ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# Equazioni stocastiche lineari e disuguaglianza di Harnack

**Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Andrea Pascucci**

**Presentata da:**
**Lucia Collinelli**

**III Sessione**
**Anno Accademico 2014/2015**

# Indice

# Introduzione

In questo elaborato si presentano alcuni risultati relativi alle equazioni differenziali stocastiche (SDE) lineari:

$$dX_t = (B(t)X_t + b(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

La soluzione di un'equazione differenziale stocastica lineare é un processo stocastico $X_t$ con distribuzione multinormale in generale degenere. Al contrario, nel caso in cui la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ é definita positiva, $X_t$ ha densitá gaussiana $\Gamma(t_0, x_0; t, x)$.
La $\Gamma(t_0, x_0; t, x)$ é inoltre la soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov in $\mathbb{R}^{N+1}$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(t)\partial_{x_i x_j} + \langle b(t) + B(t)x, \nabla\rangle + \partial_t$$

associato alla SDE lineare.
Operatori di questo tipo furono introdotti da Kolmogorov nel 1934 per descrivere la densitá di probabilitá di un sistema con $2n$ gradi di libertá.
Negli ultimi decenni sono stati proposti in finanza molti modelli che comprendono operatori di Kolmogorov lineari e non lineari.

Nel primo capitolo vengono presentate alcune condizioni necessarie e sufficienti che assicurano che la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ sia definita positiva nel caso, piú semplice, in cui i coefficienti della SDE $(B(t), b(t), \sigma(t))$ sono costanti, e nel caso in cui questi sono dipendenti dal tempo. A questo scopo gioca un ruolo fondamentale la teoria del controllo. In particolare la condizione di Kalman fornisce un criterio operativo per controllare se la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ é definita positiva.

Nel secondo capitolo viene presentata una dimostrazione diretta della disuguaglianza di Harnack per $u$ soluzione positiva di $Lu = 0$ utilizzando una stima del gradiente dovuta a Li e Yau [6]. Questo approccio é relativamente generale e puó essere applicato a molti problemi differenti: equazioni paraboliche su una varietá (Li e Yau [6]), equazione del mezzo poroso (Auchmuty e Bao [7]) e somme di quadrati di campi vettoriali (Cao e Yau [8]). Le disuguaglianze di Harnack sono strumenti fondamentali nella teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali.

Nel terzo capitolo viene proposto un esempio di applicazione della disuguaglianza di Harnack in finanza. In particolare si osserva che la disuguaglianza di Harnack fornisce un limite superiore a priori del valore futuro di un portafoglio autofinanziante in funzione del capitale iniziale.

# Capitolo 1

# Equazioni stocastiche lineari

## 1.1 Soluzione di equazioni stocastiche lineari

Si consideri l'equazione differenziale stocastica (SDE) lineare in $\mathbb{R}^N$

$$dX_t = (B(t)X_t + b(t))dt + \sigma(t)dW_t \tag{1.1}$$

dove $W$ é un moto browniano $d$-dimensionale con $d \leq N$ e $\sigma(t), B(t), b(t)$ sono funzioni $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ con valori rispettivamente nello spazio delle matrici $N \times d, N \times N, N \times 1$.
Poiché valgono le *ipotesi standard* (A.4) esiste soluzione forte per (1.1) e questa é unica. Inoltre é possibile scrivere esplicitamente la soluzione.
Sia $\Phi = \Phi(t)$ la soluzione del problema di Cauchy ordinario:

$$\begin{cases} \Phi'(t) & = B(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) & = I_N \end{cases}$$

dove $I_N$ é la matrice identitá $N \times N$.

**Proposizione 1.1.1.** *La soluzione della SDE (1.1) con condizione iniziale $X_0^x = x$ é data da*

$$X_t^x = \Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right) \tag{1.2}$$

*Inoltre $X_t^x$ ha distribuzione multinormale con media*

$$E[X_t^x] = \Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) \tag{1.3}$$

*e matrice di covarianza*

$$cov(X_t^x) = \Phi(t)\left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^*ds\right)\Phi^*(t) \tag{1.4}$$

*Dimostrazione.* Per provare che $X^x$ in (1.2) é soluzione é sufficiente utilizzare la formula di Itô. Posto

$$Y_t = x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s$$

si deve mostrare che

$$d(\Phi(t)Y_t) = dX_t$$

cioé

$$d(\Phi(t)Y_t) = (B(t)X_t + b(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

Applicando la formula di Itô al processo $\Phi(t)Y_t$ si ottiene

$$\begin{aligned} d(\Phi(t)Y_t) &= \Phi'(t)Y_t dt + \Phi(t)dY_t = \\ &= \Phi'(t)Y_t dt + \Phi(t)(\Phi^{-1}(t)b(t)dt + \Phi^{-1}(t)\sigma(t)dW_t) = \\ &= B(t)\Phi(t)Y_t dt + b(t)dt + \sigma(t)dW_t = \\ &= (B(t)X_t^x + b(t))dt + \sigma(t)dW_t \end{aligned}$$

Poiché $X_t^x$ é somma di funzioni deterministiche si ha che $X_t^x$ ha distribuzione multinormale con media

$$\begin{aligned} E[X_t^x] &= E\left[\Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right)\right] = \\ &= E\left[\Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right)\right] = \\ &= \Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds\right) \end{aligned}$$

e matrice di covarianza

$$\begin{aligned} cov(X_t^x) &= E\left[(X_t^x - E[X_t^x])(X_t^x - E[X_t^x])^*\right] = \\ &= \Phi(t)E\left[(\textstyle\int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)(\int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s)^*\right]\Phi(t)^* = \\ &= \Phi(t)E\left[\textstyle\int_0^t (\Phi^{-1}(s)\sigma(s))(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^* ds\right]\Phi(t)^* = \\ &= \Phi(t)\left(\textstyle\int_0^t (\Phi^{-1}(s)\sigma(s))(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^* ds\right)\Phi(t)^* \end{aligned}$$

□

**Notazione 1.** Poniamo

$$m_{t_0,x_0}(t) = E[X_t^x], \qquad \mathcal{C}_{t_0}(t) = cov(X_t^x) \tag{1.5}$$

**Osservazione 1.** Il caso con coefficienti costanti $b(t) \equiv b$, $B(t) \equiv B$ e $\sigma(t) \equiv \sigma$ é molto importante. Infatti in questo caso si ha $\Phi(t) = e^{tB}$ dove

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB)^n}{n!} \tag{1.6}$$

La serie in (1.6) é assolutamente convergente in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n B^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{| t^n |}{n!} \|B\|^n = e^{|t|\|B\|}$$

In piú si ha

$$(e^{tB})^* = e^{tB^*}, \qquad e^{tB} e^{sB} = e^{(t+s)B} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

In particolare $e^{tB}$ é non degenere e si ha che

$$(e^{tB})^{-1} = e^{-tB}$$

Quindi, per la **Proposizione 1.0.1** la soluzione della SDE lineare

$$dX_t = (BX_t + b)dt + \sigma dW_t$$

con condizione iniziale $x$ é data da

$$X_t^x = e^{tB} \left( x + \int_0^t e^{-sB} b ds + \int_0^t e^{-sB} \sigma dW_s \right)$$

e si ha

$$m_{t_0, x_0}(t) = E[X_t^x] = e^{tB} \left( x + \int_0^t e^{-sB} b ds \right) = e^{tB} x + \int_0^t e^{sB} b ds$$

e

$$\mathcal{C}_{t_0}(t) = cov(X_t^x) = e^{tB} \int_0^t e^{-sB} \sigma (e^{-sB} \sigma)^* ds e^{tB^*} = \int_0^t (e^{sB} \sigma)(e^{sB} \sigma)^* ds$$

**Osservazione 2.** Si noti che la matrice $\Phi^{-1}(s)\sigma(s)(\Phi^{-1}(s)\sigma(s))^*$ dell'integrale (1.4) ha rango $d$. Inoltre anche quando $d < N$ la matrice $N \times N$ $C(t)$ puó essere definita positiva.

