

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Matematica

**Ellissoide di inerzia, equazioni di  
Eulero e applicazioni al moto alla  
Poinsot e ai fenomeni giroscopici.**

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.  
Emanuela Caliceti

Presentata da:  
Martina Cristiani

Sessione III  
Anno Accademico 2014-2015



*Ai miei genitori e ai miei nonni  
Che mi hanno sempre sostenuta in questo percorso.*



# Indice



# Introduzione

Lo scopo di questa tesi è innanzitutto l'analisi di alcuni importanti aspetti matematici nella trattazione del moto del corpo rigido.

In particolare, dopo aver illustrato i risultati teorici principali, quali il teorema di König e le equazioni cardinali della dinamica, che consentono di ricondurre il generico caso di un corpo rigido libero a quello di un corpo rigido con un punto fisso, e quindi dotato di uno stato cinetico di rotazione, viene trattata la nozione di momento d'inerzia, alla base della rappresentazione degli elementi fondamentali per lo studio del moto di un qualunque sistema meccanico: l'energia cinetica e il momento angolare. Da qui si passa ad illustrare la struttura centrale per il calcolo dei momenti d'inerzia: l'*ellissoide d'inerzia*, rappresentato algebricamente dalla corrispondente *matrice d'inerzia*.

Successivamente, l'introduzione degli angoli di Eulero per rappresentare la configurazione di un sistema di riferimento cartesiano rispetto ad un altro (fisso) con l'origine in comune, consente di pervenire alle equazioni di Eulero e alla completa risoluzione matematica del problema della dinamica del corpo rigido attraverso un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Nella seconda parte di questa tesi vengono illustrate alcune applicazioni degli aspetti teorici precedentemente analizzati. In particolare viene studiato il caso del moto alla Poinsot, riferito ad un corpo rigido a struttura giroscopica. Infine vengono illustrati i fenomeni giroscopici, analizzando anche l'esempio più classico rappresentato dal moto della trottola.

Questa tesi è articolata in tre capitoli. Nel primo viene introdotto tutto l'apparato teorico alla base dello studio del moto del corpo rigido.

Nel secondo vengono introdotte le nozioni di ellissoide di inerzia e di matrice di inerzia, e se ne studiano caratteristiche e proprietà, concludendo poi lo studio tecnico del moto del corpo rigido con le equazioni di Eulero.

Infine nel terzo capitolo si passa alle applicazioni, attraverso lo studio del moto alla Poinsot e di fenomeni giroscopici.

Nella stesura dei primi due capitoli si è principalmente fatto riferimento ai trattati [?] e [?]. Nell'ultimo capitolo, oltre al testo [?], è stata utilizzata

anche la referenza [?].

Per qualsiasi approfondimento sui dettagli che, per esigenze di sintesi, sono stati omessi, si rinvia il lettore al testo [?].



# Capitolo 1

## La meccanica del corpo rigido.

### 1.1 I vettori della meccanica razionale.

In questa tesi un generico vettore dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  su  $\mathbb{R}$  delle terne orientate di numeri reali sarà identificato con una lettera minuscola sormontata da una freccia, ovvero  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \in \mathbb{R}^3$ . Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano fisso con origine in  $O = (0, 0, 0)$ ; il vettore  $\vec{a}$  sarà identificato con il punto  $P$  di coordinate  $(a_x, a_y, a_z)$  e con la classe d'equivalenza dei segmenti orientati  $\vec{PO} \equiv P - O$ , rappresentata dal segmento orientato avente origine in  $O$  e secondo estremo  $P$ . Tale classe è caratterizzata da un modulo  $|\vec{a}|$  (lunghezza del segmento  $\vec{OP} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ ), una direzione (quella della retta congiungente i punti  $O$  e  $P$ ) e un verso (quello che da  $O$  va verso  $P$ ). Due segmenti  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$  sono equivalenti se hanno stesso modulo, stessa direzione e stesso verso.

**Definizione 1.1.** *Dati  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  e  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  due vettori dello spazio ordinario  $\mathbb{R}^3$ , si chiama prodotto scalare tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  il seguente numero reale*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

*Si chiama prodotto vettoriale di  $\vec{a}$  per  $\vec{b}$  il seguente vettore di  $\mathbb{R}^3$*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, -a_x b_z + a_z b_x, a_x b_y - a_y b_x) = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Se rappresentiamo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  come segmenti orientati è facile verificare che

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

dove  $\varphi$  è l'angolo compreso fra i due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Analogamente il modulo di  $\vec{a} \times \vec{b}$  è dato da

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi;$$

la direzione di  $\vec{a} \times \vec{b}$  è perpendicolare al piano individuato dai due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , mentre il verso è determinato dalla regola della mano destra, ossia tale che  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$  rappresenta una terna destra.

Indichiamo la base ortonormale canonica di  $\mathbb{R}^3$  con  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , terna di vettori orientati rispettivamente come gli assi  $X, Y, Z$ , ossia  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Avremo quindi che la rappresentazione cartesiana di  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  sarà data da  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (\vec{a} \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k}$ .

## 1.2 Corpo rigido: generalità.

**Definizione 1.2** (Corpo rigido). *Chiamiamo corpo rigido  $\mathcal{C}$  un sistema meccanico costituito da infiniti punti materiali rigidamente collegati tra loro, cioè tali che la distanza tra due qualunque di essi è costante nel tempo*

$$|P - Q| = \text{cost.}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{C}$$

Conoscere il moto di un corpo rigido significa che l'equazione vettoriale del moto  $P = P(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è nota per ogni punto  $P \in \mathcal{C}$ . In questo contesto con la lettera  $t$  indichiamo la variabile temporale.

Tenendo in considerazione la condizione di rigidità, si ha il seguente

**Teorema 1.1.** *La configurazione di un corpo rigido è nota quando sono date la posizione di ogni punto del corpo all'istante iniziale  $t_0 \in \mathbb{R}$  e quella di tre punti di  $\mathcal{C}$  non allineati in ogni istante successivo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo di conoscere la posizione iniziale di ogni punto del corpo all'istante  $t_0$  ed il moto di  $A, B, C$ , tre punti del corpo non allineati. Sia  $P \neq A, B, C$  un generico punto del corpo di cui vogliamo conoscere la posizione in un istante  $t \geq t_0$ . Si osserva che  $A_0, B_0, C_0, P_0$ , configurazione iniziale di  $A, B, C, P$  rispettivamente, costituiscono i vertici di un tetraedo che sappiamo essere rigido per il vincolo di rigidità che garantisce il mantenimento della distanza tra i punti del corpo costante nel tempo. Quindi al generico istante  $t$  avremo che, una volta sovrapposto i vertici  $A_0, B_0, C_0$  ai vertici  $A(t), B(t), C(t)$ , verrà automaticamente individuata la posizione  $P(t)$  del punto  $P$  all'istante  $t$  del quarto vertice del tetraedo.  $\square$

**Osservazione 1.** Abbiamo quindi dimostrato che, per conoscere il moto di un corpo rigido, basta conoscere la posizione di tre punti non allineati in ogni istante, cioè occorre conoscere nove parametri. Ricordando però che i tre punti, appartenendo al corpo, sono rigidamente collegati tra loro, otteniamo che di questi parametri solo sei sono indipendenti, cioè il *grado di libertà* del corpo  $\mathcal{C}$  si riduce a sei. I sei parametri che vengono scelti, in base alle situazioni, vengono chiamati *parametri lagrangiani*.

### 1.3 Cinematica del corpo rigido.

Lo studio della cinematica del corpo rigido viene effettuato in riferimento ad un sistema  $(O, X, Y, Z)$  detto sistema fisso, mediante l'aiuto del sistema  $(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$  solidale con il corpo rigido.

**Definizione 1.3** (Sistema solidale). *Chiamiamo sistema solidale o mobile con il corpo rigido un sistema rigidamente collegato a tale corpo, quindi con origine  $O_1$  coincidente con un punto del corpo rigido e assi rigidamente collegati ad esso, ossia tali che ogni punto del corpo rigido mantenga la distanza dagli assi costante nel tempo.*

**Osservazione 2.** Avremo quindi che il corpo rigido rispetto al sistema solidale  $(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$  risulterà essere immobile e che il moto di tale corpo rispetto al sistema fisso  $(O, X, Y, Z)$  potrà essere studiato mediante l'osservazione del moto del sistema solidale rispetto a quello fisso.

Introduciamo quindi una base ortonormale  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  per il sistema solidale (che d'ora in poi chiameremo per semplicità  $(O_1)$ , mentre il sistema fisso lo indicheremo con  $(O)$ ). Ogni punto  $P$  avrà dunque coordinate  $(x_1, y_1, z_1)$  fisse nel tempo rispetto ad  $(O_1)$  e coordinate  $(x, y, z)$  variabili rispetto ad  $(O)$ . La relazione tra i due sistemi di coordinate può essere determinata mediante una trasformazione di coordinate, nota in ogni istante la posizione del sistema solidale rispetto al fisso. A tale scopo occorre conoscere in ogni istante la posizione di  $O_1 = (a, b, c)$ , origine del sistema mobile, rispetto al sistema fisso e i coseni direttori delle rette  $O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1$ , determinati dagli angoli formati dagli assi mobili con ciascuno dei tre assi fissi:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Questi possono essere rispettivamente visti come le coordinate di  $i_1, j_1, k_1$  rispetto al sistema  $(O)$ . Trattandosi di una base ortonormale si ha

$$\begin{cases} \vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0 \\ \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases}$$

Si ha quindi che i nove coseni direttori possono essere espressi mediante tre parametri indipendenti. Perciò per determinare la posizione di  $(O_1)$  rispet-

to al sistema fisso basta conoscere le tre componenti dell'origine  $O_1$  e i tre parametri indipendenti che determinano i coseni direttori, dunque, come già osservato, bastano sei parametri indipendenti. Trasformando ora le coordinate cartesiane di un generico punto  $P$  appartenente al corpo rigido avremo il moto di tale punto. Per fare ciò si utilizza l'identità:

$$P - O = (P - O_1) + (O_1 - O). \quad (1.1)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} P - O &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ P - O_1 &= x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \\ O_1 - O &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \end{aligned}$$

la (??) può essere così riscritta

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}. \quad (1.2)$$

Moltiplicando scalarmente tale relazione per  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  successivamente si otterrà

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ y = b + \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ z = c + \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1, \end{cases} \quad (1.3)$$

che rappresentano le equazioni del moto del punto  $P$ . Derivando rispetto al tempo la (??) otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{v}(P) &= \frac{d(P - O)}{dt} = \frac{d(P - O_1)}{dt} + \frac{d(O_1 - O)}{dt} = \\ &= x_1 \frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1 \frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1 \frac{d\vec{k}_1}{dt} + \frac{da}{dt}\vec{i} + \frac{db}{dt}\vec{j} + \frac{dc}{dt}\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

essendo  $\vec{v}(P)$  la velocità di  $P$  rispetto a  $(O)$ .

