$ e quindi $a_m + b_m \in J_m$; infine, preso $a_m \in J_m$ coefficiente direttore di $f \in I$ e $b \in R$, allora $bf = ba_m x^m + \dots + ba_0 \in I$ e quindi $ba_m \in J_m$. Inoltre $J_m \subseteq J_{m+1}$: infatti sia $a_m \in J_m$, allora esiste $f \in I$ tale che $f = a_m x^m + \dots + a_0$. Ma $xf = a_m x^{m+1} + \dots + a_0 x$ è un polinomio di I di grado $m+1$ con il medesimo coefficiente direttore. Questo ci dice quindi che $a_m \in J_{m+1}$.
Poiché R è noetheriano, tutti i J_m sono ideali finitamente generati e la catena $J_0 \subseteq \dots \subseteq J_m \subseteq \dots$ è stazionaria. Sia $N > 0$ tale che $J_m = J_N$ per ogni $m \geq N$ e per ogni $i = 0, \dots, N$ siano $f_1^i, \dots, f_{k_i}^i$ i polinomi appartenenti ad I di grado i i cui coefficienti direttori generano J_i. Sia ora $H \subset I$ l'ideale generato dagli f_j^i. Proviamo che $H = I$.

Sappiamo che $H \subset I$; basta quindi provare l'inclusione contraria $H \supset I$.
Prendiamo $f \in I$. Esso può essere scritto come come $f = h + g$, con $h \in H$ e g di grado minimo (rispetto a tutte le possibili scritture di quel tipo). Poiché $h \in H \subset I$ e $f \in I$, allora anche $g \in I$. Supponiamo per assurdo che $g \neq 0$ e sia $r = \min\{\deg g, N\}$, allora il coefficiente direttore di g appartiene a J_r, cioè esistono $a_1, \ldots, a_{k_r} \in R$ tali che $a_1 f_1^r + \ldots + a_{k_r} f_{k_r}^r$ ha come coefficiente direttore lo stesso di g. Sia $s = \deg g - r$, allora il polinomio $g - t$, con $t = (a_1 f_1^r + \ldots + a_k f_k^r)x^s \in H$, ha grado minore del grado di g, poiché g e t hanno lo stesso grado e stesso coefficiente direttore. Riscrivendo si avrebbe: $f = h + (g - t + t) = (h + t) - (g - t)$, dove $h + t \in H$ e $g - t$ di grado inferiore a quello di g, ma questo contraddice l'ipotesi che g sia stato preso di grado minimo, dunque $g = 0$, quindi $f = h$ e cioè $f \in H$.

□

Corollario 1.2.4. *Sia R un anello noetheriano, allora $R[x_1, \ldots, x_n]$ è noetheriano.*

Dimostrazione. Proviamo la tesi per induzione su n: il *Teorema della Base di Hilbert* ci assicura che la tesi vale per $n = 1$. Supponiamo che sia vera per $n - 1$; verifichiamo la sua validità per n. Infatti $R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$, ma $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ è noetheriano per il passo induttivo, allora applicando il *Teorema della Base di Hilbert* all'anello $R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ si ottiene la tesi.

□

Nei Capitoli successivi considereremo lo spazio $k[x_1, \ldots, x_n]$, con k campo algebricamente chiuso. Questa struttura, come conseguenza diretta del Teorema della Base di Hilbert e dell'osservazione 1.2.2, ha la caratteristica di essere un anello noetheriano; ogni ideale appartenente ad esso dunque è finitamente generato. Gli insiemi che andremo a studiare sono formati dai punti che annullano tutti i polinomi di un ideale fissato. Avremo così il notevole vantaggio di poter prendere in considerazione solamente i generatori degli ideali studiati, poiché , se questi punti annullano i generatori, ne segue che annullano un qualsiasi polinomio dell'ideale.

Capitolo 2

Topologia di Zariski

In seguito parleremo molto spesso di punti che annullano un polinomio; detto $p(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio e $P = (a_1, \ldots, a_n)$ un punto, se l'elemento $p(a_1, \ldots, a_n) \in k$ è zero, diremo che P è radice di p, o che p si annulla in P.

2.1 La Corrispondenza V

Sia k un campo algebricamente chiuso e $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Sia $\mathcal{A}_k^n$ lo spazio affine n-dimensionale sul campo k.
Definiamo la corrispondenza V come l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{ideali} \quad J \subseteq A\} & \longrightarrow & \{\textit{sottoinsiemi} \quad X \subseteq \mathcal{A}_k^n\} \\ J & \longmapsto & V(J) \end{array}$$

dove $V(J) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in J\}$.

Definizione 2.1.1. Un sottoinsieme X di $\mathcal{A}_k^n$ si dice *algebrico* se $X = V(I)$ per qualche I.

Osservazione 2.1.2. Sia I un ideale di $k[x_1, \ldots, x_n]$, allora per il corollario 1.2.4 è finitamente generato, cioè $I = (f_1, \ldots, f_r)$. Tutti gli elementi di I sono del tipo $t_1 f_1 + \ldots + t_r f_r$, con $t_i \in A \quad \forall i = 1, \ldots, r$; cioè ogni elemento di I è combinazione dei generatori $f_1, \ldots, f_r$. Allora se un punto è radice di tutti i generatori di conseguenza è radice di tutti i polinomi di I, e quindi $V(I) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in I\} =$

$\{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f_i(P) = 0 \quad per\ i = 1, \ldots, r\}$; dunque un insieme algebrico non è altro che il luogo di zeri di un numero finito di polinomi.

Notazione 2.1.3. Sia f un polinomio in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Per semplificare le notazioni d'ora in poi $V((f))$ lo indicheremo con $V(f)$.

Proposizione-Definizione 2.1.4. *La corrispondenza V soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $V(0) = \mathcal{A}_k^n, \qquad V(A) = \emptyset;$

2. $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J);$

3. $V(I_1) \cup V(I_2)$ *è algebrico; in particolare* $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$.
   Conseguentemente, anche l'unione finita $V(I_1) \cup \ldots \cup V(I_n)$ *è un insieme algebrico.*

4. *L'intersezione numerabile è algebrica, ovvero:* $\bigcap_{t=1}^{\infty} V(I_t) = V(J)$*, dove in particolare* $J = \left(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t \right) = \{a_1 i_1 + \ldots + a_r i_r;\ |\ a_j \in A, i_j \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\}$.

Dai punti 1. 3. 4. si deduce che i sottoinsiemi algebrici di $\mathcal{A}_k^n$ formano gli insiemi chiusi di una topologia su $\mathcal{A}_k^n$, detta topologia di Zariski.