**Esempio 1.1** (Kolmogorov)**.** Si consiederi la seguente SDE in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} dX_t^1 & = \mu dt + \sigma_0 dW_t \\ dX_t^2 & = X_t^1 \end{cases} \tag{1.7}$$

con $\mu$ e $\sigma_0$ costanti positive. Si ha che

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosí che $1 = d < N = 2$. Poiché $B^2 = 0$, la matrice $B$ é nilpotente e

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre, se poniamo $x = (x_1, x_2)$ si ha

$$m_{t_0,x_0}(t) = e^{tB}x + \int_0^t e^{sB} b ds = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1 t \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} x_1 + \mu t \\ x_2 + x_1 t + \mu \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{C}_{t_0}(t) = \int_0^t e^{sB} \sigma \sigma^* e^{sB^*} ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ds = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} t & \frac{t^2}{2} \\ \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3} \end{pmatrix} > 0$$

per ogni $t > 0$

Consideriamo la SDE (1.1) sotto l'ipotesi che la matrice $\mathcal{C}(T)$ sia definita positiva per ogni $t < T$.
In questo caso, per ogni $t < t_0$, $X_t$ ha densitá $x \longmapsto \Gamma(t_0, x_0; t, x)$ dove

$$\Gamma(t_0, x_0; t, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathcal{C}_{t_0}(t)}} e^{-\frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_{t_0}(t)^{-1}(x - m_{t_0,x_0}(t)), (x - m_{t_0,x_0}(t))\rangle} \tag{1.8}$$

Inoltre $\Gamma$ é la soluzione fondamentale dell'operatore differenziale di Kolmogorov in $\mathbb{R}^{N+1}$ associato alla SDE lineare:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t) \partial_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(t) \partial_{x_i} + \sum_{i=1}^N B_{ij}(t) x_i \partial_{x_j} + \partial_t$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N c_{ij}(t) \partial_{x_i x_j} + \langle b(t) + B(t)x, \nabla \rangle + \partial_t \tag{1.9}$$

dove $c_{ij} = \sigma\sigma^*$ e $\nabla = (\partial_{x_i}, ..., \partial_{x_N})$. Ció significa che la funzione

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x;T,y)\varphi(y)dy, \qquad t < T, x \in \mathbb{R}^N$$

é soluzione classica del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{su } ]-\infty, T[\times\mathbb{R}^N \\ u(T,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Tornando all'**Esempio 1**, l'equazione di Kolmogorov relativa al sistema (1.7) é

$$\frac{\sigma_0^2}{2}\partial_{x_1x_1}u(t,x) + \mu\partial_{x_1}u(t,x) + x_1\partial_{x_2}u(t,x) + \partial_t u(t,x) = 0 \tag{1.10}$$

e la sua soluzione fondamentale é

$$\Gamma(s,y;t,x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma_0(t-s)^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle\mathcal{C}^{-1}(t-s)(y-m_x(t-s)),(y-m_x(t-s))\rangle\right) \tag{1.11}$$

per $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $s < t$, dove

$$\mathcal{C}^{-1}(t) = \frac{1}{\sigma_0^2}\begin{pmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{6}{t^2} \\ -\frac{6}{t^2} & \frac{12}{t^3} \end{pmatrix}$$

Esplicitamente si ottiene

$$\Gamma(s,y;t,x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma_0^2(t-s)^2}\exp\left(-\frac{(x_1-y_1-\mu(t-s))^2}{2\sigma_0^2(t-s)} - 3\frac{(2x_2-2y_2-(t-s)(x_1+y_1))^2}{2\sigma_0^2(t-s)^3}\right)$$

## 1.2 Condizioni affinché $\mathcal{C}(t)$ sia definita positiva

### 1.2.1 Coefficienti $B$ e $\sigma$ costanti

In questo paragrafo vengono presentate alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ di $X_t$ sia definita positiva cosí che $X_t$ abbia densitá. Si considera la SDE

$$dX_t = (BX_t + b)dt + \sigma dW_t \tag{1.12}$$

dove $B$ e $\sigma$ sono costanti e si suppone che la matrice $\sigma$ abbia rango massimo uguale a $d$. Inoltre, con opportune trasformazioni lineari, possiamo supporre che $\sigma$ assuma la forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove $I_d$ é la matrice identitá $d \times d$.

Il primo risultato presentato da una condizione in termini di controllabilitá.

**Definizione 1.2.** La coppia $(B, \sigma)$ é controllabile su $[0, T]$ se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste una funzione $v \in C([0, T]; \mathbb{R}^d)$ tale che il problema

$$\begin{cases} \gamma'(t) = B\gamma(t) + \sigma v(t) & t \in ]0, T[ \\ \gamma(0) = x, \qquad \gamma(T) = y \end{cases} \tag{1.13}$$

abbia soluzione. La funzione $v$ é detta *controllo* di $(B, \sigma)$.

**Teorema 1.2.1.** *Dato $T > 0$, la matrice*

$$\mathcal{C}(T) = \int_0^T (e^{sB}\sigma)(e^{sB}\sigma)^* ds \tag{1.14}$$

*é definita positiva se e solo se la coppia $(B, \sigma)$ é controllabile su $[0, T]$. In questo caso il controllo é dato da $v(t) = G^*(t)M^{-1}(T)(e^{-TB}y - x)$ $\qquad t \in [0, T]$ dove*

$$G(t) = e^{-tB}\sigma \qquad e \qquad M(t) = \int_0^T G(t)G^*(t)dt \tag{1.15}$$

**Osservazione 3.** Per $x \in \mathbb{R}^N$ si ha che

$$\gamma(t) = e^{tB}\left(x + \int_0^t G(s)v(s)ds\right) \tag{1.16}$$

é soluzione del problema di Cauchy lineare

$$\begin{cases} \gamma'(t) = B\gamma(t) + \sigma v(t) & t \in ]0, t[ \\ \gamma(0) = x \end{cases} \tag{1.17}$$

*Dimostrazione.* Per (1.14) si ha

$$\mathcal{C}(T) = e^{TB}M(T)e^{TB^*}$$

con $M$ come in (1.15). Poiché le matrici esponenziali sono non degeneri, $\mathcal{C}(T)$ é definita positiva se e solo se $M(T)$ lo é.
Si suppone $M(T) > 0$ e si prova che $(B, \sigma)$ é controllabile su $[0, T]$. Per $x \in \mathbb{R}^N$ fissato consideriamo la curva $\gamma$ in (1.16), soluzione del problema (1.17); dato $y \in \mathbb{R}^N$, si ha che $\gamma(T) = y$ se e solo se

$$\int_0^T G(t)v(t)dt = e^{-TB}y - x =: z \tag{1.18}$$

Siccome vale

$$\int_0^T G(s)G(s)^* ds M^{-1}(T)z = z$$

si ha

$$\int_0^T G(t)v(t)dt = \int_0^T G(s)G(s)^* ds M^{-1}(T)z$$

e quindi, poiché $M(t)$ é non degenere, il controllo $v(t)$ é dato da

$$v(t) = G^*(t)M^{-1}(T)z \qquad t \in [0, T]$$

D'altra parte, sia $(B, \sigma)$ controllabile su $[0, T]$ e, per assurdo, supponiamo $M(t)$ degenere. Quindi esiste $w \in \mathbb{R}^N \backslash 0$ tale che

$$0 = \langle M(T)w, w \rangle = \int_0^T |w^* G(t)|^2 dt$$

e conseguentemente si ha

$$w^* G(T) = 0 \qquad t \in [0, T]$$

Poiché per ipotesi $(B, \sigma)$ é controllabile su $[0, T]$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste un opportuno controllo $v$ tale che vale (1.18). Moltiplicando entrambi i membri per $w^*$ si ha

$$w^* z = \int_0^T w^* G(s)v(s)ds = 0$$

e questa é una contraddizione. □

### Condizione di Kalman

Il risultato seguente fornisce un criterio operativo per verificare che la matrice di covarianza sia definita positiva.

**Teorema 1.2.2** (Condizione di Kalman)**.** *La matrice $\mathcal{C}(T)$ in (1.14) é definita positiva per $T > 0$ se e solo se la coppia $(B, \sigma)$ verifica la condizione di Kalman cioé la matrice a blocchi $(N \times (Nd))$ dimensionale definita da*

$$(\sigma \ B\sigma \ B^2\sigma \ ...B^{N-1}\sigma) \tag{1.19}$$

*ha rango massimo uguale a $N$.*

*Dimostrazione.* Si premette alla dimostrazione il **Teorema di Cayley-Hamilton**:

> *Sia*
>
> $$p(\lambda) = det(A - \lambda I_N) = \lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + ... + a_{N-1}\lambda + a_N$$
>
> *il polinomio caratteristico di una matrice $A$ di dimensione $(N \times N)$. Allora si ha $p(A) = 0$ e quindi ogni potenza $A^k$ con $k \geq N$ puó essere espressa come combinazione lineare di $I_N, A, ..., A^{N-1}$.*

Si osserva che la matrice (1.19) non ha rango massimo se e solo se esiste $w \in \mathbb{R}^N \backslash 0$ tale che

$$w^*\sigma = w^*B\sigma = ... = w^*B^{N-1}\sigma = 0 \tag{1.20}$$

Quindi supponendo che la matrice (1.19) non abbia rango massimo, per (1.20) e e il teorema di Cayley-Hamilton si ha

$$w^*B^k\sigma = 0 \qquad\qquad k \in \mathbb{N}_0$$

si deduce che

$$w^*e^{tB}\sigma = 0 \qquad\qquad t \geq 0$$

Si ha quindi

$$\langle \mathcal{C}(T)w, w\rangle = \int_0^T |w^*e^{tB}\sigma|^2 dt = 0 \tag{1.21}$$

e $\mathcal{C}(t)$ é degenere per ogni $T > 0$.