Vogliamo esplicitare le derivate rispetto al tempo di  $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ . Ricordiamo che la derivata di un vettore costante in modulo è ortogonale al vettore stesso, si ha

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \perp \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \perp \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \perp \vec{k}_1. \quad (1.5)$$

**Proposizione 1.2.** *Siano  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  tali che  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  (ossia  $\vec{a}, \vec{b}$  sono perpendicolari), allora  $\exists \vec{c}$  tale che  $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$ .*

*Dimostrazione.* Prendiamo un sistema di coordinate cartesiane  $(O, X, Y, Z)$  con gli assi  $Y$  e  $Z$  rispettivamente paralleli e nello stesso verso di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Allora si avrà, chiamando la base ortonormale di riferimento  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $\vec{a} = a\vec{j}$ ,  $\vec{b} = b\vec{k}$ , con  $a = |\vec{a}|$  e  $b = |\vec{b}|$ . Perciò, posto  $\vec{c} = \frac{b}{a}\vec{i}$ , si ha

$$\vec{c} \times \vec{a} = \frac{b}{a}\vec{i} \times a\vec{j} = b\vec{k} = \vec{b},$$

e ciò prova la tesi.  $\square$

Dalle (??) si ottiene perciò che  $\exists \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}^3$  tali che

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \omega_1 \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \omega_2 \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \omega_3 \times \vec{k}_1.$$

**Teorema 1.3.** *Si ha che  $\exists \vec{\omega}$  tale che*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1. \end{cases} \quad (1.6)$$

*Dimostrazione.* Ci limitiamo a dimostrare l'unicità di  $\vec{\omega}$ . Per l'esistenza si veda ad esempio il testo [?]. Supponiamo per assurdo che  $\exists \vec{\omega}, \vec{\omega}' \in \mathbb{R}^3$  con  $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}'$  che verificano la tesi del teorema.

Dalle (??) si ha quindi che  $\vec{\omega} \times \vec{i}_1 = \vec{\omega}' \times \vec{i}_1$ , cioè  $(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{i}_1 = 0$ . Quindi poichè  $\vec{i}_1 \neq 0$  e  $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}'$  si deve avere che  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  è parallelo a  $\vec{i}_1$ .

Analogamente si avrà che  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  sarà parallelo a  $\vec{j}_1$  e a  $\vec{k}_1$ . Ciò è assurdo, poichè  $\vec{\omega} - \vec{\omega}'$  non può essere parallelo a vettori tra loro ortogonali. Si ha quindi un assurdo, dunque deve essere  $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$ .  $\square$

**Definizione 1.4.** *Il vettore  $\vec{\omega}$  del Teorema 1.3, caratterizzato dalle (??) è detto vettore di Poisson o anche velocità angolare del sistema  $(O_1)$  rispetto al sistema  $(O)$ . Le (??) si dicono equazioni di Poisson.*

Abbiamo quindi, mettendo insieme tutte le nuove informazioni ottenute, che la (??) può essere così riscritta

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1) + \vec{v}(O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}. \quad (1.7)$$

Tale formula rappresenta la *formula fondamentale della cinematica del corpo rigido*.

Il moto del corpo rigido può essere caratterizzato attraverso tre stati cinetici fondamentali

**Definizione 1.5.** Si dice che un corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno stato cinetico di traslazione se, ad un particolare istante, tutti i punti hanno la stessa velocità, ovvero

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1), \quad \forall P, O_1 \in \mathcal{C}.$$

È facile dimostrare che lo stato cinetico è di traslazione se e solo se, nell'istante considerato, si ha

$$\vec{\omega} = 0.$$

**Definizione 1.6.** Il corpo rigido  $\mathcal{C}$  passa per uno stato cinetico di rotazione se e solo se, in un dato istante, esistono due punti  $A$  e  $B$  fermi, cioè con velocità nulla. Dal vincolo di rigidità segue che tutta la retta  $AB$  è ferma. Essa viene detta asse di rotazione.

Prendendo  $O_1$  sull'asse di rotazione la (??) si semplifica così

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathcal{C}. \quad (1.8)$$

Si può facilmente vedere che la (??) è anche condizione sufficiente affinché lo stato cinetico sia di rotazione. Infatti se vale la (??) è immediato verificare che la retta passante per  $O_1$  e parallela a  $\vec{\omega}$  è fissa e rappresenta l'asse di rotazione.

**Osservazione 3.** Dalla (??) segue che nel caso più generale lo stato cinetico di  $\mathcal{C}$  è una composizione di traslazione e rotazione. Si parla dunque di stato cinetico di *rototraslazione*.

**Definizione 1.7.** Lo stato cinetico di  $\mathcal{C}$  si dice *elicoidale* se  $\vec{v}(O_1)$  è parallela a  $\vec{\omega}$ .

**Teorema 1.4.** Un corpo rigido in moto generico passa in ogni istante per uno dei tre stati cinetici fondamentali: traslazione (se  $\vec{\omega} = 0$ ), rotazione (se  $\exists O_1, : \vec{v}(O_1) = 0$ ), elicoidale (in tutti gli altri casi).

## 1.4 Dinamica del corpo rigido.

Per semplicità assumiamo che il corpo rigido sia formato da  $N$  punti materiali  $P_1, \dots, P_N$  dotati rispettivamente di masse  $m_1, \dots, m_N$  e velocità  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N$ . Tutto quanto segue può essere facilmente esteso al caso di infiniti punti.

**Definizione 1.8** (Quantità di moto). Chiamiamo *quantità di moto del corpo* il vettore  $\vec{Q} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s$ .

**Definizione 1.9** (Momento della quantità di moto). Dato  $O \in \mathbb{R}^3$  il vettore  $\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s)$  è detto momento della quantità di moto, o momento angolare, rispetto ad  $O$ .

**Definizione 1.10** (Energia cinetica). La quantità  $T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2$  è detta energia cinetica del corpo.

**Definizione 1.11.** Data una forza  $(\vec{F}, P)$ , che può essere una forza attiva o una reazione vincolare, e un polo generico  $O \in \mathbb{R}^3$  il vettore

$$\vec{\Omega}(O) := \vec{F} \times (O - P)$$

si chiama momento della forza rispetto ad  $O$ .

Indichiamo con  $\vec{F}_e$  e  $\vec{\Phi}_e$  rispettivamente il vettore risultante di tutte le forze attive esterne e di tutte le reazioni vincolari esterne agenti sui punti di  $\mathcal{C}$ . Dato  $O \in \mathbb{R}^3$  indichiamo con  $\vec{\Omega}_e(O)$  e  $\vec{\Psi}_e(O)$  rispettivamente il momento risultante delle forze attive esterne ed il momento risultante delle reazioni vincolari esterne, rispetto al polo  $O$ .

Infine indichiamo con  $G$  il baricentro del sistema meccanico, definito da

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^N m_s (P_s - O)}{M}, \quad (1.9)$$

con  $M = \sum_{s=1}^N m_s$ .

Si può dimostrare il seguente importante risultato, che vale per un qualunque sistema meccanico, non solo per i corpi rigidi.

**Teorema 1.5** (Equazioni cardinali della dinamica). Sia  $O \in \mathbb{R}^3$  tale da soddisfare una delle seguenti condizioni:

1.  $O = G$ ;
2.  $\vec{v}(O)$  è parallela a  $\vec{v}(G)$ ;
3.  $\vec{v}(O) = 0$ .

Si hanno le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}_e + \vec{\Phi}_e \\ \frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \vec{\Omega}_e(O) + \vec{\Psi}_e(O), \end{cases} \quad (1.10)$$

dette equazioni cardinali della dinamica.

**Osservazione 4.** Tali equazioni derivano in modo diretto dalle definizioni di quantità di moto e di momento di quantità di moto a partire dalla legge di Newton che governa la dinamica di un punto materiale. Per i dettagli si veda il testo [?].

**Definizione 1.12** (Momento d'inerzia). *Si chiama momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse assegnato la seguente quantità scalare*

$$J = \sum_{s=1}^N m_s r_s^2,$$

dove  $r_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ , rappresenta la distanza di  $P_s$  dalla retta data.

**Osservazione 5.** Si consideri un corpo rigido nell'istante in cui passa per uno stato cinetico di rotazione attorno ad un certo asse con velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Se  $\vec{v}_s$  è la velocità del generico punto  $P_s$  di massa  $m_s$  si ha che  $v_s = \omega r_s$ , con  $r_s$  la distanza tra il punto e l'asse. Si ha allora

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \omega^2 r_s^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{s=1}^N m_s r_s^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (1.11)$$

**Teorema 1.6** (Teorema di König). *Per l'energia cinetica di un generico sistema meccanico si ha*

$$T = \frac{M}{2} v_G^2 + T_G, \quad (1.12)$$

dove  $\vec{v}_G$  indica la velocità del baricentro  $G$  e  $T_G$  è l'energia cinetica del corpo rispetto al sistema baricentrico avente origine in  $G$  e in moto di traslazione rispetto ad  $(O)$ . Più precisamente,

$$T_G = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_{1s}^2,$$

dove  $v_{1s}$  è la velocità del punto  $P_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ , rispetto al sistema baricentrico  $(G)$ .