Dimostrazione. 1. Nell'ideale $\big(0\big)$ ci sta un solo elemento, ovvero 0. Inoltre l'equivalenza $0(P) = 0$ viene soddisfatta da tutti i punti $P \in \mathcal{A}_k^n$.
Al contrario, non esistono $P \in \mathcal{A}_k^n$ tali che $f(P) = 0 \quad \forall f \in A$; infatti per i polinomi costanti diversi da 0, ad esempio, tale uguaglianza non è verificata.

2. $V(I) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in I\}$
   $V(J) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in J\}$;
   sia $f \in I$, allora $f \in J$ per ipotesi. Preso un qualunque $P \in V(J)$, mostriamo che $P \in V(I)$.
   Se $P \in V(J)$ significa che $f(P) = 0 \quad \forall f \in J$; in particolare si ha che $f(P) = 0 \quad \forall f \in I \subseteq J$. Quindi $f \in V(I)$ e allora $V(I) \supset V(J)$.

3. Sappiamo già che I_1I_2 è un ideale per la Proposizione 1.1.4. Dobbiamo ora provare l'uguaglianza $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1I_2)$.
$V(I_1I_2) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in I_1I_2\}$
$V(I_1) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in I_1\}$
$V(I_2) = \{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall f \in I_2\}$.
Per ottenere l'uguaglianza, dimostriamo la doppia inclusione.
Sia $P \in V(I_1) \cup V(I_2)$; senza perdere di generalità, supponiamo che $P \in V(I_1)$, allora bisogna dimostrare che $P \in V(I_1I_2)$. Se $P \in V(I_1)$ si ha che $f(P) = 0 \quad \forall f \in I_1$. Presa $h \in I_1I_2$ tale che $h = \sum f_ig_i$ con $f_i \in I_1$ e $g_i \in I_2$, allora $h(P) = \sum f_i(P)g_i(P) = 0$, perché $f_i(P) = 0$ per ogni i. Dunque $V(I_1) \cup V(I_2) \subseteq V(I_1I_2)$.
Viceversa, sia $P \in V(I_1I_2)$. Mostriamo che $P \in V(I_1)$ o $P \in V(I_2)$. Infatti, se $P \in V(I_1I_2)$ allora $h(P) = 0 \quad \forall h \in I_1I_2$, quindi in particolare con $h = fg$, dove $f \in I_1$ e $g \in I_2$; cioè $f(P) = 0$ o $g(P) = 0$. Se supponiamo che P non appartenga a $V(I_2)$, deve esistere un $g \in I_2$ tale che $g(P) \neq 0$, allora per ogni $f \in I_1$ posso costruire l'elemento $h = fg \in I_1I_2$, in tal modo $h(P)$ deve essere 0, ciò implica che, per ogni f, $f(P) = 0$, e quindi $P \in V(I_1)$. Dunque $V(I_1) \cup V(I_2) \supseteq V(I_1I_2)$.
Infine, proviamo per induzione su n che anche l'unione finita di insiemi algebrici è un insieme algebrico.
Per $n = 2$ è stato appena provato. Supponiamo che sia vero per $n-1$. Allora $V(I_1) \cup \ldots \cup V(I_n) = V(I_1) \cup \big(V(I_2) \cup \ldots \cup V(I_n)\big)$, ma per il passo induttivo $V(I_2) \cup \ldots \cup V(I_n)$ sono $n-1$ insiemi algebrici, e dunque sono un insieme algebrico. Quest'ultimo, unito a $V(I_1)$, è un insieme algebrico dunque l'unione finita è algebrica.

4. Mostriamo l'uguaglianza sfruttando la doppia inclusione.
Sia $P \in \bigcap_{t=1}^{\infty} V(I_t)$, allora $P \in V(I_t) \quad \forall t$, cioè $f(P) = 0 \quad \forall f \in I_t$ e per ogni t. Quindi $f(P) = 0 \quad \forall f \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$. Sia $\tilde{f} \in \big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)$, cioè $\tilde{f} = a_1f_1 + \ldots + a_rf_r$ con $a_k \in A$ e $f_k \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$. Allora $\tilde{f}(P) = 0$. Dunque abbiamo che $P \in V\big(\big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)\big)$, e quindi $\bigcap_{t=1}^{\infty} V(I_t) \subseteq V\big(\big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)\big)$. Viceversa, sia $P \in V\big(\big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)\big)$. Allora $f(P) = 0$ per ogni $f \in \big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)$, ovvero per ogni $f = a_1f_1 + \ldots + a_rf_r$ con $a_j \in A$ e $f_j \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$. Poiché $\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t \subseteq \big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)$, allora $f_j(P) = 0 \quad \forall f_j \in \bigcup_{t=1}^{\infty} I_t$ per ogni t, cioè $f_j(P) = 0$ se $f_j \in I_t$. Quindi $P \in V(I_t)$ per ogni t, allora $P \in \bigcap_{t=1}^{\infty} V(I_t)$.

Dunque $\bigcap_{t=1}^{\infty} V(I_t) \supseteq V\big(\big(\bigcup_{t=1}^{\infty} I_t\big)\big)$.

□

Esempio 2.1.5. Vediamo chi sono i chiusi in $\mathbb{C}$; preso I un ideale in $\mathbb{C}[x]$ studiamo $V(I)$. $\mathbb{C}[x]$ è un PID, cioè ogni ideale è principale, quindi $I = \big(f\big)$, con $f \in \mathbb{C}[x]$. Allora, se $\deg f = d > 0$, $V(f)$ è un insieme finito di punti, infatti $V(f)$ sono i punti che annullano f, che saranno al massimo d. Nel caso in cui f abbia grado minore di 1 gli insiemi algebrici che otteniamo sono o il vuoto o tutto lo spazio.
Inoltre, dato un insieme finito di punti in $\mathbb{C}$, siano essi $\{z_1, \ldots, z_n\}$, è sempre possibile trovare un polinomio in $\mathbb{C}[x]$ tale che esso si annulli su tutti e soli questi punti, per esempio $p = (x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$.
Questo ci dice che, su $\mathbb{C}$, i chiusi della Topologia di Zariski sono $\emptyset$, $\mathbb{C}$ e gli insiemi finiti, quindi questa topologia e la topologia cofinita in questo caso coincidono.
Su $\mathbb{C}^2$, invece, l'equivalenza è falsa; infatti è possibile trovare un chiuso con infiniti punti. Ad esempio $V(x)$ corrisponde all'asse $x = 0$, ovvero tutti i punti del tipo $(0, y)$ sono radice del polinomio. Invece $V(x^2 + y^2 + 1)$ corrisponde alla circonferenza unitaria di centro (0,0), anch'essa formata da infiniti punti.

Abbiamo visto come associare ad un ideale uno spazio geometrico, nella prossima sezione faremo il viceversa.