D'altra parte, se $\mathcal{C}(t)$ é degenere per qualche $T > 0$ esiste $w \in \mathbb{R}^N$ tale che vale (1.21), quindi

$$f(t) := w^*e^{tB}\sigma = 0 \qquad\qquad t \in [0, T]$$

Differenziando si ottiene

$$0 = \frac{d^k}{dt^k} f(t)\Big|_{t=0} = w^*B^k\sigma \qquad\qquad k \in \mathbb{N}_0$$

da ció si deduce che, per (1.20), la matrice (1.19) non ha rango massimo. $\square$

### Condizione di Hörmander

Si vuole provare che la consizione di Kalman é equivalente alla condizione di Hörmander, un criterio noto nella teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali.

**Osservazione 4.** Nel caso in cui i coefficienti della SDE lineare $B$ e $\sigma$ sono costanti, con $\sigma$ dato da

$$\sigma = \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix}$$

l'operatore di Kolmogorov in $\mathbb{R}^{N+1}$ (1.9) associato alla SDE (1.12) é

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i x_i} + \langle b + Bx, \nabla \rangle + \partial_t \tag{1.22}$$

Per convenzione, si identifica ogni operatore differenziale di primo ordine $Z$ su $\mathbb{R}^N$

$$Zf(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(x)\partial_{x_k} f(x)$$

con con il campo vettoriale dei suoi coefficienti $\alpha_k$, quindi si puó scrivere

$$Z = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

Si definisce il commutatore di $Z$ con $U$ con

$$U = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \partial_{x_k}$$

come

$$[Z, U] = ZU - UZ = \sum_{k=1}^{N} (Z\beta_k - U\alpha_k)\partial_{x_k}$$

Il teorema di Hörmander é un risultato molto generale che nel caso dell'operatore di Kolmogorov con coefficienti costanti (1.22) afferma che $L$ ha soluzione fondamentale se e solo se , in ogni $x \in \mathbb{R}^N$, lo spazio vettoriale generato dagli operatpro differenziali (identificati con i campi vettoriali)

$$\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_d} \qquad \text{e} \qquad Y := \langle Bx, \nabla \rangle$$

e dai loro commutatori di ogni ordine, coincide con $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

**Proposizione 1.2.3.** *La condizione di Kalman e la condizione di Hörmander sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* É sufficiente notare che per $i = 1, ..., d$

$$[\partial_{x_i}, Y] = \sum_{k=1}^{N} b_{k_i} \partial_{x_k}$$

é la $i$-esima colonna della matrice $B$. Inoltre $[[\partial_{x_i}, Y], Y]$ é la $i$-esima colonna della matrice $B^2$ e una rappresentazione analoga vale per i commutatori di ordine superiore.

D'altra parte, per $k = 1, ..., N$, $B^k\sigma$ in (1.19) é la matrice $(N \times d)$-dimensionale le cui colonne sono le prime $d$ colonne di $B^k$. □

### 1.2.2 Coefficienti $B(t)$ e $\sigma(t)$ dipendenti dal tempo

In questo paragrafo si espongono alcune condizioni necessarie e sufficienti affinché la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ di $X_t$ sia definita positiva nel caso in cui i coefficienti della SDE (1.1), $B(t)$ e $\sigma(t)$, siano dipendenti dal tempo. Per prima cosa si richiamano la definizione ed alcune proprietá della *risolvente* del sistema lineare $x^{'}(t) = B(t)x(t)$.

**Definizione 1.3.** La risolvente $\Phi$ del sistema lineare $x^{'}(t) = B(t)x(t)$ é la mappa

$$\begin{aligned} \Phi : [T_0, T_1]^2 &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)^1 \\ (t_1, t_2) &\longmapsto \Phi(t_1, t_2) \end{aligned}$$

tale che, per ogni $t_2 \in [T_0, T_1]$, la mappa

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot\,, t_2) : [T_0, T_1] &\longrightarrow (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ t_1 &\longmapsto \Phi(t_1, t_2) \end{aligned}$$

é soluzione del problema di Cauchy

$$\Phi^{'}(t) = B(t)\Phi(t), \qquad \Phi(t_2) = \mathrm{Id}_N$$

**Proposizione 1.2.4.** *Per la risolvente $\Phi$ valgono le seguenti proprietá:*

1. *$\Phi \in C([T_0, T_1]^2; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$;*

[1] Con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ si indica lo spazio delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^N$. Questo viene identificato con $\mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{R})$, lo spazio delle matrici $N \times N$ a coefficienti reali.

2. $\Phi(t_1, t_1) = Id_N, \quad \forall\ t_1 \in [T_0, T_1]$;

3. $\Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3), \quad \forall\ (t_1, t_2, t_3) \in [T_0, T_1]^3$;

*In particolare*

$$\Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_1) = Id_N \quad \forall\ (t_1, t_2) \in [T_0, T_1]^2$$

*Inoltre, se* $B \in C^0([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$*, allora* $\Phi \in C^1([T_0, T_1]^2; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ *e si ha*

4. $\frac{\partial \Phi}{\partial t_1}(t, \tau) = B(t)\Phi(t, \tau), \quad \forall\ (t, \tau) \in [T_0, T_1]^2$;

5. $\frac{\partial \Phi}{\partial t_2}(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)B(\tau), \quad \forall\ (t, \tau) \in [T_0, T_1]^2$.

Si osserva che l'uguaglianza *4.* segue direttamente dalla definizione di risolvente. L'uguaglianza *5.* si puó ottenere dalla *4.* differenziando $\Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_1) = \mathrm{Id}_N$ rispetto a $t_2$.

**Proposizione 1.2.5.** *La soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \lambda'(t) = B(t)\lambda(t) + \sigma(t)v(t) & t \in ]T_0, T_1[ \\ \lambda(T_0) = x \end{cases} \tag{1.23}$$

*soddisfa*

$$\lambda(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)\sigma(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \forall\ (t_0, t_1) \in [T_0, T_1]^2 \tag{1.24}$$

*in particolare*

$$\lambda(t) = \Phi(t, T_0)x + \int_{T_0}^{t} \Phi(t, \tau)\sigma(\tau)v(\tau)d\tau, \quad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.25}$$

La dimostrazione di tale proposizione si puó trovare in [4] p. 336.

Anche in questo caso si presenta un primo risultato in termini di controllabilitá.

**Definizione 1.4.** La coppia $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile su $[T_0, T_1]$ se per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste una funzione $v \in C([T_0, T_1]; \mathbb{R}^d)$ tale che il problema

$$\begin{cases} \lambda'(t) = B(t)\lambda(t) + \sigma(t)v(t) & t \in ]T_0, T_1[ \\ \lambda(T_0) = x, \qquad \lambda(T_1) = y \end{cases} \tag{1.26}$$

abbia soluzione. La funzione $v$ é detta *controllo* di $(B(t), \sigma(t))$.

**Teorema 1.2.6** (Kalman, Ho e Narendra). *La matrice*

$$\mathcal{C}(T_1) = \Phi(T_1, T_0)\left(\int_{T_0}^{T_1} \Phi^{-1}(s, T_0)\sigma(s)(\Phi^{-1}(s, T_0)\sigma(s))^* ds\right)\Phi^*(T_1, T_0) \qquad (1.27)$$

*é invertibile se e solo se la coppia $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile su $[T_0, T_1]$.*

**Osservazione 5.** Si osservi che $\mathcal{C}(T)$ é invertibile se e solo se $\mathcal{C}(T)$ é definita positiva.
Infatti poiché per ipotesi $\mathcal{C}(T)$ é semidefinita positiva, se $\mathcal{C}(T)$ é invertibile allora é definita positiva.
D'altra parte ogni matrice definita positiva é invertibile.

*Dimostrazione del teorema 1.2.6.* Si osservi che, poiché la matrice $\mathcal{C}(T_1)$ é equivalente alla matrice

$$\mathcal{M} = \int_{T_0}^{T_1} \Phi(T_1, s)\sigma(s)\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s)ds \qquad (1.28)$$

é sufficiente mostrare il teorema per $\mathcal{M}$.

Sia $\mathcal{M}$ invertibile, si vuole provare che $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile su $[T_0, T_1]$. Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$ e si definisce

$$v(t) := \sigma^*(t)\Phi^*(T_1, t)\mathcal{M}^{-1}(y - \Phi(T_1, T_0)x) \quad s \in ]T_0, T_1[$$

Si vuole mostrare che $v(t)$ cosí definito é il controllo di $(B(t), \sigma(t))$.
Sia $\lambda(t)$ soluzione di (1.23), quindi per (1.25) vale

$$\begin{aligned}
\lambda(T_1) &= \Phi(T_1, T_0)x + \textstyle\int_{T_0}^{T_1} \Phi(T_1, s)\sigma(s)v(s)ds = \\
&= \Phi(T_1, T_0)x + \textstyle\int_{T_0}^{T_1} \Phi(T_1, s)\sigma(s)(\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s)\mathcal{M}^{-1}(y - \Phi(T_1, T_0)x))ds = \\
&= \Phi(T_1, T_0)x + \left(\textstyle\int_{T_0}^{T_1} \Phi(T_1, s)\sigma(s)(\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s))ds\right)\mathcal{M}^{-1}(y - \Phi(T_1, T_0)x) = \\
&= \Phi(T_1, T_0)x + \mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}(y - \Phi(T_1, T_0)x) = \\
&= \Phi(T_1, T_0)x + y - \Phi(T_1, T_0)x = \\
&= y
\end{aligned}$$

e questo mostra che $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile.