Dunque l'energia cinetica totale del sistema è data dall'energia cinetica che il corpo avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro sommata all'energia cinetica del corpo rispetto al sistema baricentrico.

*Dimostrazione.* Dal teorema di composizione delle velocità nel moto relativo di un punto materiale (si veda il testo [?] per ogni approfondimento), possiamo scomporre la velocità  $\vec{v}_s$  di un generico punto come la velocità del baricentro sommata alla velocità  $v_{1s}$  del punto relativa al baricentro (ovvero alla velocità del punto rispetto al sistema baricentrico), ossia



$\vec{v}_s = \vec{v}_G + v_{1_s}$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ . Quindi si otterrà

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s (v_G + v_{1_s})^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_{1_s}^2 + \sum_{s=1}^N m_s v_{1_s} \cdot \vec{v}_G = \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + T_G + \vec{Q}_1 \cdot \vec{v}_G, \end{aligned} \quad (1.13)$$

dove  $\vec{Q}_1 = \sum_{s=1}^N m_s v_{1_s}$  rappresenta la quantità di moto del corpo rispetto a ( $G$ ). Dalla definizione di baricentro (??) si ottiene, derivando rispetto al tempo,

$$M \vec{v}_G = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s,$$

ossia

$$\vec{Q} = M \vec{v}_G. \quad (1.14)$$

Riscrivendo la (??) nel sistema ( $G$ ) otteniamo

$$\vec{Q}_1 = M v_{1_G} = 0 \quad (1.15)$$

essendo nulla la velocità  $v_{1_G}$  di  $G$  rispetto al sistema baricentrico. Combinando ora la (??) con la (??) si ottiene

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + T_G,$$

cioè la (??). □

**Osservazione 6.** Sappiamo che per un corpo rigido, applicando la (??) con  $O_1 = G$ , vale  $\vec{v}_s = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (P_s - G)$ , quindi secondo la notazione utilizzata nella dimostrazione del teorema di König  $v_{1_s} = \vec{\omega} \times (P_s - G)$ , cioè  $v_{1_s}$  viene rappresentato dallo stato cinetico di rotazione attorno ad un asse  $r$  passante per il baricentro. Dunque avremo che

$$T_G = \sum_{s=1}^N \frac{m_s v_{1_s}^2}{2} = \frac{J_G \omega^2}{2},$$

dove  $J_G$  sta ad indicare il momento di inerzia rispetto all'asse  $r$ . Ciò è coerente con il fatto che rispetto al sistema baricentrico il corpo rigido ha un punto fisso,  $G$ , e pertanto lo stato cinetico è di rotazione. Avremo dunque

$$T = \frac{M v_G^2}{2} + \frac{J_G \omega^2}{2},$$

cioè l'energia cinetica di un corpo rigido vale l'energia cinetica che esso avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel baricentro sommata all'energia di rotazione attorno al baricentro.



## Capitolo 2

# Ellissoide d'inerzia ed equazioni di Eulero.

Consideriamo un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con un punto fisso  $O_1$  passante in ogni istante per uno stato cinematico di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}$ . Abbiamo visto nel capitolo precedente, formula (??), che la sua energia cinetica è data da  $T = \frac{J\omega^2}{2}$ , dove  $J$  è il momento di inerzia rispetto all'asse istantaneo di rotazione passante per  $O_1$ . Procediamo ora ad illustrare un metodo per il calcolo di  $J$  più agevole rispetto alla definizione.

Siano  $x_s, y_s, z_s$  le coordinate di  $P_s$  rispetto ad un sistema di riferimento solidale con  $\mathcal{C}$ , con origine in  $O_1$ , e  $p, q, r$  le componenti della velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto a tale sistema di riferimento. Utilizzando la formula della velocità di un corpo rigido in stato cinetico di rotazione, ossia  $\vec{v}_s := \vec{v}(P_s) = \vec{\omega} \times (P_s - O_1)$ , avremo che

$$v_{sx} = qz_s - ry_s, \quad v_{sy} = rx_s - pz_s, \quad v_{sz} = py_s - qx_s$$

da cui

$$\begin{aligned} v_s^2 &= v_{sx}^2 + v_{sy}^2 + v_{sz}^2 = (qz_s - ry_s)^2 + (rx_s - pz_s)^2 + (py_s - qx_s)^2 = \\ &= p^2(y_s^2 + z_s^2) + q^2(x_s^2 + z_s^2) + r^2(x_s^2 + y_s^2) - 2pqx_sy_s - 2prx_sz_s - 2qry_sz_s. \end{aligned}$$

Allora l'energia cinetica del corpo varrà

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{s=1}^N m_s (y_s^2 + z_s^2) p^2 + \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + z_s^2) q^2 + \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2) r^2 + \right. \\ &\quad \left. - 2pq \sum_{s=1}^N m_s x_s y_s - 2pr \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s - 2qr \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s \right]. \end{aligned}$$

Denotando ora

$$A = \sum_{s=1}^N m_s (y_s^2 + z_s^2), \quad B = \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + z_s^2), \quad C = \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2),$$

$$A' = \sum_{s=1}^N m_s x_s y_s, \quad B' = \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s, \quad C' = \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s,$$

si ottiene

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr). \quad (2.1)$$

Essendo  $J\omega^2 = 2T$ , si ricava che

$$J\omega^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'pq - 2B'pr - 2C'qr.$$

Ricordando ora che  $p = \omega\alpha$ ,  $q = \omega\beta$ ,  $r = \omega\gamma$  dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono i coseni direttori di  $\vec{\omega}$  rispetto agli assi coordinati, avremo

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2A'\alpha\beta - 2B'\alpha\gamma - 2C'\beta\gamma. \quad (2.2)$$

**Osservazione 7.**  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono i momenti di inerzia rispetto agli assi coordinati  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  rispettivamente.  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sono detti *momenti di deviazione o centrifughi*.

**Definizione 2.1** (Matrice d'inerzia). *Chiamiamo matrice d'inerzia relativa al centro  $O_1$  associata al corpo rigido la matrice*

$$I = \begin{bmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

**Osservazione 8.** La matrice (??) è utile per il calcolo del momento di inerzia del corpo rispetto a rette uscenti da uno stesso punto con direzione diversa seconde l'equazione (??).

**Osservazione 9.** La matrice d'inerzia risulta essere simmetrica e definita positiva, perciò tale matrice risulterà essere diagonalizzabile e avrà autovalori reali positivi e gli autovettori determinano una base di  $\mathbb{R}^3$ . Sappiamo che ad ogni matrice simmetrica definita positiva può essere associata una quadrica il cui centro coincide con l'origine degli assi ai quali si riferisce la matrice. Tale quadrica risulta essere un ellissoide.

**Definizione 2.2** (Ellissoide d'inerzia.). *La quadrica associata ad  $I$ , matrice d'inerzia, è chiamata ellissoide d'inerzia. La sua equazione è data da*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2A'xy - 2B'xz - 2C'yz = 1. \quad (2.4)$$

*Se il centro del sistema di riferimento coincide col baricentro  $G$  del corpo allora l'ellissoide è detto ellissoide centrale d'inerzia.*

**Osservazione 10.** Possiamo mostrare che la (??) rappresenta un ellissoide intersecando la quadrica con una generica retta passante per l'origine  $O_1$  e di coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$ , che risulterà essere descritta dalle seguenti equazioni parametriche

$$x = u\alpha, \quad y = u\beta, \quad z = u\gamma, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo queste espressioni nella (??) otteniamo, ricordando la (??),  $Ju^2 = 1$ , ovvero  $u = \frac{1}{\pm\sqrt{J}}$ . Quindi la retta interseca la quadrica in due punti opposti  $L$  e  $L'$  di coordinate rispettivamente  $\frac{\alpha}{\sqrt{J}}, \frac{\beta}{\sqrt{J}}, \frac{\gamma}{\sqrt{J}}$  e  $\frac{\alpha}{-\sqrt{J}}, \frac{\beta}{-\sqrt{J}}, \frac{\gamma}{-\sqrt{J}}$ . Il quadrato delle distanze dei due punti dall'origine  $O_1$  vale  $O_1L^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{J} = \frac{1}{J}$ . Quindi  $O_1L = \frac{1}{\sqrt{J}}$  ed essendo  $J$  sempre positiva abbiamo che comunque si prendano  $\alpha, \beta, \gamma$  la quantità  $O_1L$  sarà sempre definita e finita, perciò la quadrica risulterà non avere punti propri; sarà dunque chiusa in una regione limitata dello spazio e sappiamo che l'unica quadrica con tali proprietà è proprio l'ellissoide.

Da quanto appena visto si può osservare che un semidiametro dell'ellissoide d'inerzia vale l'inverso della radice quadrata del momento d'inerzia rispetto al semidiametro o anche che il momento d'inerzia rispetto ad un asse vale l'inverso del quadrato del semidiametro dell'ellissoide rispetto a tale asse. Abbiamo quindi che l'ellissoide d'inerzia dà la rappresentazione geometrica dei momenti d'inerzia di un corpo rispetto ad assi concorrenti in uno stesso punto.