2.2 La Corrispondenza $\mathfrak{I}$

Definiamo ora la corrispondenza $\mathfrak{I}$ come l'applicazione seguente:

$$\begin{array}{ccc} \{sottoinsiemi \quad X \subseteq \mathcal{A}_k^n\} & \longrightarrow & \{ideali \quad J \subseteq A\} \\ X & \longmapsto & \mathfrak{I}(X) \end{array}$$

dove $\mathfrak{I}(X) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0 \quad \forall P \in X\}$.

Osservazione 2.2.1. $\mathfrak{I}(X)$ è in effetti un ideale in quanto: $0 \in \mathfrak{I}(X)$ poiché $0(P) = 0$ per ogni $P \in X$; se $f \in \mathfrak{I}(X)$ anche $-f \in \mathfrak{I}(X)$, perché $(-f)(P) = -(f(P)) = 0$ per ogni $P \in X$; inoltre per $f, g \in \mathfrak{I}(X)$ anche $f+g \in \mathfrak{I}(X)$, dato che $(f+g)(P) = f(P)+g(P) = 0$ per ogni $P \in X$; infine per $f \in \mathfrak{I}(X)$ e $t \in A$ si ha che $(t \cdot f)(P) = t(P) \cdot f(P) = t(P) \cdot 0 = 0$

per ogni $P \in X$, ossia $t \cdot f \in \mathfrak{I}(X)$. Si può osservare che gli ideali indicati sopra sono in particolare degli ideali radicali, cioè $\mathfrak{I}(X) = \sqrt{\mathfrak{I}(X)}$, per ogni $X \subseteq \mathcal{A}_k^n$. Infatti per l'Osservazione 1.1.8 si ha $\mathfrak{I}(X) \subseteq \sqrt{\mathfrak{I}(X)}$. Inoltre se $f^n \in \mathfrak{I}(X)$ per qualche n, significherebbe che per ogni $P \in X$ $f^n(P) = \underbrace{f(P) \cdot \ \ldots \ \cdot f(P)}_{n\ volte} = 0$, da cui, essendo in un campo, si ottiene che $f(P) = 0$. Dunque è valida anche l'inclusione $\mathfrak{I}(X) \supseteq \sqrt{\mathfrak{I}(X)}$.

Proposizione 2.2.2. *Siano $X, Y \subseteq \mathcal{A}_k^n$ due insiemi algebrici. Allora $\mathfrak{I}(X \cup Y) = \mathfrak{I}(X) \cap \mathfrak{I}(Y)$*

Dimostrazione. La dimostrazione si ricava facilmente dalla definizione di $\mathfrak{I}$, infatti:
$\mathfrak{I}(X \cup Y) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0, \quad \forall P \in X \cup Y\}$;
$\mathfrak{I}(X) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0, \quad \forall P \in X\}$;
$\mathfrak{I}(Y) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0, \quad \forall P \in Y\}$;
quindi $\mathfrak{I}(X) \cap \mathfrak{I}(Y) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0, \quad \forall P \in X \quad e \quad \forall P \in Y\}$,
cioè $\mathfrak{I}(X) \cap \mathfrak{I}(Y) = \{f \in A \quad | \quad f(P) = 0, \quad \forall P \in X \cup Y\}$.

$\square$

Esempio 2.2.3. Sia $X = \{(x, y) \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2 \quad | \quad x = 0\} \subset \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^2$. Un polinomio $p(x, y)$ che si annulla su tutti i punti del tipo $(0, z)$ deve essere diviso da x, infatti $p(0, y)$ è un polinomio in y che ha infinite radici, quindi deve necessariamente essere il polinomio nullo. Dunque $p(x, y) = xg(x, y)$. Ciò significa che $\mathfrak{I}(X) = \big(x\big)$ che è appunto un ideale radicale.

Un'altra proprietà utile dell'applicazione $\mathfrak{I}$ è descritta nella seguente:

Proposizione 2.2.4. *Siano $X, Y \subseteq \mathcal{A}_k^n$ due insiemi algebrici con $X \subseteq Y$, allora $\mathfrak{I}(Y) \subseteq \mathfrak{I}(X)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathfrak{I}(Y)$. Allora $f(P) = 0$ per ogni $P \in Y$; in particolare $f(P) = 0$ per ogni $P \in X$ poiché , per ipotesi, $X \subseteq Y$. Quindi $f \in \mathfrak{I}(X)$, e cioè $\mathfrak{I}(Y) \subseteq \mathfrak{I}(X)$.

$\square$

Notiamo ora le relazioni che sussistono tra le due mappe appena definite: V e $\mathfrak{I}$.

Proposizione 2.2.5. *Sia $X \subseteq \mathcal{A}_k^n$ un sottoinsieme e $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un ideale. Allora:*

1. $X \subseteq V(\mathfrak{I}(X))$

2. $I \subseteq \mathfrak{I}(V(I))$

Dimostrazione. Per provare la *1.* prendiamo un punto P in X. Esso appartiene a $V(\mathfrak{I}(X))$ se tutti i polinomi in $\mathfrak{I}(X)$ si annullano su P. Ma questi sono tutti e soli i polinomi che si annullano su X, quindi in particolare su P.
Per provare la *2.* analogamente prendiamo un polinomio in I. Per appartenere a $\mathfrak{I}(V(I))$ deve annullarsi su tutti i punti di $V(I)$, che sono proprio i punti che si annullano su un qualunque polinomio in I.

□

Dal punto di vista topologico, la Topologia di Zariski non è di Hausdorff. Addirittura possiamo trovare una base di aperti per lo spazio i cui insiemi a due a due si intersecano. Sapendo che gli aperti sono i complementari dei chiusi, prendiamo f un polinomio in $k[x_1, \ldots, x_n]$ e definiamo $D_f := \{P \mid f(P) \neq 0\}$, cioè $D_f = (V(f))^c$. Quindi D_f è un aperto.

Proposizione 2.2.6. *Gli insiemi del tipo D_f rappresentano una base di aperti per la topologia di Zariski su $\mathcal{A}_k^n$.*

Dimostrazione. Sia I un ideale in $k[x_1, \ldots, x_n]$, allora $A = V(I)^c$ è un aperto. Mostriamo che $A = \bigcup_{j=1}^t D_{f_j}$. L'ideale I è finitamente generato, ossia $I = \big(g_1, \ldots, g_t\big)$; un punto P appartiene ad A se esiste almeno un g_i tale che $g_i(P) \neq 0$, ma allora $P \in D_{g_i}$. Quindi $A \subseteq \bigcup_{j=1}^t D_{f_j}$.
Viceversa, se prendiamo $P \in D_{g_j}$ significa che $g_j(P) \neq 0$; ma quindi P non può stare in $V(I)$, e cioè $P \in A$. Abbiamo così provato anche l'inclusione opposta: $A \supseteq \bigcup_{j=1}^t D_{f_j}$. □

Non ci resta quindi che dimostrare che l'intersezione di questi aperti non è vuota, se gli aperti non sono vuoti.

