Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

ALGEBRE DI LIE E GRUPPI RISOLUBILI E NILPOTENTI: Un parallelismo

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.mo Prof.
FABRIZIO CASELLI

Presentata da:
JACOPO PASINI

III Sessione
Anno Accademico 2014/2015

Introduzione

Lo studio delle algebre di Lie nasce a cavallo tra il 19° e il 20° secolo discendendo direttamente dalla trattazione dei *gruppi di Lie* il cui nome è dedicato al matematico norvegese Sophus Lie. Vennero sviluppate poi dal tedesco Hermann Weyl il quale utilizzò per la prima volta nel 1930 il termine attuale di algebra di Lie. Come sarà mostrato in dettaglio nella prima sezione, esse hanno la struttura di spazio vettoriale dotato di una operazione non associativa chiamata *parentesi di Lie* o semplicemente *parentesi*. Il seguente elaborato, oltre ad introdurre questa struttura matematica, nasce con lo scopo di studiare il parallelismo tra il comportamenteo delle algebre di Lie e dei gruppi, in particolare in relazione alle proprietà di risolubilità e nilpotenza. Infatti, nonostante la trattazione di algebre di Lie e gruppi risolubili e nilpotenti viene di solito eseguita separatamente, una notevole quantità di risultati combacia in maniera parallela tra di essi; qui ci si pone l'obiettivo di notare questi parallelismi e accostare tutte le definizioni e risultati simili l'uno di seguito all'altro.

Il primo capitolo sarà dedicato interamente alle algebre di Lie; verranno date tutte le definizioni e nozioni preliminari necessarie per poter essere in grado di sostenere in seguito un confronto con la struttura (già conosciuta) di gruppo.
Nel secondo capitolo si studierà la risolubilità, prima per algebre di Lie, poi per gruppi, mantenendo il più possibile uniformità nella stesura di definizioni e proprietà. Il fulcro del capitolo sarà delineato dall'ultima sezione in

cui vengono accostati due importanti teoremi, tra cui il *Teorema di Lie*, i quali caratterizzeranno algebre di Lie lineari e gruppi finiti, sotto l'aspetto di risolubilità, rispettivamente.
Il terzo ed ultimo capitolo è dedicato alla nilpotenza, procedendo alla stessa maniera, descrivendo dapprima le algebre di Lie ed i gruppi subito dopo. Anche qui si concluderà con i risultati centrali; è vista infatti un'importante equivalenza tra la nilpotenza di un'algebra di Lie di dimensione finita (rispettivamente, un gruppo finito) e proprietà riguardanti ideali (rispettivamente sottogruppi normali).

Indice

Capitolo 1

Algebre di Lie

Di seguito sono raccolte le definizioni e le proprietà principali circa le algebre di Lie, le quali saranno poi necessarie per la comprensione dei capitoli seguenti per le nozioni di algebre di Lie risolubili e nilpotenti.
Fin da ora verrà indicato con F un campo (commutativo) arbitrario, se non specificato diversamente.

1.1 La nozione di algebra di Lie

Le algebre di Lie nascono spontaneamente come spazi vettoriali di trasformazioni lineari dotati di una nuova operazione che generalmente non è nè commutativa nè associativa che denotiamo con $[xy] = [x, y]$.

Definizione 1.1. Sia L un $F-$spazio vettoriale con un'operazione
$L \times L \to L$, $(x, y) \mapsto [xy]$. L'elemento $[xy]$ viene chiamato **parentesi** o **commutatore** di x e y. L è chiamata **Algebra di Lie** su F se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

($L1$) L'operazione *parentesi* è bilineare
($L2$) $[xx] = 0 \qquad \forall x$ in L
($L3$) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0 \quad \forall x, y, z \in L$

L'assioma ($L3$) è chiamato **identità di Jacobi**.

Osservazione 1. È importante notare che $(L1)$ e $(L2)$ implicano l'*anticommutatività* dell'operazione parentesi.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} 0 = [x+y, x+y] =& [x, x+y] + [y, x+y] \\ =& [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] \\ =& [x,y] + [y,x] = 0 \end{aligned}$$

Per cui $[xy] = -[yx]$. □

Definizione 1.2. Sia K un sottospazio di L. K è una **sottoalgebra** (di Lie) di L se $[xy] \in K, \quad \forall x, y \in K$. In particolare, K è un'algebra di Lie, provvista della relativa operazione ereditata.

Osservazione 2. Si nota che ogni elemento $x \neq 0$ in L definisce una sottoalgebra unidimensionale munita di moltiplicazione banale, per $(L2)$.

Definizione 1.3. Siano H, K sottoalgebre di L. Denotiamo con $[H, K]$ il sottospazio di L generato da tutte le parentesi del tipo $[x, y], \ x \in H, \ y \in K$.

1.2 Algebre di Lie lineari

Si definisce ora un primo esempio pratico di algebra di Lie il quale verrà utilizzato più volte nel corso di questa tesi, grazie alla praticità con cui si possono eseguire i calcoli con l'operatore *parentesi* dei suoi elementi. Si tratterà di algebre di Lie composte da matrici $n \times n$ le quali verranno studiate tramite l'utilizzo della base canonica di matrici.

Se V è un F-spazio vettoriale finito, viene denotato con $End(V)$ l'insieme delle trasformazioni lineari $V \longrightarrow V$. Come F-spazio vettoriale, $End(V)$ ha dimensione n^2 (se $n = \dim V$), ed è un anello rispetto all'operazione prodotto usuale. Viene definita ora su $End(V)$ una nuova operazione *parentesi* (di x e y) $[x, y] = xy - yx$. A questo punto ci si domanda se sono verificati i 3

assiomi: $(L1)$ e $(L2)$ sono immediati, $(L3)$ richiede solo qualche breve calcolo. Con questa nuova operazione quindi $End(V)$ diventa un'algebra di Lie su F e per distinguere questa nuova struttura di algebra da quella associativa precedente, la si denota con $\mathfrak{gl}(V)$ e prende il nome di **algebra di Lie lineare generale**.
Ogni sottoalgebra di $\mathfrak{gl}(V)$ viene chiamata **algebra di Lie lineare**.
A questo punto, fissata una base di V, si può pensare a $End\ V$ come allo spazio di matrici $n \times n$ su F, denotandolo con $\mathfrak{gl}(n, F)$. Questa procedura è chiaramente innocua e può essere molto conveniente per una maggiore semplicità nei calcoli. Per esempio, è sufficiente scrivere la tabella di moltiplicazione di $\mathfrak{gl}(V)$ secondo la base standard di matrici $\{e_{ij}\},\ i, j = 1, \dots, n$ (e_{ij} è la matrice $n \times n$ che ha 1 in posizione (i, j) e 0 altrove). Ricordando che $e_{ij}\, e_{kl} = \delta_{jk}\, e_{il}$, segue che:

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}\, e_{il} - \delta_{li}\, e_{kj} \tag{1.1}$$

1.2.1 Alcune algebre di Lie di matrici

Portiamo ora qualche esempio di sottoalgebre di $\mathfrak{gl}(n, F)$ che ci serviranno nei prossimi capitoli.