**Definizione 2.3.** *Chiamiamo asse principale d'inerzia relativo alla matrice d'inerzia  $I$ , una retta passante per  $O_1$  origine del sistema di riferimento e avente la direzione di un autovettore di  $I$ .*

Gli assi principali d'inerzia risultano essere perpendicolari tra loro. Dunque se si riferisce  $I$  ad un sistema cartesiano con assi coincidenti con gli assi principali d'inerzia si ha che

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

e per una generica retta di coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$

$$J = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2. \quad (2.6)$$

Per l'energia cinetica  $T$  si ottiene dalla (??)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \quad (2.7)$$

È dunque molto utile conoscere gli assi principali d'inerzia e prendere il sistema di riferimento con assi coincidenti con quelli principali d'inerzia.

**Osservazione 11.** Poichè per quanto visto l'ellissoide d'inerzia dipende dalla scelta di  $O_1$  origine degli assi dell'ellissoide, allora in generale si avrà che un asse d'inerzia rispetto ad un punto non lo sarà rispetto ad altri punti.

**Teorema 2.1.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta sia asse principale di inerzia rispetto a tutti i suoi punti è che la retta contenga il baricentro  $G$  del corpo.*

*Dimostrazione.* Sia dato il sistema cartesiano  $(O, X, Y, Z)$  e consideriamo  $O_1 \in Z$  come origine di un secondo sistema di riferimento con assi  $X_1, Y_1$  rispettivamente paralleli a  $X, Y$ . Sia  $d$  la distanza tra  $O$  e  $O_1$ , allora avremo che

$$\begin{cases} x_s = x_{1s} \\ y_s = y_{1s} \\ z_s = z_{1s} + d, \end{cases}$$

dove  $(x_s, y_s, z_s)$  sono le coordinate del generico punto  $P_s$  del corpo,  $\forall s = 1, \dots, N$ , rispetto al sistema  $(O, X, Y, Z)$  e  $(x_{1s}, y_{1s}, z_{1s})$  le coordinate di  $P_s$  rispetto a  $(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ .

Indichiamo ora con  $B', C', B'_1, C'_1$  rispettivamente i momenti di deviazione rispetto  $XZ, YZ, X_1Z, Y_1Z$  e sia  $M = \sum_{s=1}^N m_s$  la massa del corpo. Ricordando che  $x_G = \frac{\sum_{s=1}^N m_s x_s}{M}$ ,  $y_G = \frac{\sum_{s=1}^N m_s y_s}{M}$  sono le componenti del baricentro  $G$  rispettivamente lungo gli assi  $X$  e  $Y$ , avremo

$$B' = \sum_{s=1}^N m_s x_s z_s = \sum_{s=1}^N m_s x_s (z_{1s} + d) = \sum_{s=1}^N m_s x_s z_{1s} + d \sum_{s=1}^N m_s x_s = B'_1 + M x_G d,$$

$$C' = \sum_{s=1}^N m_s y_s z_s = \sum_{s=1}^N m_s y_s (z_{1s} + d) = \sum_{s=1}^N m_s y_s z_{1s} + d \sum_{s=1}^N m_s y_s = C'_1 + M y_G d.$$

Dunque se  $Z$  è asse principale di inerzia per tutti i suoi punti deve essere che  $B' = B'_1 = 0$ ,  $C' = C'_1 = 0$  che implica che  $x_G = 0$ ,  $y_G = 0$ , quindi  $G \in Z$ .

Viceversa, se  $G \in Z$ , con  $Z$  asse principale rispetto ad un punto  $O \in Z$ , si ha che  $B' = C' = 0$  e  $x_G = y_G = 0$ , allora  $B'_1 = C'_1 = 0$  rispetto ad un qualunque altro punto  $O_1 \in Z$ , quindi  $Z$  è asse principale rispetto a tutti i suoi punti.  $\square$

**Osservazione 12.** Ricordiamo la formula del momento della quantità di moto rispetto ad un polo  $O$  :  $\vec{K}(O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s)$ . Se  $O$  è un punto fisso del corpo, si ha

$$\vec{v}_s = \vec{\omega} \times (P_s - O) = (p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}) \times (P_s - O), \quad (2.8)$$

Derivando la (??) rispetto a  $r$  si ha  $\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial r} = \vec{k} \times (P_s - O)$ , da cui

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial r} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \cdot \vec{k} \times (P_s - O) = \sum_{s=1}^N m_s \vec{v}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{k},$$

allora si ottiene  $K_z = \frac{\partial T}{\partial r}$ .

Analogamente otteniamo  $K_x = \frac{\partial T}{\partial p}$ ,  $K_y = \frac{\partial T}{\partial q}$ , ossia le componenti del momento della quantità di moto del corpo rigido lungo gli assi sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti della velocità angolare lungo gli assi stessi. Avremo, derivando necessariamente la (??) rispetto a  $p$ ,  $q$  e  $r$ , il seguente sistema

$$\begin{cases} K_x = Ap - B'q - C'r \\ K_y = -A'p + Bq - C'r \\ K_z = -B'p - C'q + Cr. \end{cases} \quad (2.9)$$

Nel caso in cui  $X, Y, Z$  coincidano con gli assi principali d'inerzia avremo che il sistema (??) si riduce a

$$\begin{cases} K_x = Ap \\ K_y = Bq \\ K_z = Cr. \end{cases} \quad (2.10)$$

Supponiamo ora che  $\vec{\omega}$ , che sappiamo avere la direzione dell'asse di rotazione del corpo, sia parallelo all'asse principale d'inerzia  $Z$ , allora  $p = q = 0$  e  $\vec{\omega} = r\vec{k}$ , dunque  $K_x = K_y = 0$  e  $K_z = Cr$ .

Indicando con  $J$  il momento d'inerzia  $C$  rispetto all'asse di rotazione avremo che

$$\vec{K} = J\vec{\omega}$$

, cioè, quando l'asse istantaneo di rotazione è parallelo ad un asse principale d'inerzia, il momento della quantità di moto è parallelo alla velocità angolare

e più precisamente vale la velocità angolare moltiplicata per il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.

A partire dalla (??) e sostituendo le (??) possiamo quindi scrivere l'energia cinetica in un altro modo

$$T = \frac{1}{2}(K_x p + K_y q + K_z r) = \frac{1}{2} \vec{K} \cdot \vec{\omega}.$$

Per il calcolo dei momenti di inerzia risulta di grande utilità il seguente

**Teorema 2.2** (Teorema di Huyghens.). *Il momento di inerzia  $J$  di un corpo rispetto ad un asse  $r$  equivale al momento di inerzia  $J_G$  del corpo rispetto ad un asse parallelo passante per il baricentro  $G$  del corpo sommato con il momento di inerzia, rispetto all'asse  $r$ , di tutta la masse del corpo  $M$  concentrata nel baricentro, ossia*

$$J = J_G + Md^2,$$

dove  $d$  indica la distanza tra i due assi paralleli.

*Dimostrazione.* Introduciamo un sistema di riferimento  $(O, X, Y, Z)$  con  $O \equiv G$  e consideriamo un secondo sistema di riferimento con assi  $X_1, Z_1$  rispettivamente paralleli a  $X, Z$  centrato in  $O_1 \in Y \equiv Y_1$ , sia  $d$  la distanza tra  $O$  e  $O_1$ , avremo allora

$$\begin{cases} x_{1s} = x_s \\ y_{1s} = y_s - d \\ z_{1s} = z_s. \end{cases}$$

Calcoliamo allora il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse  $Z_1$

$$\begin{aligned} J &= \sum_{s=1}^N m_s (x_{1s}^2 + y_{1s}^2) = \sum_{s=1}^N m_s [x_s^2 + (y_s - d)^2] = \\ &= \sum_{s=1}^N m_s (x_s^2 + y_s^2) + d^2 \sum_{s=1}^N m_s - 2d \sum_{s=1}^N m_s y_s. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Essendo  $O \equiv G$  avremo che l'ultima sommatoria sarà uguale a 0, poichè  $\sum_{s=1}^N m_s y_s = M y_G = 0$  se ci si riferisce a  $(O, X, Y, Z)$ . Inoltre la prima sommatoria nella (??) risulta essere il momento di inerzia rispetto all'asse  $Z$ ; si ottiene pertanto

$$J = J_G + Md^2.$$

□



Abbiamo quindi che conoscere il momento di inerzia di un corpo rispetto ad una retta  $r$  equivale a conoscere il momento di inerzia del corpo rispetto alla retta parallela passante per  $G$  baricentro. Quindi più in generale conoscendo il momento di inerzia di un corpo rispetto ad una retta sono determinati i momenti di inerzia del corpo rispetto a qualunque asse parallelo alla retta.

**Osservazione 13.** Noto l'ellissoide centrale di inerzia di un corpo è noto il momento di inerzia del corpo rispetto ad un qualunque asse dello spazio. Infatti con l'ellissoide centrale è possibile determinare il momento di inerzia rispetto ad un qualsiasi asse baricentrico ed applicando il teorema di Huyghens si ricava il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse non baricentrico.

Finora abbiamo riferito il moto di un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con punto fisso  $O_1$  ad un sistema di riferimento solidale con  $\mathcal{C}$ . Per riportare la rappresentazione ad un sistema di riferimento fisso con origine  $O \equiv O_1$  sono utili gli *angoli di Eulero*.

**Definizione 2.4** (Angoli di Eulero.). *Dato il sistema fisso  $(O)$ , consideriamo il sistema solidale con il corpo rigido  $(O_1)$  tale che  $O \equiv O_1$ . Chiamiamo linea dei nodi  $N$  la retta d'intersezione tra il piano  $XY$  ed il piano  $X_1Y_1$ , con verso tale che un osservatore diretto secondo  $N$  osservando l'asse  $Z$  veda l'asse  $Z_1$  alla sua sinistra. Chiamiamo  $\varphi$  l'angolo tra l'asse  $X_1$  ed  $N$ ,  $\psi$  l'angolo tra  $N$  e l'asse  $X_1$  e  $\theta$  l'angolo tra l'asse  $Z$  e l'asse  $Z_1$ . Tali angoli sono noti come angoli di Eulero. Gli angoli  $\theta, \varphi, \psi$  sono chiamati rispettivamente la nutazione, la longitudine e l'azimut.*

Conoscendo gli angoli di Eulero, resta determinata la posizione del sistema mobile rispetto al fisso. Quindi i nove coseni direttori degli assi del sistema mobile rispetto a quello fisso possono essere espressi in funzione degli angoli di Eulero.