Proposizione 2.2.7. *Siano f, g due polinomi di grado positivo, allora $D_f \cap D_g \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $D_f \cap D_g = \emptyset$; poiché $D_f \cap D_g = D_{fg}$, si ha che $D_{fg} = \emptyset$, e cioè $V(fg) = \mathcal{A}_k^n$. Ora $\mathfrak{I}(\mathcal{A}_k^n) = \big(0\big)$, infatti se $p \in \mathfrak{I}(\mathcal{A}_k^n)$ non fosse il polinomio nullo, poiché p appartiene a $k[x_1, \ldots, x_n]$, anello a fattorizzazione unica, allora p ammette solo un numero finito di irriducibili nella sua fattorizzazione; però, poiché p si annulla su ogni retta del tipo $x = c$, con $c \in \mathbb{C}$, allora dovrebbe appartenere all'ideale $\big(x - c\big)$. Questo implica che p dovrebbe avere infiniti fattori irriducibili, che è assurdo. Quindi $p = 0$. A questo punto $\mathfrak{I}(V(fg)) = \big(0\big)$, cioè $fg \in \big(0\big)$ per la proposizione 2.2.5. Ma $fg = 0$ implica o $f = 0$ o $g = 0$, ossia o $D_f = \emptyset$ o $D_g = \emptyset$. In altre parole, se la loro intersezione è vuota significa che uno dei due è l'insieme vuoto; dunque, se sono entrambi diversi dal vuoto, la loro intersezione non è vuota, e quindi la Topologia di Zariski non è di Hausdorff.

□

2.3 Il Teorema degli Zeri di Hilbert

Riportiamo qui sotto un esempio utile per arrivare poi ad enunciare il risultato più importante del Capitolo:

Esempio 2.3.1. Prendiamo la retta $x = 0$ nello spazio $\mathbb{C}^2$ e priviamola di un punto, sia esso ad esempio $P = (0, 5)$. Chiamiamo X l'insieme dei punti che appartengono a questa retta bucata. Se vi applichiamo ora la funzione $\mathfrak{I}$, otteniamo: $\mathfrak{I}(X) = \big(x\big)$. Infatti sia p un polinomio che si annulla su tutti i punti del tipo $(0, z)$ con $z \neq 5$. Ma $p(0, y)$ è un polinomio in una sola variabile con infinite radici, dunque deve essere il polinomio nullo, questo ci dice quindi che $p(x, y) = xg(x, y)$. A questo punto, applichiamo anche V e vediamo che $V(\mathfrak{I}(X)) = V(x)$, ma $V(x)$ è tutta la retta $x = 0$, cioè vi appartiene anche il punto P inizialmente escluso; in sostanza $(V \circ \mathfrak{I})(X) \neq X$.

D'altro canto, consideriamo ora l'ideale non radicale $J = \big(x^2\big)$ in $\mathbb{C}[x, y]$ e applichiamo prima la funzione V e poi la funzione $\mathfrak{I}$: $V(x^2)$ sono tutti i punti appartenenti alla retta $x = 0$. Ma $\mathfrak{I}(V(x^2)) \neq \big(x^2\big)$, infatti anche il polinomio x si annulla su quei punti, e infatti come abbiamo visto prima $\mathfrak{I}(V(\big(x^2\big))) = \big(x\big)$. Quindi $(\mathfrak{I} \circ V)(J) \neq J$ per J non radicale.

In conclusione, la composizione delle due applicazioni V e $\mathfrak{I}$ non è l'identità; in generale, quindi, tali funzioni non sono una l'inversa dell'altra. Vedremo però che, sotto opportune ipotesi, queste applicazioni saranno biunivoche e cioè sarà possibile considerarle come due applicazioni una inversa dell'altra.

A questo punto, enunciamo e dimostriamo il *Teorema degli Zeri di Hilbert*, chiamato anche *Nullstellensatz*. Nel farlo ometteremo un risultato algebrico che usa argomenti che trascendono dai temi trattati in questa tesi.

Teorema 2.3.2. *Sia k un campo algebricamente chiuso, e sia $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili a coefficienti in k. Allora valgono:*

(a) Ogni ideale massimale dell'anello A è della forma $m = \big(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\big)$, per un qualche punto $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n_k$.

(b) Sia $J \subseteq A$ un ideale, tale che $J \neq \big(1\big)$; allora $V(J) \neq \emptyset$.

(c) Per ogni $J \subseteq A$, si ha: $\quad \mathfrak{I}(V(J)) = \sqrt{J}$.

Dimostrazione. Per la prova di *(a)* si rimanda a [1] (3.15 pagina 61).
Sapendo che vale *(a)*, proviamo *(b)*.
Sia $J \subseteq A$ un ideale, $J \neq A$, allora esiste $\mathfrak{m}$ ideale massimale tale che $J \subseteq \mathfrak{m}$. Questo segue dal punto *3.* della Proposizione-Definizione 1.2.1, infatti sia $B = \{I \subseteq A \mid J \subseteq I,\ I \neq A\}$, tale insieme non è vuoto perché almeno J vi appartiene, allora ammette un elemento massimale che chiamiamo $\mathfrak{m}$. Per il punto *(a)* è della forma $\mathfrak{m} = \big(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\big)$. Quindi $J \subseteq \mathfrak{m}$ significa che, detto $P = (a_1, \dots, a_n)$, $f(P) = 0$ per ogni $f \in J$. Allora $P \in V(J)$, e cioè $V(J) \neq \emptyset$.
Infine proviamo che il punto *(b)* implica che anche *(c)* sia vera.
Sia $J \subseteq A$, dimostriamo che $\mathfrak{I}(V(J)) = \sqrt{J}$ sfruttando la doppia inclusione:

$\supseteq$ Sia $f \in \sqrt{J}$, allora esiste $n > 0$ tale che $f^n \in J$. Ricordiamo che $V(J) = \{P \in \mathcal{A}^n_k \mid h(P) = 0\ \forall h \in J\}$ e che $\mathfrak{I}(V(J)) = \{g \in A \mid g(P) = 0\ \forall P \in V(J)\}$; in particolare $\forall P \in V(J)$, $f^n(P) = 0$. Ma allora $f^n \in \mathfrak{I}(V(J))$; ma $f^n(P) = 0$ non è altro che $\underbrace{f(P) \cdot \ldots \cdot f(P)}_{n\ volte} = 0$ si ottiene che $f(P) = 0$ per ogni $P \in V(J)$ e quindi $f \in \mathfrak{I}(V(J))$.