D'altra parte sia $(B(t), \sigma(t))$ controllabile e per assurdo supponiamo che $\mathcal{M}$ non sia invertibile. Quindi esiste $w \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tale che $\mathcal{M}w = 0$ ed in particolare $w^*\mathcal{M}w = 0$, cioé

$$w^*\mathcal{M}w = \int_{T_0}^{T_1} w^*\Phi(T_1 s)\sigma(s)\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s)wds = \int_{T_0}^{T_1} |\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s)w|^2 ds = 0$$

Questo implica che

$$w^*\Phi(T_1,\tau)\sigma(\tau) = 0, \ \tau \in ]T_0, T_1[ \tag{1.29}$$

Ora sia $\lambda(t)$ soluzione di

$$\lambda'(t) = B(t)\lambda(t) + \sigma(t)v(t), \quad \lambda(T_0) = 0$$

per (1.25) vale

$$\lambda(T_1) = \int_{T_0}^{T_1} \Phi(T_1,t)\sigma(t)v(t)dt$$

ed in particolare per (1.29)

$$w^*\lambda(T_1) = 0$$

Poiché $w \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, esiste $y \in \mathbb{R}^N$ tale che $w^*y \neq 0$ (per esempio $y := w$). Segue che, qualsiasi sia $v(t)$, $\lambda(T_1) \neq y$ e questo contraddice l'ipotesi di controllabilitá. □

Si presenta ora un criterio operativo per la controllabilitá che é analogo alla condizione di Kalman ma utilizabile nel caso piú generale in cui i coefficienti della SDE siano variabili nel tempo.

Si definisce, per induzione su $i$, una sequenza di mappe

$$M_0(t) = \sigma(t), \quad M_k(t) = -B(t)M_{k-1}(t) + \frac{d}{dt}M_{k-1}(t), \ k = 1, ..., N \tag{1.30}$$

**Teorema 1.2.7.** *Dato $\bar{t} \in [T_0, T_1]$, se vale*

$$Span\{M_i(\bar{t})u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.31}$$

*allora $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile su $[T_0, T_1]$.*

Si premettono alla dimostrazione del teorema alcune osservazioni.

**Osservazione 6.** In questo caso non é possibile utilizzare il teorema di Cayley-Hamilton nella dimostrazione, infatti ci sono sistemi $\lambda'(t) = B(t)\lambda(t) + \sigma(t)v(t)$ con $t \in [0,T]$ tali che

$$\text{Span}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N}\} \neq \text{Span}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \{0, ..., n-1\}\} \tag{1.32}$$

Per esempio se $T = 1$,$N = d = 1$, $B(t) = 0$ e $\sigma(t) = 1$ si ha

$$M_1(t) = t \quad M_2(t) = 1 \quad M_i(t) = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$$

Quindi se $t = 0$, la parte sinistra di (1.32) é $\mathbb{R}$ mentre la parte destra di (1.32) é $\{0\}$.

Nonostante ció vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.2.8.** *Sia $\bar{t} \in [T_0, T_1]$ tale che valga (1.31); allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $t \in ([T_0, T_1] \cap (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon)) \backslash \{\bar{t}\}$,*

$$\mathit{Span}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \{0, ..., n-1\}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.33}$$

*Dimostrazione.* Si divide la dimostrazione in tre passi. Nel *Passo 1* si mostra il motivo per cui si puó assumere $B = 0$. Nel *Passo 2* si mostra la proposizione nel caso di un controllo scalare ($d = 1$). Infine al *Passo 3* si riduce il caso $m > 1$ al caso di un controllo scalare, che si é mostrato al *Passo 2*.

*Passo 1.* Sia $\Phi \in C^\infty([T_0, T_1] \times [T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ la risolvente del sistema lineare variabile nel tempo $x' = B(t)x$. Sia

$$\tilde{M} \in C^\infty([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^N))$$

definita nel seguente modo

$$\tilde{M}(t) = \Phi(\bar{t}, t)\sigma(t) \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1]$$

Si definisce, per induzione su $i \in \mathbb{N}$, $\tilde{M}_i \in C^\infty([T_0, T_1]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^N))$ come

$$\tilde{M}_0 = \tilde{M} \text{ e } \tilde{M}_i = \tilde{M}'_{i-1}\ \forall\ i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

In altre parole

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}^{(i)} \tag{1.34}$$

Si ottiene, per induzione su $i$

$$\tilde{M}_i(t) = \Phi(\bar{t}, t)M_i(t)\ \forall\ t \in [T_0, T_1]\ \forall\ i \in \mathbb{N}$$

infatti l'uguaglianza vale per $i = 0$ in quanto $\tilde{M}_0(t) = \Phi(\bar{t}, t)M_0(t) = \Phi(\bar{t}, t)\sigma(t)$ per definizione. Si suppone che l'uguaglianza valga per $i = n$ cioé

$$\tilde{M}_n(t) = \Phi(\bar{t}, t)M_n(t)$$

e si dimostra per $i = n + 1$.

$$\tilde{M}_{n+1}(t) = \tilde{M}'_n = (\Phi(\bar{t}, t)M_n(t))' = \Phi(\bar{t}, t)'M_n(t) + \Phi(\bar{t}, t)M'_n(t) =$$

(il punto *5.* della proposizione (1.2.4) e la definizione di $M_k$)

$$= -\Phi(\bar{t}, t)B(t)M_n(t) + \Phi(\bar{t}, t)M_{n+1}(t) + \Phi(\bar{t}, t)B(t)M_n(t) = \Phi(\bar{t}, t)M_{n+1}(t)$$

In particolare, poiché $\Phi(\bar{t}, \bar{t}) = Id_N$ e $\Phi(\bar{t}, t)$ é invertibile per ogni $t \in [T_0, T_1]$

$$\mathrm{Span}\{M_i(\bar{t})u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Span}\{\tilde{M}_i(\bar{t})u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{dimSpan}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \{0,...,n-1\}\} =$$
$$\text{dimSpan}\{\tilde{M}_i(t)u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \{0,...,n-1\}\} \ \forall\ t \in [T_0,T_1]$$

Quindi rimpiazzando $M$ con $\tilde{M}$ e usando (1.34), é sufficiente considerare il caso in cui

$$B = 0 \tag{1.35}$$

Nei successivi passi si assume (1.35). In particolare si ha

$$M_i = M^{(i)}\ \forall\ i \in \mathbb{N} \tag{1.36}$$

*Passo 2.* Si proverá ora la proposizione nel caso di un controllo scalare; si assume $d = 1$. Consideriamo valido, per il momento, il seguente lemma:

**Lemma 1.2.9.** *Sia $M \in C^\infty([T_0,T_1];\mathbb{R}^N)$ e sia $\bar{t} \in [T_0,T_1]$ tale che*

$$Span\{M^{(i)}(\bar{t}); i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.37}$$

*Allora esistono $N$ interi $p_i \in \mathbb{N}, i \in \{1,...,N\}$, $N$ funzioni $a_i \in C^\infty([T_0,T_1]), i \in \{1,...,N\}$ ed $N$ vettori $f_i \in \mathbb{R}^N, i \in \{1,...,N\}$ tali che*

$$p_i < p_{i+1}, \forall\ i \in \{1,...,N-1\} \tag{1.38}$$

$$a_i(\bar{t}) \neq 0 \forall\ i \in \{1,...,N\} \tag{1.39}$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)(t-\bar{t})^{p_i} f_i \qquad \forall\ t \in [T_0,T_1] \tag{1.40}$$

$$Span\{f_i; i \in \{1,...,N\}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.41}$$

Da (1.36) e (1.40), si ottine, per $t \to \bar{t}$

$$\det(M_0(t), M_1(t), ..., M_{N-1}(t)) = K(t-\bar{t})^{(N(N-1)/2)+\sum_{i=1}^N p_i} + \tag{1.42}$$
$$+\mathrm{O}\left((t-\bar{t})^{1-(N(N-1)/2)+\sum_{i=1}^N p_i}\right)$$

Con $K$ costante dipendente da

$$K := K(p_1,...,p_N, a_1(\bar{t}),...,a_N(\bar{t}), f_1,...,f_N)$$

Sia $\overline{M} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ definita da

$$\overline{M}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(\bar{t}) t^{p_i} f_i \qquad \forall\ t \in \mathbb{R} \tag{1.43}$$

Si ha

$$\det(\overline{M}^{(0)}(t), \overline{M}^{(1)}(t), ..., \overline{M}^{(N-1)}(t)) = K t^{-(N(N-1)/2)+\sum_{i=1}^{N} p_i}\ \forall\ t \in \mathbb{R} \tag{1.44}$$

Fissati $t$, $a_i(\bar{t})$ numeri reali e $p_i$ interi che soddisfano (1.38), la mappa

$$(f_1, ..., f_N) \in \mathbb{R}^N \times ... \times \mathbb{R}^N \mapsto \det(\overline{M}^{(0)}(t), \overline{M}^{(1)}(t), ..., \overline{M}^{(N-1)}(t)) \in \mathbb{R}$$