Risulta molto utile esprimere le coordinate della velocità angolare di un corpo rigido in stato cinetico di rotazione mediante gli angoli di Eulero e le loro derivate temporali. Scomponiamo innanzitutto  $\vec{\omega}$  secondo le rette  $N, OZ, OZ_1$ . Abbiamo così scomposto lo stato cinetico di rotazione del corpo in tre stati cinetici di rotazione rispetto a tre diversi assi. La rotazione attorno all'asse  $N$  viene definita dall'angolo  $\theta$ , essendo l'azimut l'angolo di cui risulta ruotare l'asse  $Z_1$  intorno ad  $N$  partendo dall'asse  $Z$ . Nominiamo  $\vec{l}$  il versore della retta  $N$ ; abbiamo che la velocità angolare del moto di rotazione a cui risulta tangente lo stato cinetico attorno all'asse  $N$  è  $\theta\vec{l}$ . In modo analogo abbiamo che le rotazioni attorno ad  $OZ$  e  $OZ_1$  hanno rispettivamente velocità

angolati  $\dot{\psi}\vec{k}, \dot{\varphi}\vec{k}_1$ . Si ha quindi

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{l} + \dot{\psi}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k}_1.$$

Si può osservare che l'asse  $N$  forma con gli assi  $X_1, Y_1, Z_1$  gli angoli  $\varphi, \frac{\pi}{2} + \varphi, \frac{\pi}{2}$ ; dunque le componenti di  $\dot{\theta}\vec{l}$  rispetto al sistema mobile sono  $\dot{\theta} \cos \varphi, -\dot{\theta} \sin \varphi, 0$ . Sia ora  $N'$  la retta di intersezione tra il piano  $ZZ_1$  ed il piano  $X_1Y_1$  orientata in modo tale che un osservatore disposto lungo questa veda  $Z_1$  alla sinistra di  $Z$ . La retta  $N'$  risulterà essere normale a  $Z_1$  e ad  $N$  appartenendo al piano  $X_1Y_1$  e a  $ZZ_1$ ; formerà dunque con gli assi  $Z, X_1, Y_1$  gli angoli  $\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} - \varphi, \varphi$ , perciò il termine  $\dot{\psi}\vec{k}$  risulterà avere componenti  $\dot{\psi} \cos \theta$  secondo l'asse  $Z_1$  e  $\dot{\psi} \sin \theta$  secondo la retta  $N'$ . Quest'ultima componente può essere scomposta lungo gli assi  $X_1, Y_1$  rispettivamente come  $\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi$ . Mettendo assieme tutti i risultati ottenuti si ha, indicando con  $p, q, r$  le componenti di  $\vec{\omega}$  rispetto al sistema mobile che

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Tali equazioni sono dette *equazioni degli angoli di Eulero*.

## Capitolo 3

# Moto alla Poinsot e fenomeni giroscopici.

### 3.1 Moto di un corpo rigido con punto fisso e di un corpo rigido libero. Equazioni fondamentali.

Dato un sistema di riferimento fisso  $(O, X, Y, Z)$  ed un corpo rigido  $\mathcal{C}$  con punto fisso in  $O$  con relativo sistema di riferimento mobile  $(O, X_1, Y_1, Z_1)$  (anch'esso centrato in  $O$ ) diretto secondo gli assi principali d'inerzia del corpo passanti per  $O$  si ha che sarà possibile conoscere il moto di tale corpo in ogni istante sapendo la posizione del sistema mobile rispetto al sistema fisso, conoscendo, ad esempio, i tre angoli di Eulero  $\psi, \varphi, \theta$  fra i due sistemi. Sappiamo che tale corpo passerà in ogni istante per uno stato cinetico di rotazione. Sia quindi  $\vec{\omega}$  il vettore velocità angolare che definisce la rotazione del corpo e siano  $p, q, r$  le sue componenti rispetto al sistema mobile. Sappiamo dalla (??) che le componenti del momento della quantità di moto rispetto ad  $O$  sugli assi principali d'inerzia, che nel nostro caso risultano essere esattamente gli assi del sistema mobile, sono  $Ap, Bq, Cr$ . Dunque la derivata di  $\vec{K}(O)$  rispetto ad un osservatore  $(O_1)$  collegato con il sistema mobile sarà data da:

$$\left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 = A\dot{p}\vec{i}_1 + B\dot{q}\vec{j}_1 + C\dot{r}\vec{k}_1. \quad (3.1)$$

Perciò la derivata di  $\vec{K}(O)$  rispetto all'osservatore fisso  $(O)$  risulta essere

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = \left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{K}(O). \quad (3.2)$$

Infatti, se  $\vec{u} = u_{x_1}\vec{i}_1 + u_{y_1}\vec{j}_1 + u_{z_1}\vec{k}_1$  è un generico vettore variabile, per la sua derivata rispetto al sistema fisso ( $O$ ) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} &= \frac{du_{x_1}}{dt}\vec{i}_1 + \frac{du_{y_1}}{dt}\vec{j}_1 + \frac{du_{z_1}}{dt}\vec{k}_1 + u_{x_1}\dot{\vec{i}}_1 + u_{y_1}\dot{\vec{j}}_1 + u_{z_1}\dot{\vec{k}}_1 = \\ &= \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 + u_{x_1}\vec{\omega} \times \vec{i}_1 + u_{y_1}\vec{\omega} \times \vec{j}_1 + u_{z_1}\vec{\omega} \times \vec{k}_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove si sono utilizzate le formule di Poisson (??). Dalla (??) si ottiene quindi

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (3.4)$$

La (??) segue quindi dalla (??) con  $\vec{u} = \vec{K}(O)$ .

Utilizzando ora la seconda delle equazioni cardinali della dinamica (??), nella quale andiamo a sostituire la (??) si ottiene

$$\left(\frac{d\vec{K}(O)}{dt}\right)_1 + \vec{\omega} \times \vec{K}(O) = \vec{\Omega}_e(O), \quad (3.5)$$

dove  $\vec{\Omega}_e(O)$  è il momento delle forze attive esterne calcolato rispetto ad  $O$ . Proiettando la (??) sugli assi del sistema ( $O_1$ ), utilizzando la (??), otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = \Omega_x \\ B\dot{q} + (A - C)pr = \Omega_y \\ C\dot{r} + (B - A)pq = \Omega_z, \end{cases} \quad (3.6)$$

dove  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  sono le componenti rispetto al sistema mobile del momento risultante  $\vec{\Omega}_e(O)$  delle forze attive esterne agenti sul corpo rispetto al polo  $O$  e dipenderanno, in generale, dal tempo, dalla posizione del corpo, dalle velocità dei punti del corpo, cioè dagli angoli di Eulero e dalle loro derivate. Il sistema (??) può essere scritto come

$$I\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times I\vec{\omega} = \vec{\Omega}_e(O), \quad (3.7)$$

dove  $I$  è la matrice di inerzia rispetto ad  $O$  definita da (??). Queste equazioni prendono il nome di *equazioni di Eulero*.

Mettendo a sistema le (??) con le equazioni degli angoli di Eulero (??), che riportiamo per chiarezza

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (3.8)$$

otteniamo un sistema di sei equazioni del primo ordine con sei incognite  $\theta, \varphi, \psi, p, q, r$ . Esse, mediante le condizioni iniziali  $\theta_0, \varphi_0, \psi_0, p_0, q_0, r_0$ , che determinano la posizione iniziale e la velocità iniziale del corpo, permettono di conoscere il moto del corpo.

Nel caso più generico del corpo rigido libero (senza perciò punti fissi), che sappiamo avere sei gradi di libertà, abbiamo che la sua posizione può essere determinata mediante  $x_G, y_G, z_G$  coordinate del baricentro  $G$  rispetto al sistema fisso e dagli angoli di Eulero che gli assi principali ( $G, X_1, Y_1, Z_1$ ) dell'ellissoide centrale di inerzia formano con un sistema di assi centrato in  $G$  e parallelo al sistema fisso ( $O, X, Y, Z$ ). Denotando con  $\vec{R}_e$  il vettore risultante delle forze attive esterne agenti sul corpo e con  $\vec{\Omega}_e(G)$  il momento risultante di tali forze rispetto al baricentro  $G$ , abbiamo che le (??) si riscrivono

$$\begin{cases} M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_e \\ \frac{d\vec{K}(G)}{dt} = \vec{\Omega}_e(G). \end{cases} \quad (3.9)$$

Come fatto nel caso del corpo rigido con un punto fisso, proiettiamo la seconda delle (??) sugli assi  $X_1, Y_1, Z_1$  e mettiamo a sistema il tutto con le (??). Proiettiamo invece la prima delle (??) sugli assi fissi  $X, Y, Z$  ottenendo così un sistema di tre equazioni a tre incognite  $v_x = \frac{dx_G}{dt}, v_y = \frac{dy_G}{dt}, v_z = \frac{dz_G}{dt}$ . Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti si avrà un sistema in dodici equazioni del primo ordine nelle incognite  $x_G, y_G, z_G, v_x, v_y, v_z, \psi, \theta, \varphi, p, q, r$ , che, con le condizioni iniziali per ogni incognita, descrive il moto del corpo rigido libero. La risoluzione di tale sistema, in generale, è molto complicata.