$\subseteq$ Sia ora $f \in \mathfrak{I}(V(J))$, devo mostrare che $f^n \in J$ per qualche $n > 0$.
J è un ideale contenuto in $k[x_1, \dots, x_n]$, che a sua volta è contenuto in $k[x_1, \dots, x_n, y]$; e cioè $J \subseteq A \subseteq k[x_1, \dots, x_n, y]$. $f \in \mathfrak{I}(V(J))$ quindi $f(P) = 0$ per ogni $P \in V(J)$. Considero ora $J_1 = \big(J, fy - 1\big)$, quindi ogni punto $Q \in V(J_1)$, con Q del tipo $Q = (a_1, \dots, a_n, b)$, deve essere tale che $(a_1, \dots, a_n) \in V(J)$ e $f(a_1, \dots, a_n) \cdot b = 1$, dunque in particolare deve succedere che $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$; ma questo non è possibile perché $f(P) = 0$ per ogni $P \in V(J)$, e quindi anche per $P = (a_1, \dots, a_n)$. Dunque $V(J_1) = \emptyset$. Allora per il punto *(b)* si ha $J_1 = \big(1\big)$, cioè $1 \in J_1$; perciò 1 si scrive come combinazione dei generatori di J_1 (che sono in numero finito poiché A è Noetheriano):

$$1 = \sum g_i f_i + g_0(fy - 1),$$

dove $g_i \in k[x_1, \dots, x_n, y]$ e $f_i \in J$. Sia ora N il grado massimo in cui compare y nei g_i, moltiplichiamo entrambi i membri dell'uguaglianza per f^N:

$$f^N = \sum g_i f_i f^N + g_0(fy - 1)f^N;$$

osserviamo che è possibile scrivere $g_i f^N$ come un polinomio del tipo $G_i(x_1, \dots, x_n, fy)$, dunque riscriviamo l'uguaglianza come segue:

$$f^N = \sum G_i f_i + G_0(fy - 1). \qquad (*)$$

A questo punto, consideriamo questa serie di applicazioni:

$$k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow k[x_1, \dots, x_n, y] \longrightarrow k[x_1, \dots, x_n, y]/\big(fy - 1\big) =: B.$$

La composizione di esse è iniettiva: prendiamo $p, q \in k[x_1, \dots, x_n]$, mostriamo che se $[p] = [q]$ in B allora $p = q$ in A. $[p] = [q] \Leftrightarrow p \sim q \Leftrightarrow p - q \in \big(fy - 1\big)$, ovvero $p - q = t \cdot (fy - 1)$ con $t \in k[x_1, \dots, x_n, y]$, ma poiché p e q sono due polinomi in cui non compare la variabile y, affinché la loro differenza sia o il polinomio nullo o un polinomio che invece presenta la y, necessariamente t deve essere uguale a 0, quindi $p = q$. Passando all'anello quoziente B, (*) diventa:

$$[f^N] = [\sum G_i(x_1, \dots, x_n, fy) f_i],$$

ma in B si ha che $[fy] = [1]$, quindi la precedente uguaglianza diventa:

$$[f^N] = \sum [G_i(x_1, \ldots, x_n, 1) f_i] = \sum [\tilde{G}_i(x_1, \ldots, x_n) f_i],$$

ma ora i polinomi che compaiono appartengono ad A, dunque possiamo eliminare le classi ottenendo che $f^N \in J$ e quindi $f \in \sqrt{J}$.

□

Dal Teorema segue un importante Corollario che ci dice sotto quali ipotesi le applicazioni V ed $\mathfrak{I}$ si possono considerare una l'inversa dell'altra:

Corollario 2.3.3. *Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $A = k[x_1, \ldots, x_n]$. Esiste una corrispondenza biunivoca fra i sottoinsiemi algebrici dello spazio affine $\mathcal{A}^n_k$ e gli ideali radicali contenuti in A, così definita:*

$$\begin{array}{ccc} \{X \subset \mathcal{A}^n_k,\ X \text{ algebrico}\} & \longleftrightarrow & \{J \subseteq A,\ J \text{ ideale radicale}\} \\ X & \longrightarrow & \mathfrak{I}(X) \\ V(J) & \longleftarrow & J \end{array}$$

Dimostrazione. Mostriamo quindi che V ed $\mathfrak{I}$ sono una l'inversa dell'altra: sia I un ideale radicale di A, dal punto (c) del Nullstellensatz segue che

$$\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I} = I$$

poiché I è radicale. Viceversa sia X un insieme algebrico. Questo significa che esiste un ideale I tale che $X = V(I)$, possiamo inoltre considerare I radicale in quanto abbiamo appena provato che la funzione $\mathfrak{I}$ è suriettiva. Abbiamo quindi che

$$V(\mathfrak{I}(X)) = V(\mathfrak{I}(V(I))) = V(I) = X.$$

□

Facciamo un esempio per comprendere meglio l'importanza dell'ipotesi che k sia un campo algebricamente chiuso:

Esempio 2.3.4. Poniamoci ad esempio in $\mathbb{R}^2$; gli ideali $\left(x^2 + y^2 + 1\right)$ e $\left(x^2 + y^2 + 2\right)$ sono primi, e quindi per la Proposizione 1.1.10 sono due ideali radicali. Ma tramite l'applicazione V vengono entrambi mandati nell'insieme vuoto.
Dunque, se il campo k non è algebricamente chiuso, l'iniettività di V non si conserva.

Capitolo 3

Varietà

In questo Capitolo definiremo cosa sono le Varietà dello spazio affine $\mathcal{A}_k^n$ e arriveremo a dimostrare un risultato fondamentale sulla decomposizione in irriducibili degli insiemi algebrici, ma prima dovremo introdurre gli insiemi irriducibili.
D'ora in poi considereremo solo ideali radicali, poiché sono sufficienti per trattare tutti i possibili insiemi algebrici.

3.1 Insiemi irriducibili

Definizione 3.1.1. Sia $Y \subseteq \mathcal{A}_k^n$ un insieme algebrico non vuoto. Diciamo che Y è *irriducibile* se $Y = X_1 \cup X_2$, con X_1 e X_2 algebrici, implica che $X_1 = Y$ oppure $X_2 = Y$. In altre parole, un insieme algebrico si dice irriducibile se non si può scrivere come unione di insiemi algebrici diversi da quelli banali.