é multilineare e si annulla se i vettori $f_1, ..., f_N$ sono dipendenti. Quindi $K$ si puó scrivere nel seguente modo

$$K := F(p_1, ..., p_N) \left( \prod_{i=1}^{N} a_i(\bar{t}) \right) \det(f_1, ..., f_N) \tag{1.45}$$

Considerando come $(f_1, ..., f_N)$ la base canonica di $\mathbb{R}^N$ e $a_i(\bar{t}) = 1$ per ogni $i \in \{1, ..., N\}$ si ottiene

$$\det(\overline{M}^{(0)}(t), \overline{M}^{(1)}(t), ..., \overline{M}^{(N-1)}(t)) = t^{-(N(N-1)/2)+\sum_{i=1}^{N} p_i} \det A \tag{1.46}$$

con

$$A := \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_1(p_1-1) & ... & p_1(p_1-1)(p_1-2)...(p_1-N+1) \\ 1 & p_2 & p_2(p_2-1) & ... & p_2(p_2-1)(p_2-2)...(p_2-N+1) \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 1 & p_N & p_N(p_N-1) & ... & p_N(p_N-1)(p_N-2)...(p_N-N+1) \end{pmatrix}$$

Il determinante di $A$ puó essere calcolato attraverso il calcolo del determinante della matrice di Vandermonde. Si ha infatti

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_1^2 & ... & p_1^{N-1} \\ 1 & p_2 & p_2^2 & ... & p_2^{N-1} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 1 & p_N & p_N^2 & ... & p_N^{N-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le N} (p_j - p_i) \tag{1.47}$$

Da (1.45), (1.46) e (1.47) si ha

$$K = \left( \prod_{1 \le i < j \le N} (p_j - p_i) \right) \left( \prod_{i=1}^{N} a_i(\bar{t}) \right) \det(f_1, ..., f_N) \tag{1.48}$$

Quindi (1.38),(1.39),(1.41) e (1.48) segue che

$$K \neq 0 \tag{1.49}$$

Da (1.42) e (1.49) esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $t \in ([T_0, T_1] \cap (\bar{t}-\epsilon, \bar{t}+\epsilon))\ \{\bar{t}\}$, vale (1.33).

*Passo 3.* Si assume sempre che valga (1.35). Si mostrerá ora come si puó ridurre il caso $d > 1$ al caso $d = 1$ provato al *Passo 2*. Siano $b_i \in C^\infty([T_0, T_1]; \mathbb{R}^N)$ per $i \in \{1, ..., d\}$ tali che

$$M(t) = (b_1(t), ..., b_d(t)) \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.50}$$

Si definisce, per $i \in \{1, ..., d\}$, i sottospazi lineari $E_i$ di $\mathbb{R}^N$

$$E_i := \text{Span}\{b_k^{(j)}(\bar{t}); k \in \{1, ..., i\}, j \in \mathbb{N}\} \tag{1.51}$$

Da (1.31), (1.36), (1.50) e (1.51) si ha

$$E_d = \mathbb{R}^N \tag{1.52}$$

Sia $q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ tale che, per ogni $i \in \{1, ..., d\}$

$$E_i = \text{Span}\{b_k^{(j)}(\bar{t}); k \in \{1, ..., i\}, j \in \{0, ..., q-1\}\} \tag{1.53}$$

Sia $b \in C^\infty([T_0, T_1]; \mathbb{R}^N)$ definito da

$$b(t) := \sum_{i=1}^{d} (t - \bar{t})^{(i-1)q} b_i(t) \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.54}$$

Da (1.53) e (1.54) si ottiene, per induzione su $i \in \{1, ..., d\}$

$$E_i = \text{Span}\{b^{(j)}(\bar{t}); j \in \{0, ..., iq-1\}\}$$

In particolare, prendendo $i = d$ e usando (1.52) si ottiene

$$\text{Span}\{b^{(j)}(\bar{t}); j \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.55}$$

Quindi, per il *Passo 2*, esiste $\epsilon > 0$ tale che , per ogni $t \in ([T_0, T_1] \cap (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon)) \backslash \{\bar{t}\}$

$$\text{Span}\{b^{(j)}(t); i \in \{0, ..., N-1\}\} = \mathbb{R}^N \tag{1.56}$$

E per (1.54)

$$\text{Span}\{b^{(j)}(t); i \in \{0, ..., N-1\}\}$$
$$\subset \text{Span}\{b_i^{(j)}(\bar{t}); i \in \{1, ..., d\}, j \in \{0, ..., N-1\}\}$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

*Dimostrazione del lemma 1.2.9.* Si procede per induzione su $N$. Se $N = 1$ il lemma vale. Supponiamo ora che valga per ogni intero minore o uguale a $(N-1) \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Si vuole provare che vale per $N$. Sia $p_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$M^{(i)}(\bar{t}) = 0 \qquad \forall\ i \in \mathbb{N} \cap [0, p_1 - 1] \tag{1.57}$$

$$M^{(p_1)}(\bar{t}) \neq 0 \tag{1.58}$$

La proprietá (1.37) implica l'esistenza di tale $p_1$. Sia

$$f_1 := M^{(p_1)}(\bar{t}) \tag{1.59}$$

Da (1.58) e (1.59)

$$f_1 \neq 0$$

Sia $E$ il sottospazio ortogonale a $f_1$ in $\mathbb{R}^N$:

$$E := f_1^{\perp} \simeq \mathbb{R}^{N-1} \tag{1.60}$$

Sia $\Pi_E : \mathbb{R}^N \to E$ la proiezione ortogonale su $E$. Sia $C \in C^{\infty}([T_0, T_1]; E)$ definito da

$$C(t) := \Pi_E \sigma(t) \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.61}$$

Da (1.37) e (1.61) si ha

$$\mathrm{Span}\{C^{(i)}(\bar{t})u; u \in \mathbb{R}^d, i \in \mathbb{N}\} = E \tag{1.62}$$

Quindi, per l'ipotesi induttiva, esistono $(N-1)$ interi $p_i \in \mathbb{N}, i \in \{2, ..., N\}$, $(N-1)$ funzioni $a_i \in C^{\infty}([T_0, T_1]), i \in \{2, ..., N\}$ e $(N-1)$ vettori $f_i \in E, i \in \{2, ..., N\}$ tali che

$$p_i < p_{i+1}, \forall\ i \in \{2, ..., N-1\} \tag{1.63}$$

$$a_i(\bar{t}) \neq 0 \forall\ i \in \{2, ..., N\} \tag{1.64}$$

$$C(t) = \sum_{i=2}^{N} a_i(t)(t - \bar{t})^{p_i} f_i \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.65}$$

$$\mathrm{Span}\{f_i; i \in \{2, ..., N\}\} = E \tag{1.66}$$

Sia $g \in C^{\infty}([T_0, T_1])$ tale che

$$M(t) = g(t) f_1 + \sum_{i=2}^{N} a_i(t)(t - \bar{t})^{p_i} f_i \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1] \tag{1.67}$$

Utilizzando (1.57), (1.58), (1.59), (1.60), (1.64), (1.66) e (1.67) si ottiene

$$p_1 < p_i \forall\ i \in \{2, ..., N\}\}$$

$$\exists\ a_1 \in C^{\infty}([T_0, T_1]) \text{ tale che } a_1(\bar{t}) \neq 0 \text{ e } g(t) = (t - \bar{t})^{p_i} a_1(t) \forall\ t \in [T_0, T_1]$$

e questo conclude la dimostrazione del lemma. □

**Osservazione 7.** La condizione per la controllabilitá data dal teorema (1.2.7) é sufficiente ma non necessaria.
Infatti sia $N = 2, d = 1, B(t) = 0$ e siano $f \in C^\infty([T_0, T_1])$ e $g \in C^\infty([T_0, T_1])$ tali che

$$f = 0 \text{ su } \left[\frac{(T_0+T_1)}{2}, T_1\right], g = 0 \text{ su } \left[T_0, \frac{(T_0+T_1)}{2}\right]$$

$$f(T_0) \neq 0, g(T_1) \neq 0$$

Sia $\sigma(t)$ definita e nel seguente modo

$$\sigma(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \qquad \forall\ t \in [T_0, T_1]$$

Poiché risulta $\Phi(t) = \text{cost}$, si ha

$$C(t) = \begin{pmatrix} \int_{T_0}^{T_1} f(t)^2 dt & \int_0^T f(t)g(t)dt \\ \int_{T_0}^{T_1} g(t)f(t)dt & \int_0^T g(t)^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{T_0}^{T_1} f(t)^2 dt & 0 \\ 0 & \int_{T_0}^{T_1} g(t)^2 dt \end{pmatrix}$$

e $C(t)$ invertibile per definizione di $f(t)$ e $g(t)$. Per il teorema (1.2.6) la coppia $(B(t), \sigma(t))$ é controllabile su $[T_0, T_1]$. Inoltre si ha

$$M_i(t) = \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ g^{(i)}(t) \end{pmatrix} \forall\ t \in [T_0, T_1],\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Quindi, per definizione di $f(t)$ e $g(t)$, si ha

$$\text{Span}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}, \forall\ t \in \left[T_0, \frac{(T_0+T_1)}{2}\right]$$

$$\text{Span}\{M_i(t)u; u \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}, \forall\ t \in \left[\frac{(T_0+T_1)}{2}, T_1\right]$$

e perció non vale (1.31).