### 3.2 Il moto alla Poinsot e corpi a struttura giroscopica.

**Definizione 3.1.** Diciamo che un corpo rigido compie un moto alla Poinsot o per inerzia se si verifica una delle seguenti condizioni:

- (1) il corpo è dotato di un punto fisso  $O$  rispetto al quale il momento delle forze attive esterne agenti sul corpo  $\vec{\Omega}_e(O)$  è nullo;
- (2) il momento delle forze attive esterne agenti sul corpo rispetto al baricentro  $G$  è nullo ( $\vec{\Omega}_e(G) = 0$ ).

Conseguenza immediata della definizione sarà

**Teorema 3.1.** In un moto alla Poinsot, il momento della quantità di moto rispetto ad  $O$  punto fisso (nel caso (1)) o rispetto a  $G$  baricentro del corpo (nel caso (2)) si conserva.

*Dimostrazione.* La tesi segue immediatamente dalla seconda delle (??), utilizzando come polo per il caso (1)  $O$  e per il caso (2)  $G$ , rispetto ai quali sappiamo per definizione di moto di Poinsot che  $\vec{\Omega}_e = 0$ .  $\square$

Le equazioni di Eulero (??) nel caso di un moto alla Poinsot diventano

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Un esempio di moto alla Poinsot è il moto di un corpo rigido libero soggetto solo al suo peso.

Prima di proseguire sono utili alcune definizioni:

**Definizione 3.2** (Struttura giroscopica.). *Un corpo è detto a struttura giroscopica rispetto ad  $O$  se il suo ellissoide d'inerzia di centro  $O$  è un ellissoide di rotazione (ellissoide rotondo). Possiamo anche dire che un corpo ha struttura giroscopica nel caso in cui la sua matrice di inerzia  $I$  rispetto ad  $O$  ha due dei tre autovalori coincidenti.*

**Definizione 3.3** (Giroscopio.). *Un giroscopio è un corpo a struttura giroscopica rispetto al baricentro  $G$  del corpo. Abbiamo dunque che la sua matrice di inerzia rispetto a  $G$  ha due autovalori coincidenti ed in tal caso l'autovettore relativo all'autovalore di molteplicità uno, che coincide con l'asse di rotazione dell'ellissoide è detto asse giroscopico.*

Supponendo ora che il corpo rigido abbia struttura giroscopica rispetto ad  $O$  e considerando il sistema di riferimento solidale al corpo  $(O, X_1, Y_1, Z_1)$  in cui scegliamo  $Z_1$  coincidente con l'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia, abbiamo che  $A = B$  dove  $A, B$  sono rispettivamente i momenti principali di inerzia rispetto ad  $X_1, Y_1$ .

Avremo allora che il sistema (??) si riduce a

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - A)qr = 0 \\ A\dot{q} + (A - C)pr = 0 \\ C\dot{r} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

e dall'ultima equazione segue immediatamente che  $r = \text{cost.}$  e che, noto  $r_0$  valore iniziale di  $r(t)$ , si ha

$$r(t) = r_0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ovvero la componente della velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto all'asse  $Z_1$ , coincidente con l'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia, rimane invariata durante il

moto.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1 = \frac{1}{A}(Ap\vec{i}_1 + Aq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1) - \frac{C}{A}r\vec{k}_1 + r\vec{k}_1 = \\ &= \frac{\vec{K}(O)}{A} + \left(\frac{A-C}{A}\right)r\vec{k}_1 = \frac{\vec{K}(O)}{A} + \left(\frac{A-C}{A}\right)r_0\vec{k}_1.\end{aligned}$$

Prima di concludere la discussione del caso del moto alla Poinsot di un corpo rigido a struttura giroscopica occorre dare delle nuove definizioni.

**Definizione 3.4** (Moto di precessione.). *Un corpo si dice compiere una precessione o un moto di precessione se esistono una direzione  $\vec{e}$  fissa nello spazio e una direzione  $\vec{u}$  fissa rispetto al corpo che formano tra loro un angolo costante ( $\vec{e}$ ,  $\vec{u}$  sono i versori che identificano le due direzioni nello spazio). La direzione  $\vec{e}$  prende il nome di asse di precessione mentre  $\vec{u}$  di asse di figura.*

**Proposizione 3.2.** *Un corpo compie una precessione se e solo se la velocità angolare è scomponibile nel seguente modo*

$$\vec{\omega} = \alpha(t)\vec{e} + \beta(t)\vec{u},$$

per opportune funzioni del tempo  $\alpha$  e  $\beta$ .

*Dimostrazione.* Se il moto rigido è di precessione si ha che

$$\vec{e} \cdot \vec{u} = \text{cost.}$$

Deriviamo rispetto al tempo tale identità, si ottiene, essendo  $\vec{e}$  fisso e  $\dot{\vec{u}} = \vec{\omega} \times \vec{u}$ ,

$$\vec{e} \cdot \vec{\omega} \times \vec{u} = 0.$$

Tale equazione ci dice che  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{u}$  sono complanari e quindi  $\vec{\omega}$  può essere scritto come combinazione lineare di  $\vec{e}$ ,  $\vec{u}$ .

Viceversa, essendo  $\vec{\omega}$  combinazione lineare di  $\vec{e}$ ,  $\vec{u}$  abbiamo che sono complanari e che vale  $\vec{e} \cdot \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$  da cui ripercorrendo i passi appena visti a ritroso si ottiene che  $\vec{e} \cdot \vec{u} = \text{cost}$ , ossia si tratta di un moto di precessione.  $\square$

**Definizione 3.5.** *Chiamiamo precessione regolare una precessione in cui le funzioni  $\alpha$ ,  $\beta$  sono indipendenti dal tempo.*

Possiamo quindi dedurre dalla proposizione precedente che un moto di precessione può essere visto come una composizione di due stati cinetici di rotazione uno con velocità angolare  $\alpha(t)\vec{e}$  diretta secondo l'asse fisso nello spazio e l'altro con velocità angolare  $\beta(t)\vec{u}$  diretta secondo l'asse di figura. Possiamo quindi dimostrare un'importante caratterizzazione dei moti di Poinsot nel caso si corpi a struttura giroscopica.

**Teorema 3.3.** *I moti alla Poinsot attorno ad un punto fisso  $O$  (caso (1) della definizione di moto di Poinsot) di un corpo a struttura giroscopica sono precessioni regolari.*

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto prima nello studio del moto alla Poinsot nel caso di un corpo a struttura giroscopica con asse di rotazione coincidente con  $X_1$  che

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{K}(O)}{A} + \left(\frac{A-C}{A}\right)r_0\vec{k}_1.$$

Poichè sappiamo che  $\vec{K}(O)$  è un vettore fisso nello spazio,  $\vec{k}_1$  è fisso rispetto al corpo e  $r_0$  è costante e quindi indipendente dal tempo, si ha che la velocità angolare è così scomposta nella forma  $\vec{\omega} = \alpha\vec{e} + \beta\vec{u}$  con  $\alpha = \frac{|\vec{K}(O)|}{A}$  e  $\beta = \frac{(A-C)r_0}{A}$  sono indipendenti dal tempo ed  $\vec{e}$ ,  $\vec{u}$  sono rispettivamente  $\frac{\vec{K}(O)}{|\vec{K}(O)|}$ ,  $\vec{k}_1$ . Si è così dimostrato che il moto è di precessione regolare.  $\square$

**Definizione 3.6.** *Si dice rotazione permanente una rotazione in cui la velocità angolare è costante nel tempo.*

Vogliamo allora caratterizzare le rotazioni permanenti nel caso dei moti alla Poinsot.

**Teorema 3.4** (Teorema di Segner.). *In un moto alla Poinsot attorno ad un punto fisso  $O$  del corpo, le rotazioni permanenti sono tutte e sole le rotazioni attorno agli assi principali di inerzia.*

*Dimostrazione.* Nel caso in cui per ipotesi sia  $\vec{\omega} = cost$ , dall'equazione (??) si ha  $\vec{\omega} \times I\vec{\omega} = 0$ , allora  $\vec{\omega}$  risulta diretto secondo un asse principale di inerzia. Viceversa, se all'istante iniziale ho  $I\vec{\omega}(0) = \lambda\vec{\omega}(0)$ , con  $\lambda$  autovalore di  $I$  e quindi  $\vec{\omega}(0)$  autovettore associato a  $\lambda$ , e  $\dot{\vec{\omega}}(0) = 0$  (ciò ci dice che  $\vec{\omega}(0)$  è diretto secondo un asse principale di inerzia del corpo che sappiamo coincidere con gli autovalori della matrice di inerzia  $I$ ), allora l'unica soluzione dell'equazione (??) è  $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}(0)$ , ossia  $\vec{\omega} = cost$  (ciò a patto che vengano garantite le condizioni secondo le quali un'equazione differenziale che per noi sarà l'equazione di Eulero (??) ammetta un'unica soluzione).  $\square$

Nei moti alla Poinsot oltre a conservarsi il momento della quantità di moto, viene conservata anche un'altra quantità come dice il teorema seguente

**Teorema 3.5.** *In un moto alla Poinsot rispetto ad un punto fisso  $O$  del corpo, l'energia cinetica si conserva.*

*Nel caso in cui il moto alla Poinsot avvenga attorno al baricentro  $G$  del corpo, la quantità  $\frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega}$  si conserva. (Per il teorema di König sappiamo*



che tale quantità rappresenta l'energia cinetica associata alla rotazione del corpo attorno a  $G$ .)