Proposizione 3.1.2. *Sia Y algebrico, $Y \subseteq \mathcal{A}_k^n$. Y è irriducibile $\iff \mathfrak{I}(Y)$ è primo.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$: Dati f, g tali che $fg \in \mathfrak{I}(Y)$, mostriamo che $f \in \mathfrak{I}(Y)$ o $g \in \mathfrak{I}(Y)$. Se $fg \in \mathfrak{I}(Y)$ significa che $(fg)(P) = 0 \quad \forall P \in Y$, ma questo è vero per tutti gli elementi che appartengono all'ideale $\big(fg\big)$. Dunque $\forall P \in Y$, $P \in V(fg) = \big\{P \in \mathcal{A}_k^n \quad | \quad h(P) = 0 \quad \forall h \in \big(fg\big)\big\}$; cioè $Y \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$ per il punto *3.* della Proposizione 2.1.4.
Siano ora $A = V(f) \cap Y$ e $B = V(g) \cap Y$. Essi sono due chiusi perhé intersezione

di chiusi. Inoltre si ha che $A \cup B = Y$, infatti $A \cup B = (V(f) \cap Y) \cup (V(g) \cap Y) = (V(f) \cup V(g)) \cap Y = Y$. Se $A \neq Y$ e $B \neq Y$ viene contraddetta l'ipotesi che Y sia irriducibile; supponiamo quindi che $A = Y$, allora $V(f) \supseteq Y$ che implica $f^n \in \mathfrak{I}(Y)$ per un certo $n > 0$, e conseguentemente $f \in \mathfrak{I}(Y)$. Quindi $\mathfrak{I}(Y)$ è primo.

$\Longleftarrow$: Viceversa, sia J primo; poniamo $Y = V(J)$. Supponiamo che $Y = X_1 \cup X_2$, con X_1, X_2 algebrici; allora $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}(X_1 \cup X_2) = \mathfrak{I}(X_1) \cap \mathfrak{I}(X_2)$, dove l'ultima uguaglianza segue direttamente dalla Proposizione 2.2.2. Quindi $J = \mathfrak{I}(X_1) \cap \mathfrak{I}(X_2)$. J è primo; se $J \neq \mathfrak{I}(X_1)$ e $J \neq \mathfrak{I}(X_2)$, esisterebbero $f \in \mathfrak{I}(X_1) \setminus J$ e $g \in \mathfrak{I}(X_2) \setminus J$ tali che $fg \in \mathfrak{I}(X_1) \cap \mathfrak{I}(X_2) = J$ ma $f, g \notin J$, contraddicendo l'ipotesi di primalità di J. Quindi $J = \mathfrak{I}(X_1)$ oppure $J = \mathfrak{I}(X_2)$; vale a dire $Y = X_1$ o $Y = X_2$. Di conseguenza, Y è irriducibile.

□

Esempio 3.1.3. Sia Y l'insieme di punti di $\mathcal{A}^2_{\mathbb{C}}$ che annullano il polinomio $(x-y)(x+y)$; allora $\mathfrak{I}(Y) = \big((x-y)(x+y)\big)$, cioè tutti i polinomi che si annullano sui punti di Y sono quelli dell'ideale generato da $(x-y)(x+y)$. Consideriamo ora f e g polinomi di $\mathbb{C}[x,y]$, $f = (x+y)(x^2+y^2-1)$ e $g = (x-y)(x+2)$, e le rispettive immagini tramite l'applicazione V, $V(f)$ e $V(g)$. Allora $V(f) \cap Y$ e $V(g) \cap Y$ sono diversi da Y, ma $(V(f) \cap Y) \cup (V(g) \cap Y) = Y$, quindi Y si scrive come unione di due insiemi non banali e allora non è irriducibile.

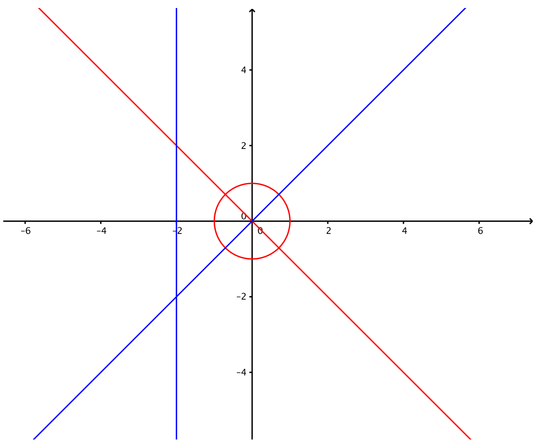

Figura 3.1: Traccia reale di $V(f)$ e $V(g)$

In figura 3.1 vengono rappresentati due chiusi che, intersecati all'insieme di partenza, danno una scomposizione in chiusi non banale di esso.

Possiamo, a questo punto, dare la nozione di varietà sullo spazio affine $\mathcal{A}_k^n$.

Definizione 3.1.4. Una varietà $\mathcal{V}$ di $\mathcal{A}_k^n$ è un sottoinsieme algebrico irriducibile di $\mathcal{A}_k^n$.

Osservazione 3.1.5. Si può osservare che, per la Proposizione 3.1.2, detta $\mathcal{V}$ una varietà di $\mathcal{A}_k^n$, $\mathfrak{I}(\mathcal{V})$ è un ideale primo.

Un esempio interessante è il seguente:

Esempio 3.1.6. Poniamoci in $\mathbb{C}^n$; si può dimostrare che ogni punto di tale spazio corrisponde ad un ideale massimale in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e viceversa, ovvero ogni ideale massimale in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ corrisponde ad un punto di $\mathbb{C}^n$.
Infatti, preso $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ proviamo che $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$ è massimale. Sicuramente l'ideale $\big(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\big)$ è contenuto in $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$; inoltre $\big(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\big)$ è massimale perché il quoziente $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\big(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\big)$, dove $[x_i] = [a_i]$, è isomorfo a $\mathbb{C}$ che è un campo. Quindi $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n)$ o è proprio l'ideale $\big(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\big)$, oppure è tutto l'anello $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$; ma non può essere uguale a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ perchè le costanti non si annullano nel punto $(a_1, \ldots, a_n)$. Allora $\mathfrak{I}(a_1, \ldots, a_n) = \big(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\big)$ che è massimale.
Il viceversa non è altro che il punto (a) del Nullstellensatz.

3.2 Decomposizione in irriducibili

Diamo qui di seguito la definizione di noetherianità di uno spazio topologico.

Definizione 3.2.1. Sia X uno spazio topologico; X si dice *noetheriano* se ogni catena di chiusi discendente $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ è stazionaria, cioè esiste R tale che, per ogni $T \geq R$, $Y_T = Y_R$.