*Dimostrazione del teorema 1.2.7.* Si supponga per assurdo che $(B(t), \sigma(t))$ non sia controllabile. Allora per il teorema (1.2.6) la matrice $\mathcal{C}$ (ed in particolare la matrice $\mathcal{M}$) non é invertibile. Quindi esiste $w \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ tale che $\mathcal{M}w = 0$. Dunque

$$0 = w^* \mathcal{M} w = \int_{T_0}^{T_1} |\sigma^*(s)\Phi^*(T_1, s)w|^2 ds$$

e in particolare

$$K(\tau) := z^* \Phi(\bar{t}, \tau)\sigma(\tau) = 0 \qquad \forall\ \tau \in [T_0, T_1] \tag{1.68}$$

dove

$$z := \Phi^*(T_1, \bar{t})w$$

Si ha, per induzione su $i$ che

$$K^{(i)}(\tau) = z^* \Phi(\bar{t}, \tau) M_i(\tau) \qquad \forall\ \tau \in [T_0, T_1], i \in \mathbb{N} \tag{1.69}$$

Per $i = 0$ vale (1.68); si suppone vero (1.69) e si prova che

$$K^{(i+1)}(\tau) = z^* \Phi(\bar{t}, \tau) M_{i+1}(\tau) \qquad \forall\ \tau \in [T_0, T_1], i \in \mathbb{N}$$

Utilizzando la definizione di $M_i$ e la proprietá *5.* della proposizione (1.2.4) si ha che

$$\begin{aligned}
K^{(i+1)}(\tau) = \frac{d}{d\tau} K^{(i)}(\tau) = z^* \frac{d}{d\tau} \left(\Phi(\bar{t}, \tau) M_i(\tau)\right) = \\
&= z^* \left[ \frac{d}{d\tau} \Phi(\bar{t}, \tau) M_i(\tau) + \Phi(\bar{t}, \tau) \frac{d}{d\tau} M_i(\tau) \right] = \\
&= z^* \left[ \frac{d}{d\tau} \Phi(\bar{t}, \tau) M_i(\tau) + \Phi(\bar{t}, \tau) M_{i+1}(\tau) + \Phi(\bar{t}, \tau) B(\tau) M_i(\tau) \right] = \\
&= z^* \left[ -\Phi(\bar{t}, \tau) B(\tau) M_i(\tau) + \Phi(\bar{t}, \tau) M_{i+1}(\tau) + \Phi(\bar{t}, \tau) B(\tau) M_i(\tau) \right] = \\
&= z^* \Phi(\bar{t}, \tau) M_{i+1}(\tau)
\end{aligned}$$

Ora, poiché $\Phi(\bar{t}, \bar{t}) = \mathrm{Id}_N$ (proprietá *2.* della proposizione (1.2.4)), vale

$$z^* M_i(\bar{t}) = 0, \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$$

ma siccome $z \neq 0$ questo contraddice l'ipotesi. □

# Capitolo 2

# Disuguaglianza di Harnack

La disuguaglianza di Harnack per l'operatore di Kolmogorov (1.9) che si trova in letteratura afferma che: *sotto l'ipotesi che la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ sia definita positiva, si considerino le coppie $(t, x), (T, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $t < T$. Allora esiste una costante $H = H(t, x, T, y)$, dipendente solo da $L$ e $(t, x), (T, y)$, tale che*

$$u(T, y) \leq Hu(t, x) \tag{2.1}$$

*per ogni soluzione positiva $u$ di $Lu = 0$.*

In questo capitolo verrá fornita una dimostrazione diretta della disuguaglianza di Harnack (2.1) usando un argomento variazionale, che permette di scrivere esplicitamente la costante $H$ di Harnack. Il risultato principale é il seguente:

**Teorema 2.0.10.** *Sia $L$ operatore di Kolmogorov in (1.9) tale che la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ sia definita positiva e sia $u$ soluzione positiva di $Lu = 0$ in $[t_0, t_1[\times\mathbb{R}^N$. Allora vale la disuguaglianza di Harnack*

$$u(T, y) \leq Hu(t, x)$$

*con*

$$H = H(t, x, T, y) = \sqrt{\frac{det\ \mathcal{C}_t(t_1)}{det\ \mathcal{C}_T(t_1)}}\ e^{\frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_t^{-1}(T)(y - m_{t,x}(T)), (y - m_{t,x}(T))\rangle} \tag{2.2}$$

*per ogni $(t, x), (T, y) \in [t_0, t_1[\times\mathbb{R}^N$ con $t < T$.*

Si propongono ora due esempi che mostrano l'ottimalitá della costante $H$ in (2.2).

**Esempio 2.1.** Sia $u : ]-\infty, \epsilon[\times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una soluzione positiva dell'equazione del calore

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u = 0$$

Allora $u(0, y) \leq Hu(t, x)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N, t < 0$ con

$$H = \sqrt{\frac{(\epsilon - t)^N}{\epsilon^N}}\ e^{\frac{|x-y|^2}{-2t}}$$

**Osservazione 8.** L'ottimalitá della costante $H$ diventa chiara quando si applica la disuguaglianza alla soluzione fondamentale dell'equazione del calore:

$$u(t, x) = (2\pi(\epsilon - t))^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2(\epsilon - t)}\right) \qquad (t, x) \in ]-\infty, \epsilon[\times \mathbb{R}^N$$

in questo caso si ha $u(0, y) = (2\pi\epsilon)^{-\frac{N}{2}}$.

**Esempio 2.2.** Sia $u : ]-\infty, \epsilon[\times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ sia una soluzione positiva dell' equazione di Kolmogorov (1.10). Allora $u(0, y) \leq Hu(t, x)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^2, t < 0$ con

$$H = \frac{(\epsilon - t)^2}{\epsilon^2} \exp\left(\frac{(x_1 - y_1 - \mu t)^2}{-2\sigma_0^2 t} + 3\frac{(2(y_2 - x_2) + t(x_1 + y_1))^2}{-2\sigma_0^2 t^3}\right)$$

**Osservazione 9.** Anche nel caso di questo secondo esempio la soluzione fondamentale mostra l'ottimalitá della costante $H$. Si consideri la funzione

$$u(t, x) = \Gamma(t, x; \epsilon, 0) \qquad (t, x) \in ]-\infty, \epsilon[\times \mathbb{R}^2$$

dove $\Gamma$ é definita come in (1.11). Si ha quindi

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma_0^2\epsilon^2} \exp\left(-\frac{\mu^2\epsilon}{2\sigma_0^2}\right) = u(0, 0) \leq Hu(t, x)$$

con

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sigma_0^2(\epsilon - t)^2} \exp\left(-\frac{(x_1 + \mu(\epsilon - t))^2}{2\sigma_0^2(\epsilon - t)} - 3\frac{(2x_2 + (\epsilon - t)x_1)^2}{2\sigma_0^2(\epsilon - t)^3}\right)$$

La dimostrazione del teorema (2.0.10) si basa sulla soluzione di un problema di controllo ottimale con costo quadratico. In particolare vale la seguente stima del gradiente per una soluzione positiva $u$ di $Lu = 0$ su $[t_0, t_1[\times \mathbb{R}^N$.

**Proposizione 2.0.11.** *Si assuma che la matrice di covarianza $\mathcal{C}(t)$ sia definita positiva e sia*

$$\varphi(t) = log\sqrt{det\ \mathcal{C}_t(t_1)} \qquad t < t_1$$

*Allora per ogni soluzione $u$ di $Lu = 0$ sulla striscia $[t_0, t_1[\times\mathbb{R}^N$ si ha*

$$\frac{\langle A(t)\nabla u(t,x), \nabla u(t,x)\rangle}{2u(t,x)} \leq -Yu(t,x) - \varphi^{'}(t)u(t,x) \tag{2.3}$$

*con $A = \sigma\sigma^*$ e $Y = \langle b(t) + B(t)x, \nabla\rangle + \partial_t$.*

*Dimostrazione.* Sia $\Gamma(t, x; t_1, y)$ soluzione fondamentale di (1.9), definita per $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $t < t_1$.
Si mostra per prima cosa che $\Gamma$ verifica l'equazione

$$\frac{\langle A(t)\nabla_x\Gamma(t,x;t_1,y), \nabla_x\Gamma(t,x;t_1,y)\rangle}{2\Gamma(t,x;t_1,y)} = -Y\Gamma(t,x;t_1,y) - \varphi^{'}(t)\Gamma(t,x;t_1,y) \tag{2.4}$$

e successivamente si prova la stima del gradiente (2.3) attraverso la formula di rappresentazione di $u$. Da (1.8) si ha che

$$\log\Gamma(t,x;t_1,y) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det\ \mathcal{C}_t(t_1)}}\right) + \log\left(e^{-\frac{1}{2}\langle\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(y-m_{t,x}(t_1)),(y-m_{t,x}(t_1))\rangle}\right) =$$

$$= \log\left((2\pi)^{-\frac{N}{2}}\right) + \log\left((\det\ \mathcal{C}_t(t_1))^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\langle\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(y-m_{t,x}(t_1)), (y-m_{t,x}(t_1))\rangle =$$

$$= -\frac{N}{2}\log(2\pi) - \varphi(t) - \frac{1}{2}\langle\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(y-m_{t,x}(t_1)), (y-m_{t,x}(t_1))\rangle$$

quindi

$$\nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y) = -\varPhi^*(t_1)\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(m_{t,x}(t_1) - y) \tag{2.5}$$

e

$$\begin{aligned} -Y\log\Gamma(t,x;t_1,y) &= -\left(\langle b(t) + B(t)x, \nabla\rangle + \partial_t\right)\log\Gamma(t,x;t_1,y) = \\ &= \langle b(t)+B(t)x, \varPhi^*(t_1)\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(m_{t,x}(t_1)-y)\rangle + \varphi^{'}(t) + \\ &+ \frac{1}{2}\langle\left(\frac{d}{dt}\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)\right)(y-m_{t,x}(t_1)), (y-m_{t,x}(t_1))\rangle + \\ &+ \langle\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)(m_{t,x}(t_1)-y), \frac{d}{dt}(m_{t,x}(t_1)-y)\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

Poiché $\Gamma$ é soluzione fondamentale di (1.9), si ha

$$L\log\Gamma(t,x;t_1,y) + \frac{1}{2}\langle A(t)\nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y), \nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y)\rangle = 0$$

Quindi ponendo

$$(f_{i,j}(t)) := \Phi^*(t_1)\mathcal{C}_t^{-1}(t_1)\Phi(t_1)$$

e usando (2.5) si ottiene

$$-Y\log\Gamma(t,x;t_1,y) = \frac{1}{2}\langle A(t)\nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y), \nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y)\rangle +$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(t)f_{i,j}(t)$$

Valutando questa espressione e (2.6) in $y = m_{t,x}(t_1)$, si ottiene

$$\varphi^{'}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(t)f_{i,j}(t)$$

e questo prova che

$$Y\log\Gamma(t,x;t_1,y) + \frac{1}{2}\langle A(t)\nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y), \nabla_x\log\Gamma(t,x;t_1,y)\rangle = -\varphi^{'}(t)$$

che é equivalente a (2.4).
Per concludere la dimostrazione, si fissa $T < t_1$ e si usa la formula di rappresentazione

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t,x;T,y)u(T,y)dy \qquad\qquad (t,x) \in [t_0,T]\times\mathbb{R}^N$$

quindi si ha

$$-Yu - \varphi^{'}(t)u = \int_{\mathbb{R}^N}(-Y\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y) - \varphi^{'}(t)\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y))u(T,y)dy =$$

(per (2.4))

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{\langle A(t)\nabla\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y), \Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y)\rangle}{\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y)}u(T,y)dy \geq$$

(per la disuguaglianza di Hölder)

$$\geq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y)u(T,y)dy\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\,\langle A\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y)u(T,y)dy, \int_{\mathbb{R}^N}\nabla\Gamma(\cdot\,,\cdot\,;T,y)u(T,y)dy\rangle =$$

$$= \frac{\langle A\nabla u, \nabla u\rangle}{2u}$$

□

Si premette alla dimostrazione del teorema (2.0.10) il lemma seguente.

**Definizione 2.3.** Sia $T$ positivo, una curva $\gamma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é $L$-ammissibile se é assolutamente continua e soddisfa

$$\gamma'(s) = B(s)\gamma(s) + b(s) + \sigma(s)w(s) \qquad \text{in}[0, T]$$

per una opportuna funzione $w$ con valori in $\mathbb{R}^d$. Le componenti $w_1, ..., w_d$ di $w$ sono dette controllo del cammino $\gamma$.

**Lemma 2.0.12.** *Il cammino $L$-ammissibile $\bar{\gamma}$ corrispondente al controllo*

$$\bar{w}(s) = \sigma^*(s)\Phi(t)\mathcal{C}_t^{-1}(T)(y - m_{t,x}(T))$$

*minimizza il costo quadratico*

$$\psi(w) = \int_t^T |w(s)|^2 ds$$

*Inoltre il costo minimo é*

$$\psi(\bar{w}) = \int_t^T |w(s)|^2 ds = \langle \mathcal{C}_t^{-1}(T)(y - m_{t,x}(T)), (y - m_{t,x}(T)) \rangle \tag{2.7}$$

*Dimostrazione.* Si consideri la funzione Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(x, p, w) = |w|^2 + p(Bx + \sigma w + b) \qquad p = (p_1, ..., p_N)$$

correlata al problema

$$\begin{cases} \gamma'(s) = B(s)\gamma(s) + b(s) + \sigma(s)w(s) \\ \gamma(t) = x, \ \gamma(T) = y \end{cases}$$

Dalla teoria del controllo classica [1], il controllo ottimale ha la forma

$$w(s) = \sigma^*(s)p^*(s) \tag{2.8}$$

dove $p$ é tale che $p' = -pB$. Il cammino $L$- ammissibile corrispondente a (2.8) é

$$\gamma(s) = m_{t,x}(s) + \mathcal{C}_t(s)(\Phi^*)^{-1}(s)p^*(t)$$

dove $p^*(t)$ é determinato imponendo la condizione $\gamma(T) = y$; nello specifico si ha

$$p^*(t) = \Phi^*(T)\mathcal{C}_t^{-1}(T)(y - m_{t,x}(T))$$

e questo conclude la dimostrazione. □

[1] Si veda per esempio il teorema 3, p.180 in [5]

*Dimostrazione del teorema (2.0.10).* Sia $\bar{\gamma}$ il cammino $L$-ammissibile ottimale come in lemma (2.0.12) e $\bar{w}$ il corrispondente controllo ottimale.
Aggiungendo la quantitá

$$\frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2 - \langle \sigma^*(s)\nabla u(s,\bar{\gamma}(s)),\bar{w}(s)\rangle$$

da entrambe le parti della (2.3) valutata nel punto $(s,\bar{\gamma}(s))$, la parte sinistra $\frac{\langle A(t)\nabla u(t,x),\nabla u(t,x)\rangle}{2u(t,x)} + \frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2 - \langle \sigma^*(s)\nabla u(s,\bar{\gamma}(s)),\bar{w}(s)\rangle$ diventa il quadrato di una norma e quindi é non negativa. Quindi sará non negativa anche la parte destra $-Yu(s,\bar{\gamma}(s)) - \varphi^{'}(s)u(s,\bar{\gamma}(s)) + \frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2 - +\langle \sigma^*(s)\nabla u(s,\bar{\gamma}(s)),\bar{w}(s)\rangle$ e si ottiene

$$Yu(s,\bar{\gamma}(s))+\langle \sigma^*(s)\nabla u(s,\bar{\gamma}(s)),\bar{w}(s)\rangle \le -\varphi^{'}(s)u(s,\bar{\gamma}(s))+\frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2$$

Usando il fatto che $\bar{\gamma}$ é un cammino $L$-ammissibile, si ottiene

$$\frac{d}{ds}u(s,\bar{\gamma}(s)) \le -\varphi^{'}(s)u(s,\bar{\gamma}(s)) + \frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2$$

Dividendo per $u$ si ottiene

$$\frac{\frac{d}{ds}u(s,\bar{\gamma}(s))}{u(s,\bar{\gamma}(s))} \le \frac{-\varphi^{'}(s)u(s,\bar{\gamma}(s))}{u(s,\bar{\gamma}(s))} + \frac{\frac{1}{2}u(s,\bar{\gamma}(s))|\bar{w}(s)|^2}{u(s,\bar{\gamma}(s))}$$

e integrando nella variabile $s$ sull'intervallo $[t,T]$ si ha

$$\int_t^T \frac{\frac{d}{ds}u(s,\bar{\gamma}(s))}{u(s,\bar{\gamma}(s))}ds \le -\int_t^T \varphi^{'}(s)ds + \frac{1}{2}\int_t^T |\bar{w}(s)|^2 ds$$

$$\log\, u(s,\bar{\gamma}(s))|_t^T \le -\varphi(T) + \varphi(t) + \frac{1}{2}\int_t^T |\bar{w}(s)|^2 ds$$

$$\log u(T,y) - \log u(t,x) \le -\log\sqrt{\det\, \mathcal{C}_T(t_1)} + \log\sqrt{\det\, \mathcal{C}_t(t_1)} + \frac{1}{2}\int_t^T |\bar{w}(s)|^2 ds$$

$$\log\frac{u(T,y)}{u(t,x)} \le \log\frac{\sqrt{\det\, \mathcal{C}_t(t_1)}}{\sqrt{\det\, \mathcal{C}_T(t_1)}} + \frac{1}{2}\int_t^T |\bar{w}(s)|^2 ds$$

o equivalentemente

$$u(T,y) \le \sqrt{\frac{\det\, \mathcal{C}_t(t_1)}{\det\, \mathcal{C}_T(t_1)}}\; u(t,x)e^{\frac{1}{2}\psi(\bar{w})}$$

con $\psi(\bar{w})$ come in (2.7). $\square$

# Capitolo 3

# Un'applicazione della disuguaglianza di Harnack in finanza

In un modello Black&Scholes multidimensionale standard, le dinamiche di neutralitá al rischio di $N$ assetti finanziari sono date da

$$dS_t^i = rS_t^i dt + S_t^i \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} dW_t^j = rS_t^i dt + S_t^i \sigma_i \cdot dW_t$$

dove $W = (W^1, ..., W^N)$ é un moto browniano standard $N$-dimensionale, $\sigma$ é una matrice reale $N \times N$ non singolare ed $r$ é il tasso a breve o localmente privo di rischio, supposto costante. Indichiamo con $B_t$ il titolo localmente non rischioso, il bond. Il prezzo del bond verifica l'equazione

$$dB_t = rB_t dt$$

Si considera un portfafoglio markoviano cioé un processo $(\alpha, \beta) = (\alpha^1, ..., \alpha^N, \beta)$ di forma

$$\alpha_t = \alpha(t, S_t) \qquad \beta_t = \beta(t, S_t)$$

dove $(\alpha, \beta)$ sono funzioni lisce. Il valore del portafoglio $(\alpha, \beta)$ é il processo stocastico definito da

$$V_t = \sum_{i=1}^{N} \alpha_t^i S_t^i + \beta_t B_t = \alpha_t \cdot S_t + \beta_t B_t$$

Si dice che $(\alpha, \beta)$ ha la proprietá autofinanziante se vale

$$dV_t = \alpha_t \cdot dS_t + \beta_t dB_t \tag{3.1}$$

É noto che la condizione (3.1) é equivalente al fatto che

$$V_t = f(t, S_t) \qquad \alpha_t = \nabla_S f(t, S_t) \qquad \beta_t = e^{-rt}(f(t, S_t) - S_t \cdot \nabla_S f(t, S_t))$$

dove $f = f(t, S)$ é soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\sigma\sigma^*)_{ij} S^i S^j \partial_{S^i S^j} f + rS \cdot \nabla_S f + \partial_t f - rf = 0 \tag{3.2}$$

Si pone $\log S = (\log S^1, ..., \log S^N)$, considerando il cambio di variabili

$$f(t, S) = e^{rt} u(t, \log S)$$

l'equazione (3.2) diventa

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} (\sigma\sigma^*)_{ij} \partial_{x_i x_j} u(t, x) + b \cdot \nabla u(t, x) + \partial_t u(t, x) = 0 \tag{3.3}$$

dove $b$ é il vettore definito da

$$b_i = r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}^2 \qquad i = 1, ..., N \tag{3.4}$$

Applicando la disuguaglianza di Harnack si ottiene la proposizione seguente:

**Proposizione 3.0.13.** *Si consideri un portfafoglio autofinanziante e ammissibile (cioé tale che $V_t \geq 0$ per ogni $t$) definito su $[0, T[$. Si ha*

$$V(t, S_t) \leq e^{rt} H(S_0, S_t, t) V(0, S_0) \qquad 0 \leq t < T \tag{3.5}$$

*dove*

$$H(S_0, S_t, t) = \left(\frac{T}{T-t}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{1}{2t}|\sigma^{-1}\left(\log \frac{S_t}{S_0} - tb\right)|^2} =$$

$$= \left(\frac{T}{T-t}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left(\frac{1}{2t} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{N} (\sigma^{-1})_{ij} \left(\log \frac{S_t^i}{S_0^i} - tb_i\right)\right)^2\right)$$

*con $b$ come in (3.4).*

La disuguaglianza (3.5) fornisce un limite superiore a priori del valore futuro di un portafoglio autofinanziante in funzione del capitale iniziale. La stima é buona in quanto é data in termini di costante di Harnack ottimale e puó essere utile per studiare l'ottimizzazione del portafoglio.

Inoltre, la disuguaglianza (3.5) prova l'assenza di opportunitá di arbitraggio nel mercato, infatti (3.5) implica che $V(t, S_t)$ non puó essere poitivo partendo da un capitale iniziale nullo e quindi il mercato é libero da arbitraggi.

# Appendice A

# Equazioni differenziali stocastiche

Per le dimostrazioni relative ai risultati esposti in seguito di puó fare riferimento a Pascucci [1].

**Definizione A.1.** Siano $b$ e $\sigma$ due funzioni misurabili

$$b = b(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \qquad \sigma = \sigma(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times d}$$

- $b$ é detto coefficiente di *drift*
- $\sigma$ é detto coefficiente di *diffusion*

Sia $W$ un moto browniano $d$-dimensionale nello spazio di probabilitá con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ nel quale valgano le ipotesi usuali. [1] Una soluzione relativa a $W$ della SDE con coefficienti $x_0, b, \sigma$ é un processo $(X_t)_{t\in[0,T]}$ continuo e adattato a $\mathcal{F}_t$ tale che

i. $b(t, X_t) \in \mathbb{L}^1_{\text{loc}}$ e $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}^2_{\text{loc}}$

ii. si ha

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \qquad t \in [0,T]$$

[1] Dato $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ spazio di probabilitá, la filtrazione $\mathcal{F}_t$ soddisfa le ipotesi usuali rispetto a $P$ se

1. $N \in \mathcal{F}_0$ dove $N$ é la famiglia degli eventi $A$ tali che $P(A) = 0$
2. la filtrazione é continua da destra cioé per ogni $t > 0$

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$$

cioé

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad\qquad X_0 = x_0$$

**Definizione A.2.** Si dice che la SDE con coefficienti $x_0, b, \sigma$ é risolubile in senso debole se esiste almeno un moto browniano rispetto a cui la SDE ammette soluzione.

Si dice che la SDE con coefficienti $x_0, b, \sigma$ é risolubile in senso forte se per ogni moto browniano $W$ fissato, esiste soluzione relativa a $W$.

**Definizione A.3.** Per una SDE con coefficienti $x_0, b, \sigma$ si ha unicitá della soluzione

- in senso debole se due soluzioni hanno la stessa legge cioé sono processi equivalenti;
- in senso forte se due soluzioni relative al medesimo moto browniano sono insistinguibili.

**Definizione A.4.** La SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad\qquad X_0 = x_0$$

verifica le *ipotesi standard* se

i. $x_0 \in L^2(\Omega, P)$ ed é $\mathcal{F}_0$-misurabile;

ii. $b, \sigma$ sono localmente lipschitziane e continue in $x$ uniformemente rispetto a $t$ cioé per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $K_n$ tale che

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K_n|x-y|^2$$

per ogni $|x|, |y| \leq n$ e $t \in [0, T]$;

iii. $b, \sigma$ hanno crescita lineare in x, cioé

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1 + |x|^2) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^N, t \in [0,T]$$

con $K$ costante positiva.

**Teorema A.0.14** (Unicitá)**.** *Se valgono le condizioni standard i. e ii. allora la soluzione della SDE*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad\qquad X_0 = x_0$$

*é unica cioé se si hanno due soluzioni forti queste sono indistinguibili.*

**Teorema A.0.15** (Esistenza)**.** *Se valgono le ipotesi standard, la SDE*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \qquad\qquad X_0 = x_0$$

*ha soluzione forte nello spazio* $\mathcal{A}_c$ [2]*.*

[2] $\mathcal{A}_c$ é lo spazio dei processi $(X_t)_{t\in[0,T]}$ tali che

$$[[X]]_T^2 := E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty$$

Si ha che $(\mathcal{A}_c, [[.]]_T)$ é uno spazio semi-normato completo.

# Bibliografia


[1] PASCUCCI A., *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer- Verlag Italia, Milano, 2011

[2] CARCIOLA A., PASCUCCI A., POLIDORO S., *Harnack inequality and no-arbitrage bounds for self-financing portfolios*, 49 (2009), 15-27.

[3] CORON J.M., *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society (AMS), 2007

[4] GRIMMER R.C., *Resolvent operators for integral equations in a Banach space*, Transactions of the American Mathematical Society, 1982, pp. 333-349.

[5] LEE E.B., MARKUS L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1967

[6] LI P., YAU S.T., *On the parabolic kernel of Schrödinger operator*, Acta Math., 156 (1986), pp.153-201.

[7] AUCHMUTY G., BAO D., *Harnack-type inequalities for evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1994, pp. 117-129.

[8] CAO H.D., YAU S.T. *Gradient estimates, Harnack inequalities and estimates for heat kernels of the sum of squares of vector fields*, Math. Z., 1992, pp. 485-504.

[9] PASCUCCI A., *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer-Verlag, Milano, 2008.

# Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Andrea Pascucci per la disponibilitá e cortesia dimostrata, nonché per l'aiuto fornito nella stesura della presente tesi.