*Dimostrazione.* Essendo  $T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s v_s^2$  si ha

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{s=1}^N m_s \vec{a}_s \cdot \vec{v}_s = \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot \vec{v}_s, \quad (3.12)$$

essendo  $\vec{R}_s$  il vettore risultante di tutte le forze attive esterne agenti su  $P_s$ ,  $\forall s = 1, \dots, N$ . Ricordando infatti che il lavoro delle reazioni vincolari agenti sul corpo è nullo. Dalla formula fondamentale della cinematica del corpo rigido (??) si ha

$$\vec{v}_s = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \times (P_s - O). \quad (3.13)$$

Sostituendo la (??) in (??) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \vec{R}_e \cdot \vec{v}(O) + \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \cdot \vec{\omega} \times (P_s - O) = \\ &= \vec{R}_e \cdot \vec{v}(O) + \sum_{s=1}^N \vec{R}_s \times (O - P_s) \cdot \vec{\omega} = \\ &= \vec{R}_e \cdot \vec{v}(O) + \vec{\Omega}_e(O) \cdot \vec{\omega}, \end{aligned}$$

essendo  $\vec{R}_e$  e  $\vec{\Omega}_e(O)$  il vettore risultante e il momento risultante delle forze attive esterne, rispettivamente.

Nel caso del punto fisso  $O$  si ha che  $\vec{v}_O = 0$  e  $\vec{\Omega}_e(O) = 0$  con polo  $O$ , allora ciò ci dice che la derivata dell'energia cinetica rispetto al tempo è nulla e quindi l'energia cinetica si conserva durante il moto.

Nel caso del corpo che compie un moto alla Poinot rispetto a  $G$ , prendiamo come punto di riferimento al posto di  $O$  il baricentro e abbiamo

$$\frac{dT}{dt} = \vec{R}_e \cdot \vec{v}_G + \vec{\Omega}_e(G) \cdot \vec{\omega},$$

con  $\vec{\Omega}_e(G)$  momento delle forze attive esterne rispetto a  $G$  che sappiamo essere nullo nel nostro caso, allora

$$\frac{dT}{dt} = \vec{R}_e \cdot \vec{v}_G.$$

Sappiamo inoltre che  $\dot{\vec{Q}} = \vec{R}_e$  e che  $\vec{Q} = M\vec{v}_G$ , allora

$$\frac{dT}{dt} = M\dot{\vec{v}}_G \cdot \vec{v}_G = \frac{d}{dt} \left( \frac{M}{2} v_G^2 \right),$$

da cui

$$\frac{d}{dt} \left( T - \frac{M}{2} v_G^2 \right) = 0.$$

Dall'esplicitazione di  $T$  mediante il teorema di König, equazione (??) (osservando che  $\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega} = J\omega^2$ ), segue la tesi.  $\square$

Grazie a tale teorema è possibile dare una descrizione geometrica del moto alla Poinot.

**Teorema 3.6.** *In un moto alla Poinot attorno ad un punto fisso  $O$  del corpo, l'ellissoide di inerzia rispetto ad  $O$  rotola senza strisciare su un piano fisso.*

*Dimostrazione.* L'ellissoide di inerzia rispetto ad  $O$  si esprime come superficie di livello corrispondente allo zero di

$$f(\vec{\xi}) := A\xi_x^2 + B\xi_y^2 + C\xi_z^2 - 1, \quad \vec{\xi} = \xi_x \vec{i}_1 + \xi_y \vec{j}_1 + \xi_z \vec{k}_1.$$

La normale  $\vec{\nu}$  all'ellissoide è

$$\vec{\nu} = \frac{\nabla_{\xi} f}{|\nabla_{\xi} f|},$$

dove

$$\nabla_{\xi} f = 2(A\xi_x \vec{i}_1 + B\xi_y \vec{j}_1 + C\xi_z \vec{k}_1).$$

Pongo  $\vec{\xi} = \lambda \vec{\omega}$  e cerco per quali  $\lambda > 0$  il vettore  $\vec{\xi}$  appartiene all'ellissoide. Essendo l'ellissoide di inerzia corrispondente alla forma quadratica associata alla matrice di inerzia  $I$  cerchiamo i  $\lambda > 0$  tali per cui si ha

$$\lambda^2 \vec{\omega} \cdot I\vec{\omega} = 1.$$

Dunque si ha

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\vec{\omega} \cdot I\vec{\omega}}} = \frac{1}{\sqrt{J\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2T}},$$

dove  $T$  è l'energia cinetica del corpo.

Da  $\nabla_{\xi} f = 2(A\xi_x \vec{i}_1 + B\xi_y \vec{j}_1 + C\xi_z \vec{k}_1)$  e  $\vec{K} = Ap\vec{i}_1 + Bq\vec{j}_1 + Cr\vec{k}_1$  si ha che  $\vec{\nu}$  vettore ortogonale all'ellissoide nel punto di intersezione con  $\vec{\xi}$  è

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}.$$

Ora poichè la normale ad una superficie in un punto determina la giacitura del piano tangente alla superficie in quel punto ed essendo  $\vec{K} = cost$ , si ha che il piano tangente all'ellissoide nel punto di intersezione con  $\lambda \vec{\omega}$  ha giacitura

costante.

La distanza  $d$  del piano da  $O$  è

$$d = \vec{v} \cdot \lambda \vec{\omega} = \frac{\vec{K} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{K}| \sqrt{2T}} = \frac{\sqrt{2T}}{|\vec{K}|} = \text{cost.}$$

Allora l'ellissoide di inerzia rotola sul piano fisso definito con giacitura  $\vec{v}$  e distanza dall'origine  $d$ .

Inoltre, sia  $P$  punto di contatto tra l'ellissoide ed il piano (ossia  $P$  rappresenta il secondo estremo di  $\vec{\xi} = \lambda \vec{\omega}$ ), si ha

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O) = \vec{\omega} \times (P - O),$$

essendo la velocità di  $O$  nulla, poichè  $O$  è sull'asse di rotazione dell'ellissoide. Essendo  $P - O = \vec{\xi} = \lambda \vec{\omega}$  parallelo a  $\vec{\omega}$ , si ha infine

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times (P - O) = 0-$$

Allora l'ellissoide rotola senza strisciare su un piano fisso. □

### 3.3 Fenomeni giroscopici.

**Definizione 3.7** (Effetto giroscopico). *L'effetto giroscopico è un fenomeno fisico che si verifica quando in un corpo in rotazione l'asse di rotazione viene sollecitato a cambiare orientamento da una forza che agisce su uno dei piani che contiene l'asse stesso. Si ha perciò una forza che si oppone al cambio di orientazione imposto all'asse di rotazione e un moto di precessione.*

Sia dato dunque un corpo rigido con un punto fisso  $O$  (o si consideri il moto di un corpo rispetto al baricentro, come illustrato precedentemente nel caso di un corpo rigido libero), tale che il suo ellissoide di inerzia rispetto ad  $O$  sia di rotazione. Il corpo ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}_1$  attorno all'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia, che coincide con l'asse  $X_1$ . Supponiamo di voler spostare tale asse in modo che ruoti attorno ad una direzione ad esso normale senza mutare il modulo di  $\vec{\omega}_1$ . Dovremo perciò imprimere al corpo un ulteriore stato cinetico di rotazione con velocità angolare  $\vec{\omega}_2$  diretta secondo la normale a  $\vec{\omega}_1$ . Calcoliamo le forze necessarie per produrre questo moto.

Innanzitutto si osserva che  $\vec{K}(O)$  varia per due ragioni: in primo poichè oltre alla rotazione definita da  $\vec{\omega}_1$  è impressa un'ulteriore rotazione definita da  $\vec{\omega}_2$ , inoltre poichè la direzione di  $\vec{\omega}_1$  cambia sotto l'effetto della rotazione di  $\vec{\omega}_2$ . Ricordando che gli assi principali sono perpendicolari gli uni agli altri ed

essendo  $\vec{\omega}_2$  perpendicolare ad  $\vec{\omega}_1$  diretto secondo un asse principale di inerzia, abbiamo che anche  $\vec{\omega}_2$  sarà diretto secondo un asse principale di inerzia del corpo e dunque si avrà

$$\vec{K}(O) = A\vec{\omega}_2 + C\vec{\omega}_1,$$

dove  $A$  e  $C$  sono rispettivamente i momenti principali intorno ad  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$ . Derivando tale espressione e osservando che  $A$  è lo stesso per qualunque direzione normale a  $\vec{\omega}_1$  (poichè l'ellissoide ha asse di rotazione diretto come  $\vec{\omega}_1$ ), si ha

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = A\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + C\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}.$$

Posto  $N - O = \vec{\omega}_1$ , si ha  $\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{v}(N)$  velocità del punto  $N$  che risulta dovuta solo alla rotazione del corpo attorno a  $\vec{\omega}_2$  (infatti la rotazione definita da  $\vec{\omega}_1$  non influenza la velocità di  $N$  essendo  $N$  lungo l'asse di tale rotazione). Tale velocità risulta avere modulo pari a  $\omega_2|N - O| = \omega_1\omega_2$ , direzione normale al piano dei due vettori  $\vec{\omega}_1$ ,  $\vec{\omega}_2$  e verso da destra verso sinistra per un osservatore diretto come  $\vec{\omega}_1$ . Possiamo quindi definire un versore  $\vec{a}$  diretto come  $\vec{v}(N)$  e si ha

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = A\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + C\omega_1\omega_2\vec{a}. \quad (3.14)$$

Ora ricordando la seconda equazione delle (??), si avrà che per produrre lo spostamento dell'asse di rotazione del moto dell'ellissoide di inerzia come ricercato, occorrerà applicare al corpo un sistema di forze con momento rispetto ad  $O$  pari al secondo membro della (??). Tali forze potranno ridursi a due coppie con momenti  $\vec{\Omega}_1(O)$  e  $\vec{\Omega}_2(O)$  pari a

$$\vec{\Omega}_2(O) = A\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}, \quad \vec{\Omega}_1(O) = C\omega_1\omega_2\vec{a}. \quad (3.15)$$

Si osserva che, ricordando che una coppia di forze può giacere su un qualunque piano normale al suo momento, la coppia di momento  $\vec{\Omega}_2(O)$  agisce su un piano normale a  $\vec{\omega}_2$  che può contenere  $\vec{\omega}_1$  per come abbiamo scelto la velocità angolare  $\vec{\omega}_2$ . Tale coppia tende a spostare l'asse  $ON$  di rotazione nel suo piano, ma non è sufficiente a produrre il moto, infatti occorre l'altra coppia di momento  $\vec{\Omega}_1(O)$  che deve essere tanto più grande quanto più grande risulta il modulo di  $\vec{\omega}_1$ . Quindi per spostare l'asse di rotazione occorre applicare una coppia di forze tanto più intense quanto è più rapida la rotazione. È per questo che gli assi di rotazione generalmente risultano essere stabili o tenaci. Come visto per la coppia associata al momento  $\vec{\Omega}_2(O)$  anche per la coppia associata al momento  $\vec{\Omega}_1(O)$  si avrà la proprietà di giacere nel piano normale ad  $\vec{a}$ , dunque anche al piano contenente sia  $\vec{\omega}_1$  che  $\vec{\omega}_2$ . Da qui si deduce che

lo spostamento dell'asse avviene in un piano perpendicolare al piano individuato da  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$  e alla direzione della forza risultante esercitata per spostare l'asse.