Proposizione 3.2.2. *Lo spazio* $\mathcal{A}_k^n$ *è uno spazio topologico noetheriano.*

Dimostrazione. Sia $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$ una catena di chiusi discendente; proviamo che essa è stazionaria.
Una catena di chiusi in $\mathcal{A}_k^n$ è del tipo: $V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq \ldots$, con $I_1, I_2, \ldots$ ideali di $k[x_1, \ldots, x_n]$. Allora, per la Proposizione 2.2.4, si ha che $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$. Poiché $I_1, I_2, \ldots$ sono ideali di $k[x_1, \ldots, x_n]$, anello noetheriano (Corollario 1.2.4), allora tale catena ascendente di ideali, da un certo punto in poi, sarà stazionaria, cioè esisterà un R tale che per ogni $T \geq R$, $I_T = I_R$. Ma allora, riapplicando la V, si ottiene che anche la catena $V(I_1) \supseteq V(I_2) \supseteq \ldots$ è stazionaria da R in poi, ovvero per ogni $T \geq R$, $V(I_T) = V(I_R)$. □

Una utile osservazione è la seguente:

Osservazione 3.2.3. Sia X uno spazio topologico noetheriano; si può osservare che, dato un qualunque sottoinsieme non vuoto di chiusi, esso ammette un elemento minimale. Infatti, prendiamo Y_0 in tale sottoinsieme; se Y_0 è minimale si può concludere la dimostrazione. Altrimenti, sia Y_1 tale che $Y_0 \supseteq Y_1$ con l'inclusione stretta. Allo stesso modo, se Y_1 è minimale si ottiene la tesi, altrimenti esiste Y_2 tale che $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2$ sempre con le inclusioni strette. Procedendo nel ragionamento, se si nega l'esistenza di un elemento minimale si costruisce una catena di chiusi discendente e non stazionaria; ma poiché X è uno spazio topologico noetheriano, questa catena non è ammissibile.

Dimostriamo, infine, il teorema più importante di questo Capitolo.

Teorema 3.2.4. *Sia X un insieme algebrico nello spazio $\mathcal{A}_k^n$. Allora esistono $X_1, \ldots, X_n$ varietà tali che*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n \qquad (*)$$

Inoltre, se $X_i \not\subseteq X_j$ per ogni $i \neq j$, tale fattorizzazione è unica a meno dell'ordine.

Dimostrazione. In primo luogo, dimostriamo l'esistenza di questa fattorizzazione; sia quindi l'insieme $B = \{\textit{chiusi in } \mathcal{A}_k^n \textit{ per cui non vale } (*)\}$, cioè un insieme di chiusi che non ammettono una decomposizione in irriducibili. Per l'Osservazione 3.2.3, se $B \neq \emptyset$ allora ammette un elemento minimale; sia esso X. X non è irriducibile, perché se lo fosse ammetterebbe una scrittura del tipo (*); allora è riducibile, cioè esistono X_1, X_2 chiusi diversi da tutto X, tali che $X = X_1 \cup X_2$. Quindi $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, allora $X_1 \notin B$ e

$X_2 \notin B$ poiché abbiamo supposto che fosse X l'elemento minimale dell'insieme B. Ma poiché X_1 e X_2 non appartengono a B, ammettono una fattorizzazione in irriducibili come (*). Siano quindi $X_1 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_t$ e $X_2 = Z_1 \cup \ldots \cup Z_k$ due fattorizzazioni in irriducibili. Essendo X unione di due insiemi algebrici che ammettono una scomposizione in irriducibili, anche esso sarà fattorizzabile in unione di varietà, come in (*); ovvero $X = X_1 \cup X_2 = Y_1 \cup \ldots \cup Y_t \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_k$ è una decomposizione in irriducibili di X.
Ora proviamo l'unicità della fattorizzazione; supponiamo che X si scomponga in due modi diversi $X = X_1 \cup \ldots \cup X_t = Y_1 \cup \ldots \cup Y_s$, con $X_i \nsubseteq X_j$, per $i \neq j$, e $Y_k \nsubseteq Y_l$, per $k \neq l$. Consideriamo X_1; esso è contenuto nell'unione degli Y_i, cioè $X_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^s Y_i$, allora $X_1 = \bigcup_{i=1}^s (X_1 \cap Y_i)$. Ogni $(X_1 \cap Y_i)$ è intersezione di chiusi, quindi è un chiuso; cioè X_1 è unione di chiusi, ma X_1 è irriducibile per ipotesi, quindi deve esistere $\bar{i}$ tale che $X_1 \cap Y_{\bar{i}} = X_1$. Senza perdere di generalità, supponiamo che tale $\bar{i}$ sia uguale ad 1; quindi $X_1 \cap Y_1 = X_1$, allora $X_1 \subseteq Y_1$.
Facciamo la stessa cosa prendendo Y_1: Y_1 è contenuto nell'unione di tutti gli X_j, cioè $Y_1 = \bigcup_{j=1}^s (Y_1 \cap X_j)$. Anche in questo caso, ogni $(Y_1 \cap X_j)$ è un chiuso; ma Y_1 è irriducibile, quindi esiste $\bar{j}$ tale che $Y_1 \cap X_{\bar{j}} = Y_1$, cioè $Y_1 \subseteq X_{\bar{j}}$. Unendo quest'ultima inclusione a quella trovata in precedenza, otteniamo: $X_1 \subseteq Y_1 \subseteq X_{\bar{j}}$; poiché per ipotesi $X_i \nsubseteq X_j$ per ogni $i \neq j$, allora anche $\bar{j}$ deve essere uguale ad 1, cioè $X_1 = Y_1$. Si può estendere il ragionamento per ogni X_i e Y_j, allora necessariamente deve succedere che $t = s$ e che, a meno di un riordino, $X_r = Y_r$ per ogni r.

$\square$

Esempio 3.2.5. Prendiamo $f = x^4 + x^3 - xy^2$ in $\mathbb{C}[x, y]$. f è fattorizzabile in $x \cdot (x^3 + x^2 - y^2)$, allora $V(f) = V(x) \cup V(x^3 + x^2 - y^2)$. Come si può infatti vedere in figura, f è unione di due varietà nello spazio $\mathbb{C}^2$
Facciamo un esempio anche nello spazio $\mathbb{C}^3$: consideriamo $g = x^2z + y^2z - z$ in $\mathbb{C}[x, y, z]$, che rappresenta un cilindro unito ad un piano; esso si scompone in $g = z \cdot (x^2 + y^2 - 1)$. Quindi $V(g) = V(z) \cup V(x^2 + y^2 - 1)$.