Definizione 1.4.

- Con $\mathbf{t}(n, F)$ si denota l'insieme delle **matrici triangolari superiori**, ossia (a_{ij}) tale che $a_{ij} = 0$ se $i > j$.
- Con $\mathbf{n}(n, F)$ si denota l'insieme delle **matrici triangolari strettamente superiori**, ossia (a_{ij}) tale che $a_{ij} = 0$ se $i \geq j$.
- Con $\mathbf{d}(n, F)$ si indica l'insieme delle **matrici diagonali**.

Risulta banale che ciascuna di queste algebre di Lie sia chiusa rispetto all'operazione *parentesi*.

Osservazione 3. Si ha $[\mathbf{t}(n,F),\mathbf{t}(n,F)] = \mathbf{n}(n,F)$.
Infatti, siccome $[\mathbf{n}(n,F),\mathbf{d}(n,F)] = [\mathbf{d}(n,F),\mathbf{n}(n,F)] = \mathbf{n}(n,F)$ e siccome $\mathbf{t}(n,F) = \mathbf{d}(n,F) \oplus \mathbf{n}(n,F)$, dove $\oplus$ corrisponde all'usuale somma diretta di spazi vettoriali, si ha:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}(n,F),\mathbf{t}(n,F)] &= [\mathbf{d} \oplus \mathbf{n}, \mathbf{d} \oplus \mathbf{n}] \\
&= [\mathbf{d},\mathbf{d}] \oplus [\mathbf{d},\mathbf{n}] \oplus [\mathbf{n},\mathbf{d}] \oplus [\mathbf{n},\mathbf{n}] \\
&= [\mathbf{d},\mathbf{n}] \oplus [\mathbf{n},\mathbf{d}] \\
&= \mathbf{n}(n,F)
\end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato le notazioni abbreviate $\mathbf{n} := \mathbf{n}(n,F)$, $\mathbf{d} := \mathbf{d}(n,F)$ e la *Definizione 1.3* per la *parentesi* di algebre di Lie.

1.3 Ideali, centro e normalizzante

In questa sezione oltre che a definire alcuni elementi necessari per lo studio delle algebre di Lie, vengono evidenziati i primi parallelismi con la teoria dei gruppi che, come vedremo, sorgeranno spontanei.

Definizione 1.5. Un sottospazio I di una algebra di Lie L è detto **ideale** di L se $\forall x \in L$, $\forall y \in I$, si ha $[xy] \in I$. Di conseguenza, vale anche $[yx] \in I$, per via dell'anticommutatività.

L stesso e 0 (il sottospazio contenente solamente il vettore nullo) sono gli ideali banali di L.
Si noti fin da ora che gli ideali nelle algebre di Lie saranno il corrispettivo dei sottogruppi normali in teoria dei gruppi.

Proposizione 1.3.1. *Siano I, J ideali di L. Allora $I + J = \{x + y \mid x \in I,\ y \in J\}$ è un ideale. Inoltre, anche $[I, J]$ è un ideale.*

Definizione 1.6. Con $Z(L)$ viene denotato il **centro** di L, ossia l'insieme degli elementi $z \in L$ tali per cui $[xz] = 0 \quad \forall x \in L$. Si tratta, nel caso lineare, dell'insieme degli elementi in L che commutano con tutti gli altri elementi di L.

Definizione 1.7. L'**algebra derivata** (di Lie) $L' := [LL]$ è costituita da tutte le combinazioni lineari di parentesi $[xy], \quad \forall x, y \in L$.

Osservazione 4. $Z(L)$ e L' sono ideali di L, la dimostrazione è banale.

Proposizione 1.3.2. *Sia L un'algebra di Lie. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *L è abeliana*

(ii) $Z(L) = L$

(iii) $[LL] = 0$

Definizione 1.8. L viene detta algebra di Lie **semplice** se $[LL] \neq 0$ e se non ha ideali propri, (ossia ideali diversi da quelli banali L e 0).
Segue quindi ovviamente che per un'algebra di Lie semplice si ha $Z(L) = 0$ e $[LL] = L$.

Nel caso in cui L non sia semplice (e non unidimensionale), è possibile considerare un ideale proprio I (ossia tale che $0 \subsetneq I \subsetneq L$) e costruire quindi un'algebra di Lie di dimensione inferiore: l'**algebra quoziente** L/I.
La sua costruzione è formalmente la stessa di un anello quoziente: come spazio vettoriale, L/I è semplicemente lo spazio quoziente, mentre la sua operazione (di Lie) è definita da $[x + I, y + I] = [xy] + I$. Questa è ben definita; infatti siano $x, x', y, y' \in L$ tali che $x + I = x' + I$ e $y + I = y' + I$. Si ha $x' = x + u$ e $y' = y + v$, per $u, v \in I$ e quindi $[x', y'] = [xy] + ([xv] + [uy] + [uv])$, dunque $[x', y'] + I = [xy] + I$ siccome tutti i termini nella parentesi appartengono ad I.

Definizione 1.9. Sia K una sottoalgebra (o semplicemente un sottospazio) di L. Il **normalizzante** di K in L è *la più grande sottoalgebra di L che contiene K come ideale* ed è definito da $N_L(K) = \{x \in L \mid [xK] \subseteq K\}$. Per l'identità di Jacobi ($L3$) $N_L(K)$ è una sottoalgebra di L.
Se $K = N_L(K)$ allora K viene detto **autonormalizzante**.

Definizione 1.10. Sia X un sottoinsieme di L. Il **centralizzante** di X è definito da $C_L(X) = \{x \in L \mid [xX] = 0\}$. Anche il centralizzante è una sottoalgebra di L per l'identità di Jacobi.
Per esempio, si ha $C_L(L) = Z(L)$

1.3.1 Parallelismi con teoria dei gruppi

Viene innanzitutto definito il *commutatore* di due elementi in un gruppo G, il quale sarà utile in seguito:

Definizione 1.11. Chiamiamo **commutatore** di $a, b \in G$ l'elemento $[ab] = a^{-1}b^{-1}ab$.

Ora ci si può concentrare sui primi ovvi parallelismi tra le definizioni date riguardanti le algebre di Lie e le equivalenti nozioni per i gruppi, notando come le notazioni, i nomi e i concetti siano esattamente gli stessi. Infatti sia dato un generico gruppo G:

- Il **centro** di G è definito da $\mathbf{Z}(G) = \{x \in G \mid xy = yx,\ \forall y \in G\} = \{x \in G \mid [xy] = 1,\ \ \forall y \in G\}$, ossia è *l'insieme degli elementi $x \in G$ che commutano con ogni elemento di G.* Si ricorda che il parallelismo con le algebre di Lie si ha solamente nel caso di algebre di Lie lineari.

- $G' = [GG] = \langle [xy] \mid x, y \in G \rangle$ è il **sottogruppo derivato** di G, ossia il *sottogruppo generato da tutti i commutatori tra gli elementi di G.*

- Il **normalizzante** in G di un sottogruppo H è a sua volta un sottogruppo di G definito come $\mathbf{N}_G(H) = \{x \in G \mid x^{-1}Hx = H\}$ e può essere espresso a parole come il *sottogruppo più grande di G contenente H come sottogruppo normale.* Se $x \in \mathbf{N}_G(H)$ diciamo che *x normalizza H*. Nota: H è normale in $G \iff \mathbf{N}_G(H) = G$.

- Il **centralizzante** in G di un sottogruppo H è definito da $\mathbf{C}_G(H) = \{x \in G \mid xh = hx,\ \forall h \in H\}$.

1.4 Rappresentazioni aggiunte

Vediamo ora un tipo di endomorfismo che sarà necessario per lo studio della nilpotenza delle algebre di Lie: per $x \in L$ poniamo

$$\begin{aligned} ad_x :& L \longrightarrow L \\ & y \longmapsto [xy] \qquad (\forall y \in L) \end{aligned}$$

Osservazione 5. Può accadere di avere $ad_x = 0$ anche se $x \neq 0$, come nel caso di algebre di Lie unidimensionali.

Definizione 1.12. Definiamo infine la **rappresentazione aggiunta** di L: consiste semplicemente in una mappa che associa ad ogni $x \in L$ la sua relativa ad_x:

$$\begin{aligned} ad : L &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\longmapsto ad_x \end{aligned}$$

1.5 Omomorfismi

In questa sezione, dopo aver dato la definizione di omomorfismo di algebre di Lie, verranno enunciati i principali risultati relativi, notando inevitabilmente come essi combacino perfettamente con quelli relativi ad omomorfismi di gruppi.

Definizione 1.13. Sia $\phi : L \longrightarrow L'$ una trasformazione lineare, L, L' algebre di Lie su F. ϕ è un **omomorfismo** di algebre di Lie se $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)] \quad \forall x, y \in L$. Inoltre, un omomorfismo ϕ può essere classificato come:

- **Monomorfismo** se $Ker(\phi) = 0$, ossia se è una trasformazione iniettiva.
- **Epimorfismo** se $Im(\phi) = L'$, ossia se è una trasformazione suriettiva.
- **Isomorfismo** se valgono entrambe le precedenti, ossia se è una trasformazione biettiva.

Parallelismi

Si denota ora con G un generico gruppo, con L una generica algebra di Lie, con $\phi : L \longrightarrow L'$ un omomorfismo di algebre di Lie e con $\gamma : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi.

- Si osserva che il $Ker(\phi)$ *è un ideale di* L: infatti $\phi(x) = 0$ implica che $\phi([xy]) = [\phi(x)\phi(y)] = 0 \quad \forall y \in L$, quindi se $x \in Ker(\phi)$, allora $[xy] \in Ker(\phi)$. Rispettivamente, $Ker(\gamma) \trianglelefteq G$.

- Mentre $Im(\phi)$ è una sottoalgebra di L, $Im(\gamma)$ è un sottogruppo di G'.

- Sia $I \subseteq L$ un ideale. La **proiezione canonica** è definita da:

$$\begin{aligned} \pi : L &\longrightarrow L/I \\ x &\longmapsto x + I \end{aligned}$$

Ora verrà enunciato qualche teorema di omomorfismi per algebre di Lie e relativi quozienti di ideali, i quali valgono tutti per gruppi e quozienti di sottogruppi normali.

Proposizione 1.5.1. *(a) $L/Ker(\phi) \cong Im(\phi)$. Se I è un ideale qualunque di L incluso in nel $Ker(\phi)$, allora esiste un unico omomorfismo $\psi : L/I \longrightarrow L'$ tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

(b) Siano I, J ideali di L tali che $I \subseteq J$, allora J/I è un ideale di L/I e $(L/I)/(J/I)$ è isomorfo a L/J.

(c) Siano I, J ideali di L, allora è presente un isomorfismo naturale tra $(I + J)/J$ e $I/(I \cap J)$.

Osservazione 6. Ci si domanda: qual è il Ker di ad? È noto che consiste in tutti gli elementi $x \in L$ tali che $ad_x = 0$, ossia tali che $[xy] = 0 \quad \forall y \in L$. Dunque $Ker(ad)$ non è altro che il *centro* $Z(L)$ e un'interessante conseguenza è che se L è *semplice* allora $Ker(ad) = Z(L) = 0$ e quindi ad diventa un monomorfismo. Quindi ogni algebra di Lie semplice è isomorfa ad un'algebra di Lie lineare.

Capitolo 2

Risolubilità: algebre di Lie e gruppi a confronto

Nel capitolo precedente sono stati elencati tutti gli strumenti necessari per una conoscenza preliminare delle algebre di Lie. Ora ci si dedica a quello che vuole essere il fulcro di questa tesi, ossia una discussione sulla *risolubilità* (e nel prossimo capitolo *nilpotenza*) delle algebre di Lie e dei gruppi rispettivamente, ed in particolare alle evidenti similitudini tra i comportamenti di essi.

2.1 Algebre di Lie risolubili

Definizione 2.1. In un'algebra di Lie L:

- La **serie derivata** è una serie decrescente di ideali definita induttivamente da:
$$\begin{cases} L^{(0)} = L \\ L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \qquad \forall i \end{cases} \tag{2.1}$$
dove abbiamo per $i = 1$: $L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}] = [L, L]$ che è esattamente l'*algebra derivata* di L, secondo la *definizione 1.6*.

- Una **serie normale a quozienti abeliani** è una serie decrescente di sottoalgebre $\{I_i\}$:

$$L = I_0 \supseteq \cdots \supseteq I_i \supseteq \cdots \supseteq I_n = 0$$

per qualche n, tale per cui ogni I_i è un ideale in I_{i-1} e i quozienti I_i/I_{i+1} sono abeliani.

Proposizione 2.1.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) Esiste un n per cui nella serie derivata di L vale $L^{(n)} = 0$.

(ii) L possiede una serie normale a quozienti abeliani.

Definizione 2.2. Se L soddisfa una delle due proprietà precedenti, viene detta **risolubile** e il più piccolo intero n per cui vale $L^{(n)} = 0$ viene detto **lunghezza derivata** di L.

Per la dimostrazione della proposizione precedente ci si serve del seguente lemma (valido anche per un gruppo ed un sottogruppo normale):

Lemma 2.1.2. *Sia I un ideale di L.*

$$L/I \text{ è abeliano} \Leftrightarrow L' \subseteq I. \tag{2.2}$$

Dimostrazione proprosizione 2.1.1. L'implicazione $(i) \implies (ii)$ è banale: ogni $L^{(i)}$ è un ideale in $L^{(i-1)}$ $\forall i$ essendone la sua algebra derivata, e per il *lemma 2.1.2* $L^{(i-1)}/L^{(i)}$ è abeliano.
$(ii) \implies (i)$: Serve dimostrare che $L^{(i)} \subseteq I_i \quad \forall i$, dunque si otterrà $L^{(n)} \subseteq I_n = 0$. Per induzione: $L' \subseteq I_1$ sempre per il lemma precedente, siccome L/I_1 è abeliano per definizione. Supponiamo $L^{(i)} \subseteq I_i$. I_i/I_{i+1} è abeliana e applicando ancora una volta il lemma si ha $(I_i)' = [I_i, I_i] \subseteq I_{i+1}$. Dunque, $L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}] \subseteq [I_i, I_i] \subseteq I_{i+1}$. □

Osservazione 7. Per la *Proposizione 1.2.2* se L è abeliana si ha $[LL] = 0$, cioè $L^{(n)} = 0$ per $n = 1$ quindi L è risolubile. Se invece L è semplice, si ha $[LL] = L$ quindi $L^{(i)} = L^{(i-1)} \quad \forall i$ quindi è ovviamente *non* risolubile.

Proposizione 2.1.3. *L'algebra di Lie di matrici triangolari superiori* $\mathbf{t}(n, F)$ *introdotta nella Definizione 1.11 è risolubile.*

Dimostrazione. È gia stato visto nell'*Osservazione 4*, $L^{(1)} = [LL] = \mathbf{n}(n, F)$, dove $L := \mathbf{t}(n, F)$, e $\mathbf{n}(n, F)$ è l'algebra delle matrici triangolari strettamente superiori. A questo punto è sufficiente controllare se $\mathbf{n}(n, F)$ è risolubile, e quindi studiare $[\mathbf{n}, \mathbf{n}]$. Utilizzando la base canonica di matrici (e_{ij}) con $i \leq j$, viene definito il *livello* della matrice e_{ij} come $j - i$. Si ricorda la formula (1.1) per le *parentesi*, e supponiamo $i < j,\ k < l$ e, senza perdere generalità, $i \neq l$. Allora

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} e_{il} & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Qui entra in gioco il *livello*, infatti si nota che $(j - i) + (l - k) = l - i$ nel caso in cui $j = k$, quindi la somma dei livelli di due matrici e_{ij}, e_{kl} è uguale al livello della matrice parentesi e_{il}, se $j = k$. Ora, siccome $L^{(1)} = \mathbf{n}(n, F)$ è generato da matrici con livello ≥ 1, $L^{(2)}$ sarà generato di conseguenza da matrici con livello ≥ 2, $L^{(i)}$ da matrici con livello $\geq 2^{i-1}$, e così via. È quindi chiaro che si ha $L^{(i)} = 0$ non appena $2^{i-1} > n - 1$. □

Vengono esposti ora alcuni risultati di base riguardanti algebre di Lie e ideali risolubili.

Proposizione 2.1.4. *(a) Sia L risolubile. Allora lo sono tutte le sue sottoalgebre e immagini tramite epimorfismi.*

(b) Sia I un ideale risolubile di L. Allora, se L/I è risolubile, anche L stessa lo è.

(c) Se I, J sono ideali risolubili di L, I + J è pure risolubile.

Dimostrazione. (a) Se K è una sottoalgebra di L vale sempre

$$K^{(i)} \subseteq L^{(i)} \ \ \forall i \tag{2.3}$$

quindi data la risolubilità di L si ha $K^{(n)} \subseteq L^{(n)} = 0$. Similarmente, se $\psi : L \longrightarrow M$ è un epimorfismo, con una semplice induzione su i si dimostra che $\psi(L^{(i)}) = M^{(i)}$.

(b) Sia n tale che $(L/I)^{(n)} = 0$. Applicando la relazione vista in *(a)* alla proiezione canonica $\pi : L \longrightarrow L/I$, si ottiene $\pi(L^{(n)}) = (L/I)^{(n)} = 0$, quindi $L^{(n)} \subseteq I = Ker(\pi)$. Ora, siccome I è risolubile per ipotesi, $I^{(m)} = 0$ per qualche m. Infine, utilizzando la (2.3) ed il fatto che $(L^{(n)})^{(m)} = L^{(n+m)}$, si ha $L^{(n+m)} \subseteq I^{(m)} = 0$, cioè $L^{(n+m)} = 0$.

(c) Si considera il quoziente $I/(I \cap J)$, è risolubile per *(a)* essendo immagine di I (risolubile) tramite la proiezione π relativa. Ora per la *Proposizione 1.5.1 (c)*, si ha un isomorfismo $I/(I \cap J) \cong (I + J)/J$ e sempre per la *(a)* $(I + J)/J$ è risolubile a sua volta. Si conclude applicando la *(b)* con J, $(I + J)/J$ risolubili ottenendo così $I + J$ risolubile.

□

Definizione 2.3. Con $Rad(L)$ si denota il **radicale** di L, cioè l'ideale massimale risolubile contenuto in L. Esso esiste sempre (0 è sempre risolubile in L), ed è unico: infatti se I è un qualunque ideale risolubile di L, per la *Proposizione 2.1.4 (c)* vale $Rad(L) + I$ risolubile, ma essendo $Rad(L)$ massimale si ha $Rad(L) + I = Rad(L)$ e quindi $I \subseteq Rad(L)$.
Se $Rad(L) = 0$, L viene detta **semisemplice**.

Osservazione 8. Un'algebra di Lie semplice è semisemplice: L non ha ideali propri, e L semplice implica L non risolubile.

2.2 Gruppi risolubili

Vengono ora enunciate per i gruppi le definizione di serie derivata, serie normale a quozienti abeliani, gruppo risolubile e lunghezza derivata in maniera del tutto simile a quanto visto nella sezione precedente per le algebre di Lie.

Si estende innanzitutto la *definizione 1.10* di commutatore $[x, y]$ di elementi in un gruppo con: $[H, K] = \langle [xy] \mid x \in H, y \in K \rangle$, per H, K sottogruppi di un gruppo G.

Definizione 2.4. In un gruppo G:

- La **serie derivata** è definita induttivamente da:

$$\begin{cases} G^{(0)} = G \\ G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \qquad \forall i \end{cases} \tag{2.4}$$

  Anche in questo caso si ottiene per $i = 1$ il *gruppo derivato* $G' = G^{(1)} = [G, G]$.

- Con **serie normale a quozienti abeliani** si intende una catena di sottogruppi $\{H_i\}$

$$G = H_0 \supseteq \cdots \supseteq H_i \supseteq \cdots \supseteq H_n = \{1\}$$

  per qualche n, tale che $H_i \trianglelefteq H_{i-1}$ e H_i/H_{i+1} sono abeliani $\forall i$

Proposizione 2.2.1. *In un gruppo G le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) Esiste un n per cui nella serie derivata di G vale $G^n = \{1\}$

(ii) G ha una serie normale a quozienti abeliani.

Definizione 2.5. Se un gruppo soddisfa una delle due proprietà precedenti viene detto **risolubile** e il più piccolo intero m per cui vale $G^{(m)} = \{1\}$ viene detto **lunghezza derivata** di G.

Per dimostrare la proposizione precedente sono necessari più lemmi, uno dei quali è l'esatto analogo del *lemma 2.1.2*:

Lemma 2.2.2. *Sia $N \trianglelefteq G$:*

$$G/N \text{ è abeliano} \Leftrightarrow G' \subseteq N. \tag{2.5}$$

Lemma 2.2.3. *Il sottogruppo derivato G' è caratteristico in G, cioè è stabilizzato da ogni automorfismo di G.*

Dimostrazione. Sia $\phi \in Aut(G)$, e $[gh] \in G'$. Allora vale

$$\phi([gh]) = \phi(ghg^{-1}h^{-1}) = \phi(g)\phi(h)\phi(g)^{-1}\phi(h)^{-1} = [\phi(g)\phi(h)] \in G'$$

. □

Ora si può osservare come l'implicazione $(i) \Longrightarrow (ii)$ della *prop. 2.2.1* sia immediata: siccome $G^{(i)}$ è il derivato di $G^{(i-1)}$, di conseguenza $G^{(i)} \trianglelefteq G^{(i-1)}$ (*lemma 2.2.3*) e quindi ogni quoziente tra due elementi successivi nella catena $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ è abeliano (*lemma 2.2.2*).
Per l'implicazione inversa è necessario il seguente

Lemma 2.2.4. *Sia $\{H_i\}$ una serie normale a quozienti abeliani con m elementi, ossia $H_m = \{1\}$. Allora $G^{(i)} \subseteq H_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$. In altre parole, la serie derivata arriva a $\{1\}$ in al più m passi.*

Il lemma di cui sopra afferma che se un gruppo possiede una serie normale a quozienti abeliani allora possiede anche la serie derivata, ovvero $(i) \Longleftarrow (ii)$ nel *teorema 2.2.1.*
Si conclude così la definizione di gruppo risolubile che come è evidente ricalca perfettamente quella di algebra di Lie risolubile. I seguenti enunciati si dimostreranno pure paralleli a risultati già visti sulle algebre di Lie, precisamente nella *proposizione 2.1.4.*

Proposizione 2.2.5. *(a) Sia G un gruppo risolubile con lunghezza derivata m. Allora i suoi sottogruppi e quozienti lo sono, con lunghezza derivata $\leq m$.*

(b) Sia N un sottogruppo normale in G, risolubile. Se G/N è risolubile, allora anche G lo è.

(c) Siano $H, K \trianglelefteq G$ sottogruppi risolubili di G. Allora il gruppo HK è risolubile.

Dimostrazione. (a) Se H è un sottogruppo di G vale $H^{(i)} \subseteq G^{(i)}$, quindi se $G^{(n)} = \{1\}$ per un certo n allora anche $H^{(n)} = \{1\}$.
Se $N \trianglelefteq G$ si ha per induzione $(G/N)^{(i)} = (G^{(i)}N)/N$. Se G è risolubile con lunghezza derivata m, si ha quindi $(G^{(m)}N)/N = (\{1\}N)/N = N/N = N$.

(b) Siano m, n tali che $(G/N)^{(m)} = N$ e $N^{(n)} = \{1\}$. Per la parte *(a)* si ha $N = (G/N)^{(m)} = (G^{(m)}N)/N$, quindi deve valere $G^{(m)} \subseteq N$. Allora, $G^{(m+n)} = (G^{(m)})^{(n)} \subseteq N^{(n)} = \{1\}$.

(c) Si considera $H/(H \cap K)$, il quale è un quoziente di H quindi risolubile per la *(a)*. Per la *Proposizione 1.5.1 (a)* applicata a sottogruppi normali si ha $H/(H \cap K) \cong HK/K$. Quindi HK/K è risolubile essendo immagine tramite isomorfismo di un gruppo quoziente risolubile, e per la *(b)* HK stesso è pure risolubile.

□

2.3 Teorema di Lie

Dopo aver introdotto la risolubilità e le sue relative proprietà, si vede ora un risultato più profondo che fa da tramite tra il mondo delle algebre di Lie e quello dei gruppi, il quale fa uso dei concetti di *bandiera* e di gruppo *abeliano elementare* che vengono ora definiti.

Definizione 2.6. Sia V uno spazio vettoriale finito di dimensione n. Una **bandiera** di sottospazi vettoriali di V è una successione di sottospazi $\{V_i\}$

$$0 = V_0 \subseteq \cdots \subseteq V_i \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$$

tale che $dim V_i = i \ \ \forall i$, ossia ogni V_i ha codimensione 1 in V_{i+1}.

Definizione 2.7. Un gruppo **abeliano elementare** è un gruppo abeliano i cui elementi hanno tutti ordine p.

Definizione 2.8. In un gruppo G una serie normale (*Definizione 2.4*) tale per cui ogni H_i è normale in G (oltre che in H_{i-1} per definizione) è chiamata **serie invariante**. Una **serie principale** è una serie invariante in cui ogni H_i è massimale tra i sottogruppi normali in G contenuti in H_{i-1} e i quozienti H_{i-1}/H_i sono detti *quozienti principali.*

Definizione 2.9. Alla stessa maniera, in un'algebra di Lie L una serie normale (*Definizione 2.1*) in cui ogni I_i è un ideale in L (oltre che in I_{i-1} per definizione) è chiamata **serie invariante**. Una **serie principale** è una serie invariante in cui ogni I_i è massimale tra gli ideali di L contenuti in I_{i-1} e i quozienti I_{i-1}/I_i sono detti *quozienti principali.*

In seguito alle precedenti definizioni preliminari vengono ora enunciati i *Teoremi 2.3.1* e *2.3.3* per gruppi e per algebre di Lie, rispettivamente. Il parallelismo sarà però evidente non nei teoremi citati ma nei due corollari che seguiranno. Nel *Corollario 2.3.2* viene mostrata una caratterizzazione dei gruppi risolubili tramite gruppi quoziente abeliani elementari, mentre nel *Corollario 2.3.4*, si caratterizzeranno le algebre di Lie lineari risolubili tramite algebre quoziente di dimensione 1.

Teorema 2.3.1. *Sia G un gruppo risolubile, e N un suo sottogruppo normale minimale. Allora N è un p-gruppo abeliano elementare.*

Dimostrazione. Per la *Proposizione 2.2.5 (a)*, N è risolubile e quindi $N' \subsetneq N$. Siccome il sottogruppo derivato N' è caratteristico in $N \lhd G$, si ha $N' \lhd G$ e quindi per la minimalità, $N = \{1\}$, perciò N è abeliano.
Ora, siccome N è finito, sia p un primo che divide l'ordine di N. Gli elementi di ordine p formano dunque un sottogruppo che essendo caratteristico e non identico, deve coincidere con N. Quindi N è un $p-gruppo$ abeliano elementare. $\square$

Corollario 2.3.2. *I quozienti principali di un gruppo risolubile sono dei p-gruppi abeliani elementari.*

Dimostrazione corollario 2.3.2. Per la massimalità di H_i in H_{i-1} nella serie principale di G e per $H_i \lhd G$, si ottiene che i quozienti principali H_{i-1}/H_i sono normali minimali in G/H_i. Dunque applicando il teorema precedente, se G è risolubile i quozienti principali sono dei gruppi abeliani elementari per ogni i. □

Viene enunciato ora il *Teorema di Lie* relativo alle algebre di Lie, la cui dimostrazione è qui omessa dato che il suo studio andrebbe al di là dello scopo di questa tesi. ([1], capitolo 4.1).

Teorema 2.3.3 (Teorema di Lie). *Si consideri un F-spazio vettoriale V tale che dim$V$=n, del quale F si richiede la chiusura algebrica e caratteristica 0. Sia L un sottoalgebra risolubile di $\mathfrak{gl}(V)$, allora esiste una base di V per la quale gli elementi di L sono delle matrici triangolari superiori (L stabilizza una bandiera in V).*

Corollario 2.3.4. *Sia L un'algebra di Lie risolubile. Allora esiste una serie principale di ideali di L i cui quozienti principali hanno dimensione 1.*

Dimostrazione corollario 2.3.4. Sia L una generica algebra di Lie risolubile. Si consideri $ad_L \subseteq \mathfrak{gl}(L)$, è una sottoalgebra lineare che soddisfa le ipotesi del Teorema di Lie, per cui stabilizza una bandiera di L:

$$0 = L_0 \subseteq \cdots \subseteq L_i \subseteq \cdots \subseteq L_n = L$$

Cioè $ad_L(L_i) \subseteq L_i \;\; \forall i$, perciò gli L_i sono ideali di L, indicando che la bandiera in questione è inoltre una serie principale di L, essendo ogni elemento massimale nel successivo avendo codimensione 1. □

Si può enunciare un corollario finale che permette di accostare ancora di più i precedenti *corollari 2.3.2* e *2.3.4* rielaborando il primo riguardante i gruppi. Si definisce innanzitutto la **serie di composizione** come la *serie normale* in cui ogni elemento è normale massimale (ideale massimale) nel precedente.

Corollario 2.3.5. *Un gruppo finito G risolubile ha una serie di composizione a quozienti di ordine primo. Per un algebra di Lie risolubile, il* Corollario 2.3.4 *fornisce una serie principale di ideali la quale è già una serie di composizione, con quozienti di ordine 1.*

Dimostrazione corollario 2.3.5. La serie di composizione richiede per ogni suo elemento la sola normalità massimale nell'elemento precedente, mentre nella serie principale è richiesta anche la normalità in G. Essendo quindi una condizione meno forte, si ottiene che la serie di composizione arricchisce quella principale aggiungendo altri elementi; ad esempio sia H_i/H_{i+1} un quoziente principale, è quindi un p-gruppo (*corollario 2.3.2*) e perciò isomorfo a $\mathbb{Z}_p^r$ per qualche r ottenendo:

$$\cdots \supseteq H_i \supseteq H_i^{(1)} \supseteq H_i^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq H_i^{(r-1)} \supseteq H_{i+1} \supseteq \dots$$

dove tutti gli elementi appartengono alla serie di composizione e quelli senza apice appartengono anche alla serie principale. Infine per la definizione di serie di composizione, i suoi quozienti $H_i^{(k)}/H_i^{(k+1)}$ sono isomorfi a $\mathbb{Z}_p$. $\square$

Capitolo 3

Nilpotenza: algebre di Lie e gruppi a confronto

Quest'ultimo capitolo verrà sviluppato similarmente al precedente, analizzando prima il concetto di algebre di Lie nilpotenti, includendo definizioni e principali risultati riguardanti gli ideali e questa volta anche il *centro* (*definizione 1.6*). Successivamente, verranno presentate le definizioni e i risultati analoghi per i gruppi e sottogruppi normali; dopodiché ci si dedicherà a paragonare aspetti più profondi legati alla nilpotenza di algebre di Lie e gruppi finiti, infatti verrà messo in luce un importante parallelismo tra algebre di Lie e gruppi nei *Teoremi 3.3.1* e *3.3.2*.

3.1 Algebre di Lie nilpotenti

Definizione 3.1. In un'algebra di Lie L la **serie centrale** è una successione decrescente di ideali definita induttivamente da:

$$\begin{cases} L^0 = L \\ L^i = [L^{i-1}, L] \end{cases} \tag{3.1}$$

Si nota che L^i è un ideale di L, e il nome serie centrale è dovuto al fatto che L^i/L^{i+1} è contenuto nel centro di L/L^{i+1}.

Definizione 3.2. Se $L^n = 0$ per qualche n, L viene detta **nilpotente**. Il più piccolo intero n per cui $L^n = 0$ è chiamato **classe di nilpotenza** di L.

È facilmente dimostrabile per induzione che $L^{(i)} \subseteq L^i$ per ogni i, ottenendo così una prima importante proprietà, che come vedremo sarà valida anche per i gruppi:

$$L \text{ è nilpotente} \Longrightarrow L \text{ è risolubile.} \tag{3.2}$$

Notiamo con un controesempio che non vale il contrario:

$$L \text{ è nilpotente} \not\Leftarrow L \text{ è risolubile.}$$

Infatti si consideri $L = \mathbf{t}(n, F)$, la quale è stata dimostrata essere risolubile (*Prop. 2.1.3*). È noto che $L' = \mathbf{n}(n, F)$ e anche che $L^2 = [L', L] = L'$, quindi $L^i = L' \ \ \forall i$ e non si potrà mai avere $L^n = 0$.

Osservazione 9. $L = \mathbf{n}(n, F)$ è invece nilpotente; richiamando la nozione di *livello* di una matrice usata nella *Dimostrazione 2.1.3*, L' è generato dalle matrici e_{ij} il cui livello è ≥ 2, L^i è generato dalle matrici con livello $\geq i + 1$, fino ad ottenere $L^k = 0$, per $k = n$.

Viene vista ora una definizione equivalente di algebra di Lie nilpotente, la quale fa uso degli endomorfismi ad_x:

Osservazione 10. Un'algebra di Lie L è nilpotente se esiste un n tale che $ad_{x_1} ad_{x_2} \dots ad_{x_n}(y) = 0$, $\forall x_1, \dots, x_n, y \in L$. In particolare, $(ad_x)^n = 0 \ \ \forall x \in L$.
Inoltre se L è un'algebra di Lie, $x \in L$ viene detto **ad-nilpotente** se $(ad_x)^n = 0$ per qualche n.

Si passa ora alla seguente proposizione nella quale sono raccolti alcuni importanti risultati su algebre di Lie risolubili, ideali e centro. (Si ricorda la notazione *Z(L)* per il centro di un'algebra di Lie L).

Proposizione 3.1.1. *Sia L un'algebra di Lie.*

(a) Se L è nilpotente di classe c, allora lo sono anche le sue sottoalgebre ed immagini omomorfe, di classe al più c.

(b) *Se L/Z(L) è nilpotente, allora lo è anche L stessa.*

(c) *Se L è nilpotente ed è diversa dall'algebra 0, allora Z(L)≠0.*

(d) *Se I,J sono ideali nilpotenti di L con classi di nilpotenza n e m rispettivamente, allora I+J è pure nilpotente, con classe al più $n + m$.*

Dimostrazione. (a) Analoga alla dimostrazione della *proposizione 2.1.4 (a).*

(b) Sia n tale che $(L/Z(L))^n = 0$. Applicando la relazione $\psi(L^i) = M^i$, con $\psi : L \longrightarrow M$ epimorfismo (vista in *prop. 2.1.4 (a)* per la serie derivata) alla proiezione canonica $\pi : L \longrightarrow L/Z(L)$, si ottiene $\pi(L^n) = (L/Z(L))^n = 0$, quindi $L^n \subseteq Ker(\pi) = Z(L)$. Allora $L^{n+1} = [L^n, L] \subseteq [Z(L), L] = 0$.

(c) Sia n la classe di nilpotenza di L. Allora $0 \neq L^{n-1} = Z(L)$, siccome $[L^{n-1}, L] = L^n = 0$.

(d) Per ipotesi $I^n = 0$ e $J^m = 0$, si pone $t := n + m$ e si definisce $I^{-1} = J^{-1} = L$. Siano $z_1, \dots z_{t+1} \in I + J$, cioè $z_i = x_i + y_i$ con $x_i \in I$ e $y_i \in J$.
Utilizzando la *Definizione 3.3*, si vuole ottenere $\alpha := ad_{z_1} \dots ad_{z_t}(z_{t+1}) = [z_1[z_2[\dots[z_t, z_{t+1}]\dots]]] = 0$. Calcolando la prima parentesi dei due elementi z_t, z_{t+1}, si mostra che $\beta := [z_t, z_{t+1}] = [x_t + y_t, x_{t+1} + y_{t+1}] = [x_t, x_{t+1}] + [x_t, y_{t+1}] + [y_t, x_{t+1}] + [y_t, y_{t+1}]$ cioè β è somma di elementi che appartengono ciascuno ad uno dei seguenti ideali: $I^1 \cap J^{-1}$, $I^0 \cap J^0$, $I^{-1} \cap J^1$, per la definizione di ideale. Per induzione si dimostra che all'i-esimo passo la parentesi $[z_{t-i+1}[z_{t-i+2}[\dots[\beta]\dots]]]$ è uguale alla somma di elementi appartenenti ognuno ad un ideale del tipo $I^h \cap J^k$ con $h + k = i - 1$. Applicando questo fatto ad α (cioè al t-esimo passo) si osserva che esso sarà uguale alla somma di elementi ciascuno in $I^k \cap J^{t-k-1}$, per $k = -1, 0, \dots, t$ i quali sono tutti nulli per l'ipotesi di nilpotenza di I, J.

□

3.2 Gruppi nilpotenti

Si enunciano ora i concetti di: serie centrale di gruppi, gruppo nilpotente, classe di nilpotenza parallelamente alla sezione precedente.

Definizione 3.3. In un gruppo G la **serie centrale** è una serie decrescente di sottogruppi normali in G definita induttivamente da:

$$\begin{cases} G^0 = G \\ G^i = [G^{i-1}, G] \end{cases} \tag{3.3}$$

Anche qui il termine centrale è dovuto da $G^i/G^{i+1} \subseteq \mathbf{Z}(G/G^{i+1})\ \ \forall i$.

Definizione 3.4. Se nella serie centrale $G^n = \{1\}$ per un certo n, G detto gruppo **nilpotente**. Il più piccolo intero n tale per cui $G^n = \{1\}$ è chiamato **classe di nilpotenza** di G.

Come già annunciato nella sezione precedente, anche per le serie derivate e centrali di gruppi si può dimostrare facilmente per induzione la (3.2):

$$G \text{ è nilpotente} \Longrightarrow G \text{ è risolubile}$$

Osservazione 11. Qualunque gruppo abeliano è nilpotente, con classe di nilpotenza $c \leq 1$. La stessa cosa vale per algebre di Lie abeliane.
La classe di nilpotenza di un gruppo (algebra di lie) può essere visto come una misura di quanto il gruppo (algebra di Lie) si discosti dall'essere abeliano.

Vengono enunciati e dimostrati ora i risultati riguardanti il centro $\mathbf{Z}(G)$, i gruppi e sottogruppi normali nilpotenti, ricalcanti alla perfezione la *proposizione 3.1.1*:

Proposizione 3.2.1. *Sia G un gruppo.*

(a) Se G è nilpotente di classe c allora i suoi sottogruppi e immagini omomorfe sono pure nilpotenti, di classe al più c.

(b) Se $G/\mathbf{Z}(G)$ è nilpotente, allora anche G lo è.

(c) Se G è nilpotente, $\mathbf{Z}(G) \neq \{1\}$.

(d) Siano H, K due sottogruppi normali in G e nilpotenti, di classe rispettivamente m e n. Allora il prodotto HK è normale e nilpotente, di classe al più m+n-1.

Dimostrazione. (a) Se H è un sottogruppo di G, vale sempre $H^i \subseteq G^i \ \ \forall i$, quindi se $G^c = \{1\}$ allora anche $H^c = \{1\}$.
Si mostra facilmente per induzione che se $\psi : G \longrightarrow M$ è un omomorfismo allora $\psi(G^i) = (M)^i$, quindi se $G^c = \{1\}$ allora $M^c = \{1\}$.

(b) Si veda la dimostrazione della proposizione 3.1.1 (b) per le algebre di Lie, applicandola al quoziente $G/\mathbf{Z}(G)$ e alla proiezione canonica $\pi : G \longrightarrow G/\mathbf{Z}(G)$.

(c) Sia n la classe di nilpotenza di G. Allora $\{1\} \neq G^{n-1} = Z(G)$, siccome $[G^{n-1}, G] = G^n = \{1\}$.

(d) Si utilizza la notazione $[H, K, L] := [[H, K], L]$ e la proprietà $[HK, L] = [H, L][K, L]$, se $H, K, L \trianglelefteq G$.
Possiamo supporre $G = HK$, quindi $G^i = [HK, \ldots, HK]$ e applicando più volte la proprietà sopra descritta si ottiene che G^i è uguale al prodotto di 2^i termini del tipo $A = [A_1, \ldots, A_i]$ con ciascuno degli A_k uguale a H o a K. Ora siccome H' è caratteristico in $H \lhd G$, si ottiene $H' \lhd G$, e quindi $[H', K] \subseteq H'$. Analogamente per K. Segue che se in A un numero l di elementi sono uguali ad H, si ottiene $A \subseteq H^l$ e allo stesso tempo $A \subseteq K^{i-l}$ quindi $A \subseteq H^l \cap K^{i-l}$. Se si pone $i = n+m-1$, si ha $H^l \cap K^{i-l} = \{1\}$ per ogni l.

□

3.3 Sottoalgebra di Frattini e sottogruppo di Frattini

Nella sezione precedente sono stati definiti algebre di Lie e gruppi risolubili con proprietà annesse.
Si giunge qui al fulcro dell'ultimo capitolo, ovvero, si evidenzia un'ulteriore parallelismo tra due importanti teoremi sulla nilpotenza, uno valido per un'algebra di Lie di dimensione finita L, l'altro per un gruppo finito G.
Vengono definiti innanzitutto il *sottogruppo di Frattini* di un gruppo e la corrispettiva *sottoalgebra di Frattini* di un algebra:

Definizione 3.5. Il **sottogruppo di Frattini** di un gruppo G è l'intersezione di tutti i suoi sottogruppi massimali, e viene denotato con $\Phi(G)$. Il sottogruppo di Frattini di un gruppo finito è sempre nilpotente ([2], Teorema 5.19).

Definizione 3.6. La **sottoalgebra di Frattini** di un'algebra di Lie L è definita come l'intersezione di tutti i suoi ideali massimali e viene denotata con $\Phi(L)$. La sottoalgebra di Frattini di un algebra di Lie è sempre nilpotente.

Con le precedenti definizioni, ci si può dedicare ora ai due teoremi preannunciati:

Teorema 3.3.1. *Le seguenti proprietà sono equivalenti in un'algebra di Lie di dimensione finita L:*

(i) *L è nilpotente.*

(ii) *Per ogni sottoalgebra H, $H \subsetneq N_L(H)$ ossia "i normalizzanti crescono".*

(iii) *Ogni sottoalgebra massimale è un ideale.*

(iv) $L' \subseteq \Phi(L)$

Teorema 3.3.2. *Le seguenti proprietà sono equivalenti in un gruppo finito G:*

(i) *G è nilpotente.*

(ii) *Per ogni sottogruppo K, $K \subsetneq \boldsymbol{N}_G(K)$ ossia "i normalizzanti crescono".*

(iii) *Ogni sottogruppo massimale è normale.*

(iv) $G' \subseteq \Phi(G)$

Come anticipato, è evidente il parallelismo tra i due teoremi. Vengono presentate ora le dimostrazioni relative.

Dimostrazione teorema 3.3.1. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Sia $H \subsetneq L$ una sottoalgebra. Se $H = L^i$ per qualche i, la tesi è vera siccome $N_L(L^i) = L \ \ \forall i$.
Se invece $H \neq L^i \ \ \forall i$, sia j un indice tale che $L^j \nsubseteq H$ ma $L^{j+1} \subset H$ (posso per la nilpotenza: $L^n = 0$). Vale quindi:

$$[L^j, H] \subset [L^j, L] = L^{j+1} \subset H \Longrightarrow [L^j, H] \subset H \tag{3.4}$$

Ora, $L^j + H$ è una sottoalgebra di L (L^j è un ideale e H una sottoalgebra di L) nella quale H è ideale: $[L^j + H, H] = ([L^j, H] + [H, H]) \subseteq H$ (3.4). Quindi, siccome $L^j \nsubseteq H$ per ipotesi, $H \nsubseteq L^j + H \subseteq N_L(H)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: È ovvia, sia infatti $M \subset L$ una sottoalgebra massimale. Per la (ii) e per la massimalità di M vale $M \subset N_L(M) = L$ e per la definizione di normalizzante, M è quindi un ideale di L.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Sono elencati qui i passaggi principali. Si considera dapprima il caso $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Utilizzando il *Teorema di Engel* e la relativa dimostrazione[1], se in un'algebra di Lie lineare L ogni sottoalgebra massimale è un ideale, per induzione si ottiene che esiste un vettore $v \neq 0$ in V tale che $L.v = 0$. Ora, rispetto ad una base adeguata, si ottiene $L \subseteq \mathbf{n}(n, F)$ e quindi L è nilpotente per l'*osservazione 9* e la *Proposizione 3.1.1 (a)*.
Nel caso in cui L sia invece un'algebra di Lie generica (non necessariamente

[1] [1], capitolo 3.3

lineare) ci si riconduce al caso precedente utlizzando la relativa rappresentazione aggiunta $ad(L) \longmapsto ad_L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$; infatti come visto in precedenza $Ker(ad) = Z(L)$, e si ha $ad_L = L/Z(L)$ nilpotente perchè è un'algebra di Lie lineare su cui vale la *(iii)*. Infine, per la *Proposizione 3.1.1 (b)*, L è nilpotente.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Sia A una sottoalgebra massimale di L, quindi A è un ideale di L per ipotesi. $|L/A| = 1$ per la massimalità di A, quindi il quoziente è abeliano e per la (2.2) vale $L' \subseteq A$.
Poiché ciò vale per tutti le sottoalgebre massimali, allora vale anche per la loro intersezione, la quale è esattamente la sottoalgebra di Frattini $\Phi(L)$.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$: Sia A una sottoalgebra massimale di L, per ipotesi $L' \subseteq \Phi(L) \subseteq A$. Quindi, A/L' è una sottoalgebra massimale di L/L' la quale è abeliana per la (2.2). Ma se L/L' è abeliana, tutte le sue sottoalgebre sono suoi ideali, quindi A/L è un ideale di L/L' e infine A è un ideale di L. □

Dimostrazione teorema 3.3.2. $(i) \Longrightarrow (ii)$: Sia $K \subsetneq G$ un sottogruppo. Se $K = G^i$ per qualche i, la tesi è vera siccome $\mathbf{N}_G(G^i) = G \ \ \forall i$.
Se invece $K \neq G^i \ \ \forall i$, sia j un indice tale che $G^j \nsubseteq K$ ma $G^{j+1} \subset K$ (posso per la nilpotenza di G). Allora

$$[G^j, K] \subset [G^j, G] = G^{j+1} \subset K \Longrightarrow [G^j, K] \subset K$$

Pertanto $K \lhd G^i \subseteq \mathbf{N}_G(K)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Si veda la stessa implicazione della dimostrazione del *teorema 3.3.1*.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Sia M un sottogruppo massimale, quindi normale per ipotesi. G/M ha ordine primo per la massimalità di M e per la (2.5) vale $G' \subseteq M$.

Poiché ciò vale per tutti i sottogruppi massimali, allora vale anche per la loro intersezione, la quale è esattamente il sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$.

$(iv) \implies (i)$: Vale che $G/\Phi(G)$ è nilpotente[2] e per la (2.5) se $G' \subseteq \Phi(G)$ allora $G/\Phi(G)$ è abeliano, quindi G è nilpotente. $\square$

[2] [2], Teorema 5.20. La dimostrazione fa uso dei sottogruppi p-sylow, la cui trattazione andrebbe al di là degli scopi di questa tesi.

Bibliografia

[1] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag (1972)

[2] A. Machì, Gruppi. Una introduzione a idee e metodi della Teoria dei Gruppi, Springer (2007)

[3] K. Erdmann and M. J. Wildon, Introduction to Lie Algebras, Springer (2000)

Ringraziamenti

Ringraziamenti.