La coppia di forze associata a  $\vec{\Omega}_1(O)$  sposta l'asse anche in assenza della coppia associata a  $\vec{\Omega}_2(O)$ ; basta far sì che  $\vec{\omega}_2$  raggiunga un certo valore poi rimanga costante. In tal modo si ha che  $\vec{\Omega}_2(O)$  si annulla: dalla (??) abbiamo  $\vec{\Omega}_2(O) = A \frac{d\vec{\omega}_2}{dt}$  ed essendo  $\vec{\omega}_2 = \text{cost.}$  avremo che la sua derivata sarà uguale a zero. L'asse tuttavia continua a ruotare attorno a  $\vec{\omega}_2$  sotto effetto della coppia  $\vec{\Omega}_1(O)$ . Il corpo assumerà quindi un moto di precessione regolare. Inizialmente però la coppia di momento  $\vec{\Omega}_2(O)$  è necessaria per imprimere una rotazione dell'asse attorno a  $\vec{\omega}_2$  che verrà poi mantenuta dalla coppia  $\vec{\Omega}_1(O)$ .

Un esempio molto comune è il moto di una trottola prescindendo dallo spostamento della sua punta. In questo caso lo spostamento dell'asse di rotazione è dovuto al momento prodotto dalla forza peso che agisce sul baricentro della trottola. Anche qui otterremo un moto di precessione.

Supponiamo quindi di avere un corpo rigido con punto fisso in  $O$  a struttura giroscopica soggetto solamente al suo peso. Cerchiamo le condizioni sotto le quali il corpo è soggetto ad un moto di precessione definito da due vettori  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$ , il primo diretto secondo l'asse di figura, ossia l'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia  $OG$  ed il secondo diretto secondo la verticale formante un angolo  $\alpha$  con l'asse di figura.

Abbiamo allora che il corpo è soggetto ad uno stato cinetico di rotazione composto da due rotazioni definite rispettivamente da  $\vec{\omega}_1$  e  $\vec{\omega}_2$ , che descrive un moto di precessione. Verifichiamo allora se le forze a cui è soggetto il corpo sono tali da mantenere il moto di precessione.

Iniziamo scomponendo  $\vec{\omega}_2$  in due vettori, uno indicato con  $\vec{\omega}_1'$  parallelo ad  $\vec{\omega}_1$  con modulo pari a  $\omega_2 \cos \alpha$ , l'altro indicato con  $\vec{\omega}_2'$  normale ad  $\vec{\omega}_1$  nel piano verticale di modulo pari a  $\omega_2 \sin \alpha$ . Risulta allora che  $\vec{\omega}_1'$  e  $\vec{\omega}_2'$  sono diretti secondo due assi principali di inerzia di momento rispettivamente  $C$  ed  $A$ , e allora

$$\vec{K}(O) = A\vec{\omega}_2' + C\vec{\omega}_1'.$$

Derivando avremo

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = A \frac{d\vec{\omega}_2'}{dt} + C \frac{d\vec{\omega}_1'}{dt}. \quad (3.16)$$

La derivata di  $\vec{\omega}_1'$  può essere calcolata come precedentemente si è calcolata la derivata di  $\vec{\omega}_1$ . Essa è diretta secondo una retta del corpo e varia solo a causa della rotazione definita da  $\vec{\omega}_2'$ . Quindi potremmo scriverla come

$$\frac{d\vec{\omega}_1'}{dt} = \omega_1' \omega_2' \vec{a} = \omega_2 \sin \alpha (\omega_1 + \omega_2 \cos \alpha) \vec{a}, \quad (3.17)$$

con lo stesso significato del vettore  $\vec{a}$  visto sopra.

Per la ricerca della derivata di  $\vec{\omega}_2'$  possiamo ricorrere alla identità

$$\vec{\omega}_1' + \vec{\omega}_2' = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Derivandola e ricordando che il vettore  $\vec{\omega}_2$  è costante, si ha

$$\frac{d\vec{\omega}_1'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_2'}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_1}{dt}. \quad (3.18)$$

Sappiamo che  $\vec{\omega}_1$  varia solo per la rotazione del corpo attorno a  $\vec{\omega}_2$ , dunque la sua derivata coincide con la velocità del suo estremo  $N$ ,  $\vec{v}(N)$ , qualora la sua origine sia posta in  $O$ . Quindi, poichè la distanza di  $N$  da  $\vec{\omega}_2$  è  $\omega_1 \sin \alpha$ , si ha

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \omega_1 \omega_2 \sin \alpha \vec{a}$$

e dunque, sostituendo in (??) e ricordando la (??) si avrà

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}_2'}{dt} &= (\omega_2 \omega_1 \sin \alpha - \omega_1 \omega_2 \sin \alpha - \omega_2^2 \sin \alpha \cos \alpha) \vec{a} = \\ &= -\omega_2^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{a}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Inserendo la (??) e la (??) nell'equazione (??) otteniamo

$$\frac{d\vec{K}(O)}{dt} = [C\omega_1\omega_2 \sin \alpha + (C - A)\omega_2^2 \sin \alpha \cos \alpha] \vec{a}.$$

Agendo sul corpo solamente il peso del corpo stesso abbiamo, dalla seconda equazione cardinale della dinamica, si veda (??), che la derivata di  $\vec{K}(O)$  è uguale al momento del peso  $Mg$  ( $M$  e  $g$  sono rispettivamente la massa totale del corpo e il modulo dell'accelerazione di gravità) rispetto ad  $O$ . Esso risulta avere verso opposto ad  $\vec{a}$  e modulo pari a  $Mgd \sin \alpha$  dove  $d \sin \alpha$  rappresenta la distanza di  $O$  dalla linea di azione del peso ( $d = |O - G|$  distanza del baricentro dal punto fisso). Otteniamo allora

$$C\omega_1\omega_2 + (C - A)\omega_2^2 \cos \alpha = -Mgd. \quad (3.20)$$

Dunque fissati  $\omega_1$  e  $\alpha$ , ne risulta che il corpo compierà un moto di precessione se  $\omega_2$  è tale da verificare la (??). Perciò abbiamo così ottenuto che la velocità di precessione di un corpo rigido in moto di precessione soggetto solo al suo peso dipende dalla sua velocità di rotazione e dall'inclinazione dell'asse di figura rispetto alla verticale. Risolviamo la (??):

$$\omega_2 = \frac{-C\omega_1 \pm \sqrt{C^2\omega_1^2 - 4(C - A)Mgd \cos \alpha}}{2(C - A) \cos \alpha}.$$

Caso molto comune nella pratica è quella in cui  $\omega_1$  risulta molto grande da far sì che il quadrato di  $\frac{(C-A)Mgd \cos \alpha}{C^2 \omega_1^2}$  sia trascurabile rispetto all'unità. Avremo in questo caso che

$$\begin{aligned} \sqrt{C^2 \omega_1^2 - 4(C-A)Mgd \cos \alpha} &= C\omega_1 \sqrt{1 - \frac{4(C-A)Mgd \cos \alpha}{C^2 \omega_1^2}} = \\ &\cong C\omega_1 \left(1 - \frac{2(C-A)Mgd \cos \alpha}{C^2 \omega_1^2}\right). \end{aligned}$$

Perciò in tal caso avremo

$$\omega_2 = -\frac{Mgd}{C\omega_1}, \quad \omega_2 = -\frac{C\omega_1}{(C-A) \cos \alpha} + \frac{Mgd}{C\omega_1}. \quad (3.21)$$

La prima soluzione di  $\omega_2$  ci dice che la precessione sarà molto lenta poichè  $\omega_1$  è molto grande e la velocità di precessione è inversa rispetto a tale velocità angolare (il moto della trottola si avvicina molto a questo caso). La seconda soluzione descrive una precessione rapida essendo  $\omega_2$  sensibilmente proporzionale ad  $\omega_1$ . Osservando che nella scelta della seconda soluzione delle (??) l'ultimo termine di questa risulta trascurabile essendo molto piccolo, abbiamo che in questo caso la precessione viene ricondotta a quella del moto alla Poinsot.

Un esempio più interessante di situazioni in cui si osserva l'effetto giroscopico è quello dello spostamento dell'asse terrestre e della conseguente precessione degli equinozi.





# Bibliografia

- [1] D. Graffi, "*Elementi di Meccanica Razionale*", Patron, Bologna 1973.
- [2] S. Graffi, Appunti delle lezioni di Fisica Matematica II,  
<http://www.dm.unibo.it/fismst/didattica/html>.
- [3] R. Rosso, Dispense di Fisica Matematica,  
<http://www.unipv.it/~rosso/dinamica.pdf>.