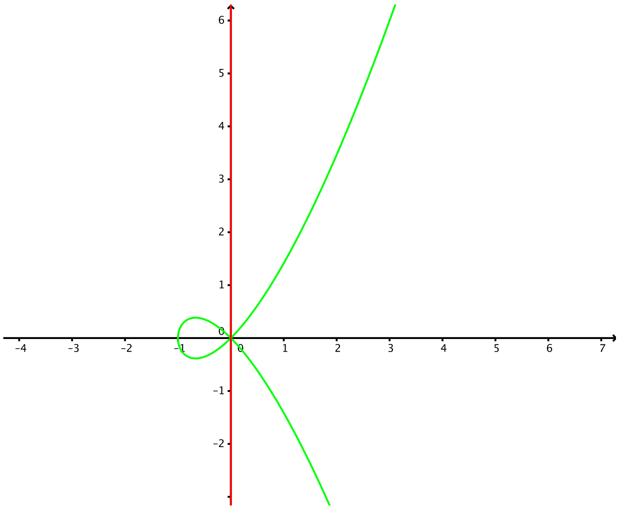

Figura 3.2: Traccia reale di $V(f)$

Nella figura 3.2 sono mostrate con colori diversi le componenti irriducibili di $x^4 + x^3 - xy^2 = 0$.

Bibliografia

[1] Reid M., Undergraduate Algebraic Geometry, Cambridge University Press, 1988.

[2] Atiyah M. F. and Macdonald I. G., Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] Hartshorne R., Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

Ringraziamenti

Ho iniziato questo percorso più di tre anni fa, probabilmente in maniera molto ingenua e inconsapevole. Non ho mai avuto un sogno nel cassetto che mi spingesse a scegliere una strada piuttosto che un'altra, e all'inizio mi sono solo affidata a ciò che sentivo più piacevole fare. Durante questi anni ho avuto molti ripensamenti e mi sono spesso chiesta se la Matematica fosse veramente la via giusta per me. Una risposta, in realtà, non l'ho ancora trovata.

Il primo doveroso ringraziamento va a Monica, impeccabile professoressa e persona di grande spessore culturale, che mi ha permesso di poter lavorare con Davide e ha incoraggiato la nostra collaborazione.

Ringrazio la mia speciale Famiglia che mi ha sempre sostenuta nei momenti difficili, spronata quando mi sono trovata di fronte a dei vicoli ciechi ed elogiata quando sono riuscita ad ottenere dei risultati importanti. Mamma e papà, con tanta devozione e pazienza siete riusciti a crearla e ad alimentarla, fino a renderla un focolare accogliente e un rifugio sicuro su cui poter fare affidamento. È in questi casi che mi rendo conto di essere terribilmente fortunata; voi mi avete cresciuta, educata alle emozioni e resa una persona con delle certezze. So di non essere sempre stata una studentessa modello (e non solo ...), ma spero di avervi reso, almeno un po', fieri di me. Grazie a voi, Laura e Giulia, che avete saputo rendere più dolci i momenti amari di questo percorso. Essere vostra sorella è una delle mie gioie più grandi e, quando penso a noi tre, il futuro fa sempre meno paura. Voi siete le mie persone.

Grazie a te, Giovanni, che sei tutto. Sei un fidanzato, un amico, un fratello. Mi hai preso per mano dall'inizio di questo percorso e mi sei sempre stato vicino. Hai saputo credere in me anche quando io non ci riuscivo, mi hai fatto riflettere quando ho avuto dei momenti di sbandamento e hai gioito con me quando ho finalmente ritrovato un po' di pace. In questi anni ho capito che non è poi così scontato avere una persona con cui sostenersi a vicenda, con cui condividere non solo gioie, ma anche, e soprattutto, preoccupazioni e delusioni. Tu sei stato tutto, e forse anche più di quello che in certi momenti meritavo.

Un ringraziamento speciale va ai miei coinquilini, Marco, Francesca, Tania, Barbara, e la nuova arrivata Lucia. Avete condiviso con me la quotidianità e in poco tempo avete imparato a conoscermi. Insieme a voi ho capito che il clima dentro le mura di casa è fondamentale per avere una vita serena e produttiva; insieme a voi ho capito che non sempre, per raggiungere la propria famiglia, c'è bisogno di prendere un treno, ma la famiglia è ovunque lo vogliamo noi. Voi siete la mia seconda Famiglia.

Grazie infinite alle mie amiche più care; ognuna di voi è stata, a suo modo, fondamentale. Francesca, hai saputo insegnarmi che cosa significa vivere con spensieratezza e che affrontare qualsiasi situazione, anche la più dura, con un sorriso, è sempre meglio che abbattersi e non reagire. Tu sei una persona forte. Maria Chiara, sei stata una fedele spalla e il tuo continuo prodigarti per il prossimo mi ha spronata a stringere i denti nei momenti più difficili e a credere che, se si è in grado di portare pazienza, le soddisfazioni arrivano sempre; Sofia, sei stata una sorpresa; col tuo modo di essere mi hai insegnato che la diversità può diventare una grande fonte di ricchezza e che spesso le persone possono stupirci, bisogna solo imparare a conoscerle; Francesca, la devozione che hai per il tuo lavoro per me è sempre stata di grande esempio; la passione e la professionalità che metti ogni giorno in ciò che fai mi fa credere fermamente che ognuno di noi può diventare qualcosa di grande, se si perseguono con costanza i propri obbiettivi; Jasmina, mi hai insegnato che l'amicizia supera davvero qualsiasi distanza di spazio e di tempo; ogni volta che ci incontriamo ti trovo cambiata, e capisco quanto sia cambiata anche io insieme a te. Sei lo specchio della mia crescita.

Grazie a tutti i miei amici Scout, in particolare a Serena, Aurora ed Elisabetta che hanno intrapreso insieme a me questa impegnativa, ma impagabile, avventura con le Coccinelle. Con voi ho capito che l'unione fa la forza, e noi insieme siamo una squadra insuperabile.

Grazie ai miei compagni di università, che hanno condiviso con me preoccupazioni e soddisfazioni; siete stati una delle motivazioni (in certi momenti forse l'unica ...) che mi hanno spinta ogni giorno a stringere i denti.

Grazie alle mie adorate compagne di danza, con cui ho scoperto di avere una grande passione in comune: l'Africa.

Grazie a tutti voi che avete deciso di condividere questo importante traguardo con me; la vostra presenza mi ha incoraggiata ed emozionata. Se siete qui oggi significa che abbiamo percorso insieme un pezzo di strada, anche se piccolo, e anch'esso è stato fondamentale.

L'ultimo ringraziamento, ma non per questo il meno importante, va a te Davide, che mi sei stato costantemente vicino in questo percorso. Hai sempre creduto in me e nelle mie capacità, più di quanto non lo facessi io stessa; mi hai dato la possibilità di mettermi in gioco e questo mi ha permesso di crescere tanto, sia professionalmente che personalmente. Ho trovato in te un punto di riferimento, un aiuto fondamentale ed un amico su cui poter contare. Ti ringrazio perché lavorare insieme a te mi ha reso una persona migliore.

Poco tempo fa, su un banco del mio Dipartimento ho letto una citazione di un celebre professore: *La Matematica è giusta ed imparziale.*
Nella Matematica non ho trovato delle risposte, ma ci ho trovato un modo di